СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.

Учебное пособие.

УДК 530.12
ББК 22.3
С81

Пособие составлено по материалам И. А. Соловейчика (1915-1995), который многие годы преподавал физику в специализированных физико - математических школах Ленинграда: сначала в 38й, а затем в 30й школе. Таланту этого заслуженного учителя обязаны своими профессиональными успехами многие его ученики, ставшие впоследствии физиками и математиками. Автор нескольких замечательных учебников, И.А. Соловейчик излагал материал лаконично, со строгостью, доступной ученикам старших классов.

Текст конспектов Иосифа Абрамовича был несколько расширен, дополнен пояснениями и рисунками, уместными при самостоятельном изучении материала; внесены дополнения, касающиеся современных экспериментов. Добавлен раздел, посвященный четырехмерному пространству-времени и релятивистским инвариантам; материал снабжен подборкой задач с ответами для самопроверки.

Для школьников 9-х – 11-х классов, абитуриентов, студентов младших курсов вузов, школьных учителей, руководителей школьных физических кружков, преподавателей заочных и вечерних физических школ и подготовительных курсов. Пособие может быть полезно преподавателям вузов, занимающимся организацией физических олимпиад.

Составители: М.В. Комарова, М.Ю Налимов.
Рецензент: к.ф.-м.н. О.А. Долматова.

©Санкт-Петербургский городской Дворец творчества юных
©Городская Открытая Олимпиада Санкт-Петербурга
©Физический факультет СПбГУ

Специальная теория относительности

Специальная теория относительности (сокращенно СТО) — раздел физики, изучающий кинематику тел, движущихся с большими скоростями, — скоростями, сравнимыми со скоростью света. При столь быстром движении привычные законы механики Ньютона перестают выполняться. Вместо них следует применять более общие законы.

Если движение тел медленное, различие между формулами, отражающими законы движения тел в СТО, и формулами ньютоновской механики практически исчезает. Скорости, при которых механика Ньютона прекращает "работать" и необходимо применять СТО, называются **релятивистскими** скоростями. Физические эффекты, которые можно наблюдать только при релятивистских скоростях, эффекты, которые невозможно описать с помощью механики Ньютона, называются релятивистскими эффектами.

В настоящее время законы СТО блестяще подтверждаются многочисленными экспериментами. Существует более общий раздел физики, чем СТО – **общая теория относительности** (сокращенно ОТО). По сравнению со СТО в ОТО учитываются эффекты гравитации. Сюда относится искривление пространства телами большой массы, движение в сильном гравитационном поле и движение с большим ускорением.

Принцип относительности Галилея

Все механические явления происходят одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

Иногда удобна отрицательная формулировка: невозможно обнаружить разницу между двумя инерциальными системами отсчета, которые движутся друг относительно друга с постоянной скоростью, если проводить в них любые механические опыты.

Принцип относительности Галилея лежит в основе механики Ньютона.

Принцип относительности Эйнштейна

Эйнштейн предположил, что все явления природы — не только механические! — происходят одинаково в любых инерциальных системах отсчета.

Отрицательная формулировка: невозможно обнаружить разницу между двумя инерциальными системами отсчета, которые движутся друг относительно друга с постоянной скоростью, если проводить в них любые опыты — механические, электромагнитные, квантовые.

Постоянство скорости света

Опыт показывает, что скорость света в вакууме $c = 299\,792\,458$ м/с одинакова для всех наблюдателей и не зависит от относительного движения источника и наблюдателя.

> **Комментарий.** С 1982 года в системе единиц СИ метром называется расстояние, которое свет проходит за $1/299\,792\,458$ долю секунды, поэтому приведенное значение скорости света является точным по определению. В большинстве задач достаточно считать, что $c \approx 300\,000$ км/с.

1. Экспериментальное доказательство постоянства скорости света. Двойные звезды

Рассмотрим пару звезд, вращающихся вокруг общего центра масс (см. рис. 1).

Если свет от приближающейся к нам в данной момент звезды летит к нам быстрее, чем от нее же, когда она от нас удаляется, должна возникнуть кажущаяся неравномерность вращения двойной звезды. В 1913 году голландский астроном Виллем де Ситтер провел наблюдения двойных звезд и обнаружил, что такой неравномерности не наблюдается.

Рис. 1: Наблюдение двойных звезд

2. Опыт Майкельсона и Морли

Предположим, свет распространяется подобно волнам на воде — как волновые колебания невидимой субстанции, "эфира". При этом скорость света естественно было бы определять в системе отсчета, связанной с эфиром. Для наблюдателей, движущихся относительно эфира, скорость света менялась бы в зависимости от их движения. Если бы такой эфир

существовал, Земля в ходе орбитального движения вокруг Солнца двигалась бы относительно него и обдувалась бы "эфирным ветром". Поэтому скорость движения света на Земле менялась бы в зависимости от того, "по ветру" мы запустим свет или "поперек эфирного ветра".

Американские физики Альберт Майкельсон и Генри Морли решили проверить это экспериментально. Они предложили расщепить световой луч полупрозрачным зеркалом, направить полученные потоки света под прямым углом друг к другу, после чего отразить их от двух равноудаленных отражателей и снова собрать световые потоки вместе. Двигаясь по-разному относительно эфира, один из пучков света должен был бы при этом обогнать второй. Такую рассинхронизацию можно было бы с высокой точностью наблюдать с помощью интерферометра. Эксперимент 1887 года показал отсутствие любых признаков эфирного ветра. Современные варианты эксперимента с точностью до нанометра в секунду опровергают наличие эфира, относительно которого распространялся бы свет.

Постулаты Эйнштейна и их кажущаяся несовместимость

В основу специальной теории относительности Эйнштейн положил два постулата:

- Во всех инерциальных системах отсчета законы природы одинаковы.
- Скорость света в вакууме одинакова для наблюдателей в любых инерциальных системах отсчета.

На первый взгляд эти два посулата кажутся несовместными. В самом деле, представим, что у задней стенки вагона, скорость движения которого по рельсам равна V, мигнул прожектор. За время T, в течение которого свет преодолел вагон, сам вагон сдвинулся вперед на VT (см. рис. 2). Для неподвижного относительно земли стрелочника свет преодолел путь $c'T = VT + cT$. Поэтому на первый взгляд, если с точки зрения пассажира скорость света c, то с точки зрения стрелочника скорость света окажется $c' = c + V$.

Выясним, где в этих рассуждениях мы могли ошибаться. Расстояние VT мы измеряли вдоль неподвижных рельсов неподвижными линейками, зато длину вагона – линейками в вагоне, т.е. движущимися относительно рельсов. При этом мы предполагали, что длина вагона, измеряемая пассажиром, совпадает с длиной того же вагона, которую измерит стрелочник. Аналогично мы предполагали, что промежуток времени T, измеряемый пассажиром, равен промежутку времени, который измеряет стрелочник.

