

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи



СЛАДКОФФ Левка

**МНОГОПЕТЛЕВЫЕ РАСЧЕТЫ В ЗАДАЧАХ  
НЕЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ**

Специальность: 01.04.02 - теоретическая физика

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2009 г.

Работа выполнена на кафедре статистической физики физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук, профессор Аджемян Лоран Цолакович

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат. наук, профессор Антонов Николай Викторович

кандидат физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник Деркачев Сергей Эдуардович

Ведущая организация:

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ"

Защита состоится «23» апреля 2009 г. в 15 часов на заседании совета Д.212.232.24 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9, \_\_\_\_\_

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского государственного университета

Автореферат разослан «\_\_\_» марта 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физ.-мат. наук, профессор



Щекин А. К.

## Актуальность темы исследования

Ренормгрупповой (РГ) подход является в настоящее время основным инструментом исследования фазовых переходов II рода и критических явлений, а также задач неравновесной нелинейной стохастической динамики. Он позволяет обосновать критический скейлинг и рассчитать параметры этого скейлинга — критические индексы и универсальные отношения амплитуд — в виде  $\epsilon$ -разложений. Эти разложения являются асимптотическими, поэтому расчет начального отрезка ряда дополняется информацией о поведении старших членов разложения с последующим суммированием по Борелю. Развитые аналитические методы расчета позволили рассчитать 5 членов  $\epsilon$ -разложений в задачах критической статистики, проведенное затем борелевское суммирование привело к хорошему согласию с экспериментальными данными. Расчеты в задачах критической динамики существенно сложнее, поэтому здесь в наиболее простой А-модели достигнута лишь точность  $O(\epsilon^3)$ , в большинстве задач неравновесной динамики обычно сосчитан лишь первый член разложения.

Результаты в статике и динамике не удавалось улучшить с 1991 и 1984 гг. соответственно. Это связано с тем, что аналитические методы расчета констант ренормировок сталкиваются в высших порядках теории возмущений с трудностями принципиального характера. Весьма актуальной задачей является поэтому разработка методов численного расчета констант ренормировок. Задача нетривиальна, поскольку требует вычисления многократных интегралов, содержащих сингулярности по параметру  $\epsilon$  все возрастающей степени с увеличением порядка теории возмущений. Таким многопетлевым расчетам и посвящена настоящая диссертационная работа.

## Цели работы

Целью работы является разработка алгоритма численного расчета констант ренормировок в старших порядках теории возмущений и использование такого подхода в двух задачах стохастической динамики: ренормгрупповом описании процесса турбулентного перемешивания пассивной примеси и модели А критической динамики.

## **Научная новизна**

Полученные в диссертации результаты показали, что задачи нелинейной стохастической динамики могут эффективно решаться на основе сочетания теоретикополевых методов и численного расчета констант ренормировок. Такой подход позволил существенно продвинуться в решении двух рассмотренных задач стохастической динамики и достичь результатов, которые не удавалось получить чисто аналитическими методами.

## **Практическая и теоретическая ценность**

Предложенный в работе метод численного расчета констант ренормировок продемонстрировал свою эффективность на примере впервые выполненного четырехпетлевого расчета в задаче критической динамики. Этот метод может составить основу полностью автоматизированного расчета констант ренормировок, дополнив уже имеющиеся компьютерные программы построения фейнмановских диаграмм и расчета комбинаторных коэффициентов, что даст возможность продвижения в старшие порядки теории возмущений в широком классе задач критической статистики и динамики, а также задачах нелинейной неравновесной стохастической динамики.

## **Апробация работы**

Результаты работы докладывались на международных конференциях "Renormalization Group 2005" (Helsinki, 2005 г.), "Renormalization Group and Related Topics" (Дубна, 2008 г.).

## **Публикации**

По материалам диссертации опубликовано 3 печатные работы, список публикаций приведен в конце автореферата.

## **Структура и объем работы**

Диссертация состоит из Введения, 4-х глав, выносимых на защиту основных результатов диссертации, Заключения, 3-х приложений и списка цитируемой литературы из 59 наименований. Работа изложена на 119 стр., содержит 11 таблиц и 20 рисунков.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** сформулированы актуальность, цель и задачи работы, а также приведен обзор результатов в области применения методов ренормгруппы в теории критических явлений и стохастической динамике.

