

Интро

1) Вселенная полна черного излучения при температуре 2.73 К. Предположим, радиус вселенной меняется линейно $R = Ht$, H - постоянная Хаббла, t - возраст вселенной. Предположим, полная энергия излучения во вселенной постоянна. Вычислите, как теплоёмкость единицы объёма излучения меняется со временем.

2) Для спиновых волн дисперсионное соотношение имеет вид $\omega = \alpha k^2$. Найти, как в двумерных системах внутренняя энергия зависит от температуры?

3) Элементарные возбуждения в сверхтекучем жидком гелии можно рассматривать как квазичастицы со сложным дисперсионным соотношением. Для волнового вектора меньше, чем $0.8 * 10^{10}$ метра⁻¹ дисперсионное соотношение практически линейное

$$\epsilon(p) = \hbar sp$$

Соответствующие квазичастицы называются фононы.

Для волновых векторов порядка $2 * 10^{10}$ метра⁻¹ дисперсионное соотношение имеет вид

$$\epsilon(p) = \Delta + \frac{\hbar^2(p - p_0)^2}{2\mu}$$

т. е. зависимости типа параболической ямы дно которой соответствует основному состоянию квазичастиц, называемых ротоны. Ротонная энергия Δ соответствует 8.65 К, величина $p_0 \simeq 2 * 10^{10}$ метра⁻¹ при нулевом давлении.

Свободная энергия газа возбуждений в гелии имеет фононную (продольный звук) и ротонную составляющие. Найдите эти составляющие.

3) Разбавленный раствор ³He в сверхтекучем ⁴He.

⁴He выступает как инертный фон для слабо взаимодействующих фермионов ³He. Кроме того, обычная масса атома ³He заменяется на эффективную, зависящую от давления, при нулевом давлении m_* в 2.26 раз больше обычной массы атома. Дисперсионное соотношение

$$\epsilon(p) = \epsilon_0 + \frac{\hbar^2 p^2}{2m_*} \left(1 - \frac{p^2}{p_0^2} \right)$$

Запишите выражение для давления в виде интегрального представления. Исследуйте его в асимптотике $p_0 \rightarrow \infty$

4) Исследуйте намагниченность идеального бозе-газа, частицы которого обладают магнитным моментом z , как функцию температуры газа.

5) Исследуйте намагниченность идеального ферми-газа, частицы которого обладают магнитным моментом z , как функцию температуры газа.

6) Идеальный бозе-газ со спином 1 находится во внешнем магнитном поле индукции B . Вычислите статсумму. Найдите давление такого газа в низкотемпературном пределе.

7) Идеальный ферми-газ со спином 1/2 находится во внешнем магнитном поле индукции B . Вычислите статсумму. Найдите давление такого газа в низкотемпературном пределе.

Массивные, в пространствах разной размерности

8) Найти химпотенциал квантового двумерного массивного ферми-газа и рассмотреть квазиклассический и низкотемпературный пределы полученной формулы.

9) Найти химпотенциал квантового двумерного массивного бозе-газа. Рассмотреть квазиклассический и низкотемпературный пределы полученной формулы.

10) Найти давление квантового двумерного массивного ферми-газа и рассмотреть низкотемпературный предел полученной формулы. Что происходит при малой массе частиц?

11) Найти давление квантового n -мерного массивного бозе-газа и рассмотреть низкотемпературный предел полученной формулы. Что происходит при малой массе частиц?

12) Найти давление квантового двумерного массивного газа (ферми и бозе) и рассмотреть квазиклассический предел полученной формулы.

13) Найти химпотенциал квантового n -мерного массивного квантового газа и рассмотреть высоко- и низкотемпературный предел полученной формулы.

14) Найти давление квантового n -мерного массивного ферми-газа и рассмотреть низкотемпературный предел полученной формулы.

- 15) Найти давление квантового n -мерного массивного бозе-газа и рассмотреть низкотемпературный предел полученной формулы.
- 16) Найти теплоёмкость квантового n -мерного массивного газа и рассмотреть высокотемпературный предел полученной формулы.
- 17) Найти теплоёмкость квантового n -мерного массивного ферми-газа и рассмотреть низкотемпературный предел полученной формулы.
- 18) Найти теплоёмкость квантового n -мерного массивного бозе-газа и рассмотреть низкотемпературный предел полученной формулы.

