

УДК 536.423.4+531.528

КИНЕТИКА БИНАРНОЙ КОНДЕНСАЦИИ НА РАСТУЩЕЙ В ДИФфуЗИОННОМ РЕЖИМЕ КАПЛЕ

© 2008 г. Ф. М. Куни, А. А. Лезова

Санкт-Петербургский государственный университет
Научно-исследовательский институт физики
198504 Санкт-Петербург, Петродворец, ул. Ульяновская, 1
Поступила в редакцию 15.06.2007 г.

Получено релаксационное уравнение, определяющее закономерность стремления концентрации бинарного раствора в растущей капле к стационарному значению, при котором существует автомодельное решение задачи о конденсации бинарной смеси. Получено аналитическое решение релаксационного уравнения и показано, что выход на стационарное значение концентрации осуществляется по степенному закону. Определена длительность временного интервала, по истечении которого с момента зарождения капли вступают в силу диффузионный режим ее роста и полученное релаксационное уравнение. Найдено стационарное значение концентрации для модели идеального раствора.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение кинетики роста капли бинарного раствора, находящейся в смеси паров составляющих ее веществ и пассивного газа, представляет собой в общем случае весьма сложную задачу. При ее решении, даже в относительно простом случае диффузионного режима роста капли, обычно используется предположение [1, 2] о достаточно быстром выходе концентрации раствора в капле на стационарное значение. В подтверждение корректности этого предположения в [2] приведены результаты численного расчета зависимости от времени концентрации идеального бинарного раствора в капле для нескольких вариантов начального ее состава. Из представленных в [2] численных расчетов, однако, видно, что установление стационарной концентрации раствора в капле может происходить в течение достаточно длительного периода времени. Переход к стационарному значению концентрации идеального бинарного раствора в растущей в диффузионном режиме капле исследовался также в работе [3]. Заметим, однако, что в работах [1 – 3] закономерность установления стационарной концентрации раствора выявлена не была.

Нахождение кинетики роста капли бинарного раствора и установления в ней стационарной концентрации являются лишь частью общей проблемы описания процесса конденсации бинарной смеси на растущей капле. Одной из составляющих этой проблемы является расчет нестационарных полей концентрации паров вокруг растущей капли бинарного раствора. Эта задача была недавно рассмотрена в работе [4], где с привлечением идей подобия было получено автомодельное решение для полей концентрации вблизи растущей в диффузионном режиме капли. Как показано в [4], автомодельное реше-

ние существует только при постоянном значении концентрации раствора в капле, определяемом из отдельного уравнения. Полученное из решения этого уравнения значение концентрации будем называть стационарной концентрацией.

В данной статье будет дан вывод релаксационного уравнения, определяющего эволюцию концентрации бинарного раствора в растущей в диффузионном режиме капле. Решение этого уравнения показывает, что концентрация раствора капли неизбежно с ростом времени стремится к стационарной концентрации. Выход на стационарное значение следует степенному закону. Найденное решение в качестве частного случая воспроизводит результаты работы [5], полученные в приближении высокого пересыщения конденсирующихся паров.

Определена длительность временного интервала, по истечении которого с момента зарождения капли вступают в силу диффузионный режим ее роста и полученное релаксационное уравнение. Найдено стационарное значение концентрации для модели идеального раствора.

1. СТАЦИОНАРНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ БИНАРНОГО РАСТВОРА В РАСТУЩЕЙ КАПЛЕ И ЗАКОН ЕЕ УСТАНОВЛЕНИЯ ВО ВРЕМЕНИ

Рассмотрим каплю бинарного раствора, зародившуюся в первоначально однородной парогазовой среде, состоящей из пассивного газа и двухкомпонентной смеси паров веществ, образующих каплю. После зарождения капля растет за счет конденсации каждого из двух компонентов смеси паров. Принимаем, что доля пассивного газа в паро-

газовой среде существенно превышает долю паров. Рост капли будет происходить в диффузионном режиме, когда ее радиус R заметно превысит длину свободного пробега λ молекул паров в пассивном газе, т.е. при

$$R \geq R_0 \quad R_0 \equiv (3-4)\lambda. \quad (1.1)$$

Доминирующая доля пассивного газа в парогазовой среде обеспечивает также изотермичность процесса конденсации и позволяет пренебречь стефановским течением парогазовой среды и взаимодействием диффузионных потоков молекул паров.

