TURBULENCE AND DETERMINISTIC CHAOS

D. I. TRUBETSKOV

The possibility to explain the turbulence appearance in fluid in the context of modern concepts about deterministic chaos is discussed. The main features of developed turbulence and the Feigenbaum scenario (infinite set of period doubling) of transition to turbulence are considered.

Обсуждается возможность объяснить возникновение турбулентности в жидкости с позиций современных представлений о детерминированном хаосе. Рассмотрены основные черты развитой турбулентности и сценарий Фейгенбаума (бесконечный каскад удвоений периода) перехода к турбулентности.

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

Д. И. ТРУБЕЦКОВ

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

ВВЕДЕНИЕ

“Турбулентность – явление, которое встречается, хотим мы того или нет, в чрезвычайно разнообразных условиях, как в прикладных (например, в аэродинамике, гидравлике, военно-морском деле и химическом производстве), так и в естественных ситуациях (в геофизике, особенно в метеорологии и океанографии, и в астрофизике) ...

В свете этого не являются неожиданными огромные усилия, уделяемые во всем мире фундаментальным исследованиям турбулентности... Однако с чисто теоретической стороны исследователи столкнулись с исключительными трудностями методов... и возникло понимание того, что проблема турбулентности, всегда считавшаяся трудной, в действительности чрезвычайно трудна. Поэтому расширились временные мерки существенного прогресса в понимании этого явления”. Так начинает свою статью о некоторых направлениях развития теории турбулентности английский физик Г. Моффат [1, с. 49–50].

Однако события, произошедшие в физике в последние десятилетия, дали новый толчок развитию теории турбулентности. Упомянутые события связаны с открытием детерминированного хаоса, который появляется в системах с малым числом степеней свободы и при отсутствии случайностей (см., например, [2]). Одно из возможных качественных объяснений возникновения детерминированного хаоса состоит в следующем. Перенесемся в фазовое пространство – обычное пространство координат и пространство скоростей (или импульсов) системы. Фазовое пространство непрерывно, поэтому начальные условия движения системы задаются иррациональными числами – бесконечной непериодической последовательностью цифр. Таким образом, почти любая точка фазового пространства уже содержит в себе случайность (слово “почти” отмечает существование рациональных чисел, но таких неслучайных точек в фазовом пространстве очень мало). Если мы теперь поместим в фазовое пространство динамическую систему (даже очень простую), то ее роль состоит в превращении случайности начальных условий в макроскопическую случайность движения системы. При существовании в системе локальной неустойчивости, когда близкие траектории расходятся экспоненциально, на каком-то этапе движение определяется деталями начальных условий и сильно зависит от них. Предположим, что фазовое пространство ограничено. Тогда рано или поздно разбежавшиеся траектории вернутся друг к другу. И так будет много раз. Происходит как бы перемешивание фазового пространства, проявляющееся в хаотическом движении фазовых траекторий.

Образом хаоса в фазовом пространстве является странный аттрактор – объект в фазовом пространстве, к которому стремятся все или почти все траектории и на котором они неустойчивы. Не менее удивительным, чем само открытие детерминированного хаоса, оказалось то, что в хаосе есть порядок, то, что существуют универсальные сценарии возникновения хаоса.

Мысль связать турбулентность и детерминированный хаос выглядит вполне естественной, и этому посвящено большое число работ.

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД К ХАОСУ ПО ФЕЙГЕНБАУМУ

В 1976 году американский специалист в области математической и теоретической физики Митчел Фейгенбаум сделал открытие, состоящее в том, что сценарий перехода к хаосу через бесконечный каскад бифуркаций[1] удвоения периода универсален для большого класса динамических систем.

Что уже было известно к тому времени и могло стать источником вдохновения для Фейгенбаума? Во-первых, еще в 1971 году было обнаружено интересное свойство решений уравнения типа $x_{n+1} = \lambda f(x_n)$: при изменении параметра λ существующее периодическое решение, имеющее период T, теряет устойчивость, а устойчивым становится решение с периодом $2T$, затем $4T$ и т.д. Интервал изменения параметра λ, в пределах которого цикл периода 2^n устойчив, быстро сужается. Все значения λ, в которых происходит бифуркация удвоения периода, сгущаются к некоторому значению $\lambda = \lambda_{кр}$. Как только λ становится больше $\lambda_{кр}$, внутри некоторой области фазового пространства (ограниченной, притягивающей) оказывается бесконечное число неустойчивых циклов (в том числе и бесконечного с периодом $T_\infty = 2^\infty$). Вслед за этим сложным образованием сразу возникает хаотический (странный) аттрактор.

Во-вторых, к тому времени появились сомнения в сценарии возникновения турбулентности по Ландау. Поясним сказанное. Известно, что в определенных условиях течение жидкости бывает разным: в одних – ровным, устойчивым, регулярным или, как говорят, ламинарным, а в других – неровным, неустойчивым, нерегулярным – турбулентным[2]. Кстати, характер ламинарного течения легко получается из решения уравнений, а вот непредсказуемость турбулентного описать непросто. Существует любопытное воспоминание на эту тему, принадлежащее все тому же английскому физику Моффату [1, с. 63]. “В 1961 году в Марселе был проведен важный коллоквиум по случаю открытия Института статистических методов турбулентности. Это был мой первый опыт международных конференций, и я постигал его с большой долей волнения и надежды. Там были Т. Карман, а также А.Н. Колмогоров и Дж. Тэйлор (все трое внесли основополагающий вклад в гидродинамику. – *Примеч. автора*). Я вспоминаю, что Карман в своем выступлении на открытии конференции сказал, что, когда он наконец предстанет перед Создателем, первое, о чем он попросит, будет раскрытие тайн турбулентности”. Объяснение, предложенное Львом Давидовичем Ландау, состоит в том, что в турбулентном течении возникает много различных независимых колебаний с несоизмеримыми частотами. При этом каждое из колебаний может быть простым, но их совокупность приводит к непредсказуемой сложности движения.

В работе Д. Рюэля (Франция) и Ф. Такенса (Нидерланды) (1971) возникновение турбулентности связывалось с появлением странного аттрактора, который возникал после небольшого числа (трех) бифуркаций. Напомним, что странным аттрактором называется объект в фазовом пространстве, к которому стремятся все или почти все траектории и на котором они неустойчивы.

Разумеется, появилась идея связать непрерывный переход к турбулентности с возможностью реализации в течении бесконечного каскада бифуркаций удвоения периода.

М. Фейгенбаум анализировал уравнение $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$. Он хотел изучить комплексные аналитические свойства функций, порождаемых таким отображением. Уравнение аналитически не решалось, и Фейгенбаум занялся численными расчетами значений параметра λ, при которых происходило каждое удