УДК 532.7:533.7:544.77.051.5

А. Е. Кучма, Ф. М. Куни, А. К. Щёкин

ЭФФЕКТ ИСКЛЮЧЁННОГО ОБЪЁМА НА СТАДИИ НУКЛЕАЦИИ ЗАКРИТИЧЕСКИХ ПУЗЫРЬКОВ ГАЗА В СИЛЬНО ПЕРЕСЫЩЕННОМ ЖИДКОМ РАСТВОРЕ*

Формирование газовых пузырьков в пересыщенном растворе – чрезвычайно распространённое как в природе, так и в технологических процессах явление. Для практического использования это явление может быть как желательным, так и нежелательным, и поэтому важными являются прогнозирование и управление его протеканием. К примеру, контроль интенсивности генерации и роста газовых пузырьков нужен при создании пористых материалов и полимерных пен, при литье и старении металлов, при производстве стёкол. Кинетическая теория образования и роста пузырьков водяного пара, растворённого в расплавленной магме, позволит описать процесс, приводящий к вулканическим извержениям взрывного характера.

Настоящее сообщение посвящено теоретическому рассмотрению особенностей процесса формирования ансамбля газовых пузырьков в жидком растворе при высоких значениях начального пересыщения раствора газом.

В традиционно используемом подходе к описанию кинетики распада раствора на жидкую и газообразную фазы [1–4] предполагается, что на стадии нуклеации (стадия зарождения закритических, т. е. устойчиво растущих пузырьков, на которой происходит формирование полного числа пузырьков в растворе) поглощение молекул газа из раствора пузырьками приводит к синхронному и однородному для всего ансамбля пузырьков понижению пересыщения. Такое предположение означает, что для каждого пузырька окружающий раствор (жидкость вместе с содержащимися в ней остальными пузырьками) рассматривается как эффективная однородная среда, в которой избыток растворённого газа уменьшается со временем в соответствии с условием сохранения полного числа частиц газа. При этом происходит и соответствующее однородное в пространстве понижение интенсивности образования новых жизнеспособных закритических пузырьков вплоть до полного прекращения этого образования. Поскольку интенсивность генерации закритических пузырьков крайне чувствительна к величине пересыщения, то процесс генерации новых пузырьков практически прекращается при незначительном понижении среднего по пространству пересыщения по сравнению с его первоначальным значением. Как следствие, к окончанию стадии нуклеации почти весь газ остаётся ещё растворённым в жидкости, и только на следующей стадии основная часть избытка растворённого газа поглощается растущими пузырьками, число которых при этом остаётся уже неизменным вплоть до стадии Лифшица–Слёзова [5, 6].

Следует заметить, что применимость приближения однородного пересыщения является законной лишь в случае, когда размеры окружающих пузырьки диффузионных облаков велики не только по сравнению с размерами самих пузырьков, но и по сравнению

* Работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)», проект № РНП.2.1.1.4430.

© А. Е. Кучма, Ф. М. Куни, А. К. Щёкин, 2009

со средним расстоянием между пузырьками, так чтобы в диффузионном облаке каждого пузырька присутствовало много соседних пузырьков. Это условие далеко не всегда может быть выполнено. Так, оно заведомо не выполняется в самом начале процесса нуклеации, когда общее число пузырьков и их размеры ещё настолько малы, что среднее расстояние между пузырьками много превышает размеры и пузырьков, и диффузионных облаков вокруг них.

Действительно, с начала процесса нуклеации и до тех пор, пока диффузионные облака разных пузырьков остаются практически не перекрывающимися, каждый пузырёк «не знает» о существовании соседних. Локальное пересыщение раствора существенно понижается только внутри диффузионных облаков, окружающих пузырьки, и не меняется за их пределами, так что скорость роста каждого пузырька на этом этапе нуклеации определяется, очевидно, начальным значением пересыщения раствора. При этом и генерация новых закритических пузырьков также существенно подавляется только внутри диффузионных облаков и продолжается с практически начальной интенсивностью за их пределами. Поскольку с течением времени объём диффузионных облаков растёт, то образование новых устойчиво растущих зародышей новой фазы тормозится вследствие уменьшения объёма, в котором сохраняется интенсивная генерация.

Ход процесса существенно зависит от соотношения размеров растущего пузырька и окружающего пузырёк диффузионного облака, которое определяется степенью начального пересыщения. Рассмотрим этот вопрос подробнее с качественными оценками.