Обозначим через x_i ($i = 1, 2$) число молекул компонента i в капле в текущий момент времени, а через v_i ($i = 1, 2$) – парциальный объем, занимаемый молекулой компонента i в капле. Однородность раствора в капле была обоснована в [3]. Введем концентрации c_1 и c_2 компонентов 1 и 2 в капле через соотношения

$$c_1 \equiv x_1/(x_1 + x_2), \quad c_2 \equiv 1 - c_1 \equiv x_2/(x_1 + x_2). \quad (1.2)$$

Плотность числа молекул компонента i в первоначально однородной двухкомпонентной смеси паров обозначим через n_i ($i = 1, 2$), а под $n_{1\infty}(c_1)$ и $n_{2\infty}(1 - c_1)$ будем подразумевать плотности числа молекул компонентов 1 и 2 смеси паров, находящихся в равновесии с каплей. Мы формально представили плотности $n_{1\infty}(c_1)$ и $n_{2\infty}(1 - c_1)$ как функции концентраций c_1 и $1 - c_1$ компонентов 1 и 2 в капле. Как и в [4], считаем смесь паров метастабильной по отношению к каждому ее компоненту, поэтому

$$n_1 > n_{1\infty}(c_1), \quad n_2 > n_{2\infty}(1 - c_1). \quad (1.3)$$

Как было отмечено во введении, автомодельное решение [4] существует при выполнении равенства $c_1 = c_{1s}$, где c_{1s} – стационарная концентрация компонента 1 в капле, определяемая уравнением

$$\frac{D_1[n_1 - n_{1\infty}(c_{1s})]}{D_2[n_2 - n_{2\infty}(1 - c_{1s})]} = \frac{c_{1s}}{1 - c_{1s}} \quad (1.4)$$

(уравнение (34) из [4], в котором положено $c_1 = c_{1s}$). Согласно уравнению (1.4), отношение диффузионных потоков компонентов 1 и 2 к капле равно отношению их стационарных концентраций в капле.

Покажем, что уравнение (1.4) однозначно определяет концентрацию c_{1s} . Действительно, если концентрация c_{1s} компонента 1 в капле увеличится, то концентрация $n_{1\infty}(c_{1s})$ также увеличится, а $n_{2\infty}(1 - c_{1s})$, наоборот, уменьшится. Это приведет к уменьшению левой части уравнения (1.4). Но при росте концентрации c_{1s} правая часть уравнения (1.4) увеличивается. В итоге уравнение (1.4) перестает выполняться. Этим обосновывается единственность решения уравнения (1.4). Заметим также, что при соблюдении неравенств (1.3) левая, а с ней и правая части уравнения (1.4) будут

положительными. Это, очевидно, возможно лишь для $0 < c_{1s} < 1$, что следует также из определений (1.2).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dR^2}{dt} = 2D_1 \frac{v_1 c_{1s} + v_2 (1 - c_{1s})}{c_{1s}} [n_1 - n_{1\infty}(c_{1s})] \quad (1.5)$$

(уравнение (41) из [4], в котором положено $c_1 = c_{1s}$). Время t будем отсчитывать от момента зарождения капли. Только после зарождения капли начинает соблюдаться баланс чисел молекул, выведенных диффузионными потоками из смеси паров, и чисел молекул, вошедших в растущую каплю. Введем характерное время t_0 , при котором выполняется условие $R|_{t=t_0} = R_0$, и положим

$$t_0 = R_0^2/\beta^2, \quad (1.6)$$

где

$$\beta^2 = 2D_1 \frac{v_1 c_{1s} + v_2 (1 - c_{1s})}{c_{1s}} [n_1 - n_{1\infty}(c_{1s})]. \quad (1.7)$$

Положительность величины β^2 в (1.7) следует из неравенств (1.3). Интегрируя равенство (1.5) по времени при начальном условии $R|_{t=t_0} = R_0$, учитывая соотношения (1.6) и (1.7), получаем важное уравнение

$$R^2 = \beta^2 t, \quad (1.8)$$

справедливое на временах $t \geq t_0$, когда $R \geq R_0$ и, следовательно, капля растет в диффузионном режиме. Заметим, что v_1 , v_2 и β^2 не зависят, как и концентрация c_{1s} , от времени. К временам $t \geq t_0$ будут относиться и все последующие кинетические соотношения. Заметим, что во всех этих соотношениях время t также отсчитывается от момента зарождения капли.