**В первой главе** излагается процедура сведения двух рассмотренных задач стохастической динамики к теоретико-полевой формулировке и ренормировка полученных моделей. В общем виде задача нелинейной стохастической динамики описывается уравнением

$$\partial_t \varphi(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x}, t; \varphi) + \eta(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

где  $\varphi$  — поле, характеризующее состояние системы,  $U$  — функционал от  $\varphi$  и его производных в один и тот же момент времени,  $\eta$  — случайная сила с гауссовым распределением, заданная коррелятором  $\langle \eta(\mathbf{x}, t) \eta(\mathbf{x}', t') \rangle = D(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')$  и нулевым средним  $\langle \eta(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$ . Частным случаем уравнения (1) является уравнение Ланжевена, для которого функционал  $U$  представим в виде вариационной производной от статического функционала действия  $S^{st}$ , а коррелятор пропорционален линейному оператору  $\alpha$  по  $\mathbf{x}$ :

$$U(\varphi) = \alpha \frac{\delta S^{st}(\varphi)}{\delta \varphi(\mathbf{x})}, \quad D(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = 2\alpha \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'). \quad (2)$$

Для наиболее простой модели, так называемой модели А по [1], рассматривается статическое действие  $\varphi^4$ -модели

$$S^{st}(\varphi) = -(\partial\varphi)^2/2 - \tau_0\varphi^2/2 - g_0\varphi^4/24, \quad \alpha = \lambda_0, \quad (3)$$

где  $\lambda_0$  вещественная постоянная. Тем самым уравнение (1) принимает вид

$$\partial_t \varphi = \lambda_0 (\partial^2 \varphi - \tau_0 \varphi - g_0 \varphi^3/6) + \eta. \quad (4)$$

Задачу (4) можно свести к квантовополевой модели с действием

$$S(\varphi, \varphi') = \lambda_0 \varphi' \varphi' + \varphi' [-\partial_t \varphi + \lambda_0 (\partial^2 \varphi - \tau_0 \varphi - g_0 \varphi^3/6)] , \quad (5)$$

где  $\varphi'$  — вспомогательное поле. Диаграммы теории возмущений модели (5) содержат ультрафиолетовые (УФ) расходимости, проявляющиеся в виде полюсов по

$\varepsilon = 4-d$ , где  $d$  — размерность пространства. Эти расходимости могут быть устранены мультипликативной ренормировкой полей  $\varphi = \varphi_R Z_\varphi$ ,  $\varphi' = \varphi'_R Z_{\varphi'}$  и параметров  $\lambda_0 = \lambda Z_\lambda$ ,  $\tau_0 = \tau Z_\tau$ ,  $g_0 = g \mu^\varepsilon Z_g$ . В результате получаем ренормированное действие (индекс "R" у полей опускается)

$$S_R(\varphi, \varphi') = Z_1 \lambda \varphi' \varphi' + \varphi' [-Z_2 \partial_t \varphi + \lambda (Z_3 \partial^2 \varphi - Z_4 \tau \varphi - Z_5 g \mu^\varepsilon \varphi^3 / 6)] , \quad (6)$$

где  $Z_1 = Z_\lambda Z_{\varphi'}^2$ ,  $Z_2 = Z_{\varphi'} Z_\varphi$ ,  $Z_3 = Z_{\varphi'} Z_\lambda Z_\varphi$ ,  $Z_4 = Z_{\varphi'} Z_\lambda Z_\tau Z_\varphi$ ,  $Z_5 = Z_{\varphi'} Z_\lambda Z_g Z_{\varphi'}^3$ . Задача состоит в вычислении констант ренормировок  $Z_1$ – $Z_5$ , знание которых позволяет с помощью метода ренормгруппы рассчитать критические индексы системы. Показано [2], что константы ренормировки  $Z_3$ ,  $Z_4$ ,  $Z_5$  совпадают с соответствующими константами статической модели (3), известными с пятипетлевой точностью. С учетом равенства  $Z_1 = Z_2$  остается лишь одна независимая динамическая константа.

Следующая рассматриваемая задача — изучение турбулентного перемешивания пассивной примеси в несжимаемой жидкости. Движение жидкости описывается стохастическим уравнением Навье-Стокса

$$\partial_t \varphi_i + (\varphi_k \partial_k) \varphi_i = \nu_0 \partial^2 \varphi_i - \partial_i p + \eta_i . \quad (7)$$

Эта задача имеет стандартный вид (1), но не является уравнением Ланжевена (2), т.к. соответствующий ей функционал  $U(\varphi)$  нельзя представить в виде вариационной производной. Предполагается, что случайная сила  $\eta$  имеет гауссово распределение с коррелятором

$$D(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \delta(t - t') \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} P_{ij}(\mathbf{k}) g_0 \nu_0^3 N(k) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} , \quad (8)$$

где  $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$  — поперечный проектор и  $N(k) = k^{4-d-2\varepsilon}$  — спектр накачки. Перемешивание пассивной примеси описывается уравнением диффузии с учетом конвективного переноса

$$\partial_t \psi + (\varphi_k \partial_k) \psi = \kappa_0 \partial^2 \psi , \quad (9)$$

где  $\psi$  — концентрация примесных частиц, а  $\kappa_0$  — коэффициент диффузии. Эта за-

дача также сводится к квантовополевой с действием

$$S(\varphi, \varphi', \psi, \psi') = g_0 \nu_0^3 \varphi' N \varphi' / 2 + \varphi' [-\partial_t \varphi + \nu_0 \partial^2 \varphi - (\varphi \partial) \varphi] + \\ + \psi' [-\partial_t \psi + u_0 \nu_0 \partial^2 \psi - (\varphi \partial) \psi] , \quad (10)$$