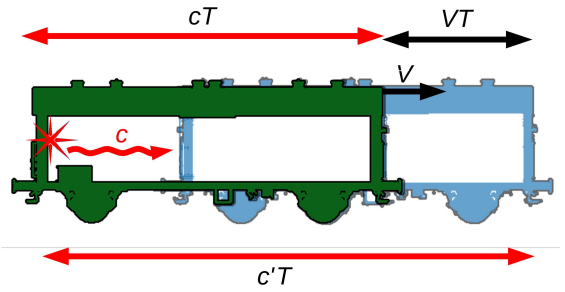


Рис. 2: Вагон, в котором включили прожектор

Именно эти предположения нам придется отбросить, если постулаты мы считаем справедливыми.

В ньютоновской механике мы могли обсуждать размеры тел и промежутки времени, не указывая, в какой системе отсчета они были измерены. В СТО **размеры тел и промежутки времени перестают быть инвариантами** (неизменными величинами), и говоря о них, всегда надо указывать, для какого наблюдателя они приводятся.

Центральным понятием в СТО является **событие**, которое в заданной системе отсчета характеризуется координатой и временем (x, t).

Синхронизация часов

Для измерения времени и расстояния необходимо, чтобы в разных точках выбранной системы отсчета были неподвижные в данной системе отсчета линейки и неподвижные часы. Пусть у нас имеется много одинаковых часов, которые идут одинаково, если находятся в одном месте. Чтобы сравнивать их показания, надо установить на них единое начало отсчета. Например, мы можем поместить все часы в одной точке, синхронизировать стрелки всех часов, а потом разнести часы по разным местам системы. Однако мы не знаем, как движение влияет на ход времени и точность хода наших часов, поэтому такая процедура не годится. Нужно выбирать другой способ, с помощью которого мы установим на всех часах единое начало отсчета.

Установление единого начала отсчета времени в заданной системе отсчета называется **синхронизацией часов**.

Эйнштейн предложил следующий способ синхронизации: отправим световой сигнал из начала координат в момент, который мы принимаем за начальный. Когда сигнал дойдет до часов, отстоящих от нуля координат на x, установим на них время $t = \mathrm{x}/c$.

Говоря об определенной системе отсчета, мы будем подразумевать, что пространство снабжено необходимым набором **неподвижных в этой системе отсчета линеек и часов**, причем **часы синхронизированы в выбранной системе отсчета**. До Эйнштейна физики не понимали, что пока не оговорен способ синхронизации часов, бессмысленно сравнивать, какое из событий произошло раньше, если эти события произошли в разных точках пространства. Мы увидим, что **в разных инерциальных системах отсчета часы синхронизируются по-разному**.

Относительность одновременности

Два события, одновременные в одной системе отсчета, могут быть не одновременны в другой системе отсчета.

Пусть в середине вагона включили источник света. Синхронизированные часы, стоящие возле передней и задней стенки вагона, покажут, что световой сигнал пришел к ним одновременно (см. рис. 3, слева). Часы, неподвижные относительно земли, покажут, что до задней стенки свет дошел раньше (см. рис. 3, справа).

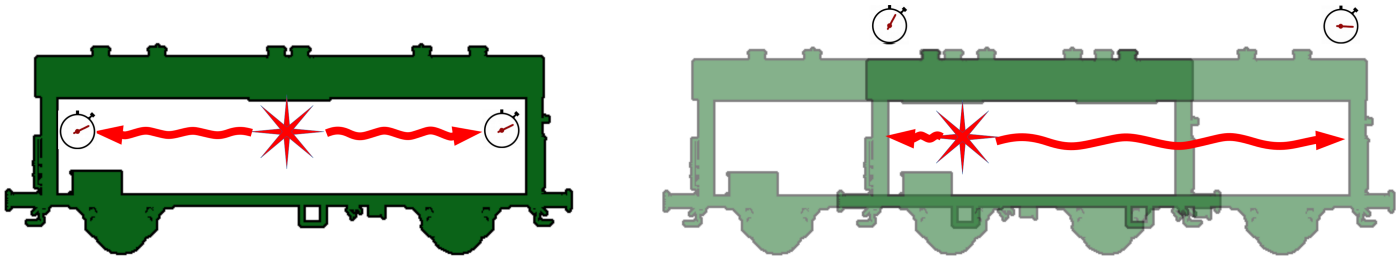


Рис. 3: Время распространения света из середины вагона до передней и задней стенки

Неизменность поперечных размеров: пример с трубами

Вполне возможно, что размеры предметов искажаются для наблюдателей, движущихся относительно измеряемых предметов. Если искажение зависит только от относительной скорости наблюдателя и предмета, несложно доказать, что оно может исказить только размеры *вдоль направления движения*; размеры предметов, поперечные по отношению к направлению движения, измениться не могут.

Действительно, рассмотрим две трубы A и B одинакового диаметра, которые едут навстречу друг другу (см. рис. 4); на каждой трубе расположен наблюдатель, неподвижный относительно своей трубы. С точки зрения наблюдателя A его собственная труба неподвижна, а труба B приближается к нему. Если бы поперечные размеры труб менялись в результате движения наблюдателя, диаметр одной из труб (или движущейся, или покоящейся) показался бы наблюдателю A больше. При этом после столкновения меньшая труба въехала бы в бо́льшую. Однако с точки зрения наблюдателя B покоится его собственная труба, а труба A движется, значит, для него бо́льшая и меньшая трубы поменялись бы местами, и с его точки зрения трубы расположились бы после столкновения наоборот.

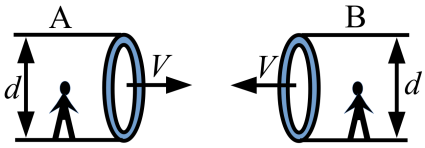


Рис. 4: Трубы с двумя наблюдателями сталкиваются

Это, очевидно, логическое противоречие. Значит, **поперечные размеры тела не могут меняться при движении наблюдателя**.

Относительность промежутков времени

Пассажир движущегося с постоянной скоростью вагона измеряет по своим часам промежуток времени T_0 между двумя событиями, которые происходят в одной и той же точке вагона. Чему будет равен промежуток времени T между этими же событиями по часам стрелочника, неподвижного относительно земли?

Пусть исследуемое событие — тиканье часов. Выберем самые простые часы — световые: пусть световой луч движется туда-сюда, отражаясь от зеркал, расположенных на краях линейки заданной длины (см. рис. 5).

Будет удобно, если пассажир установит линейку световых часов перпендикулярно скорости вагона V. Тогда, несмотря на то, что линейка неподвижна для пассажира и едет с точки зрения стрелочника, ее длина будет одинакова для обоих. Ведь для стрелочника линейка движется поперек собственной длины, а мы доказали, что движение не меняет поперечные размеры предметов.

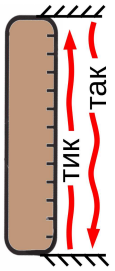


Рис. 5. Световые часы – удобный мысленный инструмент, для изучения хода времени в разных системах отсчета.