Учитывая равенство $c_1 = c_{1s}$ и воспользовавшись соотношениями (38) из [4], можно записать

$$x_1 = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{c_{1s}}{v_1 c_{1s} + v_2 (1 - c_{1s})}, \quad (1.9)$$

$$x_2 = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{(1 - c_{1s})}{v_1 c_{1s} + v_2 (1 - c_{1s})},$$

где мы учли, что объем капли равен $4\pi R^3/3$. Привлекая соотношения (43) и (44) из [4] и снова учитывая равенство $c_1 = c_{1s}$, получаем для автомодельного решения уравнения

$$\frac{dx_1}{dt} = 4\pi D_1 [n_1 - n_{1\infty}(c_{1s})] R, \quad (1.10)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 4\pi D_2 [n_2 - n_{2\infty}(1 - c_{1s})] R. \quad (1.11)$$

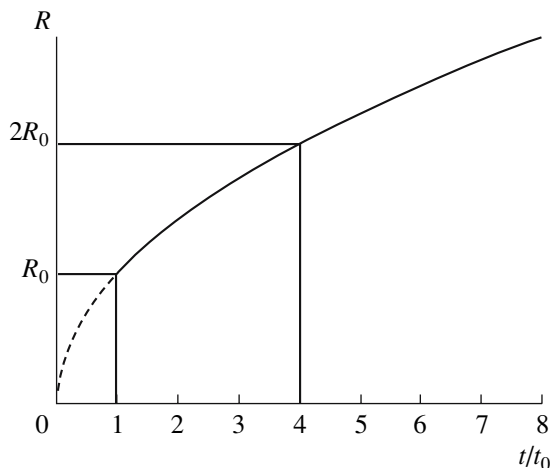


Рис. 1. Зависимость радиуса растущей капли от безразмерного времени t/t_0 .

Определения (1.2) никак не связаны с равенством $c_1 = c_{1s}$. Из этих определений имеем

$$(1 - c_1)x_1 = c_1 x_2. \quad (1.12)$$

Дифференцируя равенство (1.12) по времени, получаем

$$(x_1 + x_2) \frac{dc_1}{dt} = (1 - c_1) \frac{dx_1}{dt} - c_1 \frac{dx_2}{dt}. \quad (1.13)$$

В частности, при $c_1 = c_{1s}$, когда $dc_{1s}/dt = 0$, из равенства (1.13) и уравнений (1.10) и (1.11) получаем соотношение (1.4), однозначно определяющее концентрацию c_{1s} .

При $c_1 \neq c_{1s}$ равенство (1.13) можно рассматривать как уравнение для отклонения концентрации c_1 от стационарного значения c_{1s} . Это отклонение можно рассматривать как возмущенное, т.е. малое. При этом для величины $x_1 + x_2$ в левой части (1.13) можем использовать значения, относящиеся к стационарной концентрации c_{1s} и задаваемые формулами (1.7), (1.8) и (1.9). Из этих формул с учетом неравенства $\beta^2 > 0$ следует, что

$$x_1 + x_2 = \frac{8\pi}{3} \beta t^{3/2} \frac{D_1}{c_{1s}} [n_1 - n_{1\infty}(c_{1s})]. \quad (1.14)$$

Для производных dx_1/dt и dx_2/dt в правой части (1.13) также можно использовать формулы (1.8), (1.11) и (1.10), в которые входит стационарная концентрация. Воспользовавшись соотношением (1.4), перепишем уравнение (1.11) в виде

$$\frac{dx_2}{dt} = 4\pi \frac{1 - c_{1s}}{c_{1s}} D_1 [n_1 - n_{1\infty}(c_{1s})] R. \quad (1.15)$$