где  $u_0 \equiv \kappa_0 / \nu_0$ . Ренормировка осуществляется соотношениями  $\nu_0 = \nu Z_\nu$ ,  $u_0 = u Z_u$ ,  $Z_\kappa = Z_u Z_\nu$ ,  $g_0 = g \mu^{2\varepsilon} Z_g$  с условием связи  $Z_g Z_\nu^3 = 1$ , что приводит к ренормированному действию

$$S_R(\varphi, \varphi', \psi, \psi') = g \nu^3 \mu^{2\varepsilon} \varphi' N \varphi' / 2 + \varphi' [-\partial_t \varphi + \nu Z_\nu \partial^2 \varphi - (\varphi \partial) \varphi] + \\ + \psi' [-\partial_t \psi + u \nu Z_\kappa \partial^2 \psi - (\varphi \partial) \psi] . \quad (11)$$

**Во второй главе** излагается техника вычисления многопетлевых диаграмм на примере расчета константы ренормировки  $Z_2$  динамической  $A$ -модели.

Возможность мультипликативной ренормировки теории, т.е. устранения в теории возмущений полюсов по  $\varepsilon$  за счет подходящего выбора констант ренормировки, обусловлена тем, что вычеты при полюсах функций Грина носят локальный характер, т.е. являются в Фурье-представлении полиномами по импульсам и частотам. В частности, константу  $Z_2$  можно определить, потребовав УФ-конечности 1-неприводимой функции  $\Gamma = \partial_{i\omega} \langle \psi' \psi \rangle_{1n} \Big|_{\mathbf{p}=0, \omega=0}$ . В терминах ренормированных переменных ряд теории возмущений для этой величины имеет вид

$$\Gamma_R = Z_2 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (g \mu^\varepsilon Z_g)^n \gamma_0^{(n)} (m Z_\tau^{1/2}) \right] , \quad m \equiv \tau^{1/2} . \quad (12)$$

Рассчитываемые по диаграммам величины  $\gamma_0^{(n)}$  содержат полюса по  $\varepsilon$ , которые должны быть устранены в каждом порядке теории возмущений по ренормированному заряду  $g$  за счет выбора констант  $Z_i$ . Этот выбор неоднозначен и зависит от используемой схемы вычитаний, в схеме минимальных вычитаний MS (от англ. Minimal Subtraction) константы ренормировки имеют вид

$$Z_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g^n \sum_{k=1}^n C_{nk} \varepsilon^{-k} , \quad (13)$$

т.е. вычитаются только полюса по  $\varepsilon$ . При известных статических константах  $Z_g$ ,  $Z_\tau$  коэффициенты  $C_{nk}$  этого разложения определяются из требования сокращения

полюсов в (12). В теории ренормировки доказывается, что учет  $Z_g, Z_\tau$  в (12) можно заменить действием определенной  $R'$ -операции

$$\Gamma_R = Z_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (g\mu^\varepsilon)^n R' \gamma_0^{(n)}(m). \quad (14)$$

По соображениям размерности  $\gamma_0^{(n)}(m) \sim m^{-n\varepsilon}$ , так что переходом к безразмерным переменным интегрирования можно ввести функцию

$$\gamma^{(n)}(s) \equiv \mu^{n\varepsilon} \gamma_0^{(n)}(m), \quad s \equiv m/\mu \quad (15)$$

и переписать (14) в виде

$$\Gamma_R = Z_2 + \sum_{n=1}^{\infty} g^n R' \gamma^{(n)}(s). \quad (16)$$

В теории ренормировки доказывается, что в схеме MS величина  $R' \gamma^{(n)}(s)$  не зависит от  $s$ , поэтому в (16) можно положить  $s = 1$ .

Расходимость (полюса по  $\varepsilon$ ) величин  $\gamma^{(n)}(s)$  обусловлена вкладами в соответствующие диаграммы от областей малых расстояний и времен. Различают *поверхностную* расходимость, когда вся диаграмма "стягивается в точку" и расходимость в подграфе, когда стягивается в точку некоторый фрагмент диаграммы. Расходящиеся подграфы образуют в общем случае сложную перекрывающуюся систему, что сильно осложняет нахождение вычетов в полюсах. Действие  $R'$ -операции сводится к вычитанию расходимостей в подграфах, так что в величине  $R' \gamma^{(n)}$  остается лишь вклад поверхностной расходимости, чем в конечном счете и обусловлена ренормируемость теории.