Состояние раствора будем задавать температурой T, давлением Π и начальной плотностью числа молекул n_0 растворённого газа. Через n_∞ обозначим плотность числа молекул растворённого газа в насыщенном растворе, который при заданных температуре T и давлении Π находится в химическом и механическом равновесии с чистым газом над плоской поверхностью их соприкосновения. Под пересыщением раствора понимаем величину $(n_0 - n_\infty)/n_\infty$.

Будем предполагать радиус пузырьков R настолько большим, что соблюдается сильное неравенство

$$R \gg \frac{2\sigma}{\Pi}, \tag{1}$$

где σ – поверхностное натяжение жидкого растворителя. Реально условие (1) можно использовать при описании ансамбля пузырьков, если ему удовлетворяет средний по ансамблю радиус. Вследствие (1) влияние сил Лапласа весьма мало, и давление газа в пузырьке, при его механическом равновесии с раствором, равно давлению Π раствора. При этом же газ в пузырьке может считаться идеальным, и для плотности числа молекул газа в пузырьке, которую обозначаем через n_g, имеем

$$n_g = \frac{\Pi}{kT},$$

где k – постоянная Больцмана.

Если начальная избыточная концентрация $n_0 - n_\infty$ молекул газа в растворе мала по сравнению с их концентрацией n_g в пузырьке, то заполнение пузырька может быть обеспечено диффузионным притоком молекул газа из раствора только в том случае, когда размер окружающего диффузионного облака намного превышает радиус самого пузырька. Как следствие, процесс диффузии близок к стационарному, а рост пузырька является медленным. В этом случае для качественной оценки можно записать

уравнение баланса числа молекул газа в виде

$$\frac{4\pi}{3}\, n_g R^3 \sim \alpha(n_0 - n_\infty) 4\pi R D t, \tag{2}$$

где D – коэффициент диффузии молекул газа в жидком растворителе, α – численный коэффициент порядка единицы. Время t отсчитывается от момента флуктуационного зарождения закритического пузырька, который затем растёт уже необратимо. Для зависимости радиуса пузырька от времени находим из соотношения (2) выражение

$$R \approx (3\alpha a)^{1/2} (Dt)^{1/2}, \tag{3}$$

в котором безразмерный параметр a определён соотношением

$$a \equiv \frac{n_0 - n_\infty}{n_g}. \tag{4}$$

При этом очевидно, что требование $R \ll (Dt)^{1/2}$, при котором размер диффузионного облака, имеющий порядок диффузионной длины $(Dt)^{1/2}$, велик по сравнению с размером пузырька, фактически эквивалентно условию $a^{1/2} \ll 1$. Таким образом, только в случае предельно малых a можно надеяться, что приближение однородного пересыщения может стать в той или иной степени оправданным.

Параметр a имеет простой физический смысл, выяснить который можно, используя условие сохранения полного числа молекул газа, имеющее вид

$$n_g V_{gf} = (n_0 - n_\infty) V_l, \tag{5}$$

где V_l – объём жидкого растворителя, а V_{gf} – суммарный финальный объём газовых пузырьков, образующихся за счёт полного поглощения избытка пересыщения растворённого газа. Учитывая определение (4) и вводя обозначение V_f для полного финального объёма раствора, перепишем условие (5) в виде

$$V_f = V_l + V_{gf} = (1 + a) V_l, \tag{6}$$

так что величина $1 + a$ показывает, во сколько раз возрастает объём раствора по сравнению с первоначальным вследствие образования газовых пузырьков.

Поскольку, как было показано выше, приближение однородного пересыщения может быть оправданным только при $a^{1/2} \ll 1$, то, как следует из (6), все результаты, получаемые с использованием этого приближения, применимы только для случаев, когда в процессе образования пузырьков полный объём раствора меняется незначительно.

В случае сильного начального пересыщения избыточная концентрация молекул газа в растворе $n_0 - n_\infty$ велика по сравнению с концентрацией газа n_g в растущем пузырьке, так что справедливо неравенство $a \gg 1$. В таких условиях для заполнения пузырька достаточно диффузионного притока молекул газа лишь из тонкого, по сравнению с радиусом пузырька, слоя окружающего раствора. Имея в виду, что толщина этого шарового слоя порядка диффузионной длины $(Dt)^{1/2}$, для оценки можем записать уравнение баланса числа молекул газа в виде

$$\frac{4\pi}{3}\, n_g R^3 \sim \beta(n_0 - n_\infty) 4\pi R^2 (Dt)^{1/2},$$

где β – численный коэффициент порядка единицы. Отсюда находим

$$R \approx 3\beta a (Dt)^{1/2}. \tag{7}$$

При этом $R \gg (Dt)^{1/2}$ в силу условия $a \gg 1$, и толщина диффузионного слоя, где концентрация раствора сильно неоднородна, действительно является малой по сравнению с радиусом пузырька. Очевидно, что для описания стадии нуклеации в этом случае приближение однородного потребления пересыщения абсолютно непригодно.