Безмассовые

- 19) Найти химпотенциал квантового двумерного безмассового ферми-газа и рассмотреть низкотемпературный предел полученной формулы для химпотенциала
- 20) Найти давление квантового двумерного безмассового бозе-газа и рассмотреть низкотемпературный предел полученной формулы
- 21) Найти давление квантового двумерного безмассового ферми-газа и рассмотреть низкотемпературный предел полученной формулы
- 22) Гравитоны - безмассовые частицы со спином 2. Найдите плотность числа частиц гравитонного газа, имеющего температуру $T = 3^\circ\text{K}$. Во сколько раз она отличается от плотности реликтового излучения при той же температуре?

Цилиндры

23) Наличие реликтового излучения позволяет ввести во Вселенной выделенную систему отсчёта, в которой газ реликтовых фотонов покоится. По анизотропии температуры реликтового излучения было установлено, что Солнечная система движется относительно этой системы в направлении созвездия Гидры со скоростью ~ 310 км/с. С какой точностью надо измерять температуру реликтового излучения, чтобы определить эту скорость по анизотропии температуры? Как именно лучше ставить такой опыт? Примечание: импульс фотона при переходе в другую систему отсчёта меняется в соответствии с релятивистским эффектом Доплера.

24) Наличие реликтового излучения позволяет ввести во Вселенной выделенную систему отсчёта, в которой газ реликтовых фотонов покоится. С какой точностью надо измерять температуру реликтового излучения, чтобы определить по этим данным орбитальную скорость Земли?? Примечание: импульс фотона при переходе в другую систему отсчёта меняется в соответствии с релятивистским эффектом Доплера. Как именно надо ставить такой опыт?

25) Какое количество энергии в единицу времени попадает на площадку S размещённую в равновесном нейтринном излучении с температурой 1.9^0 К; в 1 кубическом сантиметре содержится 330 нейтрино? Нейтрино считать безмассовой частицей со спином $1/2$

26) Какое количество энергии в единицу времени попадает на площадку S размещённую в равновесном нейтринном излучении с температурой 1.9^0 К; средняя энергия, которую имеет нейтрино, составляет $5 \cdot 10^{-4}$ эВ? Нейтрино считать безмассовой частицей со спином $1/2$

27) Площадь внутренней поверхности глаза порядка 17 см². Температура полости глаза 37^0 С. Оценить энергию теплового излучения, падающего на сетчатку. Сравнить ее с энергией, падающей в глаз при разглядывании Солнца невооруженным глазом. Максимальная площадь зрачка 0.7 см²; можно воспользоваться результатом задачи о солнечном излучении, где мы получили, что на Землю ежесекундно падает из космоса 2 кг солнечных лучей. Считайте, что примерно 40% энергии лучей преодолевает атмосферу. Радиус Земли 6400 км.

28) Температура полости глаза 37^0 С. Оценить характерную длину волны излучения падающего на сетчатку. Сравнить с длиной волны видимого света 4000 - 7000 Ангстрем.

29) Какое количество энергии в единицу времени уносят с единицы площади поверхности Солнца электроны? Концентрация электронов в короне $\sim 10^8$ см⁻³ Излучение считать равновесным, температура 10^6 К. Электрон-фотонным взаимодействием пренебречь.

Оценки

30) Электроны в металле $n \sim 10^{28}$ м⁻³ - концентрация электронов в металле. Масса электрона известна. Найти характерное давление и теплоёмкость при комнатной температуре. Электроны считать невзаимодействующими.

31) Электроны в звездах Типичная масса звезды $M = 3 * 10^{30}$ кг, радиус $R = 3 * 10^7$ м, температура $T = 10^7$ К. Предполагаем, что звезда состоит из диссоциированного водорода. Оценить Ω электронов и теплоёмкость в расчете на единицу объема. Электроны считать не взаимодействующими, газ – равновесным.

32) Оцените для калия вклад в теплоемкость за счет электронного газа при комнатной температуре. Энергия Ферми для калия 2 эВ.

33) Вычислите адиабатический модуль всестороннего сжатия $B = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S$ при низких T для электронов в металле. Вычислите модули, соответствующие электронной плотности калия цезия и меди (см. таблицу). Почему вычисленные B отличаются от экспериментальных значений (см. последнюю колонку таблицы).

Металл	Плотность, м^{-3}	E_F эВ	B , Паскаль
Калий	$1.3 * 10^{28}$	0.9	$2.81 * 10^9$
Цезий	$0.9 * 10^{28}$	0.7	$1.43 * 10^9$
Медь	$8.5 * 10^{28}$	7	$134.3 * 10^9$

34) На ранних этапах существования вселенной можно с хорошей точностью пренебречь кинетической энергией частиц и химпотенциалом по сравнению с kT . Оцените плотность числа не взаимодействующих фермионов а также плотность энергии.

35) Найдите характерную концентрацию фононов в твёрдом теле при комнатной температуре. Во сколько раз эта концентрация отличается от равновесной концентрации фотонов при этой же температуре?

Релятивистская поправка и звук

36) Исследуйте первую релятивистскую поправку к статистическим свойствам квантового массивного бозе-газа на примере его химпотенциала. Что происходит с этой поправкой при высоких и низких температурах?

37) Исследуйте первую релятивистскую поправку к статистическим свойствам квантового массивного ферми-газа на примере его химпотенциала. Что происходит с этой поправкой при высоких и низких температурах?

38) Исследуйте релятивистскую поправку к статистическим свойствам квантового массивного бозе-газа на примере его давления. Что происходит с этой поправкой при высоких и низких температурах?

39) Нейтрино - частицы со спином $1/2$ и с очень малой массой. Долгое время считалось, что эта масса равна нулю. Оцените вклад массивной поправки в давление нейтринного газа.

40) Исследуйте скорость звука массивного квантового газа в окрестности точки бозе-конденсации.

41) Исследуйте скорость звука массивного ферми-газа в пределе низких температур.

Смеси и равновесие

42) Имеется равновесная смесь ферми- и бозе- газов. Массы частиц одинаковы. Найти давление смеси. Рассмотреть низко- и высокотемпературный пределы.

43) Имеется равновесный квантовый ферми-газ. Предположим, две его частицы умеют слипаться, образуя более тяжелую частицу. Исследуйте химпотенциал такой системы и постройте качественный график $\mu(T)$.

44) Имеется равновесный квантовый ферми-газ. Предположим, две его частицы умеют слипаться, образуя более тяжелую *бесспиновую* частицу. Исследуйте химпотенциал и постройте качественный график $\mu(T)$.

45) Имеется равновесный квантовый ферми-газ. Предположим, две его частицы умеют слипаться, образуя более тяжелую *бесспиновую* частицу. Исследуйте давление такой системы и постройте качественный график $P(n)$.

46) Имеется равновесный квантовый бозе-газ бесспиновых частиц. Предположим, две его частицы умеют слипаться, образуя более тяжелую частицу. Исследуйте химпотенциал и постройте качественный график $\mu(T)$.

47) Имеется равновесный квантовый бозе-газ бесспиновых частиц. Предположим, две его частицы умеют слипаться, образуя более тяжелую частицу. Исследуйте давление такой системы и постройте качественный график $P(n)$.

48) Имеется равновесная смесь массивного и безмассового бозе-газов максимальной возможной концентрации при температуре T . Найти давление в низкотемпературном пределе. Какая компонента дает больший вклад?

49) Исследуйте механическое равновесие шарообразного космического тела массы M , состоящего исключительно из массивных бозе-частиц. Как температура T такого тела связана с предельно возможным радиусом?

50) Рассмотрим идеальный газ, состоящий из классических частиц, движущихся в объеме шара радиуса R . Известно, что с некоторой вероятностью частица может прилипнуть к стенке шара и начать ездить вдоль его поверхности, а может отлипнуть и снова начать двигаться в объеме, при этом статистика прилипших частиц соответствует двумерному идеальному классическому газу. Температура T , полное число частиц N . Найти, какая доля частиц будет в равновесии находиться у стенки.