

1 Простейший инструментарий квантовой механики

1.1 Литература

Галицкий В.М. Карнаков Б.М. Коган В.И., "Задачи по квантовой механике"
Левитов Л.С., Шитов А.В., "Функции Грина. Задачи и решения"
Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. "Введение в теорию квантованных полей"
Васильев А.Н. "Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике"
Бьёркен Дж.Д., Дрелл С.Д., "Релятивистская квантовая теория"
Рубаков В.А., "Классические калибровочные поля"
Edwin F. Taylor, Stamatis Vokos, John M. O'Meara, and Nora S. Thornber, Computers in Physics, Vol 12, No. 2, Mar/Apr 1998, pages 190 "Teaching Feynman's Sum Over Paths Quantum Theory"
(<http://www.eftaylor.com/index.html>)
Р. Пауэрлс "Сюрпризы в теоретической физике"
http://written.ru/articles/science/history_of_high_energy_physics
<http://www.eduspb.com/node/2343>

1.2 План курса в контексте "квантовой хронологии"

<http://www.eduspb.com/node/2343>

1864 Максвелл показал, что свет имеет колебательную природу. Уравнения Максвелла описывают движение заряда в заданном поле либо распространение э/м поля, порожденное заданной системой зарядов. СГС, СИ:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/c\partial t \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}/c + \partial\mathbf{D}/c\partial t.$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}/c + \partial\mathbf{D}/\partial t.$$

А если заряды движутся в поле, которое сами создают? Нужно уравнение движения материи. В простых макроскопических задачах в этой роли выступают, например, связь поляризации и намагничённости среды с напряженностью полей ($\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ в теории линейного отклика), закон Ома, II закон Ньютона... В микроскопике таких законов не было известно. Применение макроскопических законов стало приводить к **парадоксам** – см. ниже.

Итак, поняли, что **надо изучать взаимодействие света и вещества**. Опыт показал **квантованность** энергии света.

5 лет назад... Свет - частица?

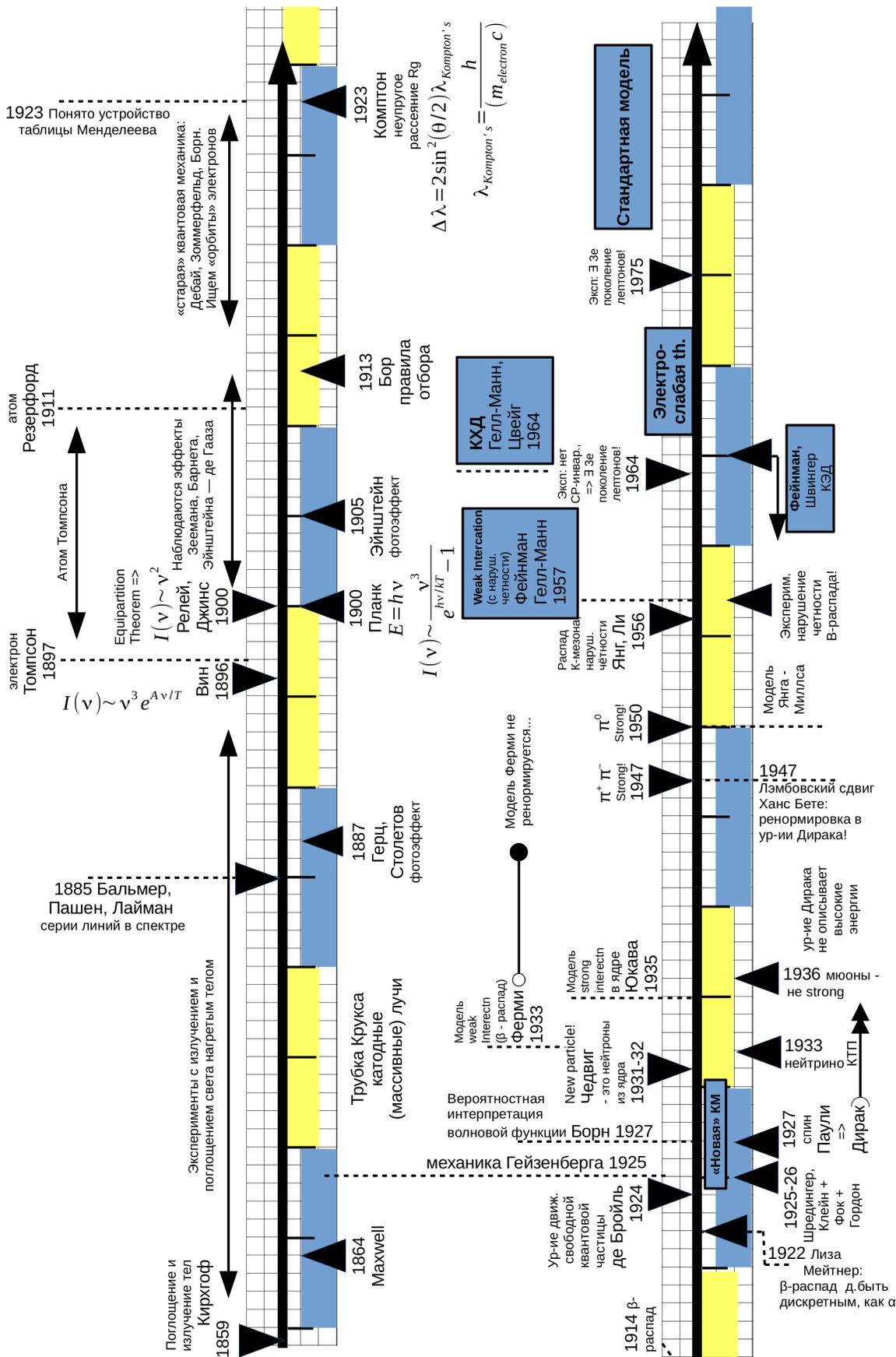
1859 **Кирхгофф**: Тело в потоке света в равновесии поглощает и нагревается; нагретое тело излучает. Коэффициент излучения, деленный на коэффициент поглощения, зависит от температуры тела и частоты света и не зависит от вещества (\equiv функция Кирхгофа)! Фактически, это экспериментальное доказательство того, что свет находится в т/д равновесии с веществом. Функция Кирхгофа – то же самое, что спектр излучения абс. черного тела (у него единичный коэффициент поглощения). Коэфф. изл. – доля излученной энергии по отношению к абс. черному телу при той же T .

Экспериментально спектр чёрного тела изучался с 1865 до конца XIX века. Формула Вина 1896, Релей и Джинс 1900 (применение термодинамики для световых колебаний: надо число стоячих волн умножить на $2 * kT/2$, УФ-катастрофа), Планк 1900: **свет квантован**. Вспоминаем эти формулы (I – спектральная плотность энергии):

$$I(\omega) \sim \omega^3 \exp(-A\omega/T), \quad I(\omega) \sim \omega^2, \quad I(\omega) \sim \frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}$$

Здесь использовано распределение Больцмана (1871) + "формула Планка" $E = \hbar\omega$ (энергия фотона).

1887, Герц и Столетов: **фотоэффект**. Определяется частотой волны, а не её полной энергией? Неинерционный эффект (даже слабая волна выбивает электроны мгновенно, хотя логично было бы дать ей большее время на раскачку электронов, чем сильной волне). 1905, Эйнштейн объяснил фотоэффект, нашел связь с ф-лой Планка.



1923 **Комптон**, рассеяние рентгена на свободных электронах:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_{\text{комптона}} 2 \sin^2(\theta/2), \quad \lambda_{\text{комптона}} = \frac{h}{m_e c}$$

Превращается в классическое рассеяние, если $mc^2 \gg h\nu$. Уменьшение энергии фотона в рамках классической электродинамики объяснить невозможно, так как рассеяние электромагнитной волны на заряде (томсоновское рассеяние) не меняет её частоты (заряд совершает вынужденные колебания в поле волны, излучая по ур-ям Максвелла волны той же частоты).

Проблемы с веществом – снова назад во времени

Загадка атомных спектров: 1885-... дискретные спектральные серии Бальмера, Пашена, Лаймана обнаружены феноменологически. Бальмер-пифагореец развлекался поиском закономерностей. Есть байка, что он хвастался, что найдет формулу для последовательности любых четырех чисел, и друг подсунул ему длины волн спектра водорода. Структура частот в атоме ω_{mn} – серии Ридберга, Ритца... Загадка не поддавалась до Нильса Бора.

Электрон: Трубка Крукса (для исследования разряда при низких давлениях изобрели вакуумный насос и наслаждались пурпурным свечением в трубке). Крукс установил (1870-74гг.), что если хорошо откачать воздух, внутри трубки движется "массивные лучи". Эктоплазма? Возрос спрос на духов. 1897 Дж. Дж. Томпсон открыл электрон, модель атома Томпсона ("пудинг с изюмом"). Новые проблемы: бесконечная малость электрона? Что удерживает заряды в атоме отдельно?

Атомная физика – волновые свойства вещества

1911 – опыт Резерфорда, модель Резерфорда – противоречие с классической электродинамикой.

1913 – Знакомый спектроскопист показал Бору формулу серии Бальмера. Бора осенило и он предложил феноменологию стабильного атома. Ф-ла Ридберга $1/\lambda = RZ^2(n_1^{-2} - n_2^{-2})$. Дебай, Зоммерфельд, Борн "старая квантовая механика": найти орбиты электрона в атоме. "Принцип соответствия", "правила отбора"

1923 – интерпретация таблицы Менделеева, согласие излучаемых частот с экспериментом; интенсивность линий не предсказывали.

Атом в магнитном поле – противоречия с классикой: Зееман, эффект Эйнштейна-де Гааза, Барнетта, Штерна-Герлаха...

Волновая механика

1924, де Бройль. **Свет, вещество - частица или волна? "Дуализм" Если вещество ведёт себя как волна, то где уравнение этой волны?**

- Ввел формально для частиц длину волны и волновое число в дополнение к энергии и импульсу частицы $E = \hbar\omega$, $p = \hbar k$.
- Сопоставил частице вещества волну чего-то, т.е. ввел $\psi(x)$ (физический смысл был неясен). отождествил плоскую волну $e^{i(kx - \omega t)}$ и поток свободных частиц, заменив k и ω : $e^{i(px - Et)/\hbar}$
- Применил СТО. Он знал, что

$$E^2/c^2 = (mc)^2 + p^2 \text{ либо } E = p^2/2m. \\ (\hbar\omega/c)^2 = (mc)^2 + (\hbar k)^2 \text{ либо } \hbar\omega = (\hbar k)^2/2m.$$

Этому уравнению должна удовлетворять плоская волна $\exp^{i(kx - \omega t)}$. Подберем дифур!

$$(i\hbar\partial_t/c)^2\psi = (mc)^2\psi + (-i\hbar\nabla)^2 \text{ либо } i\hbar\partial_t\psi = (-i\hbar\nabla)^2\psi/(2m),$$

т.е. получился Клейн-Гордон и Шредингер, но для СВОБОДНЫХ частиц.

1925-1926: Клейн-Гордон-Фок и Шредингер. Добавили взаимодействие в эти уравнения. Заметили, что классическое E заменяется на производную по времени, а импульс – на градиент. Взаимодействие им было нужно электромагнитное. В классике известно, что чтобы добавить в гамильтониан э/м поле, надо $p \rightarrow p - eA/c$, $E \rightarrow E - e\varphi$, т.е.

$$(\partial_t - e\varphi)\psi = (-i\hbar\nabla - eA/c)^2\psi/(2m).$$

Шредингер отождествил стационарные решение этого уравнения с Боровскими уровнями. Расчет атома водорода (E – поле точечного заряда, $A=0$)

КМ

1925 Вернер Гейзенберг: матричная механика. Также согласие с эксп., но нет координат и времени, только собственные числа, матрицы. Динамика: уравнения на операторы, аналог скобок Пуассона в теореме. "Микромир имеет иное устройство" (за орто- и параводород – Нобелевская по химии 1932 года). Уленбек и Гоудемит - идея спина.

1927 Борн – вероятностная интерпретация $|\psi(x)|^2$.

1927 Паули – нерелятивистская теория спина. К Шредингеру справа добавим кое-что

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi = \left[\frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{e}{c}A\hat{I} \right)^2 + e\varphi\hat{I} - \mu_B(\hat{\sigma}\vec{B}) \right] \psi, \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}, \quad \text{магнетон Бора.}$$

(напоминание): Магнитный момент витка с током $\mu_B = IS/c$, для электрона $\mu = \mu_B l$, где l – главное квантовое число.

1927 Дирак – нужно релятивистское обобщение Паули, то есть К-Г-Ф+ спин. Но из-за ∂_t^2 при обобщении плотность вероятности $\rho < 0$. Да и ещё $E < 0$. Дирак: напишем эквивалентное уравнение, но первого порядка ∂_t , правда действовать будет на 4компонентную матрицу. Тогда $\rho > 0$. А как насчет энергии? Получились античастицы.

Элементарные частицы

1931 α -частицы, налетая на Li, Be порождают новое излучение. 1932 Джеймс Чедвик показал, что это нейтроны.

1933 открыто нейтрино

1914 открыт β -распад, но спектр вылетающих электронов непрерывный. Лиза Мейтнер (1922) - он должен быть дискретным! Бор (1931)

- может быть, не выполняется ЗСЭ? Паули (1930-1933) - энергию уносит некая частица.

1935 Хидэки Юкава: модель силового поля, связывающего протоны и нейтроны в ядре. И ведь есть кванты этого поля - новые частицы???. 1936 Карл Дэвид Андерсен (тот, который открыл позитрон в космическом излучении в 1932) открыл мюоны. Сначала назвал их мезотронами ("мезо"="промежуточный"; отклонялись в магнитном поле слабее электронов, но сильнее протонов). Считал сначала, что это частицы, предсказанные Юкавой. Потом стал называть их " μ -мезоны", чтобы можно было классифицировать разные мезоны. Но мю-мезоны, оказалось, вообще не участвовали в сильном взаимодействии, да и не мезоны, а лептоны. Так что в конце концов их переименовали мюонами. (см. таблицу элементарных частиц, table-elem)

1947 Открыли юкавовские частицы, пионы (=пи-мезоны). Сначала заряженные, а в 1950 - π^0 мезон.

КЭД

Отсюда начинается то, чем будем заниматься:

- Где кончается КМ и начинается КТП?
- Обзор понятий КМ, которые станут важными в КТП: пропагаторы, зеркальные отображения, особенности в комплексной плоскости, переход в различные представления.
- Как связана задача о квантовании поля и задача о квантовании цепочки осцилляторов
- Как квантовать поля. Как устроена КЭД

Частицы = кванты поля. У нас, вообще-то четыре типа полей. Сначала Э/М.

Уже обсуждали: описываем релятивистским квантовым уравнением Дирака. **Проблемы:** считаем по ТВ релятивистские поправки,

$$\text{ответ} = \text{нерелятивистский} + \infty\epsilon + \infty\epsilon^2 + \infty\epsilon^3 \dots$$

Какая-то чушь...

Подоспел эксперимент (1947 Уиллис Лэмб – уровни энергии S и P-электронов разные, а по уравнению Дирака одинаковые. Орбитальный момент электрона влияет на энергию, в сдвиг постоянная Ридберга и $\alpha = 1/137$). Из-за этого же аномальный магнитный момент 0.1%. $\mu = 1.00115965 \mu_B$

Оказывается, уравнение Дирака не описывает высокие энергии; есть какой-то **сдвиг спектра атомов по сравнению с теорией Дирака**. Ханс Бете объяснил Лэмбовский сдвиг (взаимодействием атома с нулевыми флуктуациями электромагнитного поля) и обчислил, спрятав бесконечности в поправки к массе и заряду ("перенормировка").

Через несколько лет **Фейнман, Швингер: создание КЭД**. Самая точно подтвержденная физическая теория (10^{-10}). (Nobel 1965).

В курсе: Разберемся с фейнмановскими интегралами. Построим модель квантовых газов с взаимодействием. Построим пропагатор. Предскажем простые свойства таких систем - осцилляции Фриделя. Перенормировкой заниматься не будем - будет лишь один пример, показывающий на примере КМ, как принципиально возникает метод перенормировки.

Пока что: хорошая теория = перенормируемая теория, бесконечности в ответах можно спрятать.

Теория слабых взаимодействий (мораль: ферми проблемнее, чем бозе)

Проблема β -распада. Модель предложил ещё Ферми (использовал вторичное квантование: считал, что испускание электронов похоже на испускание фотонов атомом— что частицы, вылетающие из атома, не сдержались в нём, а родились в процессе распада! Ясен пень, это ж ферми-частицы вылетают, с ними не так все просто.

Описываем протон \hat{p} , нейтрон \hat{n} , электрон \hat{e} и нейтрино $\hat{\nu}$. Черточка сверху помечает оператор рождения, без черты – уничтожения. Уничтожили нейтрино, породили электрон, уничтожили нейтрон, породили протон. Взаимодействие:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} \hat{p} \hat{n} \cdot \hat{e} \hat{\nu} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (\text{нуклонный ток}) \cdot (\text{лептонный ток})$$

Обычный ток переносит, но сохраняет заряд, а тут ток меняет заряд "заряженные токи". **Ферми считал токи 4-векторами, как и ток в ЭД.**

Но теория Ферми оказалась неперенормируема, так что позволяла делать только низкоэнергетические приближения.

Долгое время ничего не удавалось исправить, потому что по умолчанию считали, что результат эксперимента в зеркально-симметричных установках будет одинаковым. Но оказалось, что это не так. **На самом деле токи надо представить в виде суммы вектора и псевдовектора!** Вектор и псевдовектор одинаково ведут себя при пр. Лоренца, но имеют разный знак при зеркальном отражении пространства. Да и зарядовая симметрия у них разная.

1956: Чжэньнин Янг и Цзундао Ли объясняли эксперимент по распаду К-мезонов, предположили, что в этих процессах нарушается зеркальная симметрия (=не сохраняется чётность).

1957 - экспериментально подтвердилось для β -распада. Нобелевская 1957.

1957: Ричард Фейнман и Мюррей Гелл-Манн построили теорию четырёхфермионного слабого взаимодействия.

Ландау - CP-инвариантность? 1964 - в эксперименте она тоже нарушается. Отсюда следовало, что есть не 2, а минимум 3 поколения кварков и лептонов. 1975 - нашли.

Объединение теорий

50е. Янг и Роберт Миллс: математическая модель, обобщающая калибровочную инвариантность. Впоследствии на её основе построят и электрослабую теорию и КХД (сильное взаимодействие, кварки). Но сама модель, попроще и электрослабая, и КХД, но отражает их основное отличие от КЭД. Поэтому важна сама по себе.

60е. Шелдон Глэшоу, Стивен Вайнберг и Абдус Салам: электрослабая теория. Важная особенность этой теории - спонтанное нарушение симметрии, для объяснения которого был предложен механизм Хиггса. Благодаря этому механизму частицы приобретают массу.

В курсе:

- поковыряемся в модели Янга-Миллса
- Разберемся, что такое спонтанное нарушение симметрии, голдстоуновские моды, как работает механизм Хиггса.

Велтман и т'Хофт доказали перенормируемость этой теории (Nobel 1999)

А теперь КХД.

1964, Гелл-Манн, Цвейг : кварковая модель (сначала 2 кварка, потом ещё один). 1968 - кварки реальны экспериментально, имеют импульс, заряд, спин. Это **КХД**, принципиально понятно, но, например, конфайнмент не выведен из уравнений КХД до сих пор: сложная теория возмущений. \$10⁶ от института Клэя.

В 1973 Маскава и Кобаяши, как уже говорилось, предсказано ещё одно поколение кварков. Все три кварка обнаружены (74, 77, 95). К 2008 Нобелевская.

В курсе: Разберемся, как калибровочная инвариантность работает в КМ, построим модель Янга-Миллса; разберемся с ее особенностями. Модель сильного и слабого взаимодействия рассматривать не будем, обсудим только, в чем роль модели Янга-Миллса для их построения.

Гросс, Полицер и Вилчек: открыта асимптотическая свобода, поэтому на высоких энергиях можно считать (Nobel 2004)

Стандартная модель. Материя (кварки и лептоны 2x3 поколения), бозоны-переносчики взаимодействий (фотон, W Z-бозоны, глюоны) и бозон Хиггса.

БАК x 10⁹ = "великое объединение", БАК x 10¹² = экспериментальная квантовая гравитация.

Почему три поколения? Гравитация? Космология (тёмная энергия, тёмная материя)? Суперсимметрия (ферми-бозе симметрия)?

2 Различные подходы к механике и квантовой механике

Имеются разные подходы к описанию физических систем в теоретической физике. Известно, что трудные задачи в рамках одной формулировки просты в другой. По разному обобщаются на новые разделы. Например, **классика**:

- Лагранжев формализм (обобщенные координаты; консервативные системы, легко обобщается для консервативных систем в релятивистском случае)
- Гамильтонов формализм: уравнений в 2 раза больше, но они первого порядка
- Механика Ньютона (легко рассматривать диссипативные системы)
- Принцип наименьшего действия

В квантовой механике существует много "представлений". Проблемы с терминологией: представление Шредингера, Гейзенберга, взаимодействия, координатное, импульсное, представление некоторого оператора...

Большинство курсов стартуют с формализма Шредингера. Начнем с простого - с представления Шредингера.

В основе - волновая функция, задающая состояние системы. Измерение - оператор. Состояние развивается во времени. Шредингер хотел придать описанию Гейзенберга (матричной квантовой механике) интуитивный смысл, рассматривать "облако вероятностей". Эволюция волновой функции:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \hat{H} \Psi(x, t) \quad \Rightarrow \quad \Psi(x, t) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \Psi_0(x)$$

Но оказалось, что волновая функция задана над конфигурационным пространством. Это математический инструмент. Волновая функция не имеет непосредственного физического смысла, например, ее фазу измерить нельзя. На самом деле произвол более существенный, в разных задачах он обусловлен симметриями, наложенными на систему. Попытаемся обсудить этот произвол в разделе 2.2.

2.1 Представления Шредингера, Гейзенберга и другие

КМ: пространство состояний + операторы на этом пространстве. Пространство состояний - гильбертово, элемент можно ассоциировать с функцией. Например, с волновой функцией $\Psi(x)$. Или задавать иначе, например, в виде коэф. разложения по какому-нибудь базису. На самом деле $\Psi(x)$ - разложение по базису, состоящему из δ -функций, $\Psi(x) = \int \Psi(x') \delta(x - x') dx'$. Про базис потом, пока просто будем считать, что состояние \equiv волновая функция.

Как получить все "представления", которые есть в КМ? Переопределим волновую функцию при помощи некоторого УНИТАРНОГО преобразования.

Рассмотрим $U = e^{iS}$, где S - какой-то оператор. Пусть U зависит от времени. В.ф. преобразуются, $\hat{B} = U \hat{A} U^{-1}$, получится новое пространство состояний. В нем - новые операторы, $\tilde{\Psi} = U \Psi$:

<i>старое пространство</i>		
Ψ	$\xrightarrow{\hat{A}}$	$\hat{A} \Psi$
<i>преобразуем пр-во унитарно</i>		
$\downarrow U$		$\downarrow U$
\hat{B}		
$U \Psi$	$\xrightarrow{\quad}$	$U \hat{A} \Psi$
<i>новое пространство</i>		

Рассмотрим, как в новом пространстве описать эволюцию системы. Подставим в Шредингера $\Psi = U^{-1} \tilde{\Psi}$, умножим слева на U и используем полезную формулу

$$\partial_t(UU^{-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_t(U^{-1}) = -U^{-1} \partial_t(U) U^{-1}.$$

Для эволюции получим снова "уравнение Шредингера", только с новым гамильтонианом

$$\hat{H}'' = U \hat{H} U^{-1} + i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} U^{-1}.$$

Осмыслим наш результат. В квантовой механике \hat{H} выступает в двух смыслах. Во-первых, это оператор энергии. Его собственные значения имеют непосредственный физический смысл, определяя энергетический спектр системы. Если исходный гамильтониан не зависел явно от времени, то он является интегралом движения. В этом смысле при преобразовании U (зависящем от времени) он превращается в $\hat{H}' = U\hat{H}U^{-1}$, но остается интегралом движения (спектры \hat{H}' и \hat{H} совпадают). Если же исходно \hat{H} зависел от времени, спектр \hat{H}' и \hat{H} разный (уровни энергии "ползут" во времени), т.е. это уже не интеграл движения.

Но, во-вторых, \hat{H} в исходном пр-ве определял эволюцию системы. В этом смысле в новом пространстве он превратился в ДРУГОЙ оператор, \hat{H}'' . Этот новый оператор по-прежнему определяет динамику системы (в новом пр-ве.) При этом можно подобрать U так, чтобы \hat{H}'' имел простой вид.

Получим кучу "представлений", например:

1) Представление Гейзенберга: $U = e^{i\hat{H}t/\hbar}$.

Во что превратится динамика в.ф? – убедиться, что $\hat{H}'' = 0$. Во что превратится динамика оператора $\hat{A}_G = U\hat{A}U^{-1}$, если \hat{A} не зависел от времени в старом пространстве? А если старый \hat{A} зависел от t ?

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_G = \frac{d}{dt}(U\hat{A}U^{-1}) = \frac{d}{dt}(e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{A}e^{-i\hat{H}t/\hbar}) = \frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{A}_G - \hat{A}_G\hat{H}) + U\partial_t\hat{A}U^{-1} = \partial_t\hat{A}_G + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}\hat{A}_G].$$

2) Представление взаимодействия, $U = e^{i\hat{H}_0t/\hbar}$, где \hat{H}_0 – кусок гамильтониана $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$, не зависящий от времени.

Во что превратится динамика в.ф? Динамика оператора $\hat{A}(t)$?

Заметьте, что в этом представлении эволюция волновой функции определяется величиной \hat{V} , а эволюция оператора – величиной \hat{H}_0 , так что операторы такие же как в представлении Гейзенберга.

Это не всё, построим ещё унитарные преобразования и получим новые представления.

2.2 Калибровочная инвариантность – пример унитарного преобразования

Применим эти соображения для учета инвариантности калибровки в э/динамике.

Имеем квантово-механическую свободную частицу с зарядом q в э/м поле. Написать гамильтониан. Написать гамильтониан в другой калибровке. Уравнение Шредингера, очевидно, выполняется в каждой калибровке. Значит, изменение гамильтониана, связанное с переходом в другую калибровку – это просто унитарное преобразование над гамильтонианом, или, иными словами, переход в другое представление. При этом и волновая функция должна преобразоваться. Хочется понять, как волновые функции частицы связаны между собой в разных калибровках. Для этого предьявим унитарное преобразование $U = e^{if(x,t)}$, которое преобразует гамильтониан из старой калибровки в новую:

$$\hat{H}'' = e^{if} \frac{(\hat{p} - qA/c)^2}{2m} e^{-if} + q\varphi + i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{(\hat{p} - q\tilde{A}/c)^2}{2m} + q\tilde{\varphi}, \quad (*)$$

где поля (ϕ, A) в результате калибровочного преобразования превращаются в $(\tilde{\phi}, \tilde{A})$

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{1}{c}\partial_t g(x, t), \quad \tilde{A} = A + \nabla g(x, t).$$

Это должно быть верно и в задачах, где в калибровке меняется только электрическое поле $g \equiv g(x)$, и когда меняется только магнитное $g \equiv g(t)$. Рассмотрим эти два случая, это позволяет быстро и без мучений угадать ответ – связь калибровочного преобразования $g(x, t)$ и унитарного преобразования $f(x, t)$ над пространством Гильберта. Проверить общность ответа также потом несложно.