Таким образом, в случае сильного начального пересыщения раствора наиболее реалистичной представляется картина процесса нуклеации, основанная на том, что локальная интенсивность генерации новых жизнеспособных пузырьков является сильно неоднородной в пространстве. Внутри тонких диффузионных слоёв, окружающих растущие пузырьки, генерация практически полностью подавлена, а вне этих слоёв концентрация молекул газа, а вместе с ней и интенсивность генерации монотонно растущих зародышей остаются практически первоначальными. В таких условиях образование новых устойчиво растущих зародышей новой фазы тормозится уменьшением объёма, в котором сохраняется интенсивная генерация, а не понижением однородного в пространстве пересыщения. При этом возможность генерации новых растущих пузырьков сохраняется до тех пор, пока диффузионные слои, окружающие пузырьки, не охватят практически весь жидкий растворитель.

Попытка использования идеи исключённого объёма для описания стадии зарождения газовых пузырьков при декомпрессии газонасыщенного расплава была предпринята в работе [7]. Отметим, однако, что в [7] представления и выводы предложенной Колмогоровым [8] теории кристаллизации неподвижного расплава при точечных зародышах безосновательно переносятся на ситуацию, в которой важнейшую роль играет движение жидкого раствора при росте пузырьков. Кроме того, в [7] используется приближение стационарного диффузионного роста пузырьков, что явно неправомерно в условиях предполагаемого сильного пересыщения раствора, когда $a \gg 1$.

Для корректного определения объёма окружающего пузырёк диффузионного слоя, в котором подавлено зародышеобразование (учёт исключённого объёма), естественно использовать результаты, полученные в автомодельной теории нестационарного диффузионного роста пузырька при учёте движения жидкости [9].

Прежде всего отметим, что в случае автомодельного роста точная зависимость радиуса закритического пузырька от времени, прошедшего с момента его зарождения, даётся выражением

$$R = (2bDt)^{1/2}, \tag{8}$$

в котором безразмерный параметр b связан с ранее введённым параметром a следующим уравнением [9]:

$$\frac{a}{b} = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}\, e^{-b\frac{x^2}{2} - \frac{b}{x} + \frac{3b}{2}}. \tag{9}$$

Решение уравнения (9) относительно b сравнительно просто находится в предельных случаях. В случае $a^{1/2} \ll 1$ имеем $b \approx a$ и выражение (8) сводится к (3) при $\alpha = 2/3$. В случае $a \geqslant 10$, отвечающем сильному начальному пересыщению раствора, из (9) получаем

$$b \approx \frac{6}{\pi}\, a^2. \tag{10}$$

Выражение (8) сводится в этом случае к (7) при $\beta = (4/3\pi)^{1/2}$. Эти результаты подтверждают правильность приведённых выше качественных оценок соотношения между радиусом R растущего пузырька и диффузионной длиной $(Dt)^{1/2}$ в зависимости от степени начального пересыщения раствора.

Далее, в работе [10] на основе автомодельной теории диффузионного роста пузырька строго показано, что при $a \geqslant 10$ концентрация растворённого газа вне окружающей пузырёк сферической поверхности радиуса $R(1 + 1/a)$ с центром в центре пузырька с высокой точностью совпадает с первоначальной концентрацией n_0. Таким образом, толщину окружающего пузырёк шарового слоя, в котором подавлено образование новых растущих зародышей, можно положить равной R/a. В результате при $a \geqslant 10$ для величины $V_{\text{ex}}(R)$ исключаемого из процесса нуклеации объёма, окружающего отдельный пузырёк радиуса R, получаем

$$V_{\text{ex}}(R) = \frac{4\pi}{3}\left(\left(1 + \frac{1}{a}\right)^3 - 1\right) R^3 \approx \frac{4\pi}{a}\, R^3,$$