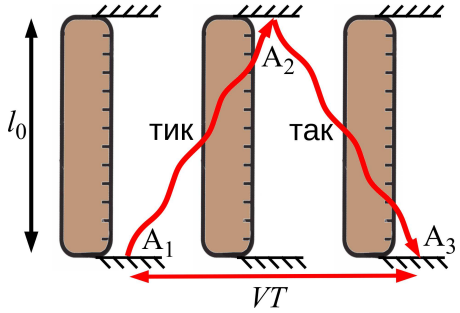


Рис. 6. Движение света в световых часах с точки зрения стрелочника.

В системе отсчета пассажира "тик-так" наших световых часов требует времени $T_0 = 2l_0/c$, где l_0 – длина линейки световых часов. Стрелочник обнаружит. что свет в часах движется не вдоль линейки, а под углом к ней, по линии $A_1A_2A_3$ (см. рис. 6). Согласно постулату Эйнштейна свет движется в любой системе отсчета со скоростью c. Значит промежуток времени, пока часы делают "тик" (как и промежуток времени "так") займет для стрелочника некоторое время $T/2$, за которое свет пройдет путь $cT/2$, равный длине линии A_1A_2 (и, конечно, длине A_2A_3):

$$\left(\frac{VT}{2}\right)^2 + l_0^2 = \left(\frac{cT}{2}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V^2T^2}{4} + \frac{c^2T_0^2}{4} = \frac{c^2T^2}{4},$$

в последней формуле мы подставили длину линейки часов $l_0 = cT_0/2$. Отсюда

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{1}$$

При скоростях $V \geq c$ выражение под корнем теряет смысл. Это отражает тот факт, что скорость c является предельной: невозможно двигаться быстрее скорости света.

Хотя результат с растяжением времени был получен для "световых часов", ход времени не зависит от их устройства: по определению часы разных конструкций идут синхронно во всех системах отсчета. Если бы это было не так, мы могли бы, наблюдая за рассинхронизацией часов разных конструкций, узнать о движении своей системы отсчета. Постулат о том, что все инерциальные системы отсчета эквивалентны, был бы нарушен.

Итак, **время течет по-разному для движущихся друг относительно друга наблюдателей**, что и отражает формула (1). Выражение в знаменателе всегда меньше единицы, значит T всегда больше T_0. В системе отсчета пассажира часы неподвижны, и из всех наблюдателей промежутки времени на этих часах именно для пассажира будут минимальными. Вообще, промежуток времени между двумя событиями минимален в системе отсчета, где эти события произошли в точке с одной координатой.

Промежуток времени между событиями, которые в некоторой инерциальной системе отсчета происходят в одной точке, будем называть **собственным промежутком времени**. В других системах отсчета имеет место **растяжение времени по сравнению с собственным** временем.

Относительность расстояний

Мы доказали, что при движении наблюдателя относительно измеряемых тел их попреречные (по отношению к направлению движения) размеры не меняются. Убедимся, что для продольных размеров это не так.

Пусть пассажир измерил длину вагона, в котором находится, и получил результат l_0. Какова будет длина этого же вагона для стрелочника, мимо которого вагон движется со скоростью V?

Мимо стрелочника сначала проехала передняя стенка вагона, а затем задняя (см. рис. 7). Эти два события произошли него в одной точке пространства, то есть промежуток времени t_0 между этими событиями является собственным в системе отсчета стрелочника. По его расчетам за t_0 передняя стенка ушла вперед на длину вагона l, поэтому $t_0 = l/V$.

С точки зрения пассажира промежуток времени t между этими же событиями (когда передняя и задняя стенка вагона поравнялись со стрелочником) будет больше, ведь эти события для него происходят в разных точках

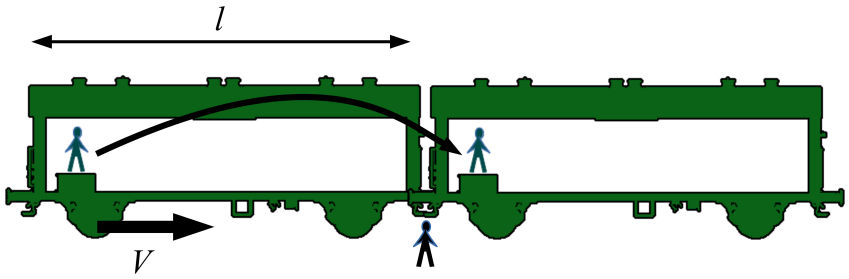


Рис. 7. Измерение длины вагона стрелочником.

пространства. Мы уже научились связывать t с собственным промежутком времени t_0:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{l}{V\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Относительное пассажира стрелочник приближается к вагону со скоростью V и за время t переместится на Vt между передней и задней стенкой вагона (см. рис. 8). Поэтому длина вагона для пассажира $l_0 = Vt$. Отсюда

$$\frac{l_0}{V} = t = \frac{l}{V\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad \Rightarrow \qquad l = l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

Выражение под корнем всегда меньше единицы, так что длина предмета наибольшая, если мы измеряем ее, покоясь относительно тела.

Длина тела в системе отсчета, где тело неподвижно, называется **собственной длиной**. В других системах отсчета имеет место **сокращение размеров по сравнению с собственной длиной**.

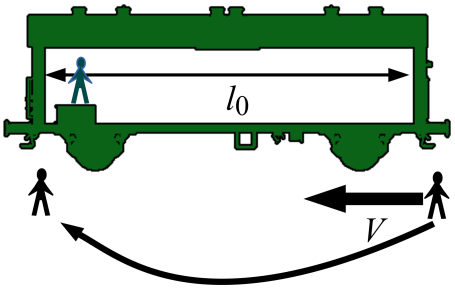


Рис. 8: Измерение длины вагона пассажиром.

Преобразование Лоренца

Выведем более общие формулы.

Пусть некоторое событие произошло в точке с координатой x в момент t с точки зрения неподвижного наблюдателя. Каковы координата и время (x', t') этого же события с точки зрения наблюдателя, движущегося со скоростью V вдоль оси Ox? Считаем, что событие, при котором начала координат обеих систем отсчета совпали, служит началом отсчета времени в обеих системах. Оси координат обоих наблюдателей сонаправлены.

В качестве события рассмотрим удар камня о переднюю стенку вагона (см. рис. 9). Пусть пассажир – начало отсчета координаты x' – расположился у задней стенки вагона. Координату события x' он измеряет неподвижной относительно вагона линейкой, поэтому $x' = l_0$, где l_0 – собственная длина вагона.