Используя равенства (1.8), (1.15) и (1.10) и учитывая неравенство $\beta^2 > 0$, получаем

$$\begin{aligned} (1 - c_1) \frac{dx_1}{dt} - c_1 \frac{dx_2}{dt} = \\ = -4\pi \beta t^{1/2} (c_1 - c_{1s}) \frac{D_1}{c_{1s}} [n_1 - n_{1\infty}(c_{1s})]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Подставим производные из (1.14) и (1.16) в соотношение (1.13). Сокращая общие множители, приходим к релаксационному уравнению

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{3(c_1 - c_{1s})}{2t}. \quad (1.17)$$

Уравнение (1.17) было получено ранее в [5] при более жестких, чем неравенства (1.3), ограничениях $n_1 \geq (4-5)n_{1\infty}(c_1)$ и $n_2 \geq (4-5)n_{2\infty}(1 - c_1)$, определяющих интенсивную конденсацию каждого двух компонентов смеси паров. В [5] было получено явное выражение и для стационарной концентрации c_{1s} . Оно совпадает с вытекающим из уравнения (1.4) в пренебрежении величинами $n_{1\infty}(c_{1s})$ и $n_2(1 - c_{1s})$ по сравнению с n_1 и n_2 соответственно.

Решая уравнение (1.17) при начальном условии $c_1|_{t=t_0} = c_{10}$, находим

$$c_1 = c_{1s} + (c_{10} - c_{1s})(t_0/t)^{3/2}. \quad (1.18)$$

Аналитическое решение (1.18) показывает, что концентрация выходит на стационарное значение по степенному закону. Как видно из (1.18), отклонение $|c_1 - c_{1s}|$ монотонно убывает с ростом времени как $(t_0/t)^{3/2}$ и, следовательно, становится пренебрежимо малым практически уже при $t/t_0 \geq 4-9$. Таким образом, выход на стационарное значение концентрации происходит гораздо быстрее, чем происходит заметное изменение размера капли, зависимость которого от времени, как видно из (1.8), также определяется степенным законом

$$R = R_0(t/t_0)^{1/2}, \quad (1.19)$$

в котором показатель степени, однако, в три раза меньше, чем в зависимости (1.18). Обратим внимание, что степенной (а не экспоненциальный) характер изменения концентрации времени исключает возможность появления характерного времени релаксации.

Сказанное проиллюстрировано на рис. 1, 2 и 3. На них показаны задаваемые выражениями (1.18) и (1.19) зависимости от безразмерного времени t/t_0 радиуса капли R (рис. 1) и разности $c_1 - c_{1s}$ (для случаев $c_{10} - c_{1s} > 0$ (рис. 2) и $c_{10} - c_{1s} < 0$ (рис. 3)).

Отметим, что равенства (1.1), (1.6) и (1.7) в своей совокупности дают конкретное выражение для времени t_0 , по истечении которого с момента зарождения капли устанавливается диффузионный режим роста капли и вступают в силу рассмотренные выше кинетические соотношения. В дальнейшем будет удобно для параметра β^2 , входящего в выражение

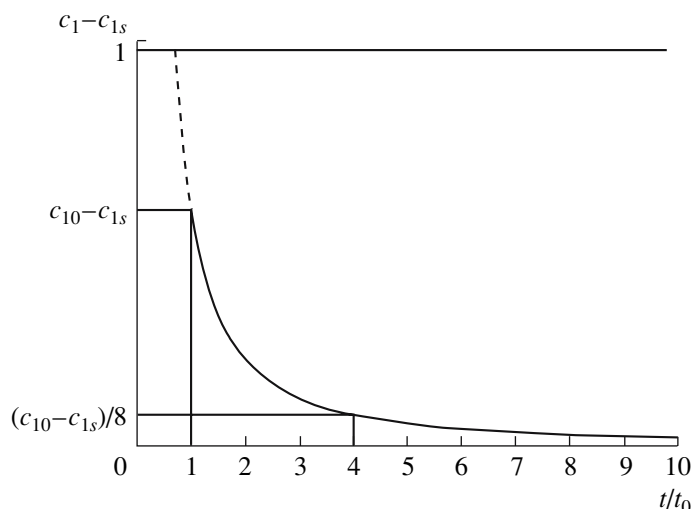


Рис. 2. Зависимость от безразмерного времени t/t_0 отклонения концентрации первого компонента от стационарного значения при $c_{10} - c_{1s} > 0$.