Также стоит воспользоваться $U\hat{A}^2U^{-1} = \hat{B}^2$ тогда и только тогда, если $U\hat{A}U^{-1} = \hat{B}$. Это позволяет получить, приравнявая соответственные слагаемые в левой и правой части ф-лы (*),

$$\partial_t f = \frac{q}{\hbar c} \frac{\partial}{\partial t} g(\mathbf{x}, t), \quad \nabla f = \frac{q}{\hbar c} \nabla g(\mathbf{x}, t) \quad \Rightarrow f = \frac{q}{\hbar c} g(\mathbf{x}, t) + \text{const.}$$

Итак, есть нефизический функциональный произвол в фазе волновой функции – она разная в разных калибровках.

Коротко, можно записать формулу, которой в дальнейшем будем пользоваться:

$$\Psi \rightarrow e^{if}\Psi, \quad (c\phi, A) \rightarrow (c\phi, A) + \partial^\mu g, \quad g(x, t) = \frac{\hbar c}{q} f(x, t)$$

Тут когда-нибудь будет урок в Степик, который заставит-таки каждого проделать этот счет, а пока проверим на экзамене

2.3 Унитарность перехода от координатного представления к импульсному

Мы обсуждали ситуацию, когда состояние задается в виде в.ф. Могли бы сделать преобразование Фурье - это тоже способ задать унитарное преобразование!

Состояние – элемент гильбертова пространства. $\Psi(p)$ для задания такого элемента не хуже, чем $\Psi(x)$ ($|\Psi(p)|^2$ – плотность вероятности импульса, $|\Psi(x)|^2$ – плотность вероятности координаты...). Это "унитарное" преобразование гильбертова пространства, только интегральное,

$$\Psi(p) = \int d^D x \Psi(x) e^{-ipx/\hbar} \quad \Psi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int d^D p \Psi(p) e^{ipx/\hbar} \quad (1)$$

Договоримся так определять Фурье-преобразование. Если в экспоненте нет \hbar , то и в обратном Фурье не будет. Знак прямого и обратного Фурье выбираем именно так, нормировку относим только к обратному Фурье.

Нормировка есть - нормировка вводится по разному в разных учебниках, выбираем "ленинградскую" нормировку; используем одну и ту же букву для функции и её преобразования Фурье (разницу указываем аргументом). Иногда будем для краткости опускать \hbar – будет пропадать и в экспоненте и в нормировке. Следим за руками!

Фурье по координате и времени ВСЕГДА в любых учебниках *имеют разные знаки*, чтобы было разложение по расходящимся плоским волнам.

Пара справочных формул (их надо узнавать):

$$\text{Fourier}[\delta(x)] \rightarrow 1, \quad \text{Fourier}^{-1}[1] \rightarrow \delta(x), \quad \text{Fourier}[1] \rightarrow 2\pi\hbar\delta(p).$$

Прямое преобразование очевидно, обратное – это, фактически, доопределение интеграла:

$$\int d^D p e^{\pm ipx/\hbar} = (2\pi\hbar)^D \delta(x).$$

Оба способа задать состояние – $\Psi(x)$ и $\Psi(p)$ – это просто указание коэффициентов разложения по некоторому базису в пространстве Гильберта. Когда используем $\Psi(x)$, выбираем базис оператора координаты $\hat{q} \equiv q$. Волновая функция $\Psi(x)$ в точности совпадает с коэффициентами разложения текущего состояния системы по полной ортонормированной системе (ПОС) с.ф. оператора координаты $\delta(x - x_0)$ (с.ф. "нумеруются" здесь непрерывным значком x_0):

$$\Psi(x) = \sum_{x_0} \Psi(x_0) \delta(x - x_0) \equiv \int dx_0 \Psi(x_0) \delta(x - x_0).$$

Аналогично, ф-ла (1) задает коэффициенты разложения текущего состояния системы по полной ортонормированной системе с.ф. оператора импульса e^{ipx} .

Кстати, чему равно $\langle p|q \rangle$?

Мораль:

- **Состояние** \equiv элемент комплексного сепарабельного гильбертова пр-ва $|\text{состояние}\rangle$ (кет-вектор), с естественно определенным скалярным произведением $\langle \text{состояние}_1 | \text{состояние}_2 \rangle$.
- **Задать состояние** \equiv спроектировать этот элемент на ПОС некоторых функций и задать ВСЕ коэффициенты разложения.
- Требуется как-то **указывать, какая ПОС выбрана**. Запись $|A\rangle$ обозначает ПОС, соответствующую набору с.ф. оператора \hat{A} ; в соответствующих состояниях измерения физической величины \hat{A} будут однозначны. **Иногда** запись $|A\rangle$ означает какой-то один, выделенный элемент ПОС, а не всю совокупность.
- Если в качестве ПОС выбираем с.ф. оператора координаты, получаем $\Psi(x) = \langle \hat{q} | \text{состояние} \rangle$.
- Если в качестве ПОС выбираем с.ф. оператора импульса, получаем $\Psi(p) = \langle \hat{p} | \text{состояние} \rangle$.
- Перейти от представления $|A\rangle$ к представлению $|B\rangle$ – значит переразложить один базис по другому. При этом коэффициенты разложения будут преобразовываться при помощи свертки с некоторым ядром $\langle B | A \rangle$, и нормировка состояния будет сохраняться. Значит, это **унитарное интегральное преобразование**.

Для произвольного оператора $|\text{состояние}\rangle = \sum_{|A\rangle} |A\rangle \langle \hat{A} | \text{состояние} \rangle$, набор коэффициентов $\langle \hat{A} | \text{состояние} \rangle$ – "представление"

Итак, **можно отождествлять** представление $|q\rangle$ и формализм $\Psi(q)$.

Можно выбирать разные представления (раскладывать $|\text{состояние}\rangle$) по разным ПОС,

Рассмотрим, как преобразуются операторы при унитарном преобразовании – переходе к фурье-представлению. Пусть U – преобразование Фурье. Найдем $U\hat{q}U^{-1}$. Понятно, как он действует в исходном представлении. Действует в p -пространстве так: сначала превращает функцию $\Psi(p)$ в ее Фурье прообраз $\Psi(x)$, потом умножает на x , потом фурьем снова, причем

$$U(x\Psi(x)) = \int dx e^{-ipx/\hbar} x\Psi(x) = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \int dx e^{-ipx/\hbar} \Psi(x) = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \Psi(p).$$

Самостоятельно:

- Вывести вид оператора импульса в координатном и импульсном представлении.
- Вывести вид некоторого оператора \hat{A} в представлении $|A\rangle$ и в представлении, полученном из этого преобразованием Фурье.

Начинаем делать ДЗ

Для дальнейшей работы нам понадобится хорошо понимать, как квантуется осциллятор и уметь работать с ним в разных представлениях. В этом поможет соответствующая серия домашних заданий в Stepic.org

Вспомним кое-что про квантование осциллятора

2.4 Операторы рождения и уничтожения

Гамильтониан осциллятора имеет вид суммы квадратов – почему бы не представить его в виде произведения? Тогда задача об исследовании с.ч. дифференциального оператора 2го порядка сведется к исследованию дифференциального оператора первого порядка.

В классике всё очень просто, если правильно обезразмерить (энергию обезразмерим параметром $\hbar\omega$, координату – чем-то, пропорциональным радиусу Бора, $R_B^2 = \hbar/(m\omega)$, импульс обезразмерим соответственно координате: по размерности $px \sim \hbar$). Безразмерные координату и импульс будем пометать волной.

Увидим, что введение операторов рождения-уничтожения – это преобразование суммы квадратов к произведению (= факторизация гамильтониана):

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{H}{\hbar\omega} = (\tilde{p}^2 + \tilde{x}^2) = (\tilde{x} - i\tilde{p})(\tilde{x} + i\tilde{p}) \equiv a^+ a, \quad (2)$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = \hat{p} \frac{R_B}{\hbar\sqrt{2}}, \quad \tilde{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x = \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}R_B}. \quad (3)$$

$$a = \tilde{x} + i\tilde{p} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega} x + \frac{ip}{\sqrt{m\omega}} \right) \quad a^+ = \tilde{x} - i\tilde{p} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega} x - \frac{ip}{\sqrt{m\omega}} \right) \quad (4)$$

Но когда в квантовой науке введём \hat{a} , \hat{a}^+ также как в (4), формула (2) не получается, потому что при раскрытии скобок вклады $\tilde{x}\tilde{p}$ и $\tilde{p}\tilde{x}$ не сократятся, а дадут коммутатор $1/2$. Ввели сомножители a и a^+ , факторизующие гамильтониан, из которого вычтена константа.

Современные модели квантовой теории поля **базируются на многомерном/бесконечномерном обобщении** этого выражения.

Посмотрим, как эти операторы развиваются во времени в представлении Гейзенберга:

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{a}(t)] = -i\omega\hat{a}(t) \quad \hat{a}(t) = e^{-i\omega(t-t_0)} \hat{a}_{\text{шр}} \quad (5)$$

Здесь начальное условие поставлено в момент t_0 . Получили оператор уничтожения в представлении Шредингера, умноженный на комплексную осциллирующую фазу. Для оператора рождения – тоже, но комплексно-сопряжённое.

Остальное с осциллятором – сами дома.

Операторы в представлении Гейзенберга — в СТЕПИК

Осциллятор в разных представлениях. Нестационарные задачи — в СТЕПИК

Координата и импульс квантового осциллятора в представлении Гейзенберга — в СТЕПИК

Возбуждение осциллятора внешним возмущением — в СТЕПИК

Та же задача в представлении взаимодействия — в СТЕПИК

2.5 Статоператор

Это еще один из способов описания состояния квантовомеханической системы: можно описывать квантовую систему в статистическом смысле, задавая вероятность того, что она имеет данное состояние. Физически это рассмотрение, когда неизвестно точно состояние системы, возникает при рассмотрении квантовой системы в тепловом равновесии, систем с "случайной историей", рассмотрении незамкнутых подсистем.

Разница с вероятностной трактовкой Ψ — раньше предсказывали результат измерения вероятностно, но ф-цию распределения — точно. Среднее измерение получалось усреднением по этому распределению. Теперь и ф-ция распределения появляется с некоторой долей вероятности.

Рассмотрим ситуацию, когда матрица плотности получится диагональной. Пусть состояние $|\psi_i\rangle$ реализуется с вероятностью p_i . Но средние оператора \hat{A} по-прежнему можно считать, надо просто усреднять каждую ф-цию распределения, а потом еще учесть вероятность появления каждой этой ф-ции. Обозначения: у оператора \hat{A} есть набор с.ф. ϕ_α и с.з. a_α . Тогда

	чистое	смешанное (диаг)
состояние	$\Psi = \sum_\alpha c_\alpha \phi_\alpha$	$\{p_i, \psi_i\}, \psi_i = \sum_\alpha c_{\alpha i} \phi_\alpha$
вероятность получить a_α	$ c_\alpha ^2$	$\sum_i p_i c_{\alpha i} ^2$
Средн. $\langle A \rangle$	$\sum_\alpha a_\alpha c_\alpha ^2$	$\sum_{i,\alpha} a_\alpha p_i c_{\alpha i} ^2$
Средн. на языке bracket	$\langle \Psi \hat{A} \Psi \rangle$	$\sum_i p_i \langle \psi_i \hat{A} \psi_i \rangle$

Отсутствует интерференция: в смешанном состоянии, в отличие от суперпозиции состояний, различные квантовые состояния не интерферируют между собой, так как при определении среднего складываются не волновые функции, а средние значения.

Понятно, как усреднять, $\langle A \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle$.

Другая запись: хотим операцию усреднения как в статфизике: $\langle A \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{A})$. Вспоминаем, что $|\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ — проектор; нужно ввести оператор $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$. Тогда оба способа усреднения совпадают:

$$\langle A \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{A}) = \sum_{\alpha=\alpha'} \langle \phi_\alpha | \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i | \hat{A} | \phi_{\alpha'} \rangle = \sum_{i,\alpha} a_\alpha p_i |c_{\alpha i}|^2.$$

Единым образом описываем и чистые и смешанные состояния.

Не диагональная:

$$\hat{\rho} = \sum_i \rho_{ij} |\psi_i\rangle \langle \psi_j|.$$

Следствие: статоператор $\hat{\rho}$ — квантовый аналог ф-ции распределения в фазовом пространстве в классике, через нее естественным образом выражается статсумма.

Действительно, покажем, что статсумма равна

$$\Theta = \text{Sp} \exp \left(\frac{\mu \hat{N} - \hat{E}}{kT} \right).$$

В качестве ψ_i в шпуре выступают состояния с определенным числом частиц и определенной энергией $|\mathbf{n}\rangle$, мы используем представление чисел заполнения $|n_1, n_2, n_3 \dots\rangle \equiv |\mathbf{n}\rangle$. В этих состояниях вероятность p_i должна быть равна больцмановскому выражению $e^{(\mu N - E)/kT}$. Значит

$$\Theta = \text{Sp} \left(\exp \left(\frac{\mu \hat{N} - \hat{E}}{kT} \right) \right) = \sum_{\mathbf{n}} \langle \mathbf{n} | \exp \left(\frac{\mu \hat{N} - \hat{E}}{kT} \right) | \mathbf{n} \rangle =$$

здесь для простоты рассмотрели как и в курсе статфизики систему с единственным уровнем энергии,

$$= \sum_n \exp\left(\frac{(\mu - \epsilon)n}{kT}\right) \langle n|n\rangle,$$

это та же самая геометрическая прогрессия, что и на семинаре.

Определение из лекций: усредняем волновую функцию МКА по координате q термостата, остаётся только координата подсистемы (КА):

$$\rho(x_1, x_2, t) = \int dq \Psi(x_1, q, t) \Psi^*(x_2, q, t)$$

Удовлетворяет уравнению Нейнмана. Чтобы получить напишем уравнение Шредингера для Ψ и для Ψ^* :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x_1)}{\partial t} = \hat{H}(x_1) \Psi(x_1), \quad -i\hbar \frac{\partial \Psi^*(x_2)}{\partial t} = \hat{H}(x_2) \Psi^*(x_2),$$

первое домножим на Ψ^* , второе на Ψ , сложим... Это и есть Нейнманн, $\partial_t \hat{\rho} = i[\hat{H}, \hat{\rho}]/\hbar$. ведь действие оператором \hat{H} справа и означает действие по второму аргументу.

2.6 Квазивероятностное распределение Вигнера-Вейля

Принцип неопределенности. Возможно ли обобщить понятие классического фазового пространства на квантовый мир? При этом хочется понимать волновую функцию как функцию распределения вероятности в фазовом пространстве... Это называется "представление фазового пространства".

Интересуемся вероятностью найти частицу в определённом малом объёме фазового пространства (т.е. при данных p и q). Это распределение, которое не обязано удовлетворять всем свойствам нормальной функции распределения вероятности. Например, функция Вигнера становится отрицательной.

Введем распределение Вигнера (если стартовать из координатного представления):

$$P(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \Psi(x+y) \Psi^*(x-y) e^{-2ipy/\hbar} dy. \quad (6)$$

Эквивалентная запись (растяжение $r = 2y$):

$$P(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy \Psi(x+r/2) \Psi^*(x-r/2) e^{-ipr/\hbar}. \quad (7)$$

Фактически, это такое извращённое Фурье от объекта, похожего на плотность вероятности $\Psi(x_1) \Psi^*(x_2) = \Psi(x+y) \Psi^*(x-y)$, где мы предполагаем $x = (x_1 + x_2)/2$, $y = (x_1 - x_2)/2$ и фурьим по разности координат $r = 2y$.

Обозначения здесь в литературе «плавают», потому что авторы по-разному вводят преобразование Фурье. Очевидно, можно профурьить и обратно. Не забудем только при этом множитель $(2\pi\hbar)^{-D}$.

Можно записать этот объект и через фурье-образ волновой функции (подставляем в (6) обратное фурье, выполняем интегрирование по y , смотрим на дельта-функцию). О чудо, множитель перед интегралом подобран так, что формулы одинаково выглядят и в координатном и в импульсном представлениях:

$$P(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \Psi(p+q) \Psi^*(p-q) e^{2iqx/\hbar} \frac{dq}{2\pi\hbar}$$

На этом языке можно описать и КМ чистых состояний, и КМ смешанных (на языке бра-кет), и формулы аналогичны, но во второй появляется матрица плотности:

$$P(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dr \langle x+r/2|x-r/2\rangle e^{-ipr/\hbar}, \quad (8)$$

$$P(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dr \langle x+r/2|\hat{\rho}|x-r/2\rangle e^{-ipr/\hbar}. \quad (9)$$

То есть теперь любому состоянию системы – чистому Ψ или смешанному $\hat{\rho}$ – мы сопоставляем характеризующий это состояние объект $P(x, p)$.

Скалярному произведению состояний $|\psi_a\rangle$ и $|\psi_b\rangle$ обычной КМ здесь будет соответствовать

$$|\langle\psi_a|\psi_b\rangle|^2 \sim \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp P_{\psi_a}(x, p) P_{\psi_b}(x, p)$$

Тут пропущен множитель типа $2\pi\hbar$, сообразите, где именно:)

Вместо операторов тоже можно задавать соответствующие им объекты $A(x, p)$. Средние значения при этом не попортятся:

$$A(x, p) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \langle x - y/2 | \hat{A} | x + y/2 \rangle e^{-ipy/\hbar}, \quad \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}) \sim \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp P(x, p) A(x, p).$$

Распределение Вигнера-Вейля – вещественная функция. Проверьте это, посмотрев на (6). Если P заинтегрировать по x , получится вероятность распределения по импульсу; если заинтегрировать по импульсу – вероятность распределения по координате (одно из этих утверждений очевидно, если посмотреть на (6), а второе – из аналогичной записи в p -представлении).

У функции правильное поведение при отражении времени и пространства и при галилеевых преобразованиях. Используют для описания кв.мех. системы многих частиц, близких к классич. состояниям; для доказательства предельного перехода от квантовомеханич. описания к классическому; применяется в статистической механике, квантовой химии, квантовой оптике, классической оптике и анализе сигналов.

Расплата: если есть потенциал, уравнения движения на P интегральные.

Квазиклассика: легко увидеть, что этот объект превращается в обычную функцию распределения в квазиклассическом приближении. Увидим как-нибудь попроще. Рассмотрим числовое состояние в окрестности точки x_0 :

$$\Psi(x) = a(x) e^{ip(x)x/\hbar}$$

Считаем, что $p(x)$ и $a(x)$ медленно меняются (на масштабах $\gg \hbar/p(x_0)$). Очевидно, вероятность попасть в dx -окрестность точки x будет $|a(x)|^2 dx$, наиболее вероятный импульс $p(x_0)$.

Разложим в ряд Ψ :

$$\Psi(x + r/2) = a(x_0) e^{ip(x_0)(x+r/2)/\hbar}, \quad \Psi^*(x - r/2) = a^*(x_0) e^{-ip(x_0)(x-r/2)/\hbar}.$$

Подставим всё это в распределение ВВ, получим $|a(x_0)|^2 \int dr e^{ip(x_0)r/\hbar} \sim |a(x_0)|^2 \delta(p - p(x_0))$, что, очевидно, разумный результат...

Распределение ВВ позволяет строить квантовый аналог кинетики, например, кинетического уравнения Больцмана.

1927: Хотим поучиться строить квантовые объекты из классических. Скажем, на примере Гамильтониана.

Если $H(p)$ или $H(q)$, то тривиально. А если $H(p, q)$?

Рассуждали так: просто перемножить нельзя. $(\hat{P}\hat{Q})$ не самосопряжён $(\hat{P}\hat{Q})^+ = \hat{Q}^+ \hat{P}^+$.

Ну вроде, надо симметризовать. Если полином, понятно как. А если не хочется сводить к полиномам?

Вейль: Профурьить $H(p, q)$, получим $H(x, y)$, а потом проФурьить обратно, но с операторной экспонентой $\exp(i\hat{p}x + i\hat{q}y)$.

Проверим, что для $H(p, q) = pq$ получается симметризация. При фурьении $\delta'(x)\delta'(y)$ при обратном фурьении производные хлопают на операторную экспоненту. Разложив ее в ряд получаем то, что надо из ТРЕТЬЕГО члена ряда, остальное зануляется.

Обратно тоже интересно. Вигнер 1932. Как раз и надо построить из Ψ упомянутую выше конструкцию P .

Как понять, что это так?

$$\langle x - q/2 | \hat{H} | x + q/2 \rangle = H(q, p) = \text{Fourier}^{-1}[\text{Tr}(\hat{\rho} \exp(-i\hat{p}x - i\hat{q}y))]$$

Но в КМ средние считаются $\text{Sr} \hat{\rho} \hat{H}$, почему бы не придумать и для состояния такое $P(q, p)$, чтобы средние записывались $\int dq dp H(p, q) P(p, q)$?

Если $H(p)$ или $H(q)$ очевидно... этим свойством обладает $P(p, q)$.

$$\int dpdq P(p, q) H(p)$$

Но и с остальными операторами получается. Правда, смысл другой. Наши "вероятности" перестали быть положительно определёнными. Это нормально, ведь теорвер КМ устроен иначе, чем классический, про это и теорема есть.

Квантовая томография

надо придумать квантизатор \hat{K} и деквантизатор \hat{D} , такие, что операторы переходят в функции от какой-то переменной x (например фп, но не обязательно), и наоборот

$$\hat{A} = \int dx A(x) \hat{K} \quad A(x) = \text{Tr}[\hat{K} \hat{A}],$$

и дуально правильно преобразуются состояния $\hat{\rho}$, так, чтобы

$$\text{Sp} \hat{\rho} \hat{A} = \int dx P(x) A(x)$$

Преобразование Вейля самодуально (состояния и операторы преобразуются в функции единообразным образом), но в квантовой томографии это не обязательно.

Пример: матрица 2x2 состояния спина может переписываться в функцию $P(k, \phi, \theta)$, где $k = \pm 1/2$, и два угла Эйлера.

2.7 Фейнмановский интеграл по траекториям

Кроме "представлений", есть иные способы описывать КМ, например матрица плотности, представление Вигнера-Вейля и др... Важным для нас является описание с помощью функционального интеграла.

Рассматриваем апплеты. Апплеты можно скачать тут: <http://www.eftaylor.com/quantum.html> — жмём free download

В первый раз запускаем qmwin.exe, он разархивирует в отдельную папку executor. Запускаем (Linux - из-под вайна) cT_Executor.exe

1) rffct – смотрим волновые свойства света – интерференция, фаза волны изображается крутящейся стрелочкой-секундомером. Обсуждаем, почему стрелка разворачивается на границе среды, меняет длину; график от толщины стекла показан на рисунке. Что будет, если red поменять на blue?

2) oneprt – запускаем режим "интро", включаем "комплексный секундомер" Переключаемся particle=electron, запускаем две траектории, обсуждаем, что интерференционная картинка есть для электронов, только стрелочка показывает не фазу, а действие. Впрочем, действие растёт, если растёт интервал времени, так что идея та же.

Как Фейнман придумал суммирование траекторий: дифракция на щели – на нескольких щелях... Но бесконечное число щелей эквивалентно распространению света вообще без щелей! Суммируем результат по всем траекториям. Обсуждаем, что НЕ ВСЕ траектории мы рассматриваем. Обсуждаем, что будет с пределом, если все больше точек пространства включать в решетку. Предел плохой, но можно исправить это нормировкой: рассматривать отношение двух плохих объектов - все становится хорошо. Проблемы определения меры функционального интеграла.

3) wfscn – развитие во времени точечной частицы; волновой функции. Апплет не перебирает **все** траектории, тем не менее видно, что каждая точка исходной волновой функции на каждой траектории дает линейный вклад в каждую точку результирующей волновой функции. Значит, развитие волновой функции во времени описывается интегральным **линейным** оператором, или, что тоже самое, **свёрткой** с некоторым объектом. Этот объект называется **функция Грина**.

2.8 Вероятность перемещения из точки в точку

Проследим на этом языке, как частица перемещается из точки q_0 в точку $q(t)$ ($t > 0$). Будем использовать малость времени.

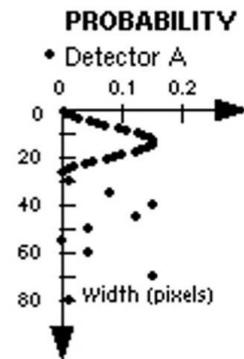


Рис. 1: Интерференция света

Какой следует рассматривать объект? Очевидно, матричный элемент оператора эволюции. Воспользуемся явным видом этого оператора:

$$\langle q|e^{-i\hat{H}t/\hbar}|q_0\rangle = \langle q|(1 - i\hat{H}t/\hbar)|q_0\rangle =$$

Вставим сюда разбиение единицы $1 = \int dp/(2\pi\hbar)|p\rangle\langle p|$:

$$= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \langle q|p\rangle\langle p|1 - i\hat{H}t/\hbar|q_0\rangle.$$

Любое слагаемое о гамильтониана можно представить в виде упорядоченного произведения $H_p H_q$, чтобы в последней скобке H_p действовал налево, а H_q – направо, тогда

$$= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} (1 - ih(p, q)t/\hbar) \langle q|p\rangle\langle p|q_0\rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-ih(p, q)t/\hbar} e^{ip(q-q_0)/\hbar} = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{ip(q-q_0) - ih(p, q)t}{\hbar}\right).$$

Важно! В экспоненте получилось классическое действие (это позволяет писать функциональный интеграл, не задумываясь первоначально о коммутационных соотношениях... Увидим в курсе диаграммных методов). Зато при выводе этого выражения возник вопрос упорядочивания некомутирующих вкладов в оператор Гамильтона.

Если промежуток времени НЕ мал, разобьем на малые. Например на два:)

$$\langle q|e^{-i\hat{H}(2t)/\hbar}|q_0\rangle = \sum_{q''} \langle q|e^{-i\hat{H}t/\hbar}|q''\rangle\langle q''|e^{-i\hat{H}t/\hbar}|q_0\rangle = \int dq'' \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \frac{dp_2}{2\pi\hbar} e^{iS/\hbar}$$

Переходя к пределу $t \rightarrow 0$ получим фейнмановский интеграл. Подробный вывод – в следующем курсе.

Пример: массивная частица в потенциале.

Подставим в $\langle q_{i+1}|U(t_{i+1}, t_i)|q_i\rangle$ на малом промежутке времени $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ классическую энергию $h(p, q) = p^2/2m + V(q)$, возьмем интеграл по p .

Интеграл по p плохо определен из-за осцилляций. Доопределим, считая время комплексным $\Delta t \rightarrow \Delta t - ia$ и устремляя $a \rightarrow 0$.

Важно уметь брать гауссовы интегралы с источником. Помним формулу!!!