так что отношение q исключённого объёма $V_{\text{ex}}(R)$ к объёму самого пузырька, равному

$$V_R(t) = \frac{4\pi}{3} R^3(t), \tag{11}$$

есть

$$q = \frac{V_{\text{ex}}(R)}{V_R(t)} = \frac{3}{a}. \tag{12}$$

Поскольку величина q не зависит от размера пузырька, то такое же соотношение справедливо и для ансамбля растущих пузырьков в целом. Иными словами, если суммарный объём пузырьков в момент времени t равен $V_g(t)$, то генерация новых пузырьков будет подавлена в части жидкости объёмом $qV_g(t)$. Соответственно, исходная интенсивность генерации сохраняется в объёме $V_1(t)$, равном

$$V_1(t) = V_l - qV_g(t),$$

где объём жидкого растворителя V_l (постоянный во времени) можно понимать как первоначальный объём жидкого раствора.

Число пузырьков $dN(\tau)$, зародившихся в растворе за малый промежуток времени от момента τ до $\tau + d\tau$, есть

$$dN(\tau) = IV_1(\tau)d\tau = I(V_l - qV_g(\tau))d\tau, \tag{13}$$

где I – интенсивность генерации (скорость нуклеации) монотонно растущих пузырьков при исходном пересыщении (число закритических пузырьков, рождающихся в единице объёма однородного жидкого раствора за единицу времени). Полагая, что в момент зарождения пузырёк имеет радиус, равный нулю, а дальнейший рост зародившихся газовых пузырьков идёт в соответствии с (10), для нарастающего со временем суммарного объёма пузырьков $V_g(t)$ получим, используя (13), следующее интегральное уравнение:

$$V_g(\tau) = I \int_0^t d\tau (V_l - qV_g(\tau))V_R(t - \tau), \tag{14}$$

где объём отдельного пузырька $V_R(t)$ задаётся формулой (11) с радиусом $R(t)$, определённым по (8).

Если объём измерять в единицах V_l и ввести величину

$$y \equiv \frac{V_g(t)}{V_l}, \tag{15}$$

то для неё, с учётом явного выражения для $V_R(t)$, вытекающего из (11) и (8), получим из (14) уравнение

$$y(t) = \lambda t^{5/2} \int_0^1 ds(1-s)^{3/2}(1-qy(ts)), \tag{16}$$

где

$$\lambda \equiv \frac{4\pi}{3}\, I(2Db)^{3/2}. \tag{17}$$

Для функции

$$z(t) \equiv \frac{V_1(t)}{V_l}, \tag{18}$$

связанной с $y(t)$ по (15) соотношением $z = 1 - qy$, имеет место сходное с (16) уравнение

$$z(t) = 1 - q\lambda t^{5/2} \int_0^1 ds(1-s)^{3/2} z(ts), \tag{19}$$

причём величина z (доля объёма жидкости, где интенсивность зародышеобразования сохраняется на первоначальном уровне) положительна и монотонно убывает от единицы до нуля к тому моменту времени, когда заканчивается процесс нуклеации.

Как показано в Приложении, точное решение уравнения (19) может быть построено в виде степенного ряда. Соответствующий результат имеет вид

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(q\lambda\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) t^{5/2}\right)^k}{\Gamma\left(\frac{5k}{2}+1\right)}. \tag{20}$$

Необходимая неотрицательность величины $z(t)$ сохраняется в течение промежутка времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$, где t_1 – наименьший положительный корень определяемой степенным рядом (20) функции. Момент времени $t = t_1$ соответствует окончанию стадии нуклеации, так что продолжительность t_1 этой стадии находится как решение уравнения

$$z(t_1) = 0. \tag{21}$$

Имея в виду, что ряд (20) весьма быстро сходится, для определения t_1 воспользуемся приближённым выражением для функции $z(t)$, оставляя в ряду (20) только первые два слагаемых. В этом приближении для $z(t)$ имеем выражение

$$z(t) = 1 - \frac{2}{5}\, q\lambda t^{5/2}, \tag{22}$$

и из (21) для t_1 немедленно получаем

$$t_1 = \left(\frac{5}{2q\lambda}\right)^{2/5} \tag{23}$$

(величины q и λ раскрываются с помощью (12) и (17)). Используя явный вид коэффициентов ряда (20) и учитывая, что этот ряд является знакопеременным, нетрудно показать, что относительная погрешность значения величины t_1, найденная с использованием приближённого выражения (22), уже является достаточно малой и составляет примерно $5 \cdot 10^{-2}$. Поэтому в дальнейших расчётах будем использовать приближённое выражение (22).