Мы хотим использовать  $R'$ -операцию для выделения вычетов при полюсах. Основой для этого будет утверждение о том, что если некоторая диаграмма  $\gamma$  не имеет поверхностной расходимости, то величина  $R' \gamma$  УФ-конечна, т.е. не содержит полюсов по  $\varepsilon$ . Если данную величину удастся представить в виде единого интеграла, не содержащего особенностей, то его зависимость от  $\varepsilon$  можно искать разложением в ряд подынтегрального выражения с последующим численным нахождением коэффициентов. При использовании схемы MS этого, однако, не удастся сделать, т.к. процедура отбора полюсов в этой схеме не дает возможности записать УФ-конечную величину  $R' \gamma$  в виде единого интеграла. Поэтому в вычислительных



целях использовалась другая известная схема ренормировки (назовем ее  $\overline{R}'$ ), основанная на вычитании из расходящейся величины соответствующего начального отрезка ряда по частоте и импульсу. Если в величине  $\overline{R}'\gamma$  полагается затем  $s = 1$ , такая схема носит название схемы *примитивных вычитаний* [2]. В нашем случае операция вычитания осуществлялась с помощью операторов  $K_0$  и  $K_2$ , определенных равенствами

$$K_0 f(p^2, \omega) = f|_{p^2=0, \omega=0}, \quad K_2 f(p^2, \omega) = \partial_{p^2} f|_{p^2=0, \omega=0} \cdot p^2 + \partial_{\omega} f|_{p^2=0, \omega=0} \cdot \omega. \quad (17)$$

В  $n$ -том порядке теории возмущений разность

$$\delta R' \gamma^{(n)} = R' \gamma^{(n)} - \overline{R}' \gamma^{(n)} \quad (18)$$

определяется произведением диаграмм младших порядков, что позволяет строить итерационную процедуру для нахождения  $R' \gamma$  по известной  $\overline{R}' \gamma$ .

Диаграммы  $\gamma^{(n)}(s)$  имеют *поверхностную* расходимость, поэтому к ним описанный способ расчета непосредственно не применим. Чтобы ее устранить, достаточно продифференцировать  $\gamma^{(n)}(s)$  по  $s$ . Поскольку  $\gamma^{(n)}(s) \sim s^{-n\varepsilon}$ , нетрудно затем по производной восстановить саму функцию:  $\gamma^{(n)}(s) = -\frac{1}{n\varepsilon} s \partial_s \gamma^{(n)}(s)$ . Учитывая, что в конечном ответе будет положено  $s = 1$ , и вводя оператор  $\widehat{\partial}_s$  равенством  $\widehat{\partial}_s f(s) \equiv -\partial_s f(s)|_{s=1}$ , запишем

$$\gamma^{(n)}|_{s=1} = \frac{1}{n\varepsilon} \widehat{\partial}_s \gamma^{(n)}(s). \quad (19)$$

Величина  $\overline{R}' \widehat{\partial}_s \gamma^{(n)}(s)$  УФ-конечна, однако непосредственно достичь поставленной цели дифференцированием  $\overline{R}' \gamma^{(n)}(s)$  по  $s$  не удастся, т.к. операции  $\overline{R}'$  и  $\widehat{\partial}_s$  не коммутируют — операция  $\widehat{\partial}_s$ , действуя на подграфы, может сделать их не существенными (не дающими расходимостей), что отражается на содержании  $\overline{R}'$ -операции, по определению действующей на существенные подграфы. Дело облегчается тем, что коммутатор  $J_b^{(n)} \equiv (\widehat{\partial}_s \overline{R}' - \overline{R}' \widehat{\partial}_s) \gamma^{(n)}(s)$  определяется произведением диаграмм младшего порядка, что делает возможным построение итерационной процедуры.

Таким образом, основой дальнейших расчетов является соотношение

$$R' \gamma^{(n)} = \frac{1}{n\varepsilon} (J_a^{(n)} + J_b^{(n)}) + \delta R' \gamma^{(n)}, \quad (20)$$

которое позволяет итерациями находить  $R'\gamma^{(n)}$ , вычисляя величины  $J_a^{(n)} \equiv \overline{R'}\widehat{\partial}_s\gamma^{(n)}(s)$ , разложимые в ряд Тэйлора по  $\varepsilon$ . Коэффициенты этого ряда определяются многократными конечными интегралами, не содержащими параметров, и их можно рассчитывать с помощью стандартных компьютерных программ.

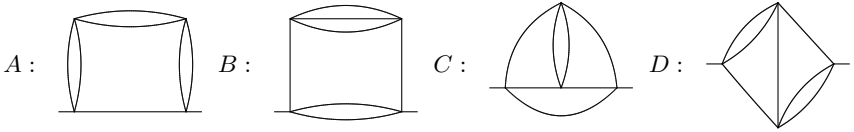
Операция  $\overline{R'}$  является естественной в описанном способе вычислений и ее можно было положить в основу процедуры ренормировки. Мы все же остановились на схеме минимальных вычитаний по двум причинам. Во-первых, статические константы ренормировки и, следовательно, положение неподвижной точки известны именно в MS схеме. Во-вторых, эта схема позволяет произвольно изменять способ инфракрасной регуляризации диаграмм, выбирая наиболее технически удобный.