Применяем, берем гауссов интеграл по набору импульсов. Нет положительности квадратичной формы - виковский разворот. Ф.и. в теории поля подразумевает аналитическое продолжение по времени! В статфизике таких проблем не будет.

Возьмем гауссов интеграл для малого промежутка:

$$\langle q_{i+1}|U(t_{i+1}, t_i)|q_i\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}} \exp\left(\frac{i\Delta t}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(q_{i+1} - q_i)^2}{(\Delta t)^2} - \frac{i\Delta t}{\hbar} V(q_i)\right),$$

$$S = \int dt \left(\frac{m(\partial_t q)^2}{2} - V(q)\right).$$

При переходе к большому набору промежутков мера интегрирования составит

$$\int \mathcal{D}x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}}^N \int dx_1 \dots dx_{N-1}.$$

Классическая траектория дает максимальный вклад.

Статфизика: $\beta = i\Delta\tau/\hbar$ – Евклидово время, $Z = \int \mathcal{D}q \exp(-S/\hbar)$, где $S = \int_0^\beta d\tau (m(\partial_\tau q)^2/2 + V(q))$ – положительно определенный функционал. В нём первое слагаемое сменило знак по сравнению с КМ, потому что τ комплексно, общий минус из S вынесен в экспоненте. Не требуется доопределение по времени, поскольку интегралы по τ хорошо сходятся.

Чуть-чуть про модель Изинга: вместо временной решетки есть пространственная решетка, которая имеет физический смысл, перебираем конфигурации спинов с больцмановским весом. Исследуем не квантовые флуктуации, а термические. Вместо $a \rightarrow 0$ устремляем корреляционную длину к бесконечности (и a /длину к нулю).

3 Понятия квантовой механики, имеющие важные обобщения в КТП

Все задачи КМ в постановке уравнения Шредингера (УШ) делятся на изучение связанных состояний и исследование задачи рассеяния. Обсуждаем разницу. Граничные условия на $\pm\infty$.

В курсе КМ решали УШ с разными потенциальными ямами. Либо такие задачи уже решены, либо не решаются аналитически, поэтому их решение - тренировка. Но есть одна задача, решение которой важно по принципиальным соображениям.

3.1 Дельта-потенциал порождает функцию Грина

Рассмотрим дельта-образный потенциал $-\alpha\delta(x)$. Найти с.ф. и с.ч. гамильтониана. Найти ср. потенциальную энергию, кинетическую. Найти фурье-образ волновой функции.

Стационарные решения. Само по себе уравнение решать бессмысленно, нужны разумные граничные условия (разные для связанных состояний и задачи рассеяния).

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \alpha\delta(x)\right)\Psi = E_n\Psi.$$

Решаем при $x > 0$ и $x < 0$, где нет потенциала вообще - получим $\Psi = Ae^{\pm\kappa x}$, $\kappa = \sqrt{-2mE_n}/\hbar$. Нормируем $A = \sqrt{\kappa}$.

Что в точке разрыва? Эмпирический подход: лаплас должен породить $\delta(x)$, в.ф. должна иметь излом.

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \Delta\Psi = \partial_x\Psi\Big|_{-\epsilon}^{+\epsilon} \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x\Psi|_{+0} - \partial_x\Psi|_{-0}) = \alpha\Psi(0).$$

Подставляем сюда производную слева и справа от излома, получим

$$\hbar^2(2\kappa A)/2m = \alpha A, \quad \kappa = \alpha m/\hbar^2, \quad (\kappa = \sqrt{-2mE_n}/\hbar) \Rightarrow E_0 = -m\alpha^2/2\hbar^2.$$

Находим потенциальную энергию $\langle\Psi(x)|-\alpha\delta(x)|\Psi(x)\rangle = 2E_0$. Кинетическую запишем, зная, что полная энергия E_0 , значит $K = -E_0$. Устно вычисляются средние для координаты, импульса, среднеквадратического отклонения координаты...

В.ф. в импульсном представлении

$$\Psi(p) = \int dx e^{-ipx/\hbar}\Psi(x) \sim \frac{1}{\kappa + ip/\hbar} + \frac{1}{\kappa - ip/\hbar} \sim \frac{2\hbar^2\sqrt{\kappa^3}}{(p^2 + \hbar^2\kappa^2)}.$$

В знаменателе $\kappa \pm ip/\hbar = \sqrt{-2mE}/\hbar \pm ip/\hbar$, т.е. при $E = E_0$ имеем полюс!

Обнаружили, что полюс соответствует спектру гамильтониана! Это не случайно!

3.2 Фурье-преобразование уравнения Шредингера

Задание: Записать УШ в импульсном представлении. Решить для предыдущей задачи. Сравнить с результатом предыдущей задачи. Увидеть полюс по E при собственных энергиях.

Оператор p^2 стал умножением, зато потенциал превратился в интегральный оператор с ядром $U(p) = \int dx U(x)e^{-ipx/\hbar}$. Перепишем УШ:

$$\frac{p^2}{2m}\Psi(p) + \int \frac{dp'}{2\pi\hbar} U(p-p')\Psi(p') = E\Psi(p).$$

В случае дельта-потенциала $U(p) = -\alpha$, т.е. УШ

$$\frac{p^2}{2m}\Psi(p) - \frac{\alpha}{2\pi\hbar}C = E\Psi(p), \quad C = \int dp\Psi(p), \quad \Rightarrow \quad \Psi(p) = \frac{m\alpha C}{\pi\hbar(p^2 + 2m|E|)}.$$

Кстати, тут уже хороший полюс... Чтобы решение существовало, интеграл от этой штуки (берем по вычетам) надо приравнять C , это дает условие на энергию

$$1 = \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \int \frac{dp}{p^2 + 2m|E|} = \frac{\alpha}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2|E|}}.$$

Отсюда тот же спектр, единственный уровень, полюс. Найденную $\Psi(p)$ нормируем, получаем тот же ответ, что и в предыдущей задаче.

3.3 Функции Грина

Формализм ϕ -ций Грина – от матфизики до квантовой теории поля. Вычисление – важная задача. Чтобы разобраться, почему и научиться считать, введем здесь и посчитаем.

У этого объекта множество разных названий: пропагатор, коррелятор, парная корреляционная функция, функция Грина. Начнем с определения из матфизики, "функция Грина". Пусть пока что частица свободная.

Ф.Грина $G(x, x')$ представляет собой "отклик" в точке x системы, описываемой дифференц. ур-нием, на единичный точечный источник, помещённый в точку x' , в нашем случае это

$$(\hat{H} - E)G = \delta(x - x').$$

Найти ф.Г. уравнения Шредингера для свободной связанной частицы ($E < 0$, гр. условия убывают).

Полностью аналогично задаче с δ -потенциалом (при $\alpha = 1$ и с заменой $x \rightarrow x - x'$)

$$x \neq x' \Rightarrow G(x, x') = Ae^{-\varkappa|x-x'|}, \quad \varkappa = \sqrt{-2mE}/\hbar,$$

условие сшивания

$$\partial_x G \Big|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = -\frac{2m}{\hbar^2} = -2A\varkappa,$$

поэтому ответ

$$G(x, x') = G(x - x') = \frac{m}{\varkappa\hbar^2} e^{-\varkappa|x-x'|}. \quad (10)$$

С помощью ф.Г. можно решать уравнения с неоднородностью в правой части $f(x)$:

$$Ae^{-\varkappa x} + Be^{\varkappa x} + \int dx' G(x - x')f(x').$$

Заметим, что коэффициенты A и B неинтересны, так как в жизни интересуемся убывающими решениями...

3.4 Интегральная форма УШ. Простейшая теория возмущений с функцией Грина

Рассмотрим теперь у.Ш. с потенциалом, это породит слагаемое $U(x)\Psi(x)$ в у.Ш. Перенесем его в правую часть, рассмотрим как неоднородность и используем ф.Г. свободной частицы:

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} - E\right)\Psi(x) = -U(x)\Psi(x) \Leftrightarrow \Psi = -\int dx' G(x - x')U(x')\Psi(x').$$

Польза:

- Здесь учтены (спрятаны) граничные условия – в момент вычисления ФГ.
- Удобно проводить теорию возмущений (ТВ) при малых U .

Найдите связь с решением в δ -яме (положите $U(x) = -\alpha\delta(x)$ и сравните с тем, что было). Там в импульсном представлении полюса показывали спектр гамильтониана. Значит, и здесь также. Почему же полюса ф.Г. физически определяются связанными состояниями?

Размышления про полюса функций Грина. На операторном языке функция Грина – обратный оператор. Если самосопряжённый оператор \hat{H} имеет ф.Г. $G_0 = \hat{H}^{-1}$, то задача на собств. значения эквивалентна интегральному ур-нию:

$$\hat{H}\psi = E\psi \Leftrightarrow \psi(x) = E \int dx' G_0(x, x')\psi(x'),$$

к которому можно применить теорию Фредгольма. В соответствии с ней задача имеет не более счётного числа собств. значений, которые вещественны и не имеют конечных точек сгущения. Если комплексное число Λ не является собств. значением оператора \hat{H} , то для оператора $\hat{H} - \Lambda I$ можно построить обратный оператор $R_\Lambda(x, x')$. Эта ϕ -ция наз. резольвентой оператора \hat{H} , она является мероморфной функцией параметра Λ , причём её полюсами служат собств. значения оператора \hat{H} . Вспоминаем, ведь именно так мы ищем собственные числа матриц!

Но тогда и ф.Г. всегда имеет там полюса. Действительно, таков объект

$$G(x, x') = \sum_n \frac{\Psi_n^*(x)\Psi_n(x')}{E - E_n}$$

по построению (является ф.Г., имеет полюса в E_n); здесь Ψ_n – с.ф.

Пара полезных формул:

$$\delta(x - x') = \sum_n \Psi_n^*(x) \Psi_n(x')$$

чтобы проверить – подействуем правой частью на что-нибудь, например, на базисную функцию Ψ_n . Такие равенства уже писали, когда в качестве Ψ_n брали e^{ipx} , где p выступало в роли непрерывного индекса:

$$\int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{ipx/\hbar} e^{-ipx'/\hbar} = \delta(x - x').$$

Рассказать: связь числа нулей у волновой ф-ции и номера энергетического уровня. Колебания струны. Уравнение Бете - Солпитера.

3.5 Использование ф. Грина

Свободная частица - найти решение в двух δ -ямах: $U = -\alpha(\delta(x - a) + \delta(x + a))$. Решение проще не через шивание, а через свертку с ф-цией Грина!

$$\Psi(x) = - \int dx' G(x - x') U(x') \Psi(x') = \alpha(G(x - a)\Psi(a) + G(x + a)\Psi(-a)).$$

Вводим $\Psi(a) = C_1$, $\Psi(-a) = C_2$, и самосогласовываем предыдущее уравнение в точках $x = \pm a$ с учетом (10):

$$G(x - a) = Z e^{-\varkappa|x-a|}, \quad Z = \frac{m}{\varkappa\hbar^2}, \quad \varkappa = \sqrt{-2mE}/\hbar, \quad E < 0$$

$$C_1 = \alpha(ZC_1 + Z e^{2a\varkappa} C_2),$$

$$C_2 = \alpha(Z e^{2a\varkappa} C_1 + ZC_2).$$

Это система однородных ур-ий, приравнивая ее детерминант нулю, получаем спектр.

Примечание: матрица получается вида $\begin{pmatrix} m & n \\ n & m \end{pmatrix}$, ее детерминант равен нулю при $m = \pm n$. Случай „+” соответствует $C_1 = C_2$, т.е. симметричным решениям; случай „-” дает антисимметричные с.ф.

3.6 Метод зеркальных изображений

Найти Функцию Грина свободной частицы в полупространстве. Ищем решение $G(x, x')$ того же уравнения на промежутке $x, x' \geq 0$, такое, что

$$G(0, x') \equiv 0.$$

Правило: ФГ наследует граничные условия!

Возьмем старую ф.Г (10). Не подходит, разница – в граничных условиях. Заметим, что ф.Г. свободной частицы, в которой подставили $-x'$ является однородным решением нашей задачи на интервале $x, x' > 0$, поэтому ее можно плюсовать с любым коэффициентом к функции Грина (10), от этого оно не портится на нашем интервале. Приплюсуем так, чтобы обнулить граничные условия при $x = 0$:

$$G_{\text{стар}}(x, x') - G_{\text{стар}}(x, -x') = \frac{m}{\varkappa\hbar^2} (e^{-\varkappa|x-x'|} - e^{-\varkappa|x+x'|}).$$

Этим занимались в курсе ЭД, когда подбирали набор однородных решений (сферических функций) так, чтобы добиться верных решений, например, нулевых на сфере.

3.7 Задача рассеяния в квантовой механике

Постановка задачи рассеяния в КМ. Граничные условия. Вспоминаем курс КМ: вводятся коэффициенты прохождения и отражения.

Рассмотрим отражение волны от δ - потенциала, найдём ф-цию Грина свободной частицы. Уравнение на ФГ то же самое, но граничные условия превратились в то, что на $\pm\infty$ бежит плоская волна $\sim e^{\pm ipx}$. Легко увидеть, что (10) практически не меняется, просто изменяется знак E :

$$G = \pm i Z e^{\pm ik|x-x'|}, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad Z = \frac{m}{k\hbar^2}. \quad (11)$$

Можно найти коэффициенты отражения и прохождения, и увидеть, что они унаследовали полюса от ФГ. Можно исследовать пределы коэф. отражения и преломления в произвольном потенциале.

4 Квазичастицы

Мы научились строить теорию возмущений по взаимодействию, решая по теории возмущений интегральное уравнение Шредингера.

Проблемы:

- 1) Сильное взаимодействие: ряды плохо сходятся или вообще расходятся
- 2) Система многих частиц (переменное число частиц). Как писать ур-е Шредингера?

Метод вторичного квантования – способ описывать систему с сильным взаимодействием на языке *квазичастиц*, которые или не взаимодействуют, или делают это слабо.

4.1 Одномерный кристалл

Рассмотрим периодический δ -потенциал: „дираковская гребенка” $U = \alpha \sum_n \delta(x - na)$ (модель Кронига-Пенни – периодические прямоугольники).

Найдем решения для в.ф. в таком потенциале, воспользовавшись интегральной формой у.Ш.:

$$\Psi(x) = - \int dx' G(x - x') U(x') \Psi(x') = -\alpha \int dx' G(x - x') \sum_n \delta(x' - na) \Psi(x') = -\alpha \sum_n G(x - na) \Psi(na).$$

Используем периодичность: при сдвиге на один шаг решетки в.ф. может лишь приобрести комплексную фазу $\mu = e^{iqa}$, $|\mu| = 1$. Тогда $\Psi(na) = \mu^n \Psi(0)$. Кроме того, подставим в вычисляемое выражение какую-нибудь из функций Грина (11):

$$\Psi(x) = -iZ\alpha \sum_n \mu^n e^{ik|x-na|} \Psi(0).$$

Этот закон верен только вдали от границы, но только там мы и хотим получить ответ. Но если эту формулу используем в свертке с фГ, получаем расходимости, когда проводим самосогласование в в точке $x = 0$:

$$\Psi(0) = -iZ\alpha \sum_n \mu^n e^{ik|n|a} \Psi(0) \Leftrightarrow 1 = -iZ\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu^n e^{ik|n|a} = -iZ\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n e^{ik|n|a} + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{-n} e^{ik|n|a} \right).$$

Стоит оправдаться:

Конечно, все можно сделать честно, учтя по-настоящему границу и регуляризовав это выражение. Но вдали от границы, там где она не важна, оно должно иметь смысл, потому что там ответ не должен зависеть от устройства границы. В RG то же самое - если есть процедура, самосогласованно позволяющая придать смысл расходящимся выражениям (регуляризовать их) и обрабатывать их, получая ответы в той области, где расходимостей заведомо нет. Такого рода процедуры (ренормировка) приводят к разумным ответам, если ответ на вопрос (у нас – поведение системы вдали от границы) действительно не зависит от устройства появившихся расходимостей (у нас – проблем, которые возникают при вычислениях вблизи границы). Иными словами, правильно сформулированная физическая проблема всегда соответствует **ренормируемой модели**.

Ф.Г. найдена при гр. условиях, не согласующихся с задачей о бесконечной гребенке. Но понятно, что в реальности мы имеем конечную гребенку, но находимся достаточно далеко от границ, где их (границ) наличие неважно.

Формально просуммируем геометрические прогрессии (в смысле аналитического продолжения a в комплексную плоскость):

$$-\frac{1}{i\alpha Z} = \frac{1}{1 - \mu e^{ika}} + \frac{e^{ika}}{\mu - e^{ika}} \Leftrightarrow \mu^2 - 2\mu(\cos ka + Z\alpha \sin ka) + 1 = 0.$$

Это квадратное уравнение на μ с дискриминантом $D = (\cos ka + Z\alpha \sin ka)^2 - 1$. По теореме Виета есть два корня, произведение которых дает единицу. Чтобы $|\mu| = 1$, должны быть только комплексные решения,

$$-1 \leq \cos ka + Z\alpha \sin ka < 1$$

Это зоны, $\mu = e^{iqa}$ определяет *квазиимпульс* q .

Можно рассмотреть график $f(E) = \cos ka + Z\alpha \sin ka$ как ф-цию $ka \sim \sqrt{E}$ (см. рис.). Там, где неравенство выполняется, у.Ш. имеет решение; это соответствует ”разрешенным зонам”. Зоны не перекрываются. На границах зон, при $\mu \rightarrow \pm 1$ спектр (связь E и квазиимпульса) параболическая.

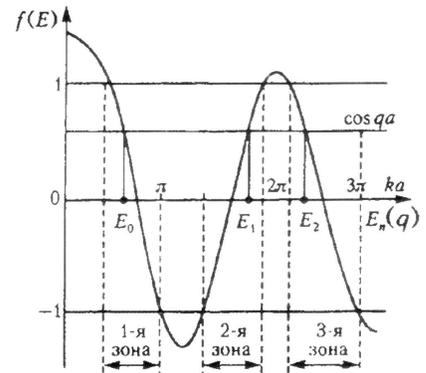


Рис. 2: Зонная структура одномерного кристалла

4.2 Как работают с квазичастицами

Найденное решение $\Psi(x)$ — это, фактически, волновая функция квазичастицы. дальше в курсе у нас будут еще КЧ, и мы увидим у них общее.

Квазиимпульс q характеризует состояние квазичастицы (например, подвижного электрона в периодическом поле кристаллической решётки). Видно, что q играет для частиц в периодич. среде ту же роль, что и импульс p **свободной частицы** в пространственно-однородных системах, где справедливо

$$\psi(r + u) = \exp^{ipu/\hbar} \psi(r) \quad p \leftrightarrow q.$$

Квазиимпульс неоднозначен, но для него "почти" выполняется ЗСЭ (с точностью до переброса в соседнюю ячейку Брюллиэна).

Значения q определяют энергию квазичастиц $E_n(q)$ внутри каждой из энергетич. зон. Изменение квазиимпульса под действием внешнего потенциала $V(r)$ задаётся ур-нием, аналогичным закону Ньютона: $dq/dt = -CV(r)$.

Возможность введения квазиимпульса существенно упрощает анализ (например, свойств кристаллов): вид, взаимное расположение, связность, наличие особенностей и т.д. для ферми - поверхностей и энергетич. зон, определяемых в пространстве квазиимпульса, позволяют сделать качественные выводы о свойствах твёрдых тел, напр. о их проводимости.

От одноэлектронной задачи к многочастичной методом Хартри-Фока. Решаем задачу о движении одного электрона в определённом модельном потенциале (в нашем случае — δ -забор). Это нулевое приближение метода Хартри - Фока. Строим волновую функцию набора таких частиц с помощью детерминанта Слэтера

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_1(\mathbf{r}_1) \psi_2(\mathbf{r}_2) - \psi_1(\mathbf{r}_2) \psi_2(\mathbf{r}_1) \} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_1(\mathbf{r}_1) & \psi_2(\mathbf{r}_1) \\ \psi_1(\mathbf{r}_2) & \psi_2(\mathbf{r}_2) \end{vmatrix}.$$

Идея самосогласования: смотрим, какой потенциал взаимодействия такого набора с одной частицей — строим эффективное поле, создаваемое ядром вместе со всеми остальными электронами. Найденный уточнённый потенциал используем для новой одноэлектронной задачи. Процедура продолжается до достижения сходимости.

Сходимость ХФ плохая, если есть сильное самодействие частиц. Метод не ловит характеристики скоррелированности частиц — это, фактически, **теория среднего поля**. Уточнение этого приближения придумал Боголюбов (метод Боголюбова-Хартри-Фока). Учет корреляций/флуктуаций

На всём этом стоит квантовая химия: численное моделирование конфигураций молекул, свойства смешанных кристаллов.

Введение квазичастиц упрощает физическую картину при описании процессов, в которых участвует много частиц и сильные взаимодействия. Это задачи теории конденсированных сред (твёрдое тело, квантовая жидкость), плазмы, рассмотрение атомных ядер. Квазичастицы — особый долгоживущий многочастичный комплекс, к-рый, в отличие от обычных (структурных) частиц, составляющих систему, взаимодействует слабо со своим окружением (или, по крайней мере, это взаимодействие сводится к самосогласованному полю). Поэтому квазичастица в системе большую часть времени можно рассматривать как имеющую фиксированное (медленно меняющееся) квантовое состояние, для них удобно вычислять волновые ф-ции, энергию, импульс, спин и т.д.. Двигаясь как целое подобно обычной частице, квазичастица является коллективным образованием, ее состав обновляется при её движении; лишь в предельных случаях этот состав фиксирован как у связанного состояния типа молекулы.

5 Вторичное квантование

При исследовании систем с большим числом квантовых частиц, традиционный формализм УШ становится неудобным — описание на уровне дифференциального уравнения в частных производных с большим числом переменных неэффективно. Антисимметризация на языке детерминантов Слейтера также неудобна при большом числе частиц. Совсем непригодным традиционный формализм УШ становится, если в системе рождаются или уничтожаются частицы.

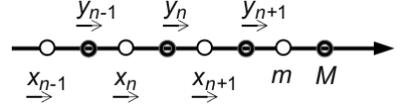
Более корректным оказывается при этом разговор на языке операторов рождения-уничтожения. Хочется попытаться объединить его достоинства с мощью других теоретических методов, в частности, формализмом минимизации действия на языке уравнений Лагранжа, а также универсальность фейнмановской формулировки КМ. При этом естественным образом обобщаться как понятия квантовой механики (волновые функции и операторы), так и найдут новое применение такие математические объекты как ф. Грина, интегральная форма у.Ш. и прочее. Полигоном для такой теории будет классическая теория поля (например, теория ε/μ поля Максвелла в ковариантной формулировке) для которой необходимо построить квантово-механическое обобщение, квантовую электродинамику.

Следует также отметить, что уже в КМ стало очевидным, что описание физического измерения при помощи отдельного описания операторов и волновых функций является искусственным и неуниверсальным. Ни сам оператор, ни в.ф. не являются объектами физической реальности, и описывают эксперимент лишь в совокупности друг с другом. Поэтому появление в КТП комбинированного объекта — „квантового поля” — сочетающего в себе свойства и того и другого, является вполне закономерным для теории, ставящей задачей обобщить результаты КМ. Более того, это понятие органически возникает в рамках самой КМ, например, при рассмотрении и квантовании цепочки осцилляторов

5.1 Классическая цепочка осцилляторов

Постановка задачи в классике (вводим координаты осцилляторов как на рисунке, отсчитываем координату n -го осциллятора от положения его равновесия $a_n \equiv na$):

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{p_n^2}{2m_n} + \frac{K(x_n - x_{n+1})^2}{2} \right).$$



Чтобы решение содержало интересные физические случаи – оптические и акустические моды, устроим цепочку чередующихся атомов массами m ("белые" атомы в точках с координатами $x_n = 2an$) и M ("черные" атомы в точках с координатами $y_n = 2a(n + 1/2)$). Вспомним, как в ФТТ описывают такую систему.

Рис. 3: Одномерная цепочка осцилляторов

Уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{x}_n = K(y_n + y_{n-1} - 2x_n), \quad M\ddot{y}_n = K(x_n + x_{n+1} - 2y_n). \quad (12)$$

Вводятся коллективные переменные

$$x_q = \sum_n e^{-ik2an} x_n(t) = \sum_n e^{-iqn} x_n(t), \quad y_q = \sum_n e^{-iq(n+1/2)} y_n(t),$$

где $q = 2ka$ – переменная, пропорциональная волновому числу k (отметим, $q \in [-\pi, \pi]$). Зависимость от времени предполагаем тривиальной, $e^{-i\omega t}$, то есть

$$x_n(t) \rightarrow x_n e^{-i\omega t},$$

но ω , конечно, будет зависеть от q . Через эти переменные можно выразить исходные координаты (это, фактически, обратное преобразование Фурье):

$$x_n = \sum_q x_q e^{i(qn - \omega t)}, \quad y_n = \sum_q y_q e^{i(q(n+1/2) - \omega t)}.$$

Заметим, что q записали в виде индекса, но на самом деле это непрерывный параметр с некоторой областью определения, при этом суммирование по q – интегрирование. Запись такая нам будет удобна потом.

Ответ строится в виде суперпозиции плоских волн, x_q и y_q имеют смысл амплитуд этих волн. Поскольку наша система уравнений линейная, **можно изучать эти плоские волны по отдельности**. При этом множитель $e^{-i\omega t}$ можно не писать, так как он будет одинаковым во всех слагаемых рассматриваемого уравнения.

Так и будем делать – рассмотрим одно слагаемое суммы по q .

Подставляя плоскую волну $x_n = x_q e^{i(qn - \omega t)}$ и $y_n = y_q e^{i(q(n+1/2) - \omega t)}$ в (12), получим линейную систему уравнений

$$m\omega^2 x_q = 2Kx_q - 2K \cos(q/2)y_q, \quad M\omega^2 y_q = 2Ky_q - 2K \cos(q/2)x_q, \quad (13)$$

которая имеет решение, если ее детерминант равен нулю:

$$\det \begin{pmatrix} 2K - m\omega^2 & -2K \cos(q/2) \\ -2K \cos(q/2) & 2K - M\omega^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Это дает биквадратное уравнение (ввели $\mu = mM/(m + M)$)

$$\omega^4 - \frac{2K}{\mu}\omega^2 + \frac{4K^2}{mM} \sin^2(q/2) = 0.$$

Можно решить и найти связь ω и q .

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{K}{\mu} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{mM} \sin^2(q/2)} \right).$$

И без решения понятно, что есть два типа решений при $q \rightarrow 0$ (устно решаем биквадратное уравнение при $q = 0$): $\omega(q \rightarrow 0) \rightarrow 0$ и $\omega(q \rightarrow 0) \rightarrow \sqrt{2K/\mu}$. В отличие от колебаний в струне, где $\omega \sim k$ тут получилась хитрая дисперсия. У волн есть фазовая и групповая скорости

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{q}, \quad v_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega(q)}{\partial q}.$$

Вообще, ω показывает (одинаковую) частоту колебаний каждого осциллятора в волне, а волновой вектор q – как связаны между собой фазы колебаний соседних осцилляторов (вспоминаем, что аналогичный параметр квазиимпульса в модели Кронига-Пенни показывал сдвиг фазы в.ф. при переходе в соседнюю ячейку кристалла). Если соседние осцилляторы синфазны, $q = 0$, в противофазе – тогда $q = \pi/2$. Не имеет смысла задавать сдвиг фаз больше, чем на $\pm\pi$, поэтому говорят, что волновой вектор задается в первой зоне Брлюллиэна $-\pi < q < \pi$. Кстати, это означает, что \sum_q эквивалентно $\int_{-\pi}^{\pi} dq/(2\pi)$.

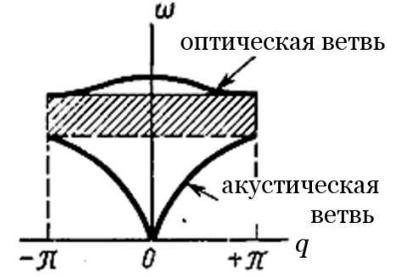
Одно из двух решений ω_- при малых q даёт малые ω . Это **акустическая ветвь** спектра, здесь групповая и фазовая скорости совпадают и при одинаковых массах атомов (в цепочке одинаковых осцилляторов) это решение сохраняется, а скорости оказываются равными скорости звука.

Второе решение – оптическая мода, здесь ω слабо зависит от q при малых q . При длинных волнах ($q \rightarrow 0$) фазовая скорость бесконечна, групповая – ноль. Это решение пропадает в цепочке однотипных осцилляторов.

Подставим $\omega(q)$ при малых q (длинные волны) в (13), получим для акустических волн $x_q = y_q$, а для оптических $x_q = -(M/m)y_q$. То есть в оптической моде тяжелые и легкие частицы колеблются в противофазе. Она потому и называется оптической, потому что при такого рода колебаниях атомов и электронов в твердом теле возникают и исчезают заряженные области, они взаимодействуют со светом и наблюдаются в оптических экспериментах. Такие волны можно возбудить ИК-излучением. А в акустической моде длинные волны вызывают синфазное движение тяжелых и легких частиц.

Также выпишем ответ (единственный), остающийся в случае $m = M$ ($\mu = m/2$):

$$\omega^2 = \frac{2K}{m}(1 - \cos ka) = \frac{2K}{m}2 \sin^2(ka/2), \quad \omega = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \sin(ka/2)$$



Электромеханическая аналогия. Заменяем массу $m \cdot x^2/2$ катушкой $LQ^2/2$, а пружинку $kx^2/2$ конденсатором $Q^2/2C$, построим бесконечную цепочку из последовательно соединенных катушек и конденсаторов (см. рис). Это **фильтр низких частот** (помним из радиофизики!). И в нашей задаче (при $m = M$) то же самое: на коротких волнах (граница зоны брэгговского рассеяния, $q = \pi$) групповая скорость обращается в ноль, то есть это стоячая волна. А низкочастотные колебания в такой системе побегут.

5.2 Квантование цепочки осцилляторов. Квазичастицы, соответствующие нормальным модам.

Рассмотрим операторный гамильтониан

$$\hat{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\hat{p}_n^2}{2m} + \frac{K(\hat{x}_n - \hat{x}_{n+1})^2}{2} \right).$$

По сравнению с предыдущей задачей мы положили $m = M$. Это не мешает нам впоследствии, поняв принцип, по которому строится решение, написать решение и для $m \neq M$.

Имеем набор операторов $\{\hat{x}_n \hat{q}_n\}$ – счетный набор, нумерованный индексом n . Для данного набора выполняется известное правило коммутации $[\hat{x}_n \hat{p}_m] = i\hbar \delta_{nm}$. Снова выполним преобразование Фурье, но теперь уже над операторами (Фурье по значку n):

$$\begin{aligned} \hat{x}_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \hat{x}_q e^{iqn}, & \hat{p}_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \hat{p}_q e^{iqn}. \\ \hat{x}_q &= \sum_n \hat{x}_n e^{-iqn}, & \hat{p}_q &= \sum_n \hat{p}_n e^{-iqn}. \end{aligned}$$

Получили эквивалентное описание: вместо счетного набора операторов – операторы \hat{x}_q, \hat{p}_q , нумерованные *непрерывным* индексом $-\pi < q < \pi$. Правило коммутации для данных объектов имеет вид

$$[\hat{x}_q \hat{p}_{q'}] = \sum_n e^{-iqn} \sum_m e^{-iq'm} [\hat{x}_n \hat{p}_m] = i\hbar \sum_{nm} e^{-iqn} e^{-iq'm} \delta_{nm} = i\hbar \sum_n e^{-in(q+q')} = 2\pi i\hbar \delta(q+q'),$$

здесь использована полнота плоских волн как базисного набора при разложении любой функции, заданной на интервале $q \in (-\pi, \pi)$. Кстати, это эквивалентно $[\hat{x}_q \hat{p}_{q'}^+] = 2\pi i\hbar \delta(q - q')$ – соотношению, которое также будем использовать. А чему равно $[\hat{x}_q^+ \hat{p}_{q'}]$?

Получившиеся объекты \hat{x}_q, \hat{p}_q являются „гибридом” функций и операторов – от одних переменных они зависят, как функции, а по другим являются операторами. Или, иначе, это операторы с непрерывной зависимостью от параметра. При этом естественно определена коммутация таких объектов, а коммутационное соотношение содержит вместо δ -символа по дискретному параметру δ -функцию по непрерывному.

Перепишем через данные объекты гамильтониан. Например, для первого слагаемого

$$\sum_n \hat{p}_n^2 = \sum_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq'}{2\pi} \hat{p}_q \hat{p}_{q'} e^{iqn+iq'n} = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq'}{2\pi} \delta(q+q') \hat{p}_q \hat{p}_{q'} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \hat{p}_q \hat{p}_{-q}.$$

Гамильтониан примет вид

$$\hat{H} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \left(\frac{\hat{p}_q \hat{p}_{-q}}{2m} + \frac{2K(1 - \cos q) \hat{x}_q \hat{x}_{-q}}{2} \right)$$

Сравнивая этот ответ с классическим, видим, что каждой фурье-гармонике (моде колебаний) соответствует осциллятор с частотой

$$\omega(q) = \sqrt{\frac{2K(1 - \cos q)}{m}} = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \sin(q/2).$$

Теперь введем операторы рождения и уничтожения для этих осцилляторов (мод):

$$\hat{a}_q = \tilde{x}_q + i\tilde{p}_q, \quad \hat{a}_q^+ = \tilde{x}_q^+ - i\tilde{p}_q^+ = \tilde{x}_{-q} - i\tilde{p}_{-q},$$

безразмерные \tilde{x}_q и \tilde{p}_q задаются формулами, аналогичными (3):

$$\hat{H} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \hbar\omega(q)(\tilde{p}_q\tilde{p}_{-q} + \tilde{x}_q\tilde{x}_{-q}).$$

Гамильтониан можно переписать и с помощью операторов рождения-уничтожения, соответствующих собственным модам:

$$\hat{H} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \hbar\omega(q)(\hat{a}_q^+\hat{a}_q + \hat{a}_q\hat{a}_q^+).$$

Коммутационные соотношения для наших операторов (используем коммутационные соотношения для координат-импульсов и соотношение (3)):

$$[\hat{a}_q\hat{a}_{q'}^+] = [\tilde{x}_q + i\tilde{p}_q, \tilde{x}_{q'}^+ - i\tilde{p}_{q'}^+] = i[\tilde{p}_q, \tilde{x}_{q'}^+] - i[\tilde{x}_q, \tilde{p}_{q'}^+] = -2i2\pi i\hbar\delta(q - q')/(2\hbar) = 2\pi\delta(q - q'),$$

что вполне аналогично соотношению в обычном осцилляторе.

А как насчет энергии нулевых колебаний? Она, очевидно, бесконечна, мы наткнёмся на ноль дельта-функции. Стоило ли удивляться - ведь у нас "бесконечная" цепочка осцилляторов, и $\hbar/2$ от каждого и должно сложиться в бесконечность. Физической проблемы нет, поскольку в эксперименте измеряем **отклонение** энергии от вакуумного состояния.

Обсуждение возможных свойств вакуума можно погуглить: эффект Казимира, лэмбовский сдвиг, эффект Шарнхорста.

Хотя мы квантовали цепочку одинаковых осцилляторов, теперь понятно, каким будет ответ в случае $m \neq M$.

В ходе решения этой задачи мы естественным образом получили новый объект – оператор поля. Получение его математически эквивалентно поиску решения в виде разложения по плоским волнам. Почему мы выбрали именно плоские волны? Потому что осциллятор. А вообще – раскладываем по набору **удобных** состояний.

Потом - добавить про квантование графена.

5.3 Определения

Рассмотрим систему бозе-частиц, каждая из которых может находиться в одном из состояний $\Phi_n(x)$ с энергией ϵ_n . Важно, что набор $\{\Phi_n(x)\}$ образует полную ортонормированную систему функций. Если задача стационарная, зависимость от времени у $\Phi_n(x)$ можно выделить подобно тому, как это делается в стационарном уравнении Шредингера, $\Phi_n(x) = \Phi_n(\mathbf{x})e^{-i\epsilon_n t/\hbar}$. Там, где будет сильно надо, будем использовать x для обозначения совокупности координаты \mathbf{x} и времени t .

Представление числе заполнения – способ задать состояние системы, указывая, сколько частиц системы находится в каждом из состояний $\Phi_n(x)$:

$$|\dots N_{n+1}, N_n, \dots N_1, N_0\rangle.$$

Вводим операторы рождения и уничтожения частиц в каждом состоянии ($[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$):

$$\hat{a}_n |\dots N_{n+1}, N_n, \dots N_1, N_0\rangle = \sqrt{N_n} |\dots N_{n+1}, N_n - 1, \dots N_1, N_0\rangle,$$

и оператор рождения аналогично; коммутационные соотношения обычные.

Как и в предыдущей задаче имеем дело с набором операторов $\{\hat{a}_n, \hat{a}_n^+\}$ – в предыдущей задаче были $\{\hat{x}_n, \hat{p}_n^+\}$. Там мы обошлись с ними, напомним, так:

$$\hat{x}_q = \sum_n \hat{x}_n e^{-iqn - i\omega t}, \quad \hat{p}_q = \sum_n \hat{p}_n e^{-iqn - i\omega t},$$

разложив по плоским волнам, при этом зависимость от дискретного значка n превратилась в зависимость оператора от параметра q . Поступим также: введем коллективные переменные

$$\sum_n \hat{a}_n \Phi_n(\mathbf{x}, t), \quad \sum_n \hat{a}_n^+ \Phi_n^*(\mathbf{x}, t),$$

этот объект снова оператор, но имеющий параметрическую зависимость от x вместо дискретного значка n . Этот объект называется **оператор квантового поля**. По аналогии с предыдущей задачей, следовало бы назвать его $\hat{a}(x)$, но произошла небольшая терминологическая неувязка, его обозвали $\hat{\Psi}(x)$. В остальном – полная аналогия. Коммутационные соотношения, очевидно, будут

$$[\hat{\Psi}(x)\hat{\Psi}^+(x')] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad [\hat{\Psi}(x)\hat{\Psi}(x')] = [\hat{\Psi}^+(x)\hat{\Psi}^+(x')] = 0.$$

Если задан $\hat{\Psi}(x)$, любой оператор рождения/уничтожения \hat{a}_k можно восстановить, пользуясь ортогональностью набора $\{\Psi_n(x)\}$ и сворачивая $\hat{\Psi}(x)$ с нужной волновой ф-цией $\Phi_k(x)$.

Фактически, исходные операторы стали коэффициентами разложения оператора поля по базису $\{\Phi_n(x)\}$. Если мы выберем *другой базис* – другие одночастичные состояния, нам придется просто переразложить поле по новому базису. Полученный объект, таким образом, более универсальный:

- Квантовое поле не зависит от базиса одночастичных состояний
- Совмещает свойства оператора и волновой функции. На языке волновых функций и операторов возможны нефизичные вопросы, типа „что происходит с волновой функцией, когда на нее не действует ни один оператор”, „как схлопывается волновая функция, когда оператор на нее подействовал” и обсуждение парадоксов вроде парадокса Вигнера.

После завершения опыта экспериментатор открывает коробку и видит живого кота. Вектор состояния кота в момент открытия коробки переходит в состояние «ядро не распалось, кот жив». Таким образом, в лаборатории кот признан живым. За пределами лаборатории находится друг. Друг еще не знает, жив кот или мёртв. Друг признает кота живым только тогда, когда экспериментатор сообщит ему исход эксперимента. Но все остальные друзья еще не признали кота живым, и признают только тогда, когда им сообщает результат эксперимента. Таким образом, кота можно признать полностью живым (или полностью мертвым) только тогда, когда все люди во вселенной узнают результат эксперимента. До этого момента в масштабе Большой Вселенной кот, согласно Вигнеру, остаётся живым и мёртвым одновременно.

Подобные проблемы возникают из-за неудобства языка КМ, и просто не возникают в КТП.

- Простая связь между одночастичным гамильтонианом и многочастичной задачей, естественное описание рождения-уничтожения.

Например, покажем, что $\int d^3x \hat{\Psi}^+(x) \hat{\Psi}(x)$ соответствует оператору числа частиц. Подействуем им на какое-нибудь состояние в представлении чисел заполнения:

$$\int d^3x \hat{\Psi}^+(x) \hat{\Psi}(x) | \dots \rangle = \int d^3x \sum_{n,m} \hat{a}_n^+ \Phi_n^*(x) \hat{a}_m \Phi_m(x) | \dots \rangle.$$

Из-за ортогональности набора $\{\Psi_n\}$ после интегрирования выживают только члены $n = m$:

$$= \sum_n \hat{a}_n^+ \hat{a}_n | \dots \rangle = \sum_n N_n | \dots \rangle.$$

Аналогично для кинетической энергии идеального газа $\hat{H}_1 = \hat{p}^2/2m$

$$\hat{\Psi}^+(x) \frac{\hat{p}^2}{2m} \hat{\Psi}(x) | \dots \rangle = \sum_{n,m} \hat{a}_n^+ \hat{a}_m \int d^3x \Phi_n^*(x) \frac{\hat{p}^2}{2m} \Phi_m(x) \sum_n \hat{a}_n^+ \hat{a}_n \epsilon_n | \dots \rangle = \sum_n \epsilon_n N_n | \dots \rangle.$$

Гамильтониан невзаимодействующих массивных бозе-частиц в потенциале:

$$\hat{H} = \int d^3x \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \hat{\Psi}^+(x) \nabla^2 \hat{\Psi}(x) + \hat{\Psi}^+(x) \hat{U}(x) \hat{\Psi}(x) \right),$$

да и остальные операторы получаются из одночастичных по тому же принципу..

Так же можно показать, что если частицы взаимодействуют по закону $\hat{V}(x_1 - x_2)$, в гамильтониан дописываем

$$\hat{H}_{int} = \frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 \hat{\Psi}^+(x_1) \hat{\Psi}(x_1) \hat{V}(x_1 - x_2) \hat{\Psi}^+(x_2) \hat{\Psi}(x_2),$$

что соответствует взаимодействию „плотность-плотность”

А как же ферми-статистика? Все также, только у ферми-систем числа заполнения могут быть только 0, 1, и коммутационные соотношения меняются: везде вместо коммутатора пишем антикоммутатор.

Оказывается, такой формализм мгновенно переписывается в терминах функционального интеграла Фейнмана, и имеет много других полезных бонусов.

Как и в классической механике, можем проводить различные замены переменных, чтобы упростить задачу. В теореме к нашим услугам был набор всевозможных канонических преобразований (сохраняющих гамильтонову форму уравнений, связанную со скобкой Пуассона). На языке дискретного набора операторов $\{\hat{a}_n^+, \hat{a}_n\}$ мы вводим линейные комбинации этих операторов $\hat{b} = \sum_n \alpha_n \hat{a}_n$, сохраняющие коммутационные соотношения $[\hat{b}, \hat{b}^+] = 1$.

Например, имея квадратичный, но недиагональный по операторам рождения-уничтожения гамильтониан $\hat{H} = \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_1$, можем перейти к новым операторам – линейной комбинации исходных операторов рождения-уничтожения – с сохранением правильных коммутационных соотношений, причем так, что гамильтониан диагонализуеться. При этом, очевидно, система сводится к набору невзаимодействующих осцилляторов (проверить самостоятельно!). На языке же квантовых полей $\hat{\Psi}(x)$ это соответствует

линейному преобразованию в пространстве $\hat{\Psi}$ и достаточно просто записывается, например в формализме функционального интеграла Фейнмана. Такая линейная диагонализующая замена называется **преобразованием Боголюбова**.

А вот, например, гамильтониан XY-модели, возникающий при рассмотрении 1D-квантового магнетика:

$$\sum_i (A\hat{a}_i^+ \hat{a}_{i+1} + A\hat{a}_{i+1}^+ \hat{a}_i + B\hat{a}_i \hat{a}_{i+1} + B\hat{a}_{i+1}^+ \hat{a}_i^+ - 2C\hat{a}_i^+ \hat{a}_i).$$

Соответствующее преобразование Боголюбова отправится когда-нибудь в Степик.

6 Теоретическая механика классического и квантового поля

6.1 Сокращения, варьирование, уравнения движения

Ввели квантовое поле – что дальше, что с ним делать? Вспомним, как работать с классическими полями.

Наша цель теперь – научиться квантовать любые задачи теоретической механики с бесконечным числом степеней свободы. Состояние такой системы задается функцией, например задача о колебании струны, мембраны, описание электромагнитного поля... Говорят, что состояние системы задается *классическим полем* $\phi(x) \equiv \phi(\mathbf{x}, t)$.

Пока пусть у нас поле скалярное (однокомпонентное). Лагранжиан выберем пока квадратичным по полю и его временной производной – чтобы уравнения движения получались линейными. Например, если хотим вклад типа обычной кинетической энергии, можем рассмотреть функцию Лагранжа:

$$L\{\phi, \dot{\phi}\} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \dot{\phi}(x) \dot{\phi}(x) - \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \phi(x) K(x - x') \phi(x')$$

Такая запись громоздкая и неудобная, лучше написать так

$$L\{\phi, \dot{\phi}\} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \phi K \phi,$$

подразумевая, что зависимость полей от всех координат должна быть интегрирована, а K – задает квадратичную форму и соответствующий ей линейный оператор. Заметим, что L – функционал состояния $\phi(x)$.

Чтобы не пугаться обозначений, вспомним уравнения движения системы с конечным числом степеней свободы (теперь $\{\phi_n\}$ – координаты n частиц, K_{nm} – потенциал взаимодействия n -той и m -той частиц; в задаче с цепочкой осцилляторов у нас взаимодействовали только ближайшие соседи $m = n \pm 1$):

$$L = \frac{1}{2} \sum_n \dot{\phi}_n^2 - \frac{1}{2} \sum_{nm} K_{nm} \phi_n \phi_m.$$

Видно, что вся разница в том, что дискретный значок n становится непрерывной координатой x , а опускание интегрирования соответствует договорённости об опускании повторяющегося значка суммирования. Уравнение движения такой системы

$$\text{для любого } n: \quad \ddot{\phi}_n + \sum_m K_{nm} \phi_m = 0. \quad (14)$$

Эту систему можно записать в виде $\ddot{\phi} + K\phi = 0$, если под K понимать оператор, соответствующий матрице K_{nm} .

В континуальном случае уравнения движения с одной стороны, должны получаться варьированием:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} - \frac{\delta L}{\delta \phi(x)} = 0.$$

С другой стороны, обобщение системы (14) на континуальный случай должно приводить к соотношению

$$\text{для любого } x \quad \ddot{\phi}(x) + \int d^3\mathbf{x}' K(x - x') \phi(x') = 0.$$

Последнее равенство можно переписать, с учетом договоренности об опускании пространственной свертки, как $\ddot{\phi} + K\phi = 0$.

Хотя это только классическое уравнение движения, как мы увидим, свободные квантовые поля также подчиняются этому уравнению. Функция Грина данного уравнения, т.е. оператор, обратный к

$$-\delta(t - t') \frac{\partial^2}{\partial t^2} + K(x - x'), \quad (15)$$

позволяет рассматривать нелинейные добавки к классическим уравнениям в качестве возмущений и поэтому играет важную роль в дальнейшем. Кстати, можно весь объект (15) рассматривать как ядро линейного оператора \bar{K} , и писать $L = \phi \bar{K} \phi / 2$.

Как же ввести вариационную производную? ПО аналогии с обычной производной.

Можно понять, что вариационная производная определена так, чтобы соответствовать в континуальном пределе задаче Лагранжа с $n \rightarrow \infty$ степенями свободы. Подобно тому, как обычная производная – это коэффициент, стоящий при линейном члене разложения ряда Тейлора по малому аргументу, для взятия вариационной производной справедлива следующая последовательность действий.

- Рассмотрим малое приращение поля $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$.
- Линеаризуем варьируемый функционал $F\{\phi + \delta\phi\}$ по $\delta\phi$, линейный член запишем в виде

$$\int dx D(x) \delta\phi(x).$$

Величина $D(x)$ может зависеть от поля ϕ , например, иметь вид $\phi^n(x)$ или $\int dx' V(x-x')\phi(x')$

- Назовем вариационной производной ядро оператора D с аргументом, выбранным следующим образом (убрать интеграл):

$$\frac{\delta F\{\phi\}}{\delta\phi(y)} = D(y).$$

Формально этот результат возникает, если вместо $\delta\phi(x)$ в вариацию подставить дельта-функцию от аргумента $x - y$, где x – переменная интегрирования в вариации, y – аргумент функции, по которой варьировали. Заметим, что получившийся в результате варьирования функционала объект является *функцией*, а аргумент этой функции совпадает с аргументом поля, по которому варьировали.

Аналогия: убрать интеграл = убрать суммирование по i в формуле

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

Проверка по заданиям степика.

Упражнение. Рассмотрим пример с

$$\partial\phi\partial\phi/2 + g\phi^3/3!$$

Остальное варьирование осваиваем в Степике.

Упражнение. Каким надо выбрать K , чтобы уравнение движение дало волну, распространяющуюся со скоростью c ?

Контрольный вопрос:

Итак, у нас имеется функционал $L(\phi, \dot{\phi})$, и соответствующий ему функционал действия. Зависимые или независимые переменные ϕ и $\dot{\phi}$ при взятии вариационной производной?

Если получаем уравнения движения из уравнений Лагранжа, то варьировать мы функционал L , заинтегрированный лишь по координате, при этом рассматриваем поле и его производную как независимые переменные. Если же напрямую воспользуемся принципом экстремальности действия, то есть варьировать действие $S \equiv \int dt L$, то переменные ϕ и $\dot{\phi}$ связаны. Это – эквивалентные математические операции.

Убедимся для нашего L , что результат один:

$$L_{\dot{\phi}} = \dot{\phi}, \quad L_{\phi} = K\phi, \quad \frac{\delta S}{\delta\phi(x)} = \ddot{\phi} + K\phi = 0,$$

при вычисления вариационной производной производную по времени под знаком интеграла пришлось перебрасывать по частям.

Если вычислять вторым способом, не обязательно выделять кинетическую энергию, ведь она тоже квадратична по полям, как и K . Поэтому встречается запись $S = \phi \bar{K} \phi / 2$, где $-\delta(t-t')\partial_t^2 + K = \bar{K}$.

6.2 Канонически сопряженные импульсы

выбираются также, как в дискретном случае (ϕ – координата, $\dot{\phi}$ – скорость, вариация лагранжиана по скорости – импульс):

$$\Pi(x) = \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x).$$

Переход от лагранжева формализма к гамильтониану (преобразование Лежандра):

$$H = \Pi\dot{\phi} - L = \frac{1}{2}\Pi^2(x) + \frac{1}{2}\phi K\phi,$$

помним про договоренность об опускании интегралов по координатам.

Пример: уравнение движения вида Клейна-Гордона

$$S = \int d^4x \left(\frac{(\partial_\mu\phi)^2}{2} - \frac{m\phi^2}{2} \right) \Rightarrow \partial_\mu \frac{\delta L}{\delta\partial_\mu\phi} - \frac{\delta L}{\delta\phi} = \frac{\delta S}{\delta\phi(x)} = -(\partial_\mu^2 + m^2)\phi = 0.$$

Многочастичный гамильтониан $\hat{\Psi}^+ \hat{H}_1 \hat{\Psi}$ также можно представить в форме квадратичного функционала поля $\phi K \phi / 2$. Для этого надо рассмотреть столбец $(\hat{\Psi}^+ \hat{\Psi})^T$ в качестве двухкомпонентного поля ϕ , и считать K матрицей, у которой на диагоналях нули, а в антиэрмитовых углах \hat{H}_1 .

Квантование системы, состояние которой задается полем. Сопоставляем всем классическим полям квантовые: $\hat{\Pi}(x)$, $\hat{\phi}(x)$, дополняем коммутационными соотношениями

$$[\hat{\phi}(x) \hat{\Pi}(x')] = i\hbar \delta(x - x'),$$

поле координаты коммутирует с собой, то же и с полем импульса.

Фурье. Введем нормальные моды.

Снова рассмотрим гамильтониан

$$H = \frac{\Pi^2(x)}{2} + \frac{\phi K \phi}{2}.$$

К преобразованию Фурье можно переходить в исходной, классической задаче, а можно сразу в квантовополевой, по аналогии. Отличие: в задаче с осцилляторами это был ряд Фурье (n было дискретное), а теперь это непрерывное преобразование

$$\hat{\phi}(q) = \int d^3x \hat{\phi}(x) e^{-iqx}, \quad \hat{\Pi}(q) = \int d^3x \hat{\Pi}(x) e^{-iqx}.$$

Исходные операторы были эрмитовы, значит

$$\hat{\phi}^+(q) = \hat{\phi}(-q), \quad \hat{\Pi}^+(q) = \hat{\Pi}(-q).$$

В соответствии с нашей договоренностью обратное преобразование такое же, только меняется знак в экспонент и добавляется $(2\pi)^{-3}$. Коммутационные соотношения такие же, как в задаче с цепочкой осцилляторов, только с заменой δ -символа δ -функцией.

Перепишем гамильтониан в этих переменных. Свертка $\phi K \phi$ перейдет в произведение, если для самосопряженного оператора K ввести

$$\omega^2(q) = \int d^3x K(x) e^{-iqx}, \quad \omega^2(q) = \omega^2(-q) > 0$$

гамильтониан примет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{\Pi}(q) \hat{\Pi}(-q)}{2} + \frac{\omega^2(q) \hat{\phi}(q) \hat{\phi}(-q)}{2},$$

здесь подразумевается, что все аргументы q интегрированы: $\int d^3q / (2\pi)^3$.

Аналогично можно ввести операторы рождения-уничтожения

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int dq \hbar \omega(q) (\hat{a}^+(q) \hat{a}(q) + \hat{a}(q) \hat{a}^+(q)),$$

причем нет смысла дописывать бесконечную константу-вакуумный вклад, поскольку логичнее договориться отсчитывать энергию системы от вакуума.