По условию пассажир и стрелочник проезжают друг мимо друга (см. рис. 9) в момент начала отсчета времени обоими. С точки зрения стрелочника координата удара $x = Vt + l$, где l – длина вагона в системе отсчета стрелочника. Но мы уже знаем, что $l = l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$, поэтому $x = Vt + x'\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Отсюда можно выразить x':

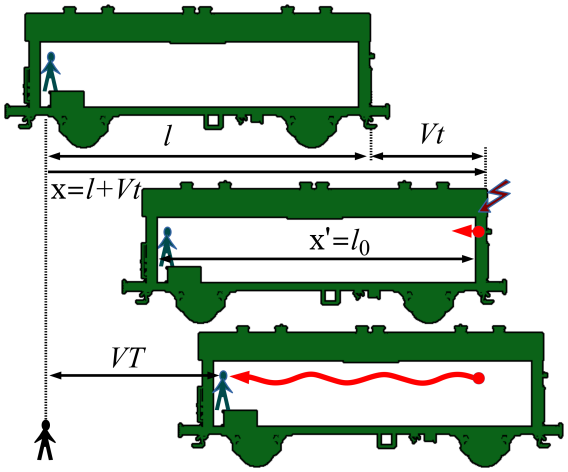


Рис. 9: Определение координаты и времени удара пассажиром и стрелочником.

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \qquad (2)$$

Знак минус перед скоростью в числителе показывает, что относительно пассажира (штрихованной системы отсчета) стрелочник (нештрихованная система отсчета) едет противоположно положительному направления оси x'.

Фактически мы рассмотрели два события: встречу пассажира со стрелочником и удар камня о переднюю стенку вагона; в основе нашего вывода лежал тот факт, что в одной из рассматриваемых систем отсчета (пассажира) эти события разделяет *собственный пространственный промежуток*.

Чтобы вывести формулу для связи t и t', удобно рассмотреть промежуток времени, являющийся собственным для одного из персонажей. Однако ни t для стрелочника, ни t' для пассажира не являются собственными промежутками времени: оба события происходят для наших персонажей в разных точках пространства. Поэтому введем еще одно событие. Пусть когда камень попал в переднюю стенку, от нее начал распространяться луч света. Когда он освещает пассажира (встречается с ним), скажем, что произошло вспомогательное событие.

Для пассажира оно произошло в момент времени T_0, который позже, чем время удара t' на время распространения света вдоль вагона, x'/c:

$$T_0 = t' + \frac{\mathrm{x}'}{c}.$$

Для стрелочника вспомогательное событие произошло в другой момент времени, T, причем за это время пассажир проехал VT, а свет преодолел путь $\mathrm{x} - VT$. В этой системе отсчета свет двигался до пассажира в течение времени $(\mathrm{x} - VT)/c$, и именно настолько момент T был позже, чем время удара t:

$$T = t + \frac{\mathrm{x} - VT}{c} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{t + \mathrm{x}/c}{1 + V/c}.$$

Вдобавок T и T_0 связаны между собой формулой (1), так как промежуток времени T_0 собственный. Поэтому

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{t + \mathrm{x}/c}{1 + V/c} = \frac{t' + \mathrm{x}'/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{t + \mathrm{x}/c}{1 + V/c} = \frac{t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} + \frac{\mathrm{x}/c - Vt/c}{1 - V^2/c^2}.$$

В последнем равенстве мы использовали связь (2) между x' и x. Теперь можно выразить t' через (x, t):

$$\frac{t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{t + \mathrm{x}/c}{1 + V/c} + \frac{Vt/c - \mathrm{x}/c}{1 - V^2/c^2} = \frac{(t + \mathrm{x}/c)(1 - V/c) + Vt/c - \mathrm{x}/c}{(1 + V/c)(1 - V/c)} = \frac{t - V\mathrm{x}/c^2}{1 - V^2/c^2}. \qquad \Rightarrow \qquad t' = \frac{t - V\mathrm{x}/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Полученные формулы называются преобразованием Лоренца. Они преобразуют координату и время события при переходе из одной инерциальной системы остчета в другую, движущуюся с релятивистской скоростью:

$$\boxed{\mathrm{x}' = \frac{\mathrm{x} - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \qquad t' = \frac{t - V\mathrm{x}/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.} \qquad (\bigstar)$$

Если скорость V в формулах ($\bigstar$) мала по сравнению со скоростью света c, вкладами, содержащими V^2/c^2, можно пренебречь. При этом формулы приобретают вид привычного нам преобразования Галилея:

$$\mathrm{x}' \simeq \mathrm{x} - Vt, \qquad t' \simeq t - \frac{\mathrm{x}}{V}\frac{V^2}{c^2} \simeq t.$$

Релятивистское преобразование скоростей

Пусть в системе отсчета K некоторое тело движется вдоль оси x со скоростью u (см. рис. 10). Найдем его скорость относительно системы отсчета K′, движущейся с скоростью V относительно системы K. Вектора V и u будем считать сонаправленными.

Для удобства предположим, что в некоторый момент оба наблюдателя и тело встретились, и этот момент принят за начало отсчета времени и в K, и в K′. Тогда $u = \mathrm{x}/t$, $u' = \mathrm{x}'/t'$, и ответ немедленно следует их преобразования Лоренца ($\bigstar$):

$$u' = \frac{\mathrm{x}'}{t'} = \frac{\mathrm{x} - Vt}{t - V\mathrm{x}/c^2} = \frac{u - V}{1 - uV/c^2}.$$

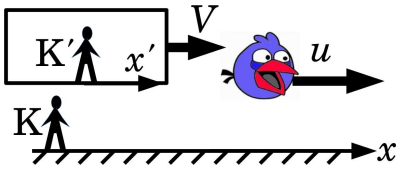


Рис. 10:

Последнее равенство в цепочке мы получили, разделив числитель и знаменатель на t.

Заметим, что в нерелятивистском случае ответ на вопрос задачи давался бы величиной $u - V$. Если скорости u и V направлены противоположно, следует везде заменить V на $-V$.

Релятивистское уравнение движения

В отличие от привычной нам классической механики физическое тело в заданной инерциальной системе отсчета под действием постоянной силы не может все время двигаться с постоянным ускорением, ведь тогда скорость тела рано или поздно превысила бы скорость света.

Получается, что для тела массой m_0, имеющего скорость $u(t)$ и ускорение $a = du/dt$, формула второго закона Ньютона

$$F = m_0 a = m_0 \frac{du}{dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad F = \frac{d\mathrm{p}}{dt}, \quad \text{где} \quad \mathrm{p} = m_0 u \tag{3}$$

в СТО работать не может. Кроме того, после отказа от формул преобразования Галилея, она не удовлетворяет постулату о равноправности всех инерциальных систем отсчета: закон (3) не сохраняет своего вида при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой по формулам СТО.

Можно показать, что требованию о равноправии любых инерциальных систем отсчета удовлетворяет следующее уравнение движения:

$$F = \frac{d\mathrm{p}}{dt}, \qquad \text{где} \qquad \mathrm{p} = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{4}$$

Величина p здесь по прежнему играет роль импульса движущегося тела, однако определен он иначе, чем в механике Ньютона. Мы будем называть его **релятивистским импульсом**.

Комментарий.