Вычислить по изложенной схеме двухпетлевые и трехпетлевые вклады  $\gamma^{(2)}$  и  $\gamma^{(3)}$  особенно просто, т.к. для них оказывается  $\delta R'\gamma^{(n)} = 0$ . Такой расчет дает следующие значения коэффициентов для константы ренормировки  $Z_2$  из (13):

$$C_{31} = 0.0118412, \quad C_{21} = C_{32} = \frac{-\ln(4/3)}{8}, \quad C_{11} = C_{22} = C_{33} = 0. \quad (21)$$

Впервые этот результат был получен в работе [3], где все расчеты проводились аналитически.

Новый результат в работе получен в четвертом порядке теории возмущений, в котором необходимо было рассчитать 25 четырехпетлевых диаграмм. Им соответствуют 4 группы A, B, C, D топологически эквивалентных диаграмм, в которых не различаются поля  $\varphi$  и  $\varphi'$



В группе A имеется 4 диаграммы, их легче остальных вычислять, т.к. и в этом случае  $\delta R'\gamma_A^{(4)} = 0$ . УФ-конечная величина  $J_{Aa}^{(4)}$  представлялась в виде единого формально 20-ти кратного интеграла, который после упрощений сводился к 9-ти кратному и вычислялся численно методом Монте-Карло. Вклад  $J_{Ab}^{(4)}$  в свою очередь выражался через уже вычисленные трехпетлевые диаграммы

$$J_{Ab}^{(4)} = -\frac{3}{2}\overline{R'}\gamma^{(3)}. \quad (22)$$

Диаграммы группы С и D естественно объединить, т.к. они вычисляются схожим образом, это дает 17 различных диаграмм. Величины  $J_{CDa}^{(4)}$  также сводятся к 9-ти кратным интегралам. Вклады  $J_{CDb}^{(4)}$  и  $\delta R' \gamma_{CD}^{(4)}$  выражаются через диаграммы низших порядков

$$J_{CDb}^{(4)} = -\gamma^{(2)} K_0 \overline{R'} \widehat{\partial}_s \Gamma_4^{(3)} - 6 \overline{R'} \gamma^{(3)}, \quad \delta R' \gamma_{CD}^{(4)} = \gamma^{(2)} (1 - K) K_0 \Gamma_4^{(3)}, \quad (23)$$

где  $\Gamma_4^{(3)}$  — сумма трехпетлевых диаграмм 1-неприводимой функции

$$\Gamma_4 = - \frac{\langle \psi' \psi^3 \rangle_{1n} |_{\mathbf{p}=0, \omega=0}}{\lambda g \mu^\varepsilon}. \quad (24)$$

Группа В включает 4 диаграммы, их сложнее всего вычислять, т.к. здесь впервые появляются квадратично расходящиеся подграфы. Величины  $J_{Ba}^{(4)}$ , как и для остальных диаграмм, сводятся к 9-ти кратным интегралам, а  $J_{Bb}^{(4)}$  и  $\delta R' \gamma_B^{(4)}$  выражаются через произведения двухпетлевых диаграмм.

Суммируя вклады диаграмм всех четырех групп, находим величину  $\gamma^{(4)}$  (четвертый порядок теории возмущений), что определяет соответствующие коэффициенты для константы ренормировки  $Z_2$ :

$$C_{41} = -0.02491, \quad C_{42} = 0.039440, \quad C_{43} = \frac{-9 \ln(4/3)}{64}, \quad C_{44} = 0. \quad (25)$$

**В третьей главе** приводятся детали двухпетлевого расчета констант ренормировки для модели турбулентного перемешивания пассивной примеси. Запишем уравнения Дайсона для функций отклика  $\Gamma_{\varphi\varphi'}$ ,  $\Gamma_{\psi\psi'}$  и собственно энергетических операторов  $\Sigma_{\varphi\varphi'}$ ,  $\Sigma_{\psi\psi'}$  в ренормированных переменных при нулевой внешней частоте  $\omega$

$$\begin{aligned} R_\varphi(\xi, g) &\equiv - \frac{\Gamma_{\varphi\varphi'}(k, \omega)}{\nu k^2} \Big|_{\omega=0} = Z_\nu - \frac{\Sigma_{\varphi\varphi'}(k, \omega)}{\nu k^2} \Big|_{\omega=0}, \\ R_\psi(\xi, g, u) &\equiv - \frac{\Gamma_{\psi\psi'}(k, \omega)}{u \nu k^2} \Big|_{\omega=0} = Z_\kappa - \frac{\Sigma_{\psi\psi'}(k, \omega)}{u \nu k^2} \Big|_{\omega=0}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь введены безразмерные функции  $R_\varphi$ ,  $R_\psi$  от безразмерных аргументов  $\xi$ ,  $g$  и  $u$  где  $\xi \equiv k/\mu$ . Интересующие нас константы ренормировки  $Z_\nu$  и  $Z_\kappa$  имеют вид

$$Z_{\nu, \kappa} = 1 + \frac{a_{11}^{(\nu, \kappa)}}{\varepsilon} g + \left( \frac{a_{21}^{(\nu, \kappa)}}{\varepsilon} + \frac{a_{22}^{(\nu, \kappa)}}{\varepsilon^2} \right) g^2 + O(g^3). \quad (27)$$