Бесконечный коммутатор. У нас естественным образом снова породились квантовые поля $\hat{a}(q)$, $\hat{a}^+(q)$ с таким же коммутационным соотношением, как в случае квантования цепочки осцилляторов:

$$[\hat{a}(q) \hat{a}^+(q')] = (2\pi)^3 \delta(q - q').$$

Может показаться странным, что коммутатор квантовых полей может стать бесконечным. Однако легко перейти к менее сингулярному представлению. Выберем базис $\{\Psi(q)\}$ и спроецируем на него наши операторы полей. Определим

$$\hat{a}_n = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Phi_n^*(q) \hat{a}(q).$$

Чтобы проквантовать поле, мы перешли от непрерывного квантового поля к набору дискретных операторов рождения-уничтожения, которые коммутируют привычным образом. Вторичное квантование – наоборот, переход от счетного набора операторов рождения-уничтожения к оператору поля.

Базис $\{\Phi_n(q)\}$ выбираем произвольно, это могут не быть собственные состояния оператора энергии. Состояния

$$|q\rangle = \hat{a}^+(q)|0\rangle$$

являются собственными состояниями гамильтониана, хотя нормировать их нельзя. Физически они соответствуют фону с импульсом $\hbar q$ и энергией $\hbar \omega(q)$.

7 Теория классического поля

Итак, хочется разобраться, по каким физическим принципам следует строить классические лагранжианы. Пока что об-суждали лишь теорию с уравнением движения типа уравнения Шредингера. Кроме того, из курса э/д знаем классический лагранжиан э/м поля. А какие еще лагранжианы могут иметь физический смысл?

Начнем с простого - уравнения движения пока по-прежнему линейны, т.е. лагранжиан квадратичен по полям (взаимодей-ствие успеем добавить). Также хотим релятивистской инвариантности, и чтобы уравнения не содержали производных старше второго порядка. Поля будем считать достаточно быстро убывающими при приближении к границам системы (не хотим иссле-довать граничные эффекты).

Везде $\hbar = c = 1$, x -пространство четырехмерно, метрический тензор $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$. Греческие и латинские символы – как в э/д; договоренность про суммирование по повторяющимся значкам. Но индексы a, b, c зарезервируем для других нужд. Скалярное произведение в R^4 определено метрическим тензором: $a_\mu b^\mu = a_\mu b_\nu g^{\mu\nu} = a_0 b_0 - a_i b_i$. Обозначение $\partial_\mu \partial^\mu \equiv \partial_\mu^2$.

7.1 Свободная скалярная теория

Пусть состояние системы задается скаляром $\varphi(x)$ в каждой точке пространства. Построим плотность лагранжиана (удовле-творяющей упомянутым св-вам):

$$\mathcal{L} = a(\partial_\mu \varphi)^2 + \partial_\mu^2 \varphi(b + c\varphi) + d\varphi^2 + e\varphi \rightarrow \frac{(\partial_\mu \varphi)^2}{2} - \frac{m^2 \varphi^2}{2}.$$

Здесь мы упростили выражение: слагаемые, пропорциональные d и e , собираются в вклад $\sim m^2$ заменой $\varphi \rightarrow \varphi + \text{Const}$; вклад c b образует в ноль на убывающих полях, если размер системы велик, вклады a и c можно объединить, интегрируя по частям, и преобразовать заменой $\varphi \rightarrow \varphi/\sqrt{2(a-b)}$. Почему выбрали такие знаки слагаемых в последнем выражении? Скоро пойдем. Линейный по ϕ вклад "портит" затухание поля на бесконечности, пока отбросим эту проблему – потом такой вклады будет называться "источник".

Уравнение движения Клейна-Гордона, $\partial_\mu^2 \varphi + m^2 \varphi = 0$. Решение ищем в виде плоских волн (\vec{k} – волновой вектор, k_0 – частота):

$$\varphi(x) = \int d^4 k e^{ikx} \varphi(k), \quad \text{откуда } k^2 = m^2 \Rightarrow k_0 = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}.$$

Или так (более физично/привычно, когда $k_0 \geq 0$):

$$\varphi(x) = \int_{k_0 \geq 0} d^4 k (e^{ikx} \varphi(k) + e^{-ikx} \varphi^*(k)), \quad k_0 = +\sqrt{m^2 + \vec{k}^2}.$$

Дисперсия наших плоских волн правильная, соответствует (в нормальной системе единиц) релятивистскому уравнению $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$.

Посчитаем энергию нашего поля. Для этого совершим преобразование Лежандра, $p = \delta L / \delta \dot{\varphi} = \delta L / \delta (\partial_0 \varphi)$:

$$E = \int d^3 x \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - \mathcal{L} \right) = \int d^3 x (\dot{\varphi}^2 - \mathcal{L}) = \int d^3 x \left((\partial_0 \varphi)^2 - \frac{(\partial_\mu \varphi)^2}{2} + \frac{m^2 \varphi^2}{2} \right) = \frac{(\partial_0 \varphi)^2 + (\partial_i \varphi)^2 + m^2 \varphi^2}{2}.$$

Теперь понятно, почему в исходном лагранжиане такие знаки – для ограниченности гамильтониана снизу. Иначе сильные осцилляции и сильные поля могли бы бесконечно уменьшать энергию.

А вот в статфизике оказывается, что m^2 может быть отрицательно! У нас такие примеры будут...

7.2 Квантовая механика – комплексное скалярное поле

Пусть состояние системы задается комплексным числом (волновой функцией)

$$S = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi.$$

Варьируем по φ и φ^* независимо:

$$\frac{\delta}{\delta \varphi^*} : \quad \partial_\mu^2 \varphi + m^2 \varphi = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\delta}{\delta \varphi} : \quad \partial_\mu^2 \varphi^* + m^2 \varphi^* = 0. \tag{17}$$

Получили и пока что будем работать с уравнением Клейна-Гордона, потому что это релятивистское вещество. Если захотим нереляти-вистское, нужно будет, чтобы выполнялось не К.-Г., а УШ, т.е. что-то типа такого (потом посмотрим подробнее)

$$S = \Psi^\dagger (i\hbar \partial_t - \hat{H}_1) \Psi.$$

Комплексное скалярное поле можно понимать и иначе: $\varphi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}$. Перепишем в этих переменных

$$S = \frac{\partial_\mu(\varphi_1 - i\varphi_2)\partial^\mu(\varphi_1 + i\varphi_2)}{2} - \frac{m^2(\varphi_1 - i\varphi_2)(\varphi_1 + i\varphi_2)}{2} = \frac{\partial_\mu\varphi_a\partial^\mu\varphi_a}{2} - \frac{m^2\varphi_a\varphi_a}{2},$$

здесь $a = 1, 2$ суммирование по a подразумевается.

Итак, комплексное скалярное поле эквивалентно 2м действительным полям **равной массы**.

Однако, в этой модели есть и новое. Сейчас увидим, что в отличие от предыдущего случая, такие системы "обладают зарядом". Действительно, важное свойство этого лагранжиана – наличие сохраняющегося "потока вероятности":

$$j_\mu = -i(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^*), \quad \partial^\mu j_\mu = 0.$$

Чтобы увидеть это, домножим (16) на φ^* , а (17) на φ и вычтем одно из другого. Получится $\varphi^*\partial_\mu^2\varphi - \varphi\partial_\mu^2\varphi^* = 0$, что пропорционально дивергенции введенного тока $\partial^\mu j_\mu$.

Почему называем поперечность тока сохранением? Проинтегрируем $\partial^\mu j_\mu$ по $3d$ -пространству. Величина $Q = \int d^3x j_0$ тогда сохраняется, если поток тока j_i через границу системы равен нулю. Но ведь поля φ , через которые выражен ток, быстро убывают к границам, значит заряд сохраняется.

Если рассмотреть $j_\mu \rightarrow qj_\mu$ (ведь закон сохранения выполняется с точностью до произвольного множителя), то получим из плотности вероятности плотность заряда, то есть обычный электрический ток.

7.3 Электродинамика – векторное вещественное безмассовое поле

Мы объединяем 4х-потенциал, получаем $(c\phi, \vec{A})$ – поле. Это ко- или контравариантный вектор???

Калибровочные преобразования

$$\phi \rightarrow \phi - \partial_t f/c, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \partial_i f$$

имеют разные знаки – что-то не похоже на единый контравектор ($\sim \partial_\mu$). Зато если "поднять значки", всё ОК: объединённый объект $A^\mu = (c\phi, \vec{A})$ пропорционален КОНТРАВектору

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu f(x) \quad [4D\text{-Fourier}] \quad a^\mu(k) \rightarrow a^\mu(k) + k^\mu(-i)f(k).$$

Для построения э/д-ки вводят тензор напряженности (по Васильеву)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & +H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

и записывают через него лагранжиан (в э/д была система СГС, там наши формулы надо еще поделить на 4π)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{E^2 - H^2}{2}.$$

В курсе э/д считали энергию, получалось то же, только все знаки "+". Мы пока рассматриваем э/д в вакууме (зарядов и токов нет). А если захотим заряды и токи – понадобится дописать в \mathcal{L} слагаемое $-qj_\mu A^\mu/c$ – оно называется "источник".

Уравнения Максвелла – варьируем лагранжиан по полю A_μ . Для этого пишем вариацию поля $A_\mu \rightarrow A_\mu + a_\mu$, линеаризуем по a , перебрасываем производные по частям и переобозначаем индексы так, чтобы при a стоял индекс μ . Можно попроще, вариация "сложного функционала":

$$\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = \delta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} = 2F^{\mu\nu}\delta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \quad \text{откуда} \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (18)$$

На самом деле это только половина уравнений Максвелла (которая ?), вторая половина берется из тождества Бьянки

$$\text{Asym}_{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0.$$

Выписать $\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0$ и т.д.; увидеть, что это уравнения Максвелла.

7.4 Поперечность решений в э/д-ке

Решим (18), подставляя анзац в виде плоских волн и переходя к Фурье-представлению:

$$A_\mu = \int_{k_0 \geq 0} d^4 k e^{ikx} a_\mu(k) = \int_{k_0 \geq 0} d^4 k (e^{ikx} a_\mu(k) + e^{-ikx} a_\mu^*(k)) \quad \Rightarrow$$

$$k^\mu k_\mu a_\nu - k^\mu k_\nu a_\mu = k^2 a_\nu - k_\nu(k, a) = 0.$$

Пусть сначала $k^2 \neq 0$. Тогда из последнего уравнения 4х-векторы k_ν и a_ν параллельны, и любое решение вида $a_\nu = c(k)k_\nu$ удовлетворяет уравнению. Скоро увидим, что это "неинтересные" решения.

Пусть теперь $k^2 = 0$. Тогда $(k, a) = 0$. Есть три независимых 4х-вектора, удовлетворяющих этому условию, сам вектор k_ν и еще два, e_a ($a = 1, 2$) которые можно выбрать с нулевыми временными компонентами $e_a^0 = 0$, и равенство нулю (k, e_a) превращается в трехмерную ортогональность \vec{e}_a и \vec{k} . Значит решение имеет вид

$$a_\mu(k) = c_1(k)\vec{e}_1 + c_2(k)\vec{e}_2 + c_3(k)k_\mu.$$

Последнее слагаемое тривиально, поскольку уничтожается калибровкой $a_\mu(k) \rightarrow a_\mu + k_\mu f(k)$. Это очевидное слагаемое (если есть решение, то прибавляя к нему калибровку, мы решение не портим). Достаточно считать поля поперечными. Число степеней свободы 2.

7.5 Источник поля

Чтобы ввести неоднородность в ур-иях Максвелла, вводят 4х-мерный ток $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$, и в лагранжиан добавляем слагаемое $qj^\mu A_\mu/c$, при этом уравнения Максвелла оказываются

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = qj_\nu/c.$$

Заметим, что **ток может быть только поперечный**: подействовав на последнее уравнение ∂_ν , просуммировав по ν и используя антисимметрию, получаем условие поперечности тока. Кроме того, если ток поперечный, сохраняется калибровочная инвариантность Лагранжиана, где есть слагаемое $\sim j_\mu A^\mu$:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f \quad \Rightarrow \quad j^\mu A_\mu \rightarrow j^\mu A_\mu + j^\mu \partial_\mu f = j^\mu A_\mu - f \partial_\mu j^\mu = j^\mu A_\mu,$$

при этом граничный вклад при интегрировании по частям мы отбросили, считая, что в качестве калибровочной ф-ции f берем хорошо убывающую.

Итак, мы видим, что источник j_μ производит э/м поле, если взять лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - qj^\mu A_\mu/c$$

По аналогии, введем источник в скалярной теории, добавив в лагранжиан слагаемое $\int d^4x \rho(x)\varphi(x)$ с источником ρ .

7.6 Массивное векторное поле

А если хотим "массивную электродинамику", в которой поля поперечны?

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m^2 B_\mu B^\mu}{2}.$$

Как и в э/д-ке **хотим рассматривать поперечные поля**. Это разумно: ведь если есть ещё и вклад $\partial_\mu f$, он описывается скалярным полем f , это не интересно – ведь мы хотим описать именно векторное поле. Убедимся, что наш лагранжиан дает именно поперечные поля. Уравнение движения

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + m^2 B_\nu = 0.$$

Подействуем ∂^ν , просуммируем и учтем антисимметричность $F_{\mu\nu}$, это тут же дает поперечность.

Теперь убедимся, что по каждой компоненте уравнение движения совпадает с уравнением Клейна - Гордона:

$$\partial^\mu \partial_\mu B_\nu - \partial^\mu \partial_\nu B_\mu + m^2 B_\nu = 0.$$

Подчеркнутое равно нулю из поперечности, остальное – К.-Г.

Электродинамика, как видим, – теория векторного безмассового поля. Также здесь можно ввести источник $\int d^4x j^\mu B_\mu$ и неоднородные уравнения.

А вот **калибровочная инвариантность дохнет**, очевидно, если включать массивное слагаемое в лагранжиан.

7.7 Взаимодействие между полями разных типов

Попробуем составить лагранжиан, который описывает рождение э/м поля A_μ посредством вещества — скалярного комплексного поля φ : запишем сумму свободных лагранжианов полей и добавим источник э/м поля $j_\mu^{(0)} = j_\mu^{(0)}(\varphi)$, составленный из φ :

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi - \frac{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{4} - j_\mu^{(0)} A^\mu.$$

Поскольку ток должен быть, как видели, поперечным, в качестве него попробуем взять

$$j_\mu^{(0)} = -iq(\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^*).$$

Уравнения, получающиеся варьированием по A_μ те же. Но увы, пропала поперечность тока. Она у нас бралась из уравнений движения поля φ . Теперь уравнения изменились. И теперь так введенный ток не сохраняется. Проверим:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^*} : \quad -\partial_\mu^2 \varphi - m^2 \varphi + qiA^\mu \partial_\mu \varphi + qi\partial_\mu(\varphi A^\mu) = 0,$$

и, аналогично, комплексно-сопряженное уравнение для $\delta/\delta\varphi$.

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} : \quad -\partial_\mu^2 \varphi^* - m^2 \varphi^* - qiA^\mu \partial_\mu \varphi^* - qi\partial_\mu(\varphi^* A^\mu) = 0,$$

Домножим первое на φ^* , второе на φ и вычтем одно из другого:

$$\begin{aligned} -\varphi^* \partial_\mu^2 \varphi - m^2 \varphi^* \varphi + qi\varphi^* A^\mu \partial_\mu \varphi + qi\varphi^* \partial_\mu(\varphi A^\mu) &= 0 \\ - & \\ -\varphi \partial_\mu^2 \varphi^* - m^2 \varphi \varphi^* - qiA^\mu \varphi \partial_\mu \varphi^* - qi\varphi \partial_\mu(\varphi^* A^\mu) &= 0 \end{aligned}$$

получим

$$\partial^\mu (\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^*) = 2qi\partial_\mu(\varphi^* \varphi A^\mu).$$

Это закон сохранения только если $q = 0$. А если не ноль, умножим на $(-iq)$, получим, что $j^{(0)}$ не сохраняется с точностью до q^2 :

$$\partial^\mu j_\mu^{(0)} = 2q^2 \partial_\mu(\varphi^* \varphi A^\mu).$$

Как быть? Можно пытаться исправлять ток, добавляя в него такие вклады по полям, чтобы он сохранялся.

$$j_\mu^{(1)} = -iq(\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^* - 2q\varphi^* \varphi A_\mu) \Rightarrow \partial^\mu j_\mu^{(1)} = 0.$$

Можно на q^2 смотреть как на поправки по малому q

Можно рассмотреть лагранжиан с новым током $\mathfrak{a}^{(1)}$ и даже сообразить, что такая добавка даст вклады q^3 к уравнениям движения, поэтому итерационно всё хорошо. Технически так — потому что в поправке нашей нет производных. И в результате просто степени q наберутся, и соберутся в нетривиальную константу. Это возможный путь, но мы сделаем короче.

7.8 Применение калибровочной инвариантности для построения теории классического поля

Мы знаем, что при калибровочных преобразованиях УШ тоже менялось — в.ф. приобретала фазу (см. раздел 2.2). Потребуем, чтобы наш лагранжиан был инвариантен относительно обоих преобразований сразу (константу $e = q/\hbar c$ ввели для соответствия с разделом 2.2):

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu f, \quad \varphi \rightarrow e^{if(x)} \varphi, \quad \varphi^* \rightarrow e^{-if(x)} \varphi^*. \quad (19)$$

Свободная э/д-ка инвариантна относительно такого преобразования. А скалярная теория — нет:

$$\partial_\mu (e^{if(x)} \varphi) = e^{if(x)} (\partial_\mu \varphi + i\varphi \partial_\mu f) \neq e^{if(x)} \partial_\mu \varphi.$$

Если бы последнее равенство выполнялось, вклад $\partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi$ не менялся бы при калибровочном преобразовании. Что же делать, ведь равенства нет?

Введем новое дифференцирование D , для которого

- $D(e^{if(x)} \varphi) = e^{if(x)} D\varphi$.
- D зависит от A ; при $A \rightarrow 0$ $D \rightarrow \partial$.

Поскольку надо скомпенсировать $\varphi\partial_\mu f$ лишь при A не равных нулю, введем **ковариантную производную**

$$D_\mu\varphi \equiv \partial_\mu\varphi - ieA_\mu\varphi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi.$$

Заменим в действии обычную производную на ковариантную:

$$\mathcal{L} = (D_\mu\varphi)^* D^\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi - \frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4}.$$

Этот лагранжиан квадратичен по каждому полю (φ, A), но по паре полей нет. То есть уравнение движения поля A линейно по A , уравнение движения поля φ линейно по φ , но система уравнений по (φ, A) нелинейна!

7.9 Варьируем лагранжиан КЭД

Вариация по φ

Получить уравнения движения для вещества можно практически устно, если заметить, что

$$D_\mu\varphi(D^\mu\varphi)^+ = -\varphi(D_\mu D^\mu)\varphi^+$$

(расписать и убедиться).

Повторяя процедуру вывода сохраняющегося тока, получим, что введённый в разделе 7.7 ток как раз и равен:

$$j_\mu^{(1)} = (-i)(\varphi^* D_\mu\varphi - \varphi(D_\mu\varphi)^*) = j_\mu^{(0)}$$

Конечно, проварьировать лагранжиан по φ можно и не переходя к ковариантным производным. Мы не проводили такие выкладки на лекции, однако это регулярно фигурирует в качестве допвопроса на экзамене – с целью проверить, как вы умеете варьировать. Посмотрите, как это делается (а лучше, попробуйте сами).

Лагранжиан без источника $(\partial_\mu\varphi - ieA_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi^* + ieA^\mu\varphi^*)$. Рассматриваем приращение $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$

$$(\partial_\mu\delta\varphi - ieA_\mu\delta\varphi)(\partial^\mu\varphi^* + ieA^\mu\varphi^*) = 0$$

выбираем линейный вклад по $\delta\varphi$, перекидываем производную, превращаем в уравнение (достаточное условие при произвольных вариациях $\delta\varphi$):

$$-\partial_\mu^2\varphi^* - ie\partial_\mu(A^\mu\varphi^*) - ieA_\mu\partial^\mu\varphi^* + e^2A^2\varphi^* = 0.$$

Аналогично варьирование по φ^* даёт

$$-\partial_\mu^2\varphi + ie\partial_\mu(A^\mu\varphi) + ieA_\mu\partial^\mu\varphi + e^2A^2\varphi = 0.$$

Верхнее $\times\varphi$, нижнее $\times\varphi^*$, вычитаем одно из другого, получим (смотреть в цвете):

$$(\varphi^*\partial_\mu^2\varphi - \varphi\partial_\mu^2\varphi^*) - ie\varphi\partial_\mu(A^\mu\varphi^*) - ie\varphi^*\partial_\mu(A^\mu\varphi) - ie\varphi A^\mu\partial_\mu\varphi^* - ie\varphi^* A^\mu\partial_\mu\varphi = 0.$$

группируем одноцветные

$$(\varphi^*\partial_\mu^2\varphi - \varphi\partial_\mu^2\varphi^*) - ie\partial_\mu(\varphi A^\mu\varphi^*) - ie\partial_\mu(\varphi^* A^\mu\varphi) = 0.$$

$$(\varphi^*\partial_\mu^2\varphi - \varphi\partial_\mu^2\varphi^*) - 2ie\partial_\mu(A^\mu\varphi\varphi^*) = 0$$

Это уравнение на сохраняющийся ток в ЭД, где e собрало в себя все степени q :

$$\partial_\mu(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^* - 2ieA^\mu\varphi\varphi^*) = 0,$$

то есть уравнение вида $\partial_\mu j^\mu = 0$, где j^μ – 4D-ток, соответствующий закону сохранения заряда.

Вариация по A

Теперь варьировем лагранжиан $(\partial_\mu\varphi - ieA_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi^* + ieA^\mu\varphi^*)$ по A^μ .

Рассматриваем приращение $A^\mu \rightarrow A^\mu + a^\mu$, выбираем линейный по a^μ вклад:

$$-iea_\mu\varphi(\partial^\mu\varphi^* + ieA^\mu\varphi^*) + iea^\mu\varphi^*(\partial_\mu\varphi - ieA_\mu\varphi) = 0,$$

этому соответствует уравнение $\delta/\delta A^\mu$ (в первом слагаемом придётся попереворачивать значки):

$$\begin{aligned} -ie\varphi(\partial_\mu\varphi^* + ieA_\mu\varphi^*) + ie\varphi^*(\partial_\mu\varphi - ieA_\mu\varphi) &= ie(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^*) + 2e^2A_\mu\varphi\varphi^* = \\ &= ie(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^* - 2ieA_\mu\varphi\varphi^*), \end{aligned}$$

тут в скобках тот же 4D-ток j_μ , который, как мы показали, сохраняется.

Всё сошлось!

Итак, вариация по A_μ дает уравнения Максвелла с током j_μ

$$j_\mu = -ie(\varphi^* D_\mu \varphi - \varphi (D_\mu \varphi)^*) \neq -ie(\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi (\partial_\mu \varphi)^*).$$

Движение скалярного поля задается $D_\mu^2 \varphi + m^2 \varphi = 0$. Ток при этом сохраняется (поперечный), уравнения согласованы:

$$\partial^\mu j_\mu = D^\mu j_\mu = -ie(\varphi^* D_\mu^2 \varphi - \varphi D_\mu^2 \varphi^*) = 0.$$

Окажется **важным обобщением**, что калибровочное преобразование (19) можно записать в виде

$$\varphi \rightarrow G(x)\varphi, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - iG\partial_\mu G^{-1}, \quad \text{где} \quad G(x) \equiv e^{if(x)}.$$

Ещё немного теории: У нас получилась «кривая производная», прямо как в искривленном пр-ве ОТО. Почему? Отдельный разговор... «Дифференциальные формы в э/магнетизме» (Вики). 2-форма $F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$, обсуждение расслоения группы $U(1)$ и кривизны.

8 Группы и алгебры Ли – элементарное введение

Введем минимальный набор понятий, который позволит нам упростить дальнейшие рассуждения (можно и без них, но будет громоздко).

Группа G (по операции умножения) должна обладать следующими свойствами:

- Ассоциативность $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$.
- Единица $\exists e: ge = eg = g, \forall g \in G$.
- Обратный элемент $\exists g^{-1} \forall g$.

В качестве групп обойдемся группами матриц:

- Унитарные $U(n)$, $U^+ U = 1$, здесь и далее $^+$ – эрмитово сопряжение (одновременное комплексное сопряжение и матричное транспонирование).

Пример $U(1)$ – единичная окружность

- Специальные Унитарные (с единичным детерминантом) $SU(n)$.
- Действительные ортогональные $O(n)$, $O^T O = 1$.
- Специальные Ортогональные (с единичным детерминантом) $SO(n)$. **Пример**

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Прямое произведение групп $\{g_1, h_1\}\{g_2, h_2\} = \{g_1 g_2, h_1 h_2\}$ и факторизация $g_1 \sim g_2 = kg_1$ (не различаем элементы, отличающиеся на элемент некоторой подгруппы K).

В пространстве матриц $n \times n$ естественно вводится топология \mathbb{R}^{2n^2} пространства: координаты в этом пространстве – все элементы матриц; матрица комплексная, поэтому выделяем $2n^2$ чисел, все вещественные и все мнимые части каждого элемента. При этом матрицы близки, если близки все их элементы. Описанным группам соответствует множество точек в R^{2n^2} . Если такое многообразие оказывается гладким, группа называется **группой Ли**.

Например, $U(1)$ – группа комплексных чисел, равных по модулю единице гомеоморфна окружности.

Смысл определения: ”двигаясь по многообразию”, можно рассматривать $M(t)$ матрицы как функции непрерывного параметра, при любом t оставаясь внутри группы.

Алгебра Ли

Говорим об инфинитезимальных преобразованиях («поворотах»). Например, инфинитезимальному повороту $O(2)$ на малый угол $\Delta\varphi$ соответствует матрица $M\Delta\varphi$, где

$$M = \left(\begin{array}{cc} -\sin \phi & \cos \phi \\ -\cos \phi & -\sin \phi \end{array} \right)_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

С другой стороны, если мы знаем, как устроен бесконечно малый поворот, то и произвольный поворот легко из него сострять.

Это проще понять, вспомнив как инфинитезимальный сдвиг d/dx генерирует произвольный сдвиг из нуля на произвольное (не малое) Δx в виде формулы Тейлора:

$$f(0 + \Delta x) = \exp \left(\Delta x \frac{d}{dx} \right) f(x)|_{x=0}$$

С точки зрения группы сложения $x = 0$ представляет собой единичный элемент..

То же самое верно в любой группе. Например $\exp(M\varphi)$ произвольный (не малый) поворот на φ , построенный из матрицы бесконечно малого поворота (проверьте!).

Разумеется, инфинитезимальных поворотов (**генераторов группы**) может быть куча, например, в $SO(3)$ легко предъявить инфинитезимальные вращения вокруг трёх осей Π_x, Π_y, Π_z :

$$-\Pi_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad -\Pi_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Эти повороты можно объединять в линейные комбинации. **Они образуют алгебру, где произвольный элемент имеет три степени свободы** $A = x\Pi_x + y\Pi_y + z\Pi_z$. Объект e^{tA} генерирует какой-то элементу группы.

С точки зрения нашего \mathbb{R}^{2n^2} пространства мы построили касательное пространство к нашей группе. При этом важно, что размерность многообразия и размерность касательной к нему одинаковы.

Обобщение. Рассматриваем $g = e^{At}$, тогда при малых t окрестность единичного элемента группы $g(t)|_{t=0} = e$ имеет вид

$$g(t) = e + At + O(t^2).$$

Множество подходящих A образуют алгебру Ли для данной группы. Если A домножить на число либо сложить $A_1 + A_2$, получим элемент алгебры (Доказательство: пусть $M_1 = e^{A_1 t}$ и $M_2 = e^{A_2 t}$, достаточно условие принадлежности к группе $M_1 M_2 \in G$ рассмотреть с точностью $O(t)$).

Пример $U(1)$ – касательная прямая $1 + itX$

Пример $SO(2)$, в роли малого параметра t выступает угол:

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \phi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверьте: коммутатор $[A_1, A_2]$ также принадлежит алгебре (стоит использовать условие типа $M_1 M_2^{-1} M_1^{-1} M_2 \in G$, разложить до второго порядка по t , так как первый сокращается). Фактически, это касательное пространство к исследуемому многообразию в точке e .

Как по группе матриц M построить алгебру? Придумать такие A , что $M = e^{At}$, тогда при $t \rightarrow 0$ будет то, что надо. Например:

- Унитарные $U(n)$, $U^+ = U^{-1}$, значит $(e^A)^+ = e^{-A}$, т.е. $A^+ = -A$. Это антиэрмитовы матрицы. Действительно, сложение антиэрмитовых дает антиэрмитову, как и домножение на число и комутация. Антиэрмитова матрица представляется в виде $i \cdot$ (эрмитова). В литературе часто пользуются сразу эрмитовыми матрицами A :

$$M = e^{iAt}$$

Мы тоже так будем делать.

Случай $n = 1$, в качестве A годятся вещественные числа f , группа генерируется e^{if} , здесь f выступает в роли параметра, а генератор – просто числовая единица (мнимая единица, если не выносить ее при параметре явно).

А еще групповой элемент может зависеть от точки пространства:

$$e^{if(x)}, \quad M = e^{iA(x)t}$$

Тогда с его алгеброй получается интересно: нужны функции $f(x)$, близкие к нулю, $f(x) \sim 0 + x^\mu \partial_\mu f$

$$e^{if(x)} = e^{ix^\mu \partial_\mu f},$$

здесь x^μ это параметры, $\partial_\mu f$ – элементы алгебры.

- Группа: унитарные матрицы с единичным детерминантом $SU(n)$. Алгебра: $\det(e + At) = 1 + t\text{Tr}A = 1 + O(t^2)$ – антиэрмитовы матрицы с нулевым следом.

Обсудим размерность этой алгебры (и группы – они одинаковы, **поскольку многообразия имеют одинаковую размерность**).

Сколько условий надо наложить на матрицу, чтобы она принадлежала такой алгебре? (=какова размерность многообразия и касательного пространства к нему). $A^+ = -A$ – это n^2 условий, значит, только половина элементов независима + еще одно условие на нулевой след, итого независимых $n^2 - 1$. Скажем, для $SU(2)$ имеется три независимых вещественных числа, задающих такие матрицы, поэтому базис из трех элементов: i умножить на матрицы Паули

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Базисный набор также называют генераторами алгебры.

В группе $SU(3)$ имеется 8 матриц Гелл-Манна. Книга «Кварк и ягуар: приключения в простом и сложном» («The Quark and the Jaguar...»).

- Группа: ортогональные матрицы с единичным детерминантом $SO(n)$ – Алгебра: действительные антисимметричные матрицы. Размерность $n(n-1)/2$.

Бывают абелевы и неабелевы группы – когда есть или нет коммутации элементов.

Фундаментальное и присоединенное представление

Ставим в соответствие элементу группы отображение T , действующее в некотором линейном пространстве V , так, чтобы групповые операции были согласованы: единица – тождественное отображение, произведение элементов группы – композиция отображений.

Для алгебры то же, только согласуются алгебраические операции (умножение на число, сумма, коммутация).

Представление группы порождает представление соответствующей алгебры:

$$T(1 + tA) = 1 + tT(A)$$

Представления бывают унитарные (если $T(g)$ – унитарный оператор $\forall g$); действительные (V – действительное пространство); эквивалентные (два представления соотносятся взаимнооднозначно с помощью некоторого линейного оператора); неприводимые (нет подпространства $W \subset V$, такое, что $\forall g$ оператор $T(g)$ не выводит элемент из W)

Фундаментальное представление: элемент группы g является отображением на V - пространстве, переводящий элемент v в элемент gv где $v \in V, g \in G$.

Присоединенное представление группы: отображение действует в пространстве элементов алгебры $A \rightarrow gAg^{-1}$. Эта процедура не выводит из алгебры: $gAg^{-1} \in \text{Algebra}$?. Очевидное доказательство: Пусть $g = e^t B$, при этом $g_0 = e^{itA} \in G$, значит $gg_0g^{-1} \in G$. Раскладывая в ряд по t до $O(t)$ убеждаемся, что $1 + gAg^{-1}$ принадлежит алгебре, а значит и gAg^{-1} принадлежит

Если рассмотреть элементы g , близкие к единичным, то

$$(1 + tB)A(1 + tB)^{-1} = (1 + tB)A(1 - tB) = A + t[B, A].$$

Это значит, что каждому элементу алгебры B можно сопоставить оператор $A \rightarrow [B, A]$, действующий на элементы алгебры A . Это **присоединенное представление алгебры**, оно не выводит из алгебры.

Пример. Группа вращений и её матрицы $M \in SO(3)$ действуют на столбцы $(a, b, c)^T$ в \mathbb{R}^3 . При этом сохраняется $a^2 + b^2 + c^2$. Но можно изуродовать вектора в алгебру кососимметричных матриц

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow K = a\Pi_x + b\Pi_y + c\Pi_z = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

И ровно такая ерунда была у нас в правом нижнем углу матрицы $F_{\mu\nu}$. Это выписан произвольный элемент алгебры для группы вращений. Присоединённое представление «правильно» поворачивает их: MKM^{-1} порождает кососимметричную матрицу, соответствующую вектору, но повернутому относительно исходного (правда, меняет местами оси x и z , а впрочем, какая разница):

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a' & b' \\ a' & 0 & -c' \\ -b' & c' & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \cos \varphi + c \sin \varphi \\ -b \sin \varphi + c \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Коммутатор кососимметричных матриц $[K_1, K_2]$ не выводит за пределы кососимметричных матриц и порождает векторное произведение векторов-прообразов. Кстати в 4D у кососимметричной матрицы будет 6 параметров, поэтому поворот в таком пространстве нельзя ассоциировать с вектором угловой скорости, в 3D будет 3 поворота и 3 буста.

Изоморфизмы групп вращений

У группы $SU(2)$ имеется 3 степени свободы, ровно столько же у $SO(2)$. Поэтому вектору $(x, y, z)^T$ можно сопоставить матрицу из алгебры $SU(2)$:

$$\hat{S} = x\hat{\sigma}_x + y\hat{\sigma}_y + z\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} z & x + iy \\ x - iy & -z \end{pmatrix}.$$

Элемент группы $\omega \in SU(2)$ можно представить в форме $\omega = e^{i(\alpha\hat{\sigma}_x + \beta\hat{\sigma}_y + \gamma\hat{\sigma}_z)}$, и он «умеет» действовать на этой группе в присоединённом представлении: $\omega S \omega^{-1}$. Например, рассмотрим

$$\omega = e^{i\alpha\hat{\sigma}_x} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & i \sin \alpha \\ i \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha & i \sin \alpha \\ i \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \hat{S} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -i \sin \alpha \\ -i \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \hat{S}' = \begin{pmatrix} z' & x + iy' \\ x - iy' & -z' \end{pmatrix},$$

где $z' = z \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha$, $y' = y \cos 2\alpha - z \sin 2\alpha$. То есть соответствующий вектор тоже вращается вокруг оси x , но на угол 2α . Поэтому это не совсем изоморфизм $SU(2)$ в $SO(3)$ – физически их можно различить в зависимости от того, возвращается ли

объект в исходное состояние при повороте на 2π . Однако всё же на ω можно смотреть на объект, который умеет поворачивать обычные 3D векторы.

Кстати, инвариант при таком вращении $\det(S) = -x^2 - y^2 - z^2$.

А как насчёт поворота 4D-вектора пространства Минковского? Есть изоморфизм, который «вращает» комплексные матрицы 2×2 ?

$$\hat{S} = ct\hat{I} + x\hat{\sigma}_x + y\hat{\sigma}_y + z\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} ct + z & x + iy \\ x - iy & ct - z \end{pmatrix}.$$

Это алгебра, но ее образуют уже не бесследовые матрицы. Эти генераторы порождают группу $SL_2(\mathbb{C})$ (специальная линейная группа комплексных матриц 2×2). Сохраняется интервал $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$.

9 Глобальные и калибровочные симметрии

Глобальная симметрия

Часто лагранжиан строится с учетом соображений его инвариантности относительно некоторых преобразований поля $\varphi(x)$ под действием некоторой группы преобразований: $\varphi \rightarrow g \cdot \varphi$. Например, в скалярной комплексной модели была инвариантность относительно $g = e^{i\alpha} \in U(1)$. Если g не зависит от x , такая симметрия называется глобальной. По теореме Нетер каждой такой симметрии соответствует равенство типа $\partial^\mu j_\mu = 0$, что приводит к законам сохранения. Это уже упоминали на примере заряда; группа трансляций в пространстве-времени порождает тензор энергии-импульса, обладающий свойством $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$.

Упомянутую скалярную модель комплексного поля можно обобщить на случай N комплексных полей и добавить самодействие

$$S = \partial^\mu \varphi_a^* \partial_\mu \varphi_a - m^2 \varphi_a^* \varphi_a - V(\varphi_a^* \varphi_a) = \partial^\mu \varphi^+ \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^+ \varphi - V(\varphi^+ \varphi),$$

здесь мы использовали эрмитово сопряжение, чтобы спрятать суммирование по a от 1 до N . Действие инвариантно также относительно поворотов $\varphi_a(x) \rightarrow \omega_{ab} \varphi_b$, где матрица $\omega \in SU(N)$, потому что $(\omega\varphi)^+ = \varphi^+ \omega^+$ и $\omega^+ \omega \equiv 1$.

Менее тривиальные примеры.

Пример 1. $\omega \in SU(2)$. Поле φ комплексный столбец из двух элементов, преобразуется по фундаментальному представлению $\varphi \rightarrow \omega\varphi$. Поле ξ – по присоединенному, т.е. оно принимает значения в алгебре Ли этой группы (ξ – (анти)эрмитова матрица с нулевым следом, $\xi = \xi^a \sigma_a$ – есть три коэффициента разложения по матрицам Паули, $\xi \rightarrow \omega\xi\omega^{-1}$) (говорят, ”действительный триплет”). Внимание, ξ^a понимаем двойкой: $\xi^a \xi^a = (\text{Tr } \xi^2)/2$.

Чтобы понять последнее равенство, нужно вспомнить, что матрицы Паули бесследовые, произведение разных матриц Паули даёт другую матрицу Паули, произведение одинаковых матриц Паули даёт единичную матрицу со следом =2.

Действие

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi + \partial_\mu \xi^a \partial^\mu \xi^a - \lambda_1 (\varphi^+ \varphi)^2 - \lambda_2 (\xi^a \xi^a)^2 - \lambda_3 \varphi^+ \xi \varphi$$

инвариантно, т.к. $\varphi^+ \xi \varphi \rightarrow \varphi^+ \omega^+ (\omega\xi\omega^{-1}) \omega\varphi = \varphi^+ \xi \varphi$.

Физически φ – пара полей протона и нейтрона, фундаментальное представление порождает преобразования, которые называют ”изотопической симметрией”; поля действительного мезона π^0 и комплексного поля заряженных мезонов π^+ , π^- (вещественная и мнимая часть) порождают ξ^a . Сильные взаимодействия инвариантны относительно изотопической группы. Правда, мы тут выкинули спиновые значки нуклонов, и еще надо навесить фермиевость, но это громоздко.

Пример 2.

Инвариантность $U(1) \times SU(2)$ – инвариантность, характерная для электро×слабых взаимодействий.

Поля φ (дублет), χ (дублет), ξ (синглет), причем

$$\varphi \rightarrow \omega\varphi, \quad \chi \rightarrow \omega\chi, \quad \xi \rightarrow \xi, \quad \omega \in SU(2).$$

$$\varphi \rightarrow e^{iq_1\alpha} \varphi, \quad \chi \rightarrow e^{iq_2\alpha} \chi, \quad \xi \rightarrow e^{iq_3\alpha} \xi$$

Взаимодействие

$$\varphi^+ \xi \chi + \text{комплексно-сопряженные}, \quad q_1 = q_2 + q_3, \quad q_i - \text{целые}.$$

Это взаимодействие электрона, нейтрино, полей Хиггса.

Пример 3. Th лёгких кварков $SU(3) \times SU(2)$ – симметрия цвет×аромат (неточная по ϑ/c вз.)

Калибровочная симметрия $SU(2)$

Инвариантность относительно группы, в которой элемент группы различный в разных точках физического пространства. $\varphi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \varphi(x)$ – глобальная симметрия; $\varphi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \varphi(x)$ – калибровочная симметрия. Такое у нас уже было в электродинамике. Там была группа $U(1)$, она абелева. А если хотим неабелеву? Например, $SU(2)$?

Пусть поле φ – комплексный столбец из двух элементов,

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \varphi^+ \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^+ \varphi - \lambda (\varphi^+ \varphi)^2.$$

Глобальная инвариантность имеется $\varphi \rightarrow \omega\varphi(x)$. Хотим, чтобы и при зависящих от x матрицах ω лагранжиан был инвариантен. Снова проблема с кинетической энергией, как и в электродинамике...

$$\partial_\mu(\omega(x)\varphi) = \omega(x)\partial_\mu\varphi + \partial_\mu\omega(x) \cdot \varphi$$

Там заменяли обычную производную ковариантной). Попробуем и тут также. Хотим, чтобы новая производная комутировала с калибровочным преобразованием:

$$D_\mu(\omega\varphi) = \omega D_\mu\varphi, \quad D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi + A_\mu\varphi$$

здесь мы ввели калибровочное векторное поле, хотя пока не знаем, как оно должно быть устроено. У него будет какой-то способ преобразования при отображении ω . При замене $\varphi' = \omega\varphi$

$$D_\mu\varphi' = \partial_\mu\varphi' + A'_\mu\varphi' = \omega\partial_\mu\varphi + \partial_\mu\omega \cdot \varphi + A'_\mu\omega\varphi = (\text{хотим}) = \omega D_\mu\varphi = \omega\partial_\mu\varphi + \omega A_\mu\varphi,$$

отсюда

$$\partial_\mu\omega + A'_\mu\omega = \omega A_\mu \quad \Rightarrow \quad A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1} + \partial_\mu\omega^{-1}.$$

Докажем, что $A' \in \text{Algebra}$. Очевидно, $\omega A_\mu \omega^{-1}$ лежит в алгебре. Если второе слагаемое лежит в алгебре – всё ОК. По определению

$$\partial_\mu\omega^{-1}(x_\mu) = \frac{\omega^{-1}(x_\mu + \Delta x_\mu) - \omega^{-1}(x_\mu)}{\Delta x_\mu} \quad \Rightarrow \quad \omega^{-1}(x_\mu + \Delta x_\mu) = \omega^{-1}(x_\mu) + \Delta x_\mu \partial_\mu\omega^{-1}(x_\mu)$$

Домножим слева на $\omega(x_\mu)$, получим $\omega(x_\mu)\omega^{-1}(x_\mu + \Delta x_\mu) = 1 + \Delta x_\mu\omega(x_\mu)\partial_\mu\omega^{-1}(x_\mu)$. Так как $\omega(x_\mu)\omega^{-1}(x_\mu + \Delta x_\mu) \in G$, то $\omega(x_\mu)\partial_\mu\omega^{-1}(x_\mu) \in \text{Algebra}$, что и требовалось.

Построенное поле A – поле Янга-Миллса, антиэрмитова матрица с нулевым следом, объект из алгебры Ли группы $SU(2)$. Уравнения движения нелинейны, найти их решения – задача тысячелетия.

В э/д калибровочное поле было из алгебры группы $U(1)$, а всё остальное точно также. Действительно, для $G = e^{if(x)}$ рассмотрим элементы, близкие к единичным, $f(x)|_{x=0} = 0$. Тогда

$$G(x) = e^{if(x)} = \exp(0 + i(\partial_\mu f)\Delta x^\mu).$$

Отличие Я.-М. от классической э/д: при глобальных преобразованиях э/д не менялась, здесь же $A_\mu \rightarrow \omega A_\mu \omega^{-1}$.

Лагранжиан свободного калибровочного поля

Нужен тензор напряженности $F_{\mu\nu}$. Если по аналогии, попробуем $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, увидим, что он неинвариантен при калибровочном преобразовании. Потребуем, чтобы $F_{\mu\nu}$ преобразовывался по присоединенному представлению

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \omega(x)F_{\mu\nu}\omega^{-1}(x),$$

тогда $\text{Tr } F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ – инвариант.

Само выражение $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ не подходит, но его можно поправить,

$$F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

Заметьте, что в э/д выражения $D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu$ и $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ были равны...

Заметьте, уравнения калибровочного неабелева поля нелинейны даже в отсутствие других полей – самодействие.

Поля A_μ можно разложить по трем матрицам Паули, так что у поля A_μ есть три внутренних значка

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \text{Tr } F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Классические калибровочные модели относительно других групп симметрий строятся примерно также. Калибровочная инвариантность приводит к тому, что поле A безмассовое, так как $m^2 A_\mu^a A_\mu^a$ неинвариантен относительно калибровочных преобразований (квадратичный по A инвариант не может не содержать производных).

10 Спонтанное нарушение симметрии

Механическая аналогия.

Скалярное вещественное поле и дискретная симметрия

Рассмотрим скалярное вещественное самодействующее поле. Действие (и энергия) модели

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi}{2} - \frac{\tau \varphi^2}{2} - \frac{\lambda \varphi^4}{4}, \quad E = \int d^3x \left(\frac{(\partial_0 \varphi)^2}{2} + \frac{\partial_i \varphi \partial_i \varphi}{2} + \frac{\tau \varphi^2}{2} + \frac{\lambda \varphi^4}{4} \right),$$

обладают симметрией относительно замены $\varphi(x) \rightarrow -\varphi(x)$. При этом в отсутствие взаимодействия параметр $\tau = m^2$ должен был быть положительным, чтобы энергия была ограничена снизу. Если же есть взаимодействие, ограниченность энергии задается условием $\lambda > 0$, а знак τ может быть любым.

Вычислим конфигурацию поля, при которой **энергия системы минимальна**. Очевидно, данная конфигурация соответствует основному состоянию (наиболее устойчивому). Чтобы минимизировать вклад в энергию первых двух слагаемых (с производными), выберем φ , не зависящие от координат и времени, $\varphi = \text{Const}$. Константу найдем, минимизируя потенциальную энергию

$$V(\varphi) = \int d^3x \left(\frac{\tau \varphi^2}{2} + \frac{\lambda \varphi^4}{4} \right).$$

Если $\tau > 0$ эта константа равна нулю. Конфигурация поля в основном состоянии обладает той же симметрией, что и исходный лагранжиан. Малые возмущения вокруг этой конфигурации описываются тем же самым (исходным) лагранжианом.

Если $\tau < 0$, имеются два нетривиальных решения ("вырождение вакуума"):

$$\varphi_0 = \pm \sqrt{|\tau|/\lambda}.$$

График $V(\varphi)$ будет при этом иметь два минимума в этих точках (рисуем),

$$V(\varphi_0) = \int d^3x v_0, \quad \text{где } v_0 = -\frac{\tau^2}{4\lambda}.$$

При уменьшении энергии системы, она должна будет выбрать себе одну из этих конфигураций. Чтобы перевести систему из одной конфигурации в другую, надо затратить энергию, пропорциональную объему, и чем больше объем системы, тем сложнее переход между этими конфигурациями.

Как только система выбрала одно из основных состояний, симметрия нарушилась. Само однородное поле в основном состоянии ненаблюдаемо: наблюдая нужно изменять систему. Поэтому физические поля – это отклонения поля φ от φ_0 ,

$$\varphi = \varphi_0 + \chi$$

Да и энергию системы будем считать от основного состояния (опускаем интеграл по пространственным переменным, основное состояние выбираем, например, "с плюсом")

$$V \rightarrow V - V(\varphi_0) \sim -\frac{|\tau|\varphi^2}{2} + \frac{\lambda\varphi^4}{4} + \frac{\tau^2}{4\lambda} = \frac{\lambda}{4} \left(\varphi^2 - \frac{|\tau|}{\lambda} \right)^2 = \frac{\lambda}{4} (\varphi^2 - \varphi_0^2)^2,$$

что после перехода к полям χ даст

$$V(\varphi) \sim \frac{\lambda}{4} ((\varphi_0 + \chi)^2 - \varphi_0^2)^2 = \frac{\lambda}{4} (4\varphi_0^2\chi^2 + 4\varphi_0\chi^3 + \chi^4) = |\tau|\chi^2 + \sqrt{|\tau|\lambda}\chi^3 + \frac{\lambda\chi^4}{4}$$

выражение, которое, очевидно, не обладает исходной симметрией. След симметрии здесь остался в том, что константы связи в лагранжиане связаны друг с другом. Заметим, что параметр массы теперь входит в лагранжиан с правильным знаком.

Малым возмущениям поля, т.е. величине χ соответствуют частицы с нарушенной симметрией.

Наш пример тривиален для теории поля, но весьма интересен в статфизике: это изинговский магнетик. Точка $\tau = 0$ соответствует фазовому переходу, точке Кюри.

Нарушение непрерывной группы симметрий

Рассмотрим комплексное скалярное поле с глобальной инвариантностью $\varphi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\varphi(x)$. Запишем лагранжиан в терминах двух действительных полей с одинаковой массой (суммы по повторяющимся $a = 1, 2$ подразумевается)

$$\varphi \equiv \{\text{Re}\varphi, \text{Im}\varphi\} = \left\{ \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}} \right\}, \quad \mathcal{L} = \partial^\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi - \tau \varphi^* \varphi - \lambda (\varphi^* \varphi)^2 = \frac{\partial^\mu \varphi_a \partial_\mu \varphi_a}{2} - \frac{\tau \varphi_a^2}{2} - \frac{\lambda (\varphi_a \varphi_a)^2}{4}.$$

Снова можем записать выражение для энергии и поискать минимум. Снова ищем минимум на константах, снова нетривиальный случай соответствует $\tau < 0$.

График $V(\varphi)$ будет фигурой вращения графика для предыдущей модели, величина V не будет зависеть от направления вектора (φ_1, φ_2) , зависимость будет только от $|\varphi|$. Будем иметь непрерывный набор минимумов

$$\varphi_{min} = e^{i\alpha} \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_0 = e^{i\alpha} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{|\tau|}{\lambda}}.$$

Хотя переход между минимумами безбарьерный, чтобы инициировать такой переход, надо изменить поле одновременно во всем (большом) пространстве. Этому соответствует большая кинетическая энергия, поэтому система снова должна выбрать только один минимум, например, $\varphi_1 = \varphi_0, \varphi_2 = 0$

Снова нужно исследовать флуктуации поля вокруг основной конфигурации, т.е.

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \chi(x), \quad \varphi_2 = \psi(x).$$

φ_1 "поперёк кольца", φ_2 "вдоль кольца" вакуумов. При этой замене потенциал преобразуется так:

$$V = -\frac{|\tau|(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)}{2} + \frac{\lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2}{4} \rightarrow -\frac{|\tau|((\varphi_0 + \chi)^2 + \psi^2)}{2} + \frac{\lambda((\varphi_0 + \chi)^2 + \psi^2)^2}{4} - \text{Const},$$

$$\text{Const} = -\frac{|\tau|\varphi_0^2}{2} + \frac{\lambda\varphi_0^4}{4},$$

константу выбрали так, чтобы в основном состоянии (при $\chi = \psi = 0$) энергия системы отсчитывалась от нуля.

Выделим отсюда слагаемые, которые дадут вклад в квадратичную часть лагранжиана (по полям χ и ψ). Можно увидеть, что коэффициент при χ^2 равен $-|\tau|/2 + \lambda\varphi_0^2/2 + \lambda\varphi_0^2 = |\tau|$, коэффициент при ψ^2 обращается в ноль, член $\psi\chi$ не появляется. Это и понятно: квадратичные слагаемые соответствуют кривизнам потенциала в окрестности минимума; кривизна же в направлении поля φ_2 равна нулю.

Все это значит, что свободный лагранжиан для полей χ, ψ имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^\mu \chi \partial_\mu \chi}{2} + \frac{\partial^\mu \psi \partial_\mu \psi}{2} - |\tau| \chi^2,$$

т.е. поле χ (отклонение поперёк кольца вакуумов) имеет нормальную (положительную) массу, а поле ψ оказалось безмассовым (то, которое вдоль кольца вакуумов). Его называют **полем Намбу-Голдстоуна**, а соответствующую ему частицу – намбу-голдстоуновским бозоном. В статфизике говорят о появлении безмассовых голдстоуновских мод (коллективного движения).

"Метод средних" – Боголюбов 1960 (корректный математически и для проблем КТП и в статфизике): нарушаем симметрию внешним полем. При этом возникает ненулевое среднее от величины, инвариантной относительно группы симметрий лагранжиана. Если при стремлении внеш. поля к нулю это среднее не обращается в нуль, то говорят, что в системе имеется спонтанное среднее ("конденсат"), нарушающее симметрию. Т. о. симметрия системы понизилась, и в системе возник нетривиальный параметр порядка (как правило, совпадающий с отличным от нуля квазисредним).

Итак, спонтанное нарушение симметрии приводит к появлению голдстоуновских безмассовых возмущений (еще говорят "бесцелевые моды"). Ферромагнетизм, сверхтекучесть и сверхпроводимость, модели электрослабого взаимодействия (π -мезоны, киральная инвариантность сильных взаимодействий. Мезоны имеют массу, инвариантность не строгая: дополнительные малые слагаемые в лагранжиане нарушают ее).

При нарушении дискретной симметрии голдстоуновские моды, естественно, не появляются.

Частичное нарушение глобальной симметрии и теорема Голдстоуна

Векторное трехкомпонентное вещественное поле: инвариантность $SO(3)$ (3D-повороты). Множество вакуумных состояний – двумерная сфера радиуса φ_0 . Когда основное состояние нарушает симметрию, это эквивалентно выбору точки на сфере, например $x = y = 0, z = \varphi_0$. При этом инвариантность выпавшей в это состояние системы относительно вращений в плоскости xu остается, симметрия нарушается *не полностью*, остается $SO(2)$.