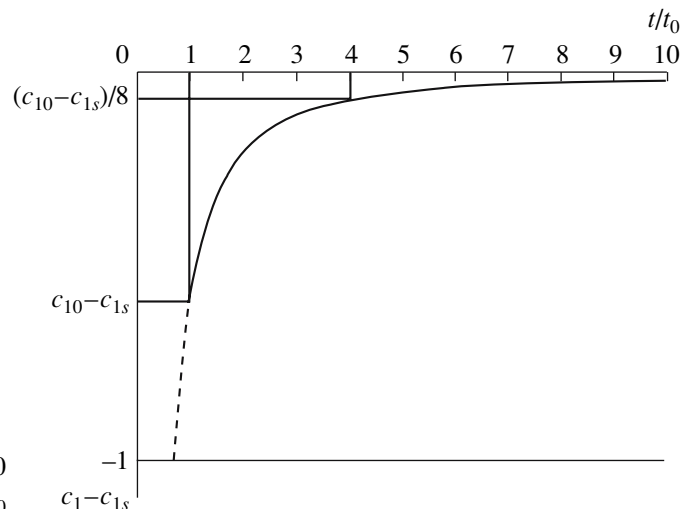


Рис. 3. Зависимость от безразмерного времени t/t_0 отклонения концентрации первого компонента от стационарного значения при $c_{10} - c_{1s} < 0$.

для времени t_0 , вместо равенства (1.7) использовать симметричное по компонентам выражение

$$\beta^2 = 2D_1 v_1 [n_1 - n_{1\infty}(c_{1s})] + 2D_2 v_2 [n_2 - n_{2\infty}(1 - c_{1s})], \quad (1.20)$$

которое с очевидностью следует из соотношения (1.4).

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ИДЕАЛЬНОГО РАСТВОРА В КАПЛЕ

Отметим, что в предыдущем разделе мы не делали каких-либо предположений о свойствах раствора капли. Предполагая же раствор в капле идеальным и используя формулы (5) из [3], получаем

$$n_{1\infty}(c_1) = c_1 n_{1\infty}, \quad n_{2\infty}(1 - c_1) = (1 - c_1) n_{2\infty}, \quad (2.1)$$

где величины $n_{1\infty}$ и $n_{2\infty}$, записанные без указания аргументов, представляют собой плотности числа молекул насыщенных паров чистых жидкостей из компонентов 1 и 2, а аргумент в функции $n_{2\infty}(1 - c_1)$, как и в разделе 1, представляет концентрацию компонента 2 в капле. Ниже мы ограничимся рассмотрением стационарной концентрации только компонента 1 и для упрощения записи опустим индекс s . Стационарную концентрацию компонента 2 найдем в конце статьи.

Используя соотношения (2.1), сведем уравнение (1.4) для стационарной концентрации $c_1 \equiv c_{1s}$ компонента 1 в капле к квадратному уравнению

$$p c_1^2 - q c_1 + D_1 n_1 = 0, \quad (2.2)$$

где

$$p \equiv D_1 n_{1\infty} - D_2 n_{2\infty}, \quad q \equiv D_1 (n_1 + n_{1\infty}) + D_2 (n_2 - n_{2\infty}). \quad (2.3)$$

Заметим, что уравнение для концентрации $c_2 = 1 - c_1$ компонента 2 имеет такой же вид: следует только поменять местами индексы 1 и 2. Уравнение (2.2) совпадает с уравнением (12) из работы [2].