При воздействии постоянной силы релятивистский импульс тела по-прежнему равномерно растет со временем $\mathrm{p}(t) = \mathrm{p}_0 + Ft$. Однако можно видеть, что ни при каком значении p скорость тела не достигает скорости света. Действительно, выразим из (4) скорость движения через релятивистский импульс:

$$\mathrm{p} = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{p}^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = m_0^2 u^2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{p}^2 = \left(m_0^2 + \frac{\mathrm{p}^2}{c^2}\right) u^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad u = \frac{\mathrm{p}}{\sqrt{m_0^2 c^2 + \mathrm{p}^2}} c. \tag{5}$$

Дробь в последнем выражении не превосходит единицу (знаменатель больше числителя). Равенство единице достигается, если $m_0 = 0$. В этом случае $u = c$ при любом p. При $m_0 \neq 0$ с ростом p скорость частицы приближается к скорости света, но никогда ее не достигает:

$$u(t) = \frac{(\mathrm{p}_0 + Ft)c}{m_0^2 c^2 + (\mathrm{p}_0 + Ft)^2}.$$

Уравнение движения (4) можно записать в виде

$$F = \frac{d\mathrm{p}}{dt}, \qquad \text{где } \mathrm{p} = mu, \qquad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{6}$$

Здесь мы ввели величину m – "**релятивистскую массу**", которую мы приписали телу, имеющему скорость u. Масса m_0 при этом приобретает смысл массы тела в состоянии покоя. Такая форма записи релятивистского закона движения максимально похожа на привычный нам закон (3).

Таблица показывает как менятеся m по отношению к m_0 при разных скоростях движения тела:

u	u/c	m/m_0
6 000 км/с	0.02	1.0002
60 000 км/с	0.2	1.02
100 000 км/с	0.33	1.06
200 000 км/с	0.67	1.34
299 000 км/с	0.997	13.76
299 789 км/с	0.999988	208

Примеры скоростей, превышающих скорость света

Формулы специальной теории относительности запрещают физическим телам перемещаться со скоростью света и более. Также со сверхсветовой скоростью нельзя передавать сигналы, информацию. Однако можно привести примеры скоростей, не связанных с перемещением реальных тел или с передачей информации.

1. Гирлянда лампочек

Рассмотрим длинную цепочку лампочек. Пусть для некоторого наблюдателя в каждый момент времени горит только одна лампочка, причем светящаяся лампочка "бежит" по гирлянде. Поскольку включение и выключение лампочек можно осуществлять в любом режиме, несложно сделать так, чтобы светящаяся лампочка "перемещалась" по гирлянде с любой, даже сверхсветовой скоростью. Например, опоясав земной шар цепочкой лампочек и "запустив" по ней огонек так, чтобы он совершал 10 оборотов вокруг Земли ежесекундно, мы существенно превысим скорость света, если припишем такую скорость светящейся лампочке. Движение огонька по гирлянде не является движением реального физического тела, поэтому такое "сверхсветовое движение" не противоречит специальной теории относительности.

2. Вращающийся "зайчик"

Рассмотрим неподвижную твердую сферу большого радиуса R, в центре которой покоится наблюдатель (см. рис. 11, слева). Пусть он взял мощный фонарик с ярким узким лучом света, и привел его во вращение, чтобы освещенное световое пятно от фонарика "бежало" по внутренней поверхности сферы. Если сфера достаточно большая, световое пятно может перемещаться по ней со сверхсветовой скоростью. Например, если фонарик описывает полный оборот за одну секунду, при радиусе сферы более 50 тысяч километров пятно преодолеет световой барьер. Как и в предыдущем случае движение светового "зайчика" по поверхности не является движением реального физического тела и не противоречит СТО.

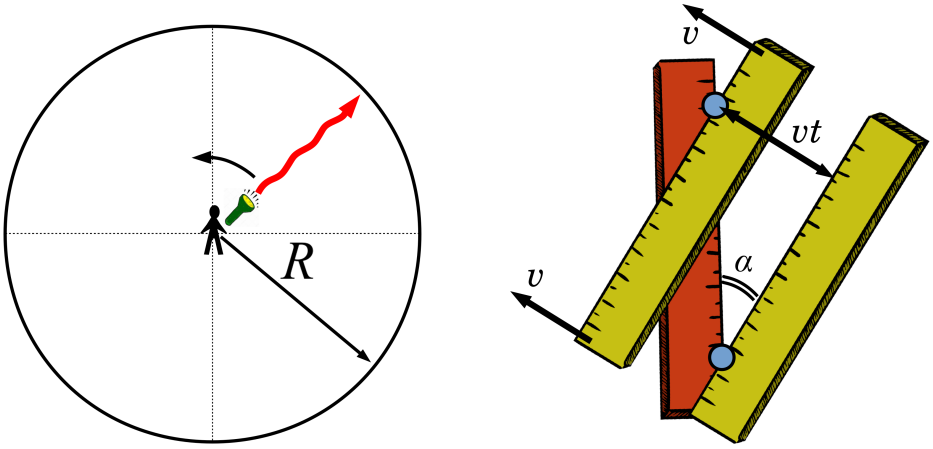


Рис. 11. Примеры сверхсветового "движения": вращающийся световой "зайчик" (слева) и две линейки (справа).

Интересно, что если мы оставим фонарик неподвижным, и попробуем вращать сферу вокруг фонарика, попрежнему наблюдая за световым пятном, "зайчик" не будет перемещаться со сверхсветовой скоростью. Дело в том, что теперь перемещение "зайчика" связано с перемещением реального предмета – сферы, которая в своем движении не может преодолеть световой барьер.

Это существенно отличается от ситуации, если мы рассмотрим вращающийся фонарик и неподвижную сферу во вращающейся системе отсчета, где фонарик неподвижен. Такая система отсчета очевидно не является инерциальной. Наши результаты, справедливые в инерциальных системах отсчета, неприменимы в этом случае.

Напоследок отметим, что вместо света, испущеного фонариком, мы могли бы рассмотреть движение множества пуль, вылетающих из дула вращающегося орудия. При достаточно большом радиусе сферы след от пуль будет перемещаться, преодолев световой барьер, однако каждая пуля будет при этом двигаться с обычной скоростью.

3. Две линейки

Рассмотрим две линейки, образующие малый угол α друг с другом. Пусть одна линейка неподвижна, а вторая поступательно движется со скоростью v, как показано на рис. 11 справа. Если линейка сдвинулась на vt, точка пересечения линеек сдвинулась на $vt/\sin\alpha$. Скорость точки пересечения линеек $v/\sin\alpha$ можно сделать сколь угодно большой за счет малости величины $\sin\alpha$. Сверхсветовое движение точки пересечения также не противоречит СТО, так как оно не связано со сверхсветовым перемещением в пространстве реального тела.

Формула релятивистской кинетической энергии

В механике Ньютона кинетическая энергия определена как функция, прирост которой $\Delta W_{\text{кин}}$ равен работе внешних сил ΔA.

Напомним, как из этого определения можно вывести формулу кинетической энергии в классической механике, а потом попробуем получить аналогичную формулу в случае СТО.

Рассмотрим малый промежуток времени dt, за который кинетическая энергия тела массой m_0 изменилась на $dW_{\text{кин}}$ за счет того, что некоторая постоянная сила F совершила над ним работу $dA = F d\mathrm{x} = F u\, dt$ (здесь $d\mathrm{x}$ – перемещение тела за время dt; на малом промежутке $d\mathrm{x}$ тело имело некоторую почти постоянную скорость u). Для силы можно использовать (3), т.е. $F = d\mathrm{p}/dt$, где $\mathrm{p} = m_0 u$. Поэтому

$$dW_{\text{кин}} = F u\, dt = \frac{d\mathrm{p}}{dt} u\, dt = u d\mathrm{p} = \frac{\mathrm{p} d\mathrm{p}}{m_0}.$$

В последнем равенстве мы использовали, что скорость тела u и его импульс p связаны соотношением $u(\mathrm{p}) = \mathrm{p}/m_0$.

С помощью интегрирования изменение кинетической энергии $dW_{\text{кин}}$ за малый промежуток времени можно превратить в изменение за большой промежуток времени. Например, за время, в течение которого импульс тела изменился от нуля до $\mathrm{p_к} = m_0 u_{\text{к}}$, кинетическая энергия изменилась на

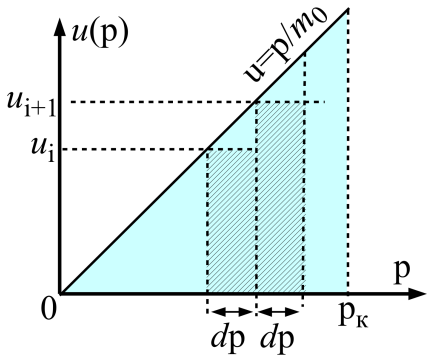


Рис. 12: Интегрирование кинетической энергии.

$$W_{\text{кин}} = \int\limits_0^{\mathrm{p_к}} dW_{\text{кин}} = \int\limits_0^{\mathrm{p_к}} u(\mathrm{p}) d\mathrm{p} = \int\limits_0^{\mathrm{p_к}} \frac{\mathrm{p} d\mathrm{p}}{m_0} = \frac{\mathrm{p_к^2}}{2m_0} = \frac{m_0 u_{\text{к}}^2}{2}. \tag{7}$$

Комментарий. Смысл интегрирования в том, что мы разбили процесс на много промежутков, на каждом из которых импульс тела изменяется на малую величину $d\mathrm{p}$. Получившиеся промежутки мы пронумеровали, обозначили скорость тела на i-том промежутке через u_i и просуммировали малые изменения кинетической энергии $dW_{\text{кин}}$ на всех промежутках:

$$dW_1 + dW_2 + dW_3 + \ldots = u_1 d\mathrm{p} + u_2 d\mathrm{p} + u_3 d\mathrm{p} + \ldots. \tag{8}$$

При этом мы догадались, что сумма вкладов $u_i d\mathrm{p}$ может быть вычислена как площадь под графиком функции $u(\mathrm{p}) = \mathrm{p}/m_0$ при $\mathrm{p} \in (0, \mathrm{p_к})$, см. рис. 12. Слагаемое $u_i d\mathrm{p}$ соответствует площади i-той ступеньки на рисунке (i-тая и $(i+1)$-ая ступеньки заштрихованы на рисунке). Чем *уже* ступеньки, тем точнее суммарная площадь всех ступенек соответствует площади под графиком (закрашенной области под прямой на рисунке). Знак интеграла в формуле (7) – просто общепринятый сокращенный способ записать площадь под графиком, избегая громоздких сумм и опуская разговор о ступеньках.

В механике Эйнштейна определение кинетической энергии сохраняется, однако связь скорости и импульса будет иная. Поэтому, суммируя вклады $dW_{\text{кин}} = u d\mathrm{p}$, в СТО следует использовать зависимость $u(\mathrm{p})$, найденную в (5):

$$W_{\text{кин}} = \int\limits_0^{\mathrm{p_к}} u(\mathrm{p}) d\mathrm{p} = \int\limits_0^{\mathrm{p_к}} \frac{\mathrm{p} c d\mathrm{p}}{\sqrt{m_0^2 c^2 + \mathrm{p}^2}} = \int\limits_0^{\mathrm{p_к}} \frac{c d\mathrm{p}^2}{2\sqrt{m_0^2 c^2 + \mathrm{p}^2}} = c\sqrt{m_0^2 c^2 + \mathrm{p}^2}\Big|_0^{\mathrm{p_к}} = \sqrt{m_0^2 c^4 + \mathrm{p_к^2} c^2} - m_0 c^2.$$

Эту формулу можно понимать следующим образом: у тела с импульсом p имеется релятивистская энергия

$$E(\mathrm{p}) = \sqrt{m_0^2 c^4 + \mathrm{p_к^2} c^2},$$

причем даже в состоянии покоя, при p = 0, тело обладает энергией покоя $E_0 = m_0c^2$. Кинетическая энергия $W_{\text{кин}}$ – часть релятивистской энергии, которую можно изменить с помощью механической работы внешней силы, меняя импульс тела. Иными словами, $W_{\text{кин}} = E(\text{p}) - E_0$.

Используя связь импульса и энергии – формулу (4) – можно выразить $W_{\text{кин}}$ через скорость движения тела:

$$W_{\text{кин}} = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right). \tag{9}$$

В пределе малых скоростей, при $u/c << 1$, полученное выражение должно давать привычную нам кинетическую энергию ньютоновской механики $m_0u^2/2$. Чтобы это увидеть, следует воспользоваться приближенным математическим равенством $(1 + x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$, справедливым при $x << 1$. Действительно,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{u^2}{2c^2}, \qquad \Rightarrow \qquad W_{\text{кин}} \simeq m_0c^2 \left(1 + \frac{u^2}{2c^2} - 1\right) = \frac{m_0u^2}{2}.$$

Взаимосвязь массы с энергией

Вернемся еще раз к формуле кинетической энергии (9):

$$W_{\text{кин}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0c^2.$$

Вспомним, что имеющийся здесь вклад $m_0/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ у нас уже играл роль релятивистской массы m в определении релятивистского импульса (6). С учетом этого обозначения кинетическая энергия может быть записана в виде $W_{\text{кин}} = mc^2 - m_0c^2$. Это выражение снова имеет вид разности: из релятивистской энергии тела mc^2 вычитается его энергия покоя m_0c^2. Фактически это значит, что при движении тела $E(p)$ всегда остается равной mc^2, а релятивистская масса m тела возрастает с увеличением скорости.

Эйнштейн предположил, что это соотношение остается справедливым, если тело получает энергию не только в виде кинетической энергии, но и в любой форме. Таким образом, прирост энергии тела всегда приводит к увеличению его релятивистской массы. Например, заведенный будильник имеет большую релятивистскую массу, чем незаведенный. Нагретая вода увеличивается в массе по сравнению с холодной. В результате выделения тепла в химической реакции релятивистская масса реагентов уменьшается.