Физически это, например, изотропный ферромагнетик. Система инвариантна относительно трёхмерных вращений, т. е. преобразования из группы $SO(3)$; вместе с тем её энергия становится минимальной, когда все спины выстраиваются в одном (произвольном) направлении. Если это происходит, то в системе появляется ненулевая намагниченность и остаётся инвариантность относительно вращений лишь в плоскости, ей ортогональной. Так $SO(3)$ -симметрия системы понижается до $SO(2)$ -симметрии.

Понятно, что при этом возникнет два безмассовых поля намбу-голдстоуна (есть два способа "двигаться" вдоль сферы вакуумов), а одно поле окажется массивным (при радиальном движении поперёк).

Теорема Голдстоуна: В системе существуют флуктуации, которые при стремлении их характерных размеров к бесконечности, происходят без увеличения энергии; они называются голдстоуновскими модами. Причиной их возникновения является непрерывное вырождение равновесного состояния. Количество голдстоуновских мод равно размерности фактор-пространства группы высокой симметрии по подгруппе низкой (остаточной) симметрии.

По-другому: поскольку голдстоуновские моды представляют собой колебания параметра вырождения, их число, как правило, совпадает с числом степеней свободы параметра вырождения. В нерелятивистских многочастичных системах это утверждение доказано Н. Н. Боголюбовыми называется еще теоремой Боголюбова о $1/q^2$.

(% тут!) Модой голдстоуна является, например, спиновая волна в ферромагнетике с плоскостью лёгкого намагничивания. В кристаллич. твёрдых телах, где нарушена трансляц. инвариантность, голдстоунами являются упругие волны. В сверхтекучем ^4He , где нарушена инвариантность относительно группы $U(1)$ калибровочной симметрии, голдстоуновскими модами является температурная волна - второй звук (... "четвёртый звук" в огранич. системе).

Нарушение симметрии

(теория возмущений
в окрестности основного
состояния – низко-
энергетические свойства)

→
глобальная

Выбор вакуума нарушает симметрию

$$\phi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x)$$

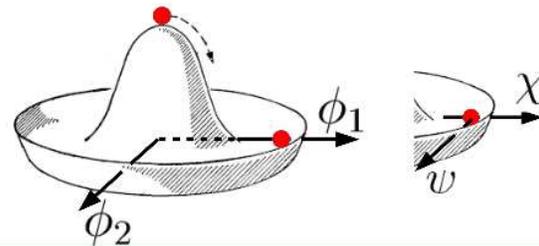
$$\phi^{(\text{вакуум})} + \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix}$$

$$S[\phi] \rightarrow S[\chi, \psi], \quad E[\chi, \psi = 0] = 0$$

Симм. Несимм. Новый отсчет
энергии

↓
калибровочная

Поля, что в глобальной симметрии
стали бы «голдстоунами»,
в калибровочной симметрии
съедаются калибровочным полем,
и последнее приобретает массу!

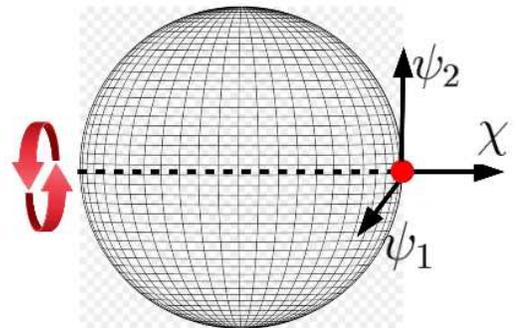


Лагранжиан перестаёт
зависеть от части
компонент исходных полей,
зато калибровочные поля
приобретают новые
степени свободы

«безмассовые поля» = «голдстоуны»
Йоитиро Намбу (2008)

Джеффри Голдстоун
В лагранжиане нет вклада~

ψ^2



Число «голдстоунов» = размерность
Фактор-пространства группы высокой
симметрии по подгруппе низкой

11 Механизм Хиггса

До сих пор мы рассматривали нарушения глобальной симметрии. А что будет, если в модели имелась калибровочная инвариантность, и она нарушилась?

Строили два примера калибровочной модели: абелева модель (векторное безмассовое и скалярное комплексное поля) и неабелева (Янга-Миллса).

11.1 Нарушение U(1)-калибровочной симметрии

Сразу выберем отрицательный квадрат массы $m^2 = -|\tau|$ в лагранжиане,

$$\mathcal{L} = -\frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4} + D_\mu\varphi^*D^\mu\varphi + |\tau|\varphi^*\varphi - \lambda(\varphi^*\varphi)^2, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad D_\mu \dots = (\partial_\mu - ieA_\mu) \dots$$

подразумевается калибровочная инвариантность

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{\partial_\mu\alpha(x)}{e}, \quad \varphi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\varphi(x).$$

Основное состояние – конфигурация полей A_μ и φ , минимизирующая энергию

$$E(A_\mu, \varphi) = \int d^3x \left(\frac{F_{0i}^2}{2} + \frac{F_{ij}^2}{2} + D_0\varphi^*D_0\varphi + D_i\varphi^*D_i\varphi + V \right), \quad V = V(\varphi^*, \varphi) = -|\tau|\varphi^*\varphi + \lambda(\varphi^*\varphi)^2,$$

Первые два слагаемые обращаются в ноль, если отсутствует э/м поле, т.е. если потенциал – чистая калибровка, $A_\mu = \partial_\mu\alpha(x)/e$. Следующие два – если

$$D_\mu\varphi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = e^{i\alpha(x)}\text{Const.}$$

Константа определяется из минимизации $V(\varphi^*, \varphi)$, и получается равной $\varphi_0/\sqrt{2} = \sqrt{|\tau|/2\lambda}$.

Итак, вакуум содержит **функциональный произвол** на $\alpha(x)$ (скажем про духи). Зафиксируем его, положив $\alpha(x) \equiv 0$, тогда $A_\mu = 0$, $\varphi(x) = \varphi_0/\sqrt{2}$. Рассмотрим отклонение полей от вакуумной конфигурации,

$$A_\mu \rightarrow A_\mu, \quad \varphi(x) \rightarrow \frac{\varphi_0 + \chi(x) + i\psi(x)}{\sqrt{2}}.$$

Как преобразуется лагранжиан? Свободно-электродинамическая часть не изменится; преобразование $V(\varphi^*, \varphi)$ будет в точности как в случае глобальной симметрии; нетривиальной окажется лишь вклад с ковариантной производной

$$D_\mu\varphi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\mu\chi(x) + i\partial_\mu\psi(x) - ieA_\mu\varphi_0) + \text{вклады, квадр. по набору полей } A_\mu, \chi, \psi,$$

$$V \rightarrow -|\tau|\chi^2.$$

Квадратичная часть лагранжиана (для краткости не пишем в этой формуле контравариантные значки, имеем ввиду)

$$\mathcal{L} = -\frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4} + \frac{|\partial_\mu\chi(x) + i\partial_\mu\psi(x) - ieA_\mu\varphi_0|^2}{2} - |\tau|\chi^2,$$

причем квадрат модуля для комплексного выражения во втором слагаемом имеет вид (на самом деле, конечно, не квадрат, а ковариантная свёртка)

$$(\partial_\mu\chi)^2 + (\partial_\mu\psi - eA_\mu\varphi_0)^2 = (\partial_\mu\chi)^2 + \frac{e^2\varphi_0^2}{2} \left(A_\mu - \frac{\partial_\mu\psi}{e\varphi_0} \right)^2.$$

Вклады в лагранжиан от свободных полей перемешались, но это легко исправить с помощью замены переменных: обозначим разность в скобках как новое векторное поле B_μ . Если ввести соответствующий тензор напряженности $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$, он совпадет со старым, так как B_μ и A_μ отличаются слагаемым типа калибровки. Однако лагранжиан теперь примет вид векторного *массивного* поля и скалярного массивного комплексного поля

$$\mathcal{L} = -\frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4} + \frac{e^2\varphi_0^2}{2}B_\mu B^\mu + \frac{\partial^\mu\chi\partial_\mu\chi}{2} - |\tau|\chi^2.$$

Поле ψ вообще не вошло в лагранжиан, оно не должно удовлетворять никаким уравнениям движения, это произвольная функция.

Интересно, что массивное векторное поле появилось в теории с калибровочно-инвариантным лагранжианом. Ранее упоминалось, что такой член противоречит калибровочной инвариантности, однако здесь калибровочная инвариантность лагранжиана отражается в том факте, что он не зависит от произвольного поля ψ .

Нелинейные вклады продемонстрируют то же самое – в них не будет зависимости от ψ .

Поле ψ было бы голдстоуновской модой в случае глобальной симметрии. Здесь же калибровочное поле A_μ ”съело” голдстоуновскую моду и приобрело массу. Было (при $\tau > 0$) безмассовое векторное поле (2 степени свободы + произвольная калибровка) и двухкомпонентное массивное поле. Стало (при $\tau < 0$) векторное массивное трехкомпонентное поле B_μ (удовлетворяет $\partial^\mu B_\mu = 0$) и однокомпонентное поле Хиггса и произвольная функция ψ . Т.е. математический смысл – одна степень свободы перешла к векторному полю.

Скалярное поле χ называют ”хиггсовским полем”, соответствующую частицу – ”бозоном Хиггса”.

11.2 Неабелевы калибровочные модели

Ничего не будем выводить, только обсудим идеологию.

Вспомним модель типа Янга-Миллса: было векторное безмассовое поле (3 штуки) – 6 степеней свободы (каждое по 2 как в э/д-ке) и 4 массивных скалярных поля (два комплексных скалярных) – сфера в 4D (а была сфера в 3D). Если бы симметрия была глобальной, появилось бы 3 голдстоуновские моды. В механизме Хиггса появится 3 массивных векторных поля (9 степеней свободы) и останется однокомпонентное вещественное поле – бозон Хиггса.

Так же как и в случае глобальной симметрии, калибровочная может быть нарушена не полностью. Например стандартная электрослабая теория – модель **(Глэшоу-)Вайнберга-Салама** – калибровочно инвариантна по $U(1) \times SU(2)$. Имеется калибровочное поле A_μ^a ($a = 1, 2, 3$) группы $SU(2)$, калибровочное поле B_μ группы $U(1)$. Двухкомпонентное комплексное поле φ имеет заряд (наз. гиперзаряд) по отношению к преобразованию $U(1)$ (т.е. под действием $e^{iq\alpha} \in U(1)$ преобразуется $\phi \rightarrow e^{iq\alpha}\phi$).

Взаимодействие $\lambda(\varphi^*\varphi - v^2)^2$ строится из соображений соответствия симметрии модели и предполагает замену обычной производной на адекватно построенную ковариантную производную в напряженностях,

$$D_\mu\varphi = (\partial_\mu - ig\sigma^a A_\mu^a - ig'B_\mu)\varphi.$$

Выбираем вакуум. Ненарушенной подгруппе $U(1)_{\text{нов}}$ будет соответствовать безмассовое калибровочное поле, которое отождествляется с э/м полем (оно оказывается линейной комбинацией исходных полей A_μ^a при некотором значении a , зависящем от того, какой вакуум выбираем и B_μ , пусть, скажем, нарушение симметрии по $a = 3$):

$$\text{э/м поле } \mu \sim B_\mu + A_\mu^3.$$

Раскладывая вокруг вакуума придется сделать замену переменных, чтобы привести лагранжиан к виду, когда свободные поля не взаимодействуют. Получается:

$$W_\mu^\pm \sim A_\mu^1 \mp iA_\mu^2, \quad Z_\mu \sim A_\mu^3 - B_\mu$$

массивное комплексное векторное поле (W -бозоны), массивное действительное векторное поле (Z -бозоны) и массивное скалярное поле бозона Хиггса. Квадратичный вклад в лагранжиан содержит вклады типа $W_{\mu\nu}^+ W_{\mu\nu}^-$, $Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ для напряженностей, которые строятся для каждого из векторных полей (W , Z , A), кинетический член $\partial^\mu \chi \partial_\mu \chi$ и вклады, соответствующие массам массивных полей, $m_w^2 W_\mu^+ W_\mu^-$, $m_z^2 Z_\mu Z^\mu$, $m_\chi^2 \chi^2$.

Результат для членов взаимодействия с э/м полем:

$$-\frac{1}{4} (\sin g_w F_{\mu\nu} + \cos g_w Z_{\mu\nu} + ig(W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-))^2.$$

В модели фиксируются взаимодействия всех полей между собой, однако все константы связи массы выражаются через небольшой набор параметров, а именно, двух параметров, входящих в ковариантную производную скалярного поля (g и g'), а также v и λ .

Электрослабый переход: если $T \gtrsim 100$ ГэВ (это масштаб слабых взаимодействий, 10^{15} К), скалярный конденсат Энглера Браута-Хиггса отсутствует; W и Z бозоны безмассовые. Если же температура меньше, - нынешнее состояние Вселенной.

Обзор всего этого есть в памятке.

Считаем степени свободы

Векторное поле

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

n или 2n степеней свободы
Уравнения движения — К.Ф.Г.

$$A_\mu, \quad -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Калибровочное векторное поле U(1)
Уравнения движения: К.Ф.Г. без массы
Есть поперечность
2 степени свободы (видели!)

$$B_\mu, \quad -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}B_\mu B^\mu$$

А если добавим в лагранжиан массу?
Уравнения движения: К.Ф.Г.
Есть поперечность
Нет калибровочной инвариантности
3 степени свободы

$$A_\mu^a, \quad a = 1, 2, 3 \quad -\frac{1}{4}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

Калибровочное векторное поле SU(2)
Антиэрмитовы бесследовые матрицы.
Уравнения движения: ЯМ
 $\sigma_1 A_\mu^1 + \sigma_2 A_\mu^2 + \sigma_3 A_\mu^3$

Как три поля ЭД
Есть поперечность, калибр. инвар.
2x3 степени свободы

АНАЛОГИЧНО
9 степеней свободы

Пример 1. ЭД, U(1) $\phi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x)$

$$\phi^{(\text{вакуум})} + \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix}$$

$$A_\mu^{(\text{вакуум})} = 0$$

Раскладывали в окрестности вакуума

$$S[\phi_1, \phi_2, A] \rightarrow S[\chi, B_\mu = A_\mu + \frac{\partial_\mu \psi}{\text{Const}}] = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \text{Const}B_\mu B^\mu +$$

+ массивый скалярный «хиггс»

Посмотрите, из чего слепилась константа массы «хиггса». Поле пси пропало из S

Пример 2. ЯМ, SU(2) Калибровочное поле (трехкомпонентное)

$$A_\mu^a, \quad a = 1, 2, 3 \quad -\frac{1}{4}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

$$\phi^{(\text{вакуум})} + \begin{pmatrix} \psi_1 + i\psi_2 \\ \psi_3 + i\psi_4 \end{pmatrix} \quad S[\psi_{1,2,3,4}, A_\mu^a] \rightarrow S[\chi = \text{ЛК}(\psi_i), B_\mu] =$$

$$= -\frac{1}{4}\text{Tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \text{Const}B_\mu B^\mu$$

Пример 3. (Глэшоу-)Вайнберг-Салам

12 Работаem с квантовыми полями

Вернёмся в КМ полям. Стационарное УШ можно воспринимать как уравнение движения для лагранжиана вида $L = \phi K \phi / 2$, где ϕ – столбец $(\Psi, \Psi^+)^T$, K – матричный оператор 2×2 , у которого на диагоналях нули, а в остальных ячейках \hat{H}_1 . Аналогично легко подобрать K , чтобы уравнение движения описывала нестационарное УШ, $L = \Psi^+ (i\partial_t - \hat{H}) \Psi$.

Заметим, что введенные нами операторы поля $\hat{\Psi}(x) = \sum_i \hat{a}_i \Phi_i(x)$, где \hat{a}_i – оператор уничтожения одночастичного состояния с волновой функцией Φ_i , причем $\hat{H}_1 \Phi_i(x) = \epsilon_i \Phi_i(x)$, подчиняются уравнению Шредингера (с одночастичным гамильтонианом, разумеется!). Действительно,

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}(x)}{\partial t} = \sum_i \hat{a}_i \epsilon_i \Phi_i(x) = \hat{H}_1 \hat{\Psi}(x).$$

Это уравнение остается таким же в любом базисе и его можно преобразовать к любому необходимому представлению. Нас будет интересовать задача, когда гамильтониан зависит от времени. При этом, как мы видели на примере КМ, разумно работать в представлении взаимодействия. Гамильтониан при этом разбивается на $\hat{H}_0 + \hat{H}_{int}(t)$, в котором обычно \hat{H}_0 не зависит от времени. Напомним, что в этом представлении операторы преобразуются также, как в представлении Гейзенберга при отсутствии возмущений, а у.Ш. имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}(x)}{\partial t} = \hat{V} \hat{\Psi}(x), \quad \text{где} \quad \hat{V} = e^{i\hat{H}_0 t / \hbar} \hat{H}_{int} e^{-i\hat{H}_0 t / \hbar} \quad (20)$$

– возмущение гамильтониана (также вычисленное в представлении взаимодействия).

Упражнение: как зависит от времени оператор свободного поля в представлении Гейзенберга?

В случае, если классические аналоги наших квантовых полей ϕ удовлетворяют не свободному уравнению Шредингера, а какому-то другому уравнению движения (Клейна-Гордона или другому), то и свободные квантовые поля удовлетворяют тем же классическим уравнениям движения.

Как решить это уравнение? Если подходить к вопросу формально, можно записать решение в виде, аналогичном оператору эволюции со стационарным гамильтонианом, заменив, однако, умножение на t интегрированием:

$$\hat{\Psi}(t) = \exp\left(\frac{-i}{\hbar} \int_{t_0=0}^t d\tau \hat{V}(\tau)\right) \hat{\Psi}(0), \quad (21)$$

при этом, чтобы экспонента оператора была осмысленна, ее надо понимать как ряд.

12.1 Хронологическое упорядочивание

Проблемы возникают, если оператор $\hat{V}(t)$ не коммутирует сам с собой в разные моменты времени, ведь

$$\frac{(-i)^n}{n! \hbar^n} \left(\int d\tau \hat{V}(\tau) \right)^n = \frac{(-i)^n}{n! \hbar^n} \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \hat{V}(\tau_1) \hat{V}(\tau_2) \dots \quad (22)$$

С другой стороны, рассматривая $\hat{\Psi}$ в (21) через малые последовательные промежутки времени, понятно, что операторы взаимодействия должны "включаться" поочередно, в порядке увеличения времени: сначала действуют гамильтонианы $\hat{V}(\tau)$ в малые моменты времени τ , затем – в большие. Действительно, так как изменение поля происходит в соответствии с уравнением (20), можем записать инфинитезимальный сдвиг

$$\hat{\Psi}(t + dt) = \hat{\Psi}(t) + \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t} dt = \hat{\Psi}(t) - \frac{i}{\hbar} \hat{V}(t) \hat{\Psi} dt.$$

Повторяя процедуру, будем получать \hat{V} с большими аргументами отсортированными налево.

Понятно, что чтобы все стало хорошо, надо ввести процедуру упорядочивания T операторов \hat{V} в произведении (22), чтобы она под знаком многократного интегрирования собирала \hat{V} от малых аргументов направо, а от больших – налево. Заметим, что в (22) есть область интегрирования в n -мерном τ -пространстве, в которой можно не упорядочивать \hat{V} , а именно "хороший" симплекс (= n -мерный треугольник):

$$\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{n-2}} d\tau_{n-1} \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n T \hat{V}(\tau_1) \dots \hat{V}(\tau_{n-1}) \hat{V}(\tau_n). \quad (23)$$

Благодаря правильно расставленным пределам, здесь множества, на которых заданы τ_i упорядочиваются: τ_i больше всех τ_{i+1} на всем промежутке интегрирования. Поэтому процедуру T , действующую под знаком многократного интеграла в (23) можно опустить.

Понятно, что вообще всю область интегрирования в (22) можно разбить на $n!$ таких треугольников в τ -пространстве, в каждом из которых множества τ_i упорядочены:

$$\int_0^t d\tau_1 \cdot \left(\int_0^{\tau_1} + \int_{\tau_1}^t \right) d\tau_2 \cdot \left(\int_0^{\min\{\tau_1, \tau_2\}} + \int_{\min\{\tau_1, \tau_2\}}^{\max\{\tau_1, \tau_2\}} + \int_{\max\{\tau_1, \tau_2\}}^t \right) d\tau_3 \dots$$

Легко понять, что интегрирование по каждому такому треугольнику даст то же, что и интегрирование по "хорошему" симплексу: заменой переменных интегрирования в этом легко убедиться. Скажем, для двух областей по τ_2 справедливо

$$\int_0^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t d\tau_2 T(\dots) = \int_0^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 T(\dots) = \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 T(\dots).$$

Поэтому для каждого из $n!$ симплексов результат будет такой же как (23), и (21) принимает вид

$$\hat{\Psi}(t) = T \exp \left(\frac{-i}{\hbar} \int_0^t d\tau \hat{V}(\tau) \right) \hat{\Psi}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{\hbar^n} \int_0^t d\tau_1 \dots \int_0^{\tau_{n-2}} d\tau_{n-1} \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n \hat{V}(\tau_1) \dots \hat{V}(\tau_n).$$

Терминологические замечания. Оператор в показателе экспоненты называется оператором эволюции. Когда интересуемся задачами типа рассеяния (дано состояние системы при $t_0 \rightarrow -\infty$, найти при $t \rightarrow \infty$), и вычисляют этот объект, его называют "S-матрицей".

Т-упорядочивание и причинная функция Грина

Большинство измеряемых физических величин выражается через мономы, построенные из операторов поля, например $\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')$ в задаче с произвольным полевым лагранжианом или $\hat{\Psi}^+(x)\hat{\Psi}(x')$ в многочастичной квантовой системе. Поэтому имеет смысл ввести хорошо определенный объект – T-упорядоченный моном $T[\hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n)]$ под знаком которого все поля следует расставлять в порядке увеличения (справа налево) времени. В случае фермионного поля $\hat{\phi}$ следует также домножить результат на -1 в степени четность перестановки, потребовавшейся для упорядочивания. Например,

$$T(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')) = \theta(t - t')\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') + \chi\theta(t' - t)\hat{\phi}(x')\hat{\phi}(x), \quad (*) \quad (24)$$

где $\chi = \pm 1$ в зависимости от статистики; первое слагаемое "работает" при $t_1 > t_2$, а второе – наоборот. Напомним, полевой оператор рассматривался в представлении взаимодействия.

Заметим, что в терминах поля-столбца

$$\hat{\phi}(x) = \begin{pmatrix} \hat{\Psi}^+(x) \\ \hat{\Psi}(x) \end{pmatrix}$$

объект (24), вообще говоря, матрица 2×2 .

Введем так называемую **причинную ф.Г.**:

$$G(x, x') = -\frac{i}{\hbar} \langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') | 0 \rangle.$$

В многочастичной задаче, где $\hat{\phi}$ – двухкомпонентное поле $(\hat{\Psi}^+, \hat{\Psi})^T$, интерес обычно представляет "перекрёстный" элемент матрицы G :

$$G(x, x') = -\frac{i}{\hbar} \langle 0 | T \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}^+(x') | 0 \rangle.$$

Для бозонного и фермионного случаев здесь следует использовать разные операции T - упорядочивания. Чтобы легко считать такие ф.Г. придется ввести еще несколько определений и сформулировать теоремы. Отметим, что если мы знаем $G(x, x')$, то сразу можем посчитать, например, плотность системы.

Физический смысл причинной ф.Г. проще понять, если воспользоваться разложением $\hat{\Psi} = \sum_n \hat{a}_n \Phi_n(x)$ по уровням энергии n . Это дает

$$G(x, x') = \sum_{n, n'} \Phi_n(x) \Phi_{n'}^*(x') G_{nn'}, \quad \text{где} \quad G_{nn'} = \frac{-i}{\hbar} \langle 0 | T \hat{a}_n(t) \hat{a}_{n'}^+(t') | 0 \rangle$$

Введем состояние $|A\rangle = \hat{a}_{n'}^+(t')|0\rangle$ – когда из вакуума в момент t' родилась частица на n' -ом энергетическом уровне. Аналогично $|B\rangle = \hat{a}_n^+(t)|0\rangle$ – когда из вакуума в момент t родилась частица на n -ом энергетическом уровне.

Если $t > t'$, T можно опустить, и $G_{nn'}$ представляет собой $\langle A|B\rangle$, т.е. амплитуду вероятности, что если в момент t' добавить частицу в состоянии n' , то в момент t ПОСЛЕ этого мы обнаружим частицу в состоянии n . В случае $t < t'$ причинная ф.Г. обращается в ноль для бозонов (оператор уничтожения обращает вакуум в ноль), а для фермионов, как вскоре будет понятно, начинает описывать поведение дырок.

Сворачивая ф.Г. с каким либо квантовым полем в один момент времени, получим следующее: свертка каждого состояния с множителем $\Phi_{n'}(x')$ в G даст амплитуду вероятности состояния n' в момент t' ; коэффициенты $G_{nn'}$ пересчитают ее в амплитуду вероятности состояния n в момент t , а множитель $\Phi_n(x)$ породит состояние с нужной в.ф. То есть всё преобразуется в квантовое поле в другой момент времени. Таким образом, ф.Г. описывает развитие системы во времени.

12.2 Нормальное произведение и пропагатор

Кроме T -произведения есть другие физические способы упорядочивать мономы из некомутирующих полей. Например, при выводе формулы Фейнмана-Каца мы упорядочивали \hat{p} и \hat{q} . Канонические преобразования – в роли координат и импульсов могут стоять самые разные операторы. Поэтому надо обобщим такое упорядочивание.

Пусть оператор свободного поля (поле координаты) можно представить в виде суммы $\hat{\phi}(x) = \tilde{a}(x) + \tilde{a}^+(x)$, так что $\tilde{a}(x)$, как и $\tilde{a}^+(x)$, комутует сам с собой при любых аргументах; при этом между собой эти поля коммутируют на числовую функцию.

Под этими операторами, если $\hat{\phi}$ – поле координаты, естественно будем иметь ввиду с точностью до множителя ($\frac{1}{2}$) операторы рождения и уничтожения

$$\tilde{a} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \hat{a}, \quad \tilde{a}^+ = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \hat{a}^+,$$

но аналогичные конструкции можно ввести и в других переменных. Понятно, что в случае ферми-систем надо заменить слово "коммутируют" на "антикоммутируют".

Здесь полезно вспомнить из задачи про квантование осциллятора: – все наши примеры будут иметь отношение к осциллятору, поэтому вспомним, как координата осциллятора \hat{x} связана с \hat{a} , \hat{a}^+ .

$$\text{вторквант осциллятора так:} \quad [\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \quad \frac{\hat{H}}{m\omega} = \tilde{x}^2 + \tilde{p}^2 \quad \hat{a} = \tilde{x} + i\tilde{p}, \quad \hat{a}^+ = \tilde{x} - i\tilde{p}, \quad \tilde{x} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^+}{2}$$

$$\text{значит обезразмеривание так:} \quad \hbar\omega\tilde{x}^2 = \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{x} = \hat{x}\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}, \quad \tilde{p} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \frac{\hat{p}}{2}$$

$$\text{понадобится эволюция (решение ур-ий Гейзенберга):} \quad \hat{a}(t)_{\text{heisenberg}} = e^{-i\omega t} \hat{a}(t=0)_{\text{heisenberg}} = e^{-i\omega t} \hat{a}_{\text{schrodinger}}$$

Любой моном из полей $\hat{\phi}$ представляется в виде суммы мономов из полей \tilde{a} , \tilde{a}^+ , так что если мы доопределим порядок в последних мономах, исходные мономы окажутся упорядочены. Это другой способ упорядочивать поля – по рождению/уничтожению частиц.