В однопетлевом приближении для нахождения величин  $a_{11}^{(\nu)}$  и  $a_{11}^{(\kappa)}(u)$  потребуем УФ-конечность линейного коэффициента разложения соответственно функций  $R_\varphi(\xi = 1, g)$  и  $R_\psi(\xi = 1, g, u)$  по  $g$ . Вычислив полюсную часть собственно энергетических операторов  $\Sigma_{\varphi'\varphi}$  и  $\Sigma_{\psi'\psi}$  в (26), приходим к результату, полученному в [4]

$$a_{11}^{(\nu)} = -\frac{(d-1)\bar{S}_d}{8(d+2)}, \quad a_{11}^{(\kappa)}(u) = -\frac{(d-1)\bar{S}_d}{4du(d+2)}. \quad (28)$$

РГ-функции  $\beta_{g,u}$  определяются соотношениями  $\beta_g(g) \equiv \mu\partial_\mu|_0 g$  и  $\beta_u(g, u) \equiv \mu\partial_\mu|_0 u$ , где  $\mu\partial_\mu|_0$  — оператор  $\mu\partial_\mu$  при фиксированных затравочных параметрах  $g_0, \nu_0, u_0$ . Положение неподвижной точки  $(g_*, u_*)$  определяется условиями  $\beta_g(g_*) = 0$  и  $\beta_u(g_*, u_*) = 0$ . Используя однопетлевые выражения для констант ренормировки  $Z_\nu, Z_\kappa$  (27, 28), находим

$$g_* = \frac{-\varepsilon}{3a_{11}^{(\nu)}} + O(\varepsilon^2), \quad u_* \equiv u_*^{(0)} + u_*^{(1)}\varepsilon + O(\varepsilon^2) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{9d+16}{d}} - 1 \right) + O(\varepsilon). \quad (29)$$

Определим теперь однопетлевые вклады  $a_\varphi, a_\psi$  функций отклика  $\Gamma_{\varphi'\varphi'}$ ,  $\Gamma_{\psi'\psi'}$  как линейные коэффициенты разложения по  $g$  при  $d = 3$  соответственно функций  $R_\varphi(\xi = 1, g) = 1 + a_\varphi g + O(g^2)$  и  $R_\psi(\xi = 1, u, g) = a_\psi(u)g + O(g^2)$ . Ответ можно выразить через два интеграла, численный расчет дает

$$a_\varphi = -0.047718\bar{S}_3, \quad a_\psi(u_*^{(0)}|_{d=3}) = -0.04139\bar{S}_3. \quad (30)$$

Двухпетлевые вклады в константу ренормировки  $Z_\kappa$  легче найти из условия УФ-конечности  $R_\psi(\xi, g, u)$  при  $\xi \rightarrow 0$ . Впервые выполненный в данной работе численный расчет 8 двухпетлевых диаграмм для  $\Sigma_{\psi'\psi'}$  позволил найти коэффициенты  $a_{21}^{(\kappa)}$  и  $a_{22}^{(\kappa)}$  из (27):

$$B(u_*^{(0)}) \equiv \frac{a_{21}^{(\kappa)}(u_*^{(0)}|_{d=3})}{\bar{S}_d^2} = -4.1666 \cdot 10^{-3}, \quad C(u) \equiv \frac{a_{22}^{(\kappa)}(u)}{\bar{S}_d^2} = -\frac{3u^2 + 9u + 16}{720u(1+u)^3}. \quad (31)$$

Двухпетлевой расчет константы ренормировки  $Z_\kappa$  был выполнен в работе [5]:

$$a_{21}^{(\nu)} = \frac{3(d-1)^2\bar{S}_d^2\lambda}{128(d+2)^2}, \quad (32)$$

где  $\lambda \simeq -1.101$  при  $d = 3$ . Соотношения (31), (32) позволяют найти двухпетлевые выражения для координат неподвижной точки ( $u_*^{(1)}$  определен в (29)):

$$g_* = \frac{8(d+2)\varepsilon}{3(d-1)\bar{S}_d} (1 + \lambda\varepsilon) + O(\varepsilon^3), \quad u_*^{(1)} = \frac{2(d+2)}{d(1+2u_*^{(0)})} \left[ \lambda - \frac{128(d+2)^2}{3(d-1)^2} B(u_*^{(0)}) \right]. \quad (33)$$