Слагаемое m_0c^2 Эйнштейн истолковал как запас энергии, дремлющей в любом массивном теле. Перевести ее в работу непосредственно с помощью механического процесса нельзя. Однако если удается провести физический процесс, при котором масса тела уменьшается хотя бы на грамм, преобразуясь в энергию, получается чудовищное количество энергии. Сейчас физики действительно умеют осуществлять такие процессы, на них основана атомная энергетика; благодаря подобного рода процессам выделяется энергия в звездах.

Интервал, пространство Минковского

Законы релятивистского движения кажутся непривычными. Отрезки времени и длины, которые в ньютоновой механике не зависели от системы отсчета, теперь меняются при переходе от одной системы к другой.

На первый взгляд сложно поверить, что выведенное нами лоренцевское растяжение времени и сжатие расстояний в СТО имеет много общего с привычным поворотом системы координат. Тем не менее, в этом не сложно убедиться.

Рассмотрим точку A с декартовыми координатами (x, y, z). Рассмотрим новую систему координат, повернутую относительно исходной на угол φ вокруг оси z. В новой системе z'-координата точки A останется прежней, а координаты x', y' будут отличаться от x, y (см. рис. 13). Для удобства будем считать $z = z' = 0$.

Зато расстояние R от точки до начала координат останется неизменным,

$$x^2 + y^2 = R^2 = x'^2 + y'^2, \qquad \text{где}$$

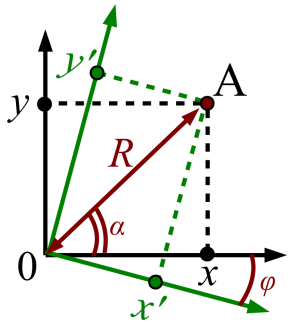


Рис. 13: Изменение координат точки

$$x = R\cos\alpha, \qquad x' = R\cos(\alpha+\varphi),$$
$$y = R\sin\alpha, \qquad y' = R\sin(\alpha+\varphi).$$

Раскрывая косинус и синус суммы $(\alpha+\varphi)$ с помощью известных тригонометрических формул, получим, что пара чисел (x', y') легко выражается через (x, y):

$$x' = R\cos\alpha\cos\varphi - R\sin\alpha\sin\varphi = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$
$$y' = R\sin\alpha\cos\varphi + R\cos\alpha\sin\varphi = y\cos\varphi + x\sin\varphi,$$

или иначе:

$$x' = (x - \operatorname{tg}\varphi)\cos\varphi, \qquad y' = (y + x\operatorname{tg}\varphi)\cos\varphi$$

Используя равенство $\cos^2\varphi = 1/(1+\operatorname{tg}^2\varphi)$, можно записать эти формулы в виде, чем-то похожем на преобразования Лоренца. Сравните: слева в таблице записано преобразование координаты и времени события при переходе в движущуюся систему отсчета по формулам Лоренца (★), а справа – выписано преобразование координат точки A при повороте:

$\mathrm{x}' = \dfrac{\mathrm{x} - (ct)\cdot(V/c)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$	$x' = \dfrac{x - y\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$
$ct' = \dfrac{(ct) - \mathrm{x}\cdot(V/c)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$	$y' = \dfrac{y + x\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$

Если ct в преобразовании Лоренца воспринимать как новую, дополнительную координату $\bar{t} = ct$ к обычным координатам (x, y, z), а величину V/c – как "тангенс угла поворота", то формулы оказываются одинаковыми за исключением несовпадающего знака под корнем.

Комментарий. Читатель, знакомый с комплексными числами, заметит, что если считать, что "тангенс угла поворота" чисто мнимый, $\operatorname{tg}\varphi = -iV/c$, а роль " временн*о*й координаты" y исполняет чисто мнимая величина $y = ict$ (при этом, конечно, $y' = ict'$), то формулы преобразования Лоренца и преобразования поворота совершенно совпадут. Такая на первый взгляд случайная аналогия таит глубокий физический смысл.

Поэтому в СТО вместо времени t и координат $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ события гораздо удобнее рассматривать единую четверку чисел — четыре координаты некоторого абстрактного вектора $(\bar{t}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$. Этот **четырехвектор** задает "положение" события в некотором абстрактном четырехмерном пространстве, которое называется **пространством Минковского**.

Переход в новую инерциальную систему отсчета, которая движется вдоль оси x, означает на этом языке, что то же самое событие теперь задается другой четверкой чисел $(\bar{t}', \mathrm{x}', \mathrm{y}', \mathrm{z}')$, причем координаты $\mathrm{y}' = \mathrm{y}$ и $\mathrm{z}' = \mathrm{z}$ в новой системе отсчета не изменились, а координаты x' и $\bar{t}'$ преобразовались. Вид этих преобразований весьма напоминает нам поворот осей координат в плоскости $(\bar{t}, \mathrm{x})$.

При повороте координат в обычном пространстве благодаря теореме Пифагора расстояние между любыми двумя точками, например, между точкой A и началом координат, сохраняется:

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 = \mathrm{x}'^2 + \mathrm{y}'^2 + \mathrm{z}'^2.$$

Говорят, что расстояние **инвариантно** относительно преобразования поворота, или "**расстояние является инвариантом**". При лоренцевском преобразовании также существует инвариантная величина – своеобразное "расстояние между двумя событиями". Эта величина не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой и называется **интервал**. Обычно интервал обозначается буквой s; по определению он равен

$$s^2 = \bar{t}^2 - \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2 - \mathrm{z}^2 \qquad \text{или, что тоже самое,} \qquad s^2 = \bar{t}'^2 - \mathrm{x}'^2 - \mathrm{y}'^2 - \mathrm{z}'^2.$$

Величина s^2 выполняет в пространстве Минковского роль, аналогичную квадрату расстояния между точками в трехмерном пространстве. Если произошли два события, то промежуток времени между ними и расстояние между пространственными точками, где они произошли, может измениться при переходе в другую инерциальную систему отсчета. Однако в любой из них **интервал между двумя заданными событиями окажется неизменным**.

Квадрат расстояния между двумя точками, разумеется, всегда положителен. А вот величина s^2 может быть любого знака. Поэтому для описания пространства Минковского часто используют **комплексные числа**.

Если $s^2 < 0$, говорят, что интервал между событиями **пространственноподобный**. Это означает, что существует система отсчета, в которой эти события происходят одновременно на некотором расстоянии друг от друга. Если $s^2 > 0$, говорят, что интервал между событиями **врмениподобный**. Это означает, что существует система отсчета, в которой эти события происходят в одной и той же точке в разные моменты времени.

Релятивистски-инвариантная запись физических законов

Возможность характеризовать события единым четырехмерным вектором отражает важные физические свойства, которыми обладает наше пространство - время. Оказывается, все физические законы в СТО можно очень компактно записать, если вместо привычных трехмерных векторов пользоваться их четырехмерными аналогами.