Примем в дальнейшем справедливыми неравенства

$$n_1 > n_{1\infty}, \quad (2.4)$$

$$n_2 > n_{2\infty}, \quad (2.5)$$

которые ввиду вытекающих из (2.1) при $0 < c_1 < 1$ неравенств $n_1(c_1) < n_{1\infty}$ и $n_{2\infty}(1 - c_1) < n_{2\infty}$ вводят более строгие чем неравенства (1.3) ограничения.

Квадратное уравнение (2.2) имеет два корня

$$c_1^{(1)} = \frac{q}{2p} - \frac{q}{2p} \left(1 - \frac{4pD_1 n_1}{q^2} \right)^{1/2}, \quad c_1^{(2)} = \frac{q}{2p} + \frac{q}{2p} \left(1 - \frac{4pD_1 n_1}{q^2} \right)^{1/2}. \quad (2.6)$$

Произведем выбор компонента 1 таким образом, чтобы величина p из (2.3) была положительной, $p > 0$. Тогда положительной будет и величина q . Этот выбор значительно упрощает все наше рассмотрение, поэтому всюду ниже будем считать справедливыми неравенства $p > 0$ и $q > 0$.

Из равенств (2.3) имеем

$$q - p = D_1 n_1 + D_2 n_2, \quad (2.7)$$

а из неравенства (2.4) имеем

$$q - 2p > 0. \quad (2.8)$$

Легко убедиться, что при соблюдении неравенства

$$q - p > D_1 n_1, \quad (2.9)$$

вытекающего из соотношения (2.7), будет справедливо и неравенство

$$q^2 - 4pD_1 n_1 > (q - 2p)^2. \quad (2.10)$$

Тогда $q^2 - 4pD_1 n_1 > 0$, и оба корня $c_1^{(1)}$ и $c_1^{(2)}$ вещественны. При этом из неравенств (2.10) и (2.8) имеем с очевидностью

$$1 > \left(1 - \frac{4pD_1 n_1}{q^2}\right)^{1/2} > \frac{q - 2p}{q} \quad (2.11)$$

и

$$-1 < -\left(1 - \frac{4pD_1 n_1}{q^2}\right)^{1/2} < -\frac{q - 2p}{q}. \quad (2.12)$$

Из выражения (2.6) и неравенства (2.12) получаем для корня $c_1^{(1)}$ следующие ограничения

$$0 < c_1^{(1)} < 1. \quad (2.13)$$

Неравенство же (2.11) позволяет установить для корня $c_1^{(2)}$ следующие границы

$$\frac{q}{p} > c_1^{(2)} > \frac{q - p}{p}. \quad (2.14)$$

Из выражений (2.3)–(2.5) и (2.7) легко установить, что $(q - p)/p > 1$, то есть $c_1^{(2)} > 1$ и корень $c_1^{(2)}$ не удовлетворяет необходимому для концентрации ограничению $0 < c_1 < 1$. Таким образом, физически корректным является только корень $c_1^{(1)}$ и уравнение (2.2) дает только одно значение стационарной концентрации. Аналогичный результат был ранее получен в работе [2]. Выше мы показали, что единственность решения следует и из более общего уравнения (1.4), не предполагающего идеальность раствора в капле.

Выражение (2.6) для корня $c_1^{(1)}$ может быть записано более просто и наглядно в условиях, когда

$$pD_1 n_1 / q^2 \ll 1. \quad (2.15)$$

Удерживая первых два члена разложения по малому параметру из (2.15), получаем из (2.6)

$$c_1^{(1)} = \frac{D_1 n_1}{q} \left(1 + \frac{pD_1 n_1}{q^2}\right) \quad (pD_1 n_1 / q^2 \ll 1). \quad (2.16)$$

Для соблюдения неравенства (2.15), очевидно, достаточно выполнения следующих условий

$$p/q \ll 1 \quad (2.17)$$

и

$$D_1 n_1 / q < 1. \quad (2.18)$$

Из выражений (2.3) с учетом неравенства (2.17) можно получить с высокой точностью следующее выражение

$$q = D_1 n_1 + D_2 n_2, \quad (2.19)$$

обеспечивающее неравенство (2.18) и позволяющее представить неравенство (2.17) в виде

$$(D_1 n_{1\infty} - D_2 n_{2\infty}) / (D_1 n_1 + D_2 n_2) \ll 1 \quad (D_1 n_{1\infty} > D_2 n_{2\infty}). \quad (2.20)$$