**В четвертой главе** проводятся необходимые выкладки для нахождения физических величин из констант ренормировок.

Начнем с динамической А модели. До этого все вычисления проводились в случае, когда поле параметра порядка  $\varphi$  — скаляр. Обобщение на  $n$ -компонентное поле при использовании  $R'$ -операции не вызывает трудностей, нужно только домножать двухпетлевой, трехпетлевой и четырехпетлевые вклады А, В и СD на соответствующие "индексные" структуры, которые легко находятся. РГ-функция  $\gamma_2$  определяется соотношением  $\gamma_2 = \beta_u \partial_u \ln Z_2$  где  $\beta_u(u) \equiv \mu \partial_\mu|_0 u$  и  $\mu \partial_\mu|_0$  — оператор  $\mu \partial_\mu$  при фиксированных затравочных параметрах  $g_0, \tau_0, \lambda_0$ . Таким образом находим

$$\gamma_2 = \frac{n+2}{3} u^2 \frac{\ln(4/3)}{4} \left[ 1 - 0.49393 \frac{n+8}{9} u + \left( -0.2511 \frac{n^2+6n+20}{27} - 0.1700 \frac{n+2}{3} + 1.806 \frac{5n+22}{27} \right) u^2 + O(u^3) \right]. \quad (34)$$

Координата неподвижной точки  $u_*$  определяется условием  $\beta_u(u_*) = 0$ , коэффициенты ее разложения по  $\varepsilon$  в схеме MS известны (из статики) с точностью до 5-го порядка [6], нам потребуются только первые три коэффициенты.

Динамический критической индекс  $z$  принято записывать в виде

$$z = 2 + R\eta, \quad R \equiv \gamma_2(u_*)/\eta - 1, \quad (35)$$

где  $\eta$  — известный статический индекс Фишера. Величина  $R$  удобна для использования, т.к. ее зависимость от  $n$  проще, чем у  $\gamma_2(u_*)$  и  $\eta$ :

$$R = (6 \ln(4/3) - 1) \left\{ 1 - 0.18848 \varepsilon + \left[ -0.1000 + \frac{4.78n + 21.5}{(n+8)^2} \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \right\}. \quad (36)$$

До настоящего момента величина  $R$  была известна с точностью до  $\varepsilon$  и оба члена разложения не зависели от  $n$ . Полученный в рамках данной работы следующий член разложения показал, что гипотеза о полной независимости  $R$  от  $n$  не верна.

Вернемся к динамическому критическому индексу, при  $n = 1$  получаем

$$z = 2 + \frac{6 \ln(4/3) - 1}{54} \varepsilon^2 + 0.0110363 \varepsilon^3 - 0.00558 \varepsilon^4 + O(\varepsilon^5). \quad (37)$$

Хотя мы имеем дело с асимптотическим рядом, в данном случае последняя поправка оказывается в два раза меньше предыдущей. При  $d = 3$  ( $\varepsilon = 1$ ) индекс  $z$  принимает значение 2.01890, что находится в согласии с экспериментом.

Таким образом, в динамической задаче критического поведения впервые в рамках  $\varepsilon$ -разложения получен четвертый порядок теории возмущений. На основе этих результатов были осуществлены различные варианты борелевского суммирования с использованием асимптотики высоких порядков. В целом погрешность ответов оставалась большой, что, по-видимому, объясняется существенным отклонением рассчитанных членов ряда по  $\varepsilon$  от соответствующих найденных к настоящему моменту вкладов в асимптотику высоких порядков. Поэтому для повышения точности, кроме расчета следующего порядка  $\varepsilon$ -разложения, полезным может оказаться уточнение самой асимптотики.

Во второй задаче — турбулентного перемешивания пассивной примеси — рассчитывается турбулентное (эффективное) число Прандтля  $u_{eff}^{-1}$ , имеющее смысл отношения эффективных коэффициентов диффузии и вязкости. Переход к РГ-представлению для функций отклика (26) в инерционном интервале позволяет обосновать следующее определение этой величины:

$$u_{eff} = u_* \frac{R_\psi(\xi = 1, g_*, u_*)}{R_\varphi(\xi = 1, g_*)}. \quad (38)$$

Примечательно, что величина  $u_{eff}$  в такой записи не зависит от выбора схемы ренормировки. Подставляя однопетлевые вклады  $a_\varphi$ ,  $a_\psi$  функций отклика в разложение  $u_{eff}$  по  $g$ , а потом по  $\varepsilon$  при  $(g, u) = (g_*, u_*)$ , получаем:

$$\begin{aligned} u_{eff} &= u_* \{1 + [a_\varphi - a_\psi(u_*)]g_* + O(g_*^2)\} = \\ &= u_*^{(0)} \left\{1 + \varepsilon \left(u_*^{(1)}/u_*^{(0)} + [a_\varphi - a_\psi(u_*^{(0)})]g_*^{(0)}\right) + O(\varepsilon^2)\right\}. \quad (39) \end{aligned}$$

Таким образом, для нахождения двухпетлевого значения турбулентного числа Прандтля необходимо рассчитать положение неподвижной точки  $(g_*, u_*)$  с двухпетлевой точностью а функции отклика с однопетлевой точностью. Проведенный при  $d = 3$  расчет дал для  $u_{eff}$  следующее разложение по  $\varepsilon$

$$u_{eff} = \frac{\sqrt{43/3} - 1}{2} (1 - 0.0358\varepsilon) + O(\varepsilon^2). \quad (40)$$