Например, вместо $\vec{\mathrm{p}}$ – трехмерного импульса частицы (см. (4)), задаваемого тремя декартовыми компонентами $(\mathrm{p}_x, \mathrm{p}_y, \mathrm{p}_z)$, удобнее пользоваться четырехмерным "импульсом" P, в котором три обычные компоненты импульса дополнены числом E/c (где E – энергия частицы):

$$P = (E/c, \mathrm{p}_x, \mathrm{p}_y, \mathrm{p}_z).$$

Чтобы не путать 4-мерный вектор P с обычным трехмерным импульсом $\vec{\mathrm{p}}$, будем 4-вектор записывать большой буквой, а трехмерный импульс помечать векторной стрелочкой.

Четырехвектору P можно приписать "длину" $|P|$, аналогично тому, как мы приписали "длину" (точнее, интервал) вектору $(\bar{t}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$, сконструировав ее из возведенных в квадрат четырех компонентов 4-вектора. А именно

$$|P|^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathrm{p}_x^2 - \mathrm{p}_y^2 - \mathrm{p}_z^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{\mathrm{p}}|^2.$$

При переходе в движущуюся инерциальную систему отсчета 4-вектор P изменит четыре свои компоненты, однако его "длина" $|P|$ всегда останется неизменной. Для уединенной движущейся частицы в этом легко убедиться, если использовать формулу для релятивистской энергии $E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{\mathrm{p}}^2c^2}$, которая была нами получена ранее.

Для описания физических процессов в СТО вводят подходящие 4-вектора: 4-скорость, 4-ускорение и пр. Физические законы для компонент этих величин, оказываются, имеют единую компактную формул записи, а инварианты конструируются по единому образцу.

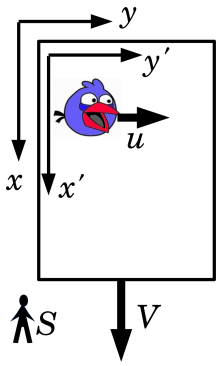
Задачи для самопроверки

Задача 1. В некоторой системе отсчета два взрыва происходят через промежуток времени Δt: первый взрыв – в точке с координатой $x_1 = 0$, второй – в точке с координатой $x_2 = nc\Delta t$. С какой скоростью и куда должен двигаться наблюдатель, чтобы для него события произошли одновременно? При каком n это возможно?

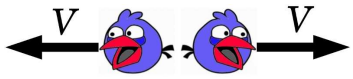
Задача 2. Во сколько раз изменится плотность тела, если наблюдатель начнет двигаться относительно тела со скоростью V?

Задача 3. На рисунке изображен вагон (вид сверху), движущийся по рельсам со скоростью V. Поперек вагона, вдоль оси y' летит птичка. Для пассажира ее скорость равна u. Найдите проекции на оси x и y скорости птички относительно стрелочника S.

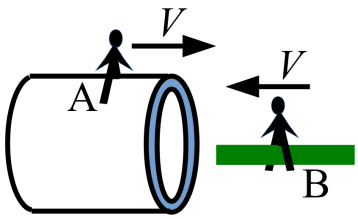
Задача 4. Полная энергия движущейся в установке частицы в n раз больше, чем ее энергия покоя. Чему равна скорость частицы? Если известно, что эта частица, будучи неподвижной, распадается за время t_0, какой путь относительно установки она успеет пролететь до распада?



К зад. 3



К зад. 5



К зад. 7

Задача 5. Два тела, каждое из которых имеет массу покоя m_0, разлетаются в разные стороны со скоростью $V = c/n$ (см. рис.). В системе отсчета, связанной с одним из тел, найдите суммарный импульс и суммарную энергию данной пары тел.

Задача 6. С какой скоростью должен лететь к звезде Альфа Центавра космический корабль, чтобы по корабельным достичь ее за год? Расстояние до Альфа Центавра равно 4 световых года.

Задача 7. Наблюдатели A и B летят навстречу друг другу: A – верхом на трубе, B – на стержне (см. рис. к задаче). Длины трубы и стержня в неподвижном состоянии одинаковы. С точки зрения A наблюдатель B движется, укорачиваясь в направлении движения вместе со своим стержнем за счет релятивистского сокращения длины. При этом, влетая в трубу, наблюдатель B вместе со своим стержнем целиком в нее помещается. Однако с точки зрения B дело обстоит наоборот: наблюдатель A движется, и поэтому укорачивается вместе со своей трубой. Поэтому B считает, что он никак не может поместиться со своим стержнем целиком в трубу. Разрешите кажущееся противоречие в наблюдениях A и B.

Ответы

1. Вдоль оси x со скоростью c/n; возможно при $n > 1$.

2. ρ увеличится в $k = (1 - V^2/c^2)^{-1}$ раз.

3. Проекция на ось x равна V; проекция на ось y равна $u\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

4. Скорость $c\sqrt{n^2 - 1}/n$. Путь $ct_0\sqrt{n^2 - 1}$.

5. Суммарный импульс $\mathrm{p} = 2m_0cn/(n^2 - 1)$. Суммарная энергия $E = 2m_0c^2n^2/(n^2 - 1)$. Эти величины образуют четырехвектор, причем можно проверить, что квадрат "длины" которого $(E/c)^2 - \mathrm{p}^2$ один и тот же и в системе отсчета, где частицы движутся симметрично, и в системе отсчета, где одна из них покоится.

6. Со скоростью $c\sqrt{16/17}$.

7. С точки зрения наблюдателя A сначала задний край стержня влетает в трубу, и только затем передний край стержня покидает трубу. Существует промежуток времени, когда оба конца стерженя в трубе *одновременно*. Чтобы убедиться в этом, наблюдатель A может в течение этого промежутка ненадолго закрыть края своей трубы крышками, заявив, что пока крышки закрыты, стержень внутри трубы. С точки зрения наблюдателя B крышки закрываются не одновременно: сначала закрывается крышка, мешающая переднему концу стержня покинуть трубу; затем она открывается, передний конец стержня покидает трубу, и только потом закрывается крышка вслед за задним концом стержня.

Многие кажущиеся парадоксы, которые возникают в СТО связаны с тем, что СТО не работает в неинерциальных системах отсчета, поэтому некорректно описывает эффекты, связанные с ускорением и гравитацией. Сюда относятся "парадокс колеса" (у вращающегося колеса спицы не испытывают сокращения длины, а обод испытывает, так что формула $2\pi R$ перестает выполняться), "парадокс подводной лодки" (из-за изменения плотности в одной системе отсчета предмет может плавать, а в другой тонет), "парадокс Белла" (дистанция между двумя телами, которые стартуют одновременно и разгоняются абсолютно одинаково, не будет постоянной из-за лоренцевского сокращения длины). Эти парадоксы можно корректно разрешить только в рамках ОТО.