Учитывая определение $z(t)$ (18), из (22) и (23) сразу получаем

$$V_1(t) = V_l \left(1 - \left(\frac{t}{t_1}\right)^{5/2}\right). \tag{24}$$

Суммарный объём пузырьков нарастает с течением времени в соответствии с соотношением

$$V_g(t) = \frac{V_l}{q}\,(1 - z(t)) = \frac{V_l}{q}\left(\frac{t}{t_1}\right)^{5/2} \tag{25}$$

и к концу стадии нуклеации достигает значения

$$V_g(t_1) = \frac{V_l}{q} = \frac{a}{3}\,V_l, \tag{26}$$

где учтено (12). При этом полный объём раствора возрастает до величины $V(t_1) = V_l + {} + V_g(t_1) = (1 + a/3)V_l$. При $a \geqslant 10$ это возрастание весьма значительно, хотя, как видно из (6), $V(t_1)$ составляет примерно одну третью часть от V_f.

Зависимость от времени числа пузырьков в растворе $N(t)$ даётся в соответствии с (13) выражением

$$N(t) = I \int\limits_0^t V_1(\tau)d\tau = IV_l t \left(1 - \frac{2}{7}\left(\frac{t}{t_1}\right)^{5/2}\right), \tag{27}$$

где учтено (24). Полное число пузырьков в конце стадии нуклеации есть

$$N(t_1) = \frac{5}{7}\,IV_l t_1. \tag{28}$$

Используя (24) и (8), перепишем интегральное выражение (27) с заменой в нём переменной интегрирования τ на переменную $t - t'$, где t' – время, за которое радиус капли вырастает от нулевого значения в момент зарождения до значения $R' = R(t')$. Снова используя (8), перейдём от интегрирования по t' к интегрированию по R'^2. Получаем

$$N(t) = \frac{IV_l}{2Db} \int\limits_0^{2Dbt} dR'^2 \left[1 - \frac{\left(t - \frac{R'^2}{2Db}\right)^{5/2}}{t^{5/2}}\right]. \tag{29}$$

Отсюда следует, что распределение пузырьков по переменной R^2 в текущий момент времени t даётся формулой

$$N(R^2, t) = \frac{IV_l}{2Db}\left[1 - \frac{\left(t - \frac{R^2}{2Db}\right)^{5/2}}{t^{5/2}}\right]. \tag{30}$$

Из (30) для среднего радиуса пузырьков $\overline{R}(t)$ в момент времени t получаем

$$\overline{R}(t) \equiv \frac{1}{V(t)} \int\limits_0^{2Dbt} dR^2 RN(R^2,t) = \frac{2}{3}\, R(t) \frac{1 - \frac{15\pi}{256}\left(\frac{t}{t_1}\right)^{5/2}}{1 - \frac{2}{7}\left(\frac{t}{t_1}\right)^{5/2}}, \tag{31}$$

где $R(t)$ определяется выражением (8) и соответствует размеру наибольшего пузырька в данный момент времени. В частности, для момента времени t_1 окончания стадии нуклеации из (31) следует $\overline{R}(t_1) \approx 0{,}76R(t_1) = 0{,}76(2Dbt_1)^{1/2}$.

Приложение. Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$f(t) = 1 - \gamma \int\limits_0^t dt_1 (t - t_1)^n f(t_1), \tag{П1}$$

в котором $n > -1$.

Вводя в (П1) новую переменную интегрирования $s = t_1/t$, получим

$$f(t) = 1 - \gamma t^{n+1} \int\limits_0^1 ds (1 - s)^n f(ts). \tag{П2}$$

Путём последовательных итераций можно построить решение уравнения (П2) в виде степенного ряда. Очевидно, что этот ряд будет содержать только степени величины t^{n+1}, поэтому удобно рассматривать в качестве аргумента искомой функции именно переменную $u = t^{n+1}$, с использованием которой уравнение (П2) принимает вид

$$f_1(u) = 1 - \gamma u \int\limits_0^1 ds (1 - s)^n f_1(s^{n+1}u), \tag{П3}$$

где введено обозначение $f_1(u) = f(t(u))$.