При физическом  $\varepsilon = 2$  это дает для турбулентного числа Прандтля значение 0.7693 (без учета двухпетлевой поправки было 0.7179). Как видно, величина поправки составляет всего лишь 7% по сравнению с главным членом. Такая ситуация не харак-

терна для рассчитанных ранее в рамках  $\varepsilon$ -разложения характеристик турбулентных течений, таких, как константа Колмогорова и фактор асимметрии. Большая величина поправок для этих величин обусловлена вкладом диаграмм, имеющим сингулярность при  $d \rightarrow 2$ , которые и при  $d = 3$  вносят доминирующий вклад [5]. Рассмотрение зависимости от размерности пространства показало, что и в нашей задаче в поправках к эффективным коэффициентам диффузии и вязкости присутствуют сингулярные при  $d \rightarrow 2$  слагаемые, которые при  $d = 3$  дают большой вклад. Однако в отношении этих величин сингулярные вклады сокращаются и результирующая поправка для числа Прандтля оказывается небольшой. Этим, по-видимому, объясняется хорошее согласие с экспериментальным значением турбулентного числа Прандтля  $0.81 \pm 0.05$ .

**В заключении приведены выносимые на защиту основные результаты диссертации:**

1. Разработан метод численного расчета констант ренормировок, основанный на использовании R-операции теории ренормировок. Он позволяет свести задачу нахождения вычетов в полюсах фейнмановских диаграмм к вычислению многократных интегралов, не содержащих особенностей.
2. На основе предложенного метода проведен четырехпетлевой расчет констант ренормировки и ренормгрупповых функций модели А критической динамики. Динамический критический индекс рассчитан в порядке  $\varepsilon^4$ .
3. Проведено борелевское суммирование полученного  $\varepsilon$ -разложения с учетом асимптотического поведения старших членов ряда. Полученный результат находится в согласии с экспериментальными данными.
4. Методом ренормгруппы во втором порядке теории возмущений рассмотрена задача турбулентного перемешивания пассивной примеси. Проведен двухпетлевой расчет констант ренормировки и ренормгрупповых функций. С точностью до  $\varepsilon^2$  определено положение неподвижной точки ренормгрупповых преобразований.
5. Рассчитаны функции отклика в задаче турбулентного перемешивания пассивной примеси. Во втором порядке теории возмущений найдено значение турбулентного числа Прандтля. Учет впервые рассчитанного вклада порядка  $\varepsilon^2$  заметно улучшил согласие с экспериментом.

**Основное содержание диссертации изложено в следующих работах:**

1. Adzhemyan L. Ts., Honkonen J., Kim T. L., Sladkoff L. Two-loop calculation of the turbulent Prandtl number // *Phys. Rev. E*. — 2005. — Vol. 71. — Pp. 056311-1–056311-9. (личный вклад 25 %)
2. Adzhemyan L. Ts., Honkonen J., Kim T. L., Kompaniets M. V., Sladkoff L., Vasil'ev A. N. Some specific features of the  $\varepsilon$  expansion in the theory of turbulence and the possibility of its improvement // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2006. — Vol. 39. — Pp. 7789–7799. (личный вклад 17 %)
3. Аджемян Л. Ц., Новиков С. В., Сладкофф Л. Расчет динамического индекса модели А критической динамики в порядке  $\varepsilon^4$  // *Вестник СПбГУ*. — 2008. — Т. 4, № 4. — С. 110–114. (личный вклад 33 %)

**Список цитируемой литературы:**

- [1] Hohenberg P. C., Halperin B. I. Theory of dynamical critical phenomena // *Rev. Mod. Phys.* — 1977. — Vol. 49. — Pp. 435–479.
- [2] Васильев А. Н. Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. — СПб.: ПИЯФ, 1998.
- [3] Антонов Н. В., Васильев А. Н. Критическая динамика как теория поля // *ТМФ*. — 1984. — Т. 60, № 1. — С. 59–71.
- [4] Аджемян Л. Ц., Васильев А. Н., Гнатич М. Ренормгрупповой подход к теории турбулентности: включение пассивной примеси // *ТМФ*. — 1984. — Т. 58, № 1. — С. 72–78.
- [5] Adzhemyan L. Ts., Antonov N. V., Kompaniets M. V., Vasil'ev A. N. Renormalization-group approach to the stochastic Navier-Stokes equation: two-loop approximation // *Int. J. Mod. Phys. B*. — 2003. — Vol. 17. — Pp. 2137–2170.
- [6] Kleinert H., Neu J., Schulte-Frohlinde V., Chetyrkin K. G., Larin S. A. Five-loop renormalization group functions of  $O(n)$ -symmetric  $\varphi^4$ -theory and  $\varepsilon$ -expansions of critical exponents up to  $\varepsilon^5$  // *Phys. Lett. B*. — 1991. — Vol. 272, no. 1-2. — Pp. 39–44. — Erratum: *Phys. Lett. B*. — 1993. — Vol. 319, no. 4. — P. 545.