Введем процедуру N , которая в любом мономе собирает слева поля \hat{a}^+ (операторы рождения), а справа \hat{a} (уничтожения). Если при этом система фермионная, то домножим результат на -1 в степени четность перестановки (как и в T -упорядочивании). Вычислим, например (здесь операторы рождения/уничтожения с волной!):

$$\begin{aligned} N(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')) &= \tilde{a}(x)\tilde{a}(x') + \tilde{a}^+(x)\tilde{a}^+(x') + \tilde{a}^+(x)\tilde{a}(x') + N(\tilde{a}(x)\tilde{a}^+(x')) = \\ &= \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') - \tilde{a}(x)\tilde{a}^+(x') + \tilde{a}^+(x')\tilde{a}(x) = \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') - [\tilde{a}(x), \tilde{a}^+(x')]. \end{aligned} \quad (*) \quad (25)$$

Пропагатором назовем

$$\Delta(x, x') = T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')] - N[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')]. \quad (26)$$

Построенные объекты обладают важными свойствами (не будем доказывать, но легко увидим на примерах). Доказательства носят комбинаторный характер.

- Δ – функция Грина в обычном смысле для классических уравнений движения. Отметим, что из-за того, что уравнение движения имеет однородные решения (классические), ф.Г. здесь можно ввести разными способами, в зависимости от граничных условий. Традиционно вводят причинные (фейнмановские) ф.Г, а также опережающие и запаздывающие.
- В обкладках вакуумных состояний $\langle 0|N[\hat{\Psi}^+(x_1)\hat{\Psi}(x_2)]|0\rangle = 0$, поэтому в обкладках вакуума нет разницы между $T[\hat{\Psi}^+(x_1)\hat{\Psi}(x_2)]$ и Δ . Этим будем пользоваться при вычислении причинной ф.Г.

13 Прямое вычисление пропагатора: примеры

13.1 Осциллятор 1D

Это так называемая нуль-мерная теория поля, так как оператор поля зависит только от времени и не зависит от координаты: $\hat{\phi} = \hat{q}(t)$. Будем писать $\hat{\phi}(x)$, имея ввиду $x \equiv t$ (напомним, обычная договорённость $x \equiv \{\mathbf{x}, \mathbf{t}\}$).

Функция Лагранжа квадратична по полю ($\int dt dt'$ подразумеваются):

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2}q^2 = \frac{1}{2}\phi\bar{K}\phi, \quad \bar{K} \equiv -m\delta(t-t')(\partial_t^2 + \omega^2).$$

Заметим, что переход к Фурье-представлению для каждого вклада в $\phi\bar{K}\phi/2$ приводит выражению, куда входит Фурье-образ K по $t-t'$ (проверить!):

$$K \xrightarrow{\text{Fourier}} m(E^2/\hbar^2 - \omega^2)$$

Поле можно упорядочить при помощи операторов рождения/уничтожения

$$\hat{\phi} = \tilde{a} + \tilde{a}^+ = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^+ + \hat{a}).$$

В представлении взаимодействия (в данном случае – Гейзенберга)

$$\hat{a}(t) = \hat{a}_{\text{шр}} e^{-i\omega t},$$

поэтому легко посчитать пропагатор ($\tau = t - t'$, бозе-случай), см. (24,25):

$$\begin{aligned} (T - N)(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')) &= \theta(\tau)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') + \theta(-\tau)\hat{\phi}(x')\hat{\phi}(x) - \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') + \frac{\hbar}{2m\omega}[\hat{a}(x)\hat{a}^+(x')] = \\ &= \theta(\tau)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') + \theta(-\tau)\hat{\phi}(x')\hat{\phi}(x) - (\theta(\tau) + \theta(-\tau))\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') + \frac{\hbar}{2m\omega}[\hat{a}(x), \hat{a}^+(x')] = \theta(-\tau)[\hat{\phi}(x'), \hat{\phi}(x)] + \frac{\hbar}{2m\omega}[\hat{a}(x), \hat{a}^+(x')]. \end{aligned} \quad (27)$$

Теперь найдём коммутаторы:

$$[\hat{a}(x), \hat{a}^+(x')] = \exp(-i\omega(t - t'))[\hat{a}_{\text{шр}}, \hat{a}_{\text{шр}}^+] = \exp(-i\omega\tau),$$

$$[\hat{\phi}(x')\hat{\phi}^+(x)] = \frac{\hbar}{2m\omega}[\hat{a}(x') + \hat{a}^+(x'), \hat{a}(x) + \hat{a}^+(x)] = \frac{\hbar}{2m\omega}[\hat{a}(x'), \hat{a}^+(x)] + \frac{\hbar}{2m\omega}[\hat{a}^+(x'), \hat{a}(x)] = \frac{\hbar}{2m\omega} \exp(i\omega\tau) - \frac{\hbar}{2m\omega} \exp(-i\omega\tau),$$

что после подстановки в (27) даёт

$$\Delta(t, t') = \frac{\hbar}{2m\omega}(\theta(\tau)e^{-i\omega\tau} + \theta(-\tau)e^{i\omega\tau}).$$

Фурье-преобразование пропагатора, причинность и правило обхода полюсов.

Давайте вычислим Фурье от $\Delta(t, t')$ по $\tau = t - t'$: перейдем к переменной E , т.е. $\Delta(\tau) \xrightarrow{F} \Delta(E)$. Напомним, что прямое Фурье-преобразование по времени (в отличие от Фурье по координате) традиционно определяется с фактором $e^{iE\tau/\hbar}$ – договорённость такая, чтобы разложение велось по плоским волнам, *расходящимся* из точки $e^{-i(kx - \omega t)}$ (а не сходящимся в нее $e^{-i(kx + \omega t)}$). В этом месте мы выбрали ”направление причинности” – сходящиеся волны считаем ”плохими”, а расходящиеся – ”хорошими”; с ростом t координата растёт.

Первое слагаемое (параметр $z \rightarrow 0$ доопределяет выражение):

$$\int_0^\infty d\tau e^{iE\tau/\hbar} e^{-i\omega\tau - z\tau} = \frac{1}{-iE/\hbar + i\omega + z} = \frac{i}{E/\hbar - \omega + i0},$$

полюс, заметьте, сдвинули вниз, функция аналитична в верхней пп. Второе слагаемое аналогично

$$\int_{-\infty}^0 d\tau e^{iE\tau/\hbar} e^{i\omega\tau + z\tau} = \int_0^\infty d\tau e^{-iE\tau/\hbar} e^{-i\omega\tau - z\tau} = \frac{1}{iE/\hbar + i\omega + z} = \frac{-i}{E/\hbar + \omega - i0}.$$

Параметр z просто доопределяет процедуру преобразования Фурье. Иначе говоря, для *обратного преобразования Фурье* он задает правило обхода вычета в точке $E = \pm\omega\hbar$. Можно было не вводить z и догадаться до ответа, если вспомнить утверждение комплексного анализа о том, что интеграл (типа обратного Фурье) от функции $f(\omega)e^{i\omega t}$, аналитической в верхней полуплоскости, приводит к функции, обращающейся в ноль при $t > 0$, а для функции, аналитической в нижней полуплоскости – при $t < 0$.

Заметим, что это утверждение (вспоминаем Th Сохоцкого) вообще играет важную роль при обсуждении явлений с причинностью – вспоминаем соотношение Крамерса-Кронига для обобщенной восприимчивости (тут есть простой пример К.-К., от Вадима Петровича Романова http://stat.phys.spbu.ru/Method/kr_kr.pdf)

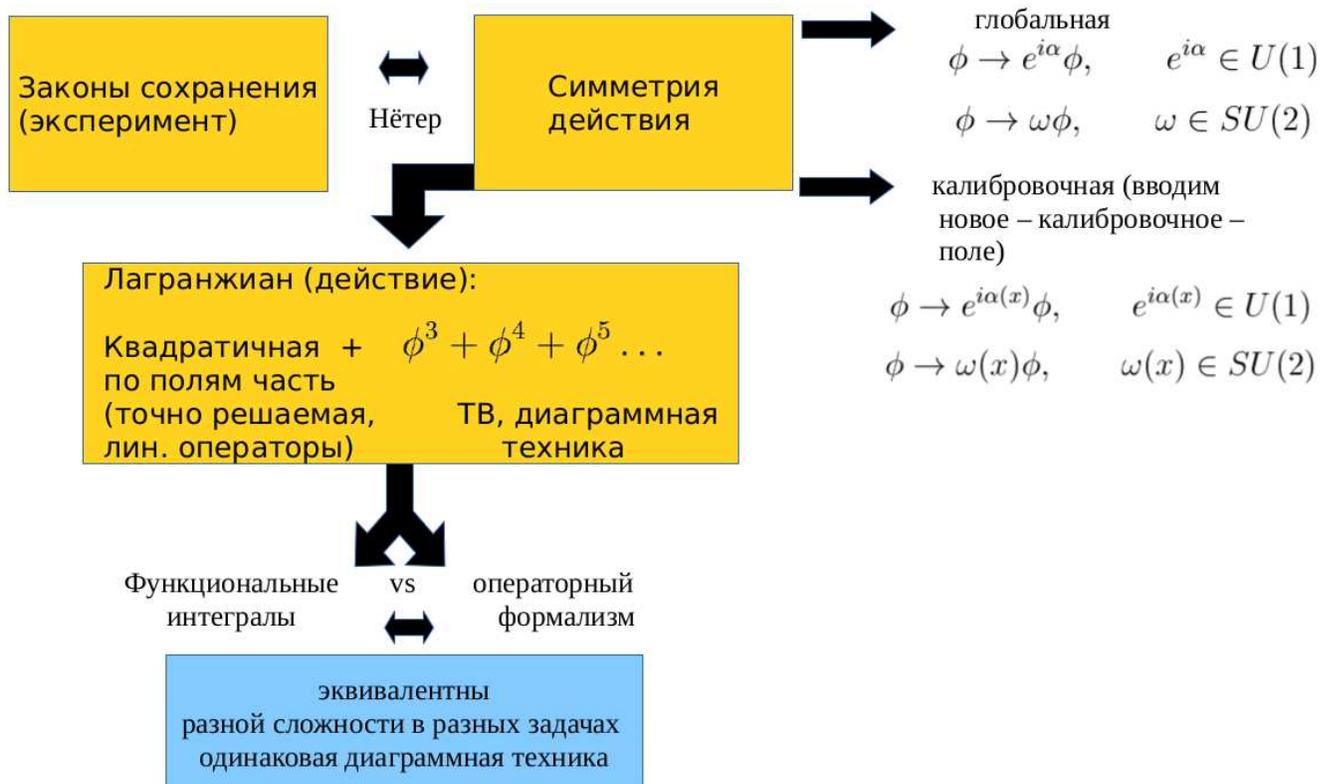
Запомним, чтобы не повторять потом вычисления: при $\theta(\tau)$ следует сдвигать полюс вниз, а при $\theta(-\tau)$ – вверх. Так надо делать, если мы хотим в Фурье раскладывать по расходящимся волнам.

Легко убедиться, что полученное выражение Δ является ф.Г. с точностью до множителя $i\hbar$:

$$\Delta = \frac{i\hbar}{m(E^2/\hbar^2 - \omega^2)}, \quad \bar{K}\Delta = m(E^2/\hbar^2 - \omega^2)\Delta = i\hbar.$$

Почему столько разных ф.Г. Если бы мы опеределили иначе правила обхода полюсов, мы все равно получили бы ф.Г. Почему много ф.Г.? А у нас и в квантовой механике их было много: при разных граничных условиях разные ф.Г.. Найденная ф.Г. – причинная или Фейнмановская. Можно было бы ввести *запаздывающую* (оба полюса сдвигаем в одну сторону, так, чтобы при $t < t'$ (и $\tau < 0$) все обратилось в ноль, тем же свойством обладает любая свертка с такой ф.Г.) и *опережающую*. Сообразите, куда сдвигать полюса в опережающей, и куда в запаздывающей ФГ.

Какую ф.Г. выбирать? Зависит от задачи, от того, чем интересуемся.



13.2 Свободная частица

$$\bar{K} = -m\partial_t^2, \quad \phi \equiv \hat{q}(t) = \hat{q} + \hat{p}t/m, \quad n(t, t') = it'm$$

несимметричность, нет трансляционной инвариантности,

$$\Delta = it'\theta(t-t')/m + it\theta(t'-t)/m, \quad K\Delta = i\hbar.$$

Считаем. Понадобится $[\hat{p}, \hat{q}] = \hbar$.

13.3 Квантовый газ

Построение действия. В представлении вторичного квантования

$$\hat{H} = \hat{\Psi}^+ \hat{H}_1 \hat{\Psi}, \quad \hat{H}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} - \mu$$

где с потенциал взаимодействия (с стенками) пока что отбросим. А химпотенциал ввели для удобства: дифференцированием по нему сможем получать плотность/число частиц.

Надо записать действие, квадратично по полю, такое, чтобы его варьированием получать у.Ш. для поля $\hat{\Psi}$. Поле $\hat{\phi}$ у нас – столбец, построенный из $\hat{\Psi}^+$ и $\hat{\Psi}$; интегрирование по x как всегда опускаем:

$$S = \hat{\Psi}^+ \left(i\hbar\partial_t - \hat{H}_1 \right) \hat{\Psi} = \frac{1}{2} \hat{\phi}^T \bar{K} \hat{\phi}. \quad (28)$$

\bar{K} – матрица 2x2, у которой на диагоналях нули, а то, что в скобках в (28) стоит в антиэрмитовых углах. Если у частицы есть внутренние степени свободы, поле может иметь еще какие-нибудь значки (мы уже смотрели на симметрии, которые там могут быть!).

Если проварьировать действие по $\partial_t \hat{\Psi}$, видно, что $i\hbar\hat{\Psi}^+$ – канонически сопряженный импульс. Да и коммутационные соотношения вспоминаем – правильные для координаты и импульса.

Вакуум. В представлении вторичного квантования имеем набор операторов рождения / уничтожения, и порождаемые ими из вакуума состояния.

Гамильтонианы бозонных систем ограничены снизу, поэтому имеем привычное понятие вакуума. Гамильтонианы ферми-систем неограничены снизу, поэтому вводится понятие *дираковского вакуума*. Заметим, что ограниченность снизу для бозе-систем – это просто требование устойчивости (видели на семинарах). Вспоминая вид \hat{H}_1 потребуем $\mu < 0$ в случае бозе-газа. В случае ферми газа основное состояние – то, при котором состояния с $p^2/2m - \mu < 0$ заполнены, а остальные нет. Так что вакуум тут – то же самое, что состояние, когда частицы на всех уровнях, ниже энергии Ферми.

Построение пропагатора. Итак, поле $\hat{\phi}$ имеет теперь две компоненты:

$$\hat{\phi} = \begin{pmatrix} \hat{\Psi} \\ \hat{\Psi}^+ \end{pmatrix} = \hat{A} + \hat{B}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{\Psi} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\Psi}^+ \end{pmatrix},$$

вместо операторов с волной ввели $[\hat{A}, \hat{B}]$, которые определяют нормальное произведение (= упорядочивают поле). Так как объект $\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')$ может содержать любые компоненты полей, N -упорядочивание теперь должно уметь упорядочивать матрицу $\hat{\phi}^T(x)\hat{\phi}(x')$ (сравнить с (25)):

$$N\hat{\phi}^T(x)\hat{\phi}(x') = \hat{\phi}^T(x)\hat{\phi}(x') - \begin{pmatrix} 0 & [\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^+(x')] \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (*) \quad (29)$$

Напишите такое же соотношение для $T\hat{\phi}^T(x)\hat{\phi}(x')$. Подставим сюда поля $\hat{\Psi} = \sum_{\alpha} \hat{a}_{\alpha} \Phi_{\alpha}(\mathbf{x}) e^{-i\epsilon_{\alpha}t}$, получим

$$[\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^+(x')] = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \Phi_{\alpha}^*(\mathbf{x}') e^{-i\epsilon_{\alpha}(t-t')}. \quad (30)$$

Матрицу Δ найдём по ф-ле (26), получится (у крестованного поля аргумент со штрихом, у некрестованного – без)

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{12} = T(\hat{\Psi}\hat{\Psi}^+) - N(\hat{\Psi}\hat{\Psi}^+) = T(\hat{\Psi}\hat{\Psi}^+) - \hat{\Psi}^+\hat{\Psi} =$$

$$= \theta(t-t')\hat{\Psi}\hat{\Psi}^+ + \theta(t'-t)\hat{\Psi}^+\hat{\Psi} - \left(\theta(t-t') + \theta(t'-t) \right) \hat{\Psi}^+\hat{\Psi} = \theta(t-t')[\hat{\Psi}\hat{\Psi}^+] = \theta(t-t')[\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^+(x')].$$

С учетом (30) получим для пропагатора:

$$\Delta_{12}(x, x') = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \Phi_{\alpha}^*(\mathbf{x}') \theta(t-t') e^{-i\epsilon_{\alpha}(t-t')},$$

для Δ_{21} аналогично

$$\Delta_{21}(x, x') = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}^*(\mathbf{x}) \Phi_{\alpha}(\mathbf{x}') \theta(t' - t) e^{i\epsilon_{\alpha}(t-t')},$$

Если возьмем Фурье по τ , $\int d\tau e^{iE\tau/\hbar} \dots$ то будет, как и для 1D-осциллятора (с заменой $\omega \rightarrow \epsilon_{\alpha}$),

$$\Delta_{12}^F = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \Phi_{\alpha}^*(\mathbf{x}') \frac{i}{E/\hbar - \epsilon_{\alpha} + i0}$$

13.4 Ферми-системы, ферми-газ

- T-упорядочивание: при перестановке полей результат домножается на четность перестановки (в парном корреляторе (24) вторая тета-функция меняет знак).
- N-упорядочивание тоже домножается на четность перестановки
- в соотношениях типа (25,29) коммутатор полей превращается в антикоммутатор.
- Определение Δ не меняется. Обобщенное свойство симметрии $\Delta = \chi \Delta^T$ (в бозе случае была просто симметрия).

Поскольку энергии частиц (как и числа заполнения) у ферми-систем отрицательные, в таких системах выполняется частный случай преобразования Боголюбова типа "частица-дырка": множество энергетических уровней α называется частицами, а остальные уровни β – дырками. Обычно, хотя необязательно, выбирают так, чтобы ϵ_{β} лежали ниже вакуума (в статфизике – ниже энергии Ферми). Затем для дырок операторы рождения и уничтожения меняют местами $\hat{a}_{\beta} \rightarrow \hat{a}_{\beta}^+$ (для фермионов (анти)коммутационные соотношения при этом сохраняются!). При таком преобразовании у нас по-новому вводится поле. Если записать его в новых переменных, то оно будет иметь вид

$$\hat{\Psi} = \sum_{\alpha} \hat{a}_{\alpha} \Phi_{\alpha}(\mathbf{x}) e^{-i\epsilon_{\alpha} t} + \sum_{\beta} \hat{a}_{\beta}^+ \Phi_{\beta}^*(\mathbf{x}) e^{i\epsilon_{\beta} t}$$

- Если мы хотим сохранить определение N-упорядочивания (операторы рождения налево, уничтожения – направо), после преобразования 'частица - дырка' процедуру N-упорядочивания следует сменить: теперь \hat{a}_{β} , \hat{a}_{β}^+ упорядочиваются наоборот (как если бы дырки "жили" обратно во времени).

Если повторить выкладки, результат для пропагатора будет иметь вид

$$\Delta_{12}^F = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \Phi_{\alpha}^*(\mathbf{x}') \frac{i}{E/\hbar - \epsilon_{\alpha} + i0} - \sum_{\beta} \Phi_{\beta}(\mathbf{x}) \Phi_{\beta}^*(\mathbf{x}') \frac{i}{E/\hbar - \epsilon_{\beta} - i0},$$

У частиц полюса сдвигаются вниз, у дырок вверх. Почему? Причинность.

А так как Φ – плоские волны ($\alpha, \beta \rightarrow \mathbf{p}$), это дает

$$\Delta_{12}(x, x') = \int \frac{dE d^D \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{D+1}} \frac{i e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar - iE(t-t')/\hbar}}{E/\hbar - \epsilon(\mathbf{p}) + i0 \text{ sign } \epsilon(\mathbf{p})}. \quad (31)$$

Сигнум показывает, выше или ниже вакуума (энергии Ферми) значение ϵ . Получили причинность для частиц и антипричинность для дырок. Понятно, что

$$\Delta_{12}(E, \mathbf{p}) = \frac{i}{E/\hbar - \epsilon(\mathbf{p}) + i0 \text{ sign } \epsilon(\mathbf{p})} \quad (*)$$

является ф.Г. оператора (28).

13.5 Физические результаты для ферми-газа

Найдем плотность ферми-газа в вакуумном состоянии

Причинная ф.Г. $G = -i \langle 0 | T \hat{\Psi}(\mathbf{x}) \hat{\Psi}^+(\mathbf{x}') | 0 \rangle$ определяет при $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ плотность системы в вакуумном состоянии (с точностью до множителя). С другой стороны, вычислив обратный оператор к ядру квадратичной формы, задающей свободный лагранжиан, найдем $(-i)\Delta$, который, как обсуждалось, в обкладках вакуумного состояния совпадает с причинной ф.Г.

Воспользуемся этим, чтобы найти плотность ферми-газа. По определению плотность в основном состоянии $n = \langle 0 | \hat{\Psi}^+(\mathbf{x}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle$, поэтому

$$n = \lim_{z \rightarrow +0} \langle 0 | \hat{\Psi}^+(\mathbf{x}, t+z) \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle = -\langle 0 | T \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) \hat{\Psi}^+(\mathbf{x}, t+z) | 0 \rangle = -\Delta(x, x')|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}', t'=t+0}.$$

Положив в (31) $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, $t' = t + 0$, видим, что контур по E надо замыкать в *верхнюю* полуплоскость, так что срабатывают только полюса, смещенные вверх, (то есть от дырок, $\hbar\epsilon(\mathbf{p}) < E_F$). При фиксированном \mathbf{p} ответ равен нулю, если \mathbf{p} выше уровня Ферми, и равен по теореме о вычетах $(-i)2\pi i/(2\pi) = 1$, если ниже. Так что интеграл по \mathbf{p} дает

$$2\pi i(-i) \int_{|\mathbf{p}| < p_F} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4 \hbar^3} = \frac{p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3}.$$

А это хорошо знакомый нам результат. Здесь, правда, не учтена спиновая двойка, вклад вырождения, потому что на самом деле ф.Г. имеет еще спиновые значки $G_{\alpha\beta}$, (буквы указывают спиновое состояние каждого из квантовых полей в корреляторе); так что когда мы считаем плотность, мы полагаем, что эти состояния должны быть одинаковы, и суммируем вклады в плотность каждого спинового состояния. Обычно пишут $\text{Tr } G_{\alpha\beta}$. Не будем с этим заморачиваться.

Осцилляции Фриделя

Но это мы всё и раньше знали. Получим хоть-какой-нибудь новый результат.

Решим теперь такую же задачу – исследование плотности ферми-газа – с другими граничными условиями. Пусть имеется одномерный газ в полупространстве, т.е. при $x = 0$ имеем нулевые граничные условия. Плотность определяется ф. Г., а ее мы уже знаем для задачи с другими граничными условиями. Метод зеркальных изображений дает (по $\tau = t - t'$ сделано фурье-преобразование)

$$G = G(E, \mathbf{x} - \mathbf{x}') - G(E, \mathbf{x} + \mathbf{x}').$$

Действительно, у нас есть пока явный вид лишь для ф.Г. в представлении $G(E, \mathbf{p})$. Так как оно четно по \mathbf{p} , справедливо $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = G(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$, поэтому при $\mathbf{x} = 0$ оба вклада в G сравниваются. В Фурье-представлении для второго слагаемого верно

$$\begin{aligned} \int d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} G(E, \mathbf{x} + \mathbf{x}') &= \int d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x} + \mathbf{x}')/\hbar} G(E, \mathbf{x} + \mathbf{x}') e^{2i\mathbf{p}\mathbf{x}'/\hbar} = \\ &= \int d(\mathbf{x} + \mathbf{x}') e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x} + \mathbf{x}')/\hbar} G(E, \mathbf{x} + \mathbf{x}') e^{2i\mathbf{p}\mathbf{x}'/\hbar} = G(E, \mathbf{p}) e^{2i\mathbf{p}\mathbf{x}'/\hbar}. \end{aligned}$$

Поэтому, вычисляя плотность, в качестве Δ следует брать

$$\Delta(E, \mathbf{p}) = \frac{i(1 - e^{2i\mathbf{p}\mathbf{x}'/\hbar})}{E/\hbar - \epsilon(\mathbf{p}) + i0 \text{sign } \epsilon(\mathbf{p})}.$$

Тогда для плотности одномерной системы ($\mathbf{p}, \mathbf{x} \in R^1$) получим

$$n = -\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}', t'=t+0} = -i \int \frac{dE dp}{(2\pi\hbar)^2} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar - iE\tau/\hbar} \frac{1 - e^{2i\mathbf{p}\mathbf{x}'/\hbar}}{E/\hbar - \epsilon(\mathbf{p}) + i0 \text{sign } \epsilon(\mathbf{p})} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}', \tau=-0}.$$

Сначала берем интеграл по E . Поскольку $\tau = t - t' < 0$, контур интегрирования по E замыкаем вверх. По E имеем полюс в точке $E = \hbar\epsilon(p) - i0 \text{sign } \epsilon(p)$, он срабатывает лишь при $\hbar\epsilon(p) = p^2/2m - E_F < 0$, т.е. при $p < p_F$. Результат этого интегрирования $2\pi\hbar i\theta(E_F - p^2/2m)$. Интегрирование по p однократное:

$$n = \int_{-p_F}^{p_F} \frac{dp}{2\pi\hbar} (1 - e^{2ipx/\hbar}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \left(2p_F - \frac{\hbar \sin(2p_F x/\hbar)}{x} \right).$$

На самом деле есть еще множитель $g = 2$ – плотность создается электронами с двумя направлениями спина. Можно убедиться, что при $x \rightarrow \infty$ ответ совпадает с обычной плотностью ферми-газа n_0 :

$$N = n_0 L = \frac{gL}{2\pi\hbar} \int_{-p_F}^{p_F} \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad n_0 = \frac{gp_F}{\pi\hbar}.$$

Хотя мы рассмотрели одномерный газ, подобные вычисления проводятся для трехмерных систем, в которых имеется точечная примесь. При этом осцилляции наблюдаются в радиальной компоненте – при приближении точки наблюдения к примеси.

Конец конспекта.