Будем искать решение уравнения (П3) в виде степенного ряда

$$f_1(u) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k. \tag{П4}$$

Из (П3) и (П4) с очевидностью следует $a_0 = 1$. Далее, поскольку

$$a_k = \frac{f_1^{(k)}(0)}{k!},$$

то, очевидно, для всех $k \geqslant 0$ имеет место соотношение

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{k+1} \frac{f_1^{k+1}(0)}{f_1^k(0)}. \tag{П5}$$

Для нахождения отношения производных в правой части соотношения (П5) продифференцируем $(k+1)$ раз обе части уравнения (П3) по u и положим затем $u = 0$. В результате получим

$$f_1^{k+1}(0) = -\gamma(k+1) f_1^k(0) \int\limits_0^1 ds (1 - s)^n s^{(n+1)k}. \tag{П6}$$

Интеграл в правой части (П6), являющийся известным представлением β-функции, может быть выражен через Γ-функции:

$$\int_0^1 ds(1-s)^n s^{(n+1)k} = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma((n+1)k+1)}{\Gamma((n+1)(k+1)+1)}. \qquad (П7)$$

Используя выражения (П6) и (П7), из (П5) получаем для коэффициентов ряда (П4) следующее соотношение

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = -\gamma\frac{\Gamma(n+1)\Gamma((n+1)k+1)}{\Gamma((n+1)(k+1)+1)}. \qquad (П8)$$

Условию $a_0 = 1$ и соотношению (П8) при $k \geqslant 0$ удовлетворяет единственная последовательность коэффициентов a_k, которая, как нетрудно убедиться, задаётся формулой

$$a_k = (-1)^k\frac{(\gamma\Gamma(n+1))^k}{\Gamma((n+1)k+1)}. \qquad (П9)$$

Подставляя выражение (П9) в (П4) и возвращаясь обратно к переменной t, получим для искомой функции $f(t)$ следующее выражение

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\gamma\Gamma(n+1)t^{n+1})^k}{\Gamma((n+1)k+1)}. \qquad (П10)$$

При $\gamma = \lambda q$, $n = 3/2$ и $f(t) \equiv z(t)$ уравнение (П2) совпадает с уравнением (19), а ряд (П10) совпадает с (20). Это и показывает, что функция, определяемая степенным рядом (20), действительно является решением уравнения (19).

Литература

1. *Куни Ф. М., Огенко В. М., Ганюк Л. Н., Гречко Л. Г.* Кинетическое уравнение распада пересыщенного газом раствора // Коллоид. журн. 1993. Т. 55. № 2. С. 28–33.

2. *Куни Ф. М., Жувикина И. А.* Теория гомогенного вскипания жидких растворов. 1. Кинетическое уравнение вскипания // Там же. 2002. Т. 64. № 2. С. 188–193.

3. *Куни Ф. М., Жувикина И. А., Гринин А. П.* Теория гомогенного вскипания жидких растворов. 3. Рост закритических пузырьков при учёте летучести растворителя // Там же. 2003. Т. 65. № 2. С. 227–231.

4. *Слёзов В. В., Абызов А. С., Слёзова Ж. В.* Зарождение газонаполненных пузырьков в маловязких жидкостях // Там же. 2004. Т. 66. № 5. С. 643–652; *Они же.* Кинетика распада пересыщенной газом маловязкой жидкости на переходной и поздней стадиях // Там же. 2005. Т. 67. № 1. С. 94–105.

5. *Лифшиц И. М., Слёзов В. В.* О кинетике диффузионного распада пересыщенных твёрдых растворов // Журн. экспер. теор. физики. 1958. Т. 35. С. 479–492.

6. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. Теоретическая физика: в 10 т. Т. 10., М., 1979.

7. *Чернов А. А., Кедринский В. К., Давыдов М. Н.* Спонтанное зарождение пузырьков в газонасыщенном расплаве при его мгновенной декомпрессии // Прикл. механ. техн. физика. 2004. Т. 45. № 2. С. 162–168.

8. *Колмогоров А. Н.* К статистической теории кристаллизации металлов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1937. Т. 3. С. 355–359.

9. *Гринин А. П., Кунн Ф. М., Гор Г. Ю.* Теория нестационарного диффузионного роста пузырька газа в пересыщенном растворе газа в жидкости // Коллоид. журн. 2009. Т. 71. № 1. С. 47–55.

10. *Кунн Ф. М., Кучма А. Е., Аджемян Л. Ц.* Узость области неоднородности сильно пересыщенного газом жидкого раствора вокруг растущего в нём пузырька газа // Там же. № 3. С. 363–367.

Принято к публикации 1 июня 2009 г.