Напомним, что компонент 1 выбран из условия $p > 0$, т.е. $D_1 n_{1\infty} > D_2 n_{2\infty}$. Усиление неравенств (2.4) и (2.5) способствует лучшему выполнению неравенства (2.20). Для близких по свойствам компонентов, для которых справедливо ограничение

$$(D_1 n_{1\infty} - D_2 n_{2\infty}) / (D_1 n_{1\infty} + D_2 n_{2\infty}) \ll 1 \quad (D_1 n_{1\infty} > D_2 n_{2\infty}), \quad (2.21)$$

условие (2.20) будет выполняться и в том случае, когда одно или даже оба из неравенств (2.4) и (2.5) работают на пределе.

Таким образом, выполнение неравенства (2.20), как нетрудно установить с помощью соотношений (2.3), (2.16) и (2.19), обеспечивает и выполнение неравенств (2.15), (2.17) и (2.18). Поэтому неравенство (2.20) мы примем в качестве основного. Чтобы представить выражение (2.16) в виде разложения по малому параметру, представляющему собой левую часть неравенства (2.20), выделим соответствующую комбинацию в первом разложении (2.16). Используя выражения (2.3), имеем

$$c_1^{(1)} = \frac{D_1 n_1}{D_1 n_1 + D_2 n_2} \left[1 - \frac{(D_1 n_{1\infty} - D_2 n_{2\infty}) D_2 n_2}{(D_1 n_1 + D_2 n_2)}\right] \quad (D_1 n_{1\infty} > D_2 n_{2\infty}). \quad (2.22)$$

При $D_1 n_1 / D_2 n_2 \gg 1$ величина $c_1^{(1)}$, как видно из (2.22), близка к 1, а при $D_1 n_1 / D_2 n_2 \ll 1$ она близка к 0. Таким образом, формула (2.22) охватывает весь физически возможный диапазон значений концентрации раствора в капле. Заметим, что формула (2.22) уточняет полученное в [4] выражение для стационарной концентрации.

Формула (2.22) для концентрации $c_1^{(1)}$ компонента 1 позволяет найти соответствующую концентра-

цию $c_2^{(1)}$ компонента 2. Воспользовавшись равенством $c_2^{(1)} = 1 - c_1^{(1)}$, находим

$$c_1^{(1)} = \frac{D_2 n_2}{D_1 n_1 + D_2 n_2} \left[1 + \frac{(D_1 n_{1\infty} - D_2 n_{2\infty}) D_1 n_1}{(D_1 n_1 + D_2 n_2)^2} \right] \quad (D_1 n_{1\infty} > D_2 n_{2\infty}). \quad (2.23)$$

Можно было бы легко повторить все приведенные выше выкладки для случая, когда $D_1 n_{1\infty} < D_2 n_{2\infty}$. При этом выражения (2.22) и (2.23) остались бы неизменными, а в неравенствах (2.20) и (2.21) потребовалось бы заменить величину $D_1 n_{1\infty} - D_2 n_{2\infty}$ на ее модуль. Этот результат с очевидностью следует из симметрии выражений (2.22) и (2.23) по отношению к компонентам 1 и 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 годы)” (проект РНП.2.1.1.1712. Фундаментальные проблемы физики и химии ультрадисперсных систем и межфазных границ).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vesala T., Kulmala M. // *Physica A*. 1992. V. 193. P. 107.
2. Kulmala M., Vesala T., Wagner P. E. // *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences*. 1993. V. 441. № 1913. P. 589.
3. Гринин А.П., Лезова А.А. // *Коллоид. журн.* 2006. Т. 68. С. 759.
4. Гринин А.П., Куни Ф.М., Лезова А.А. // *Коллоид. журн.* 2008. Т. 70. С. 17.
5. Куни Ф.М., Лезова А.А. // *Доклады РАН*. 2007. Т. 415. С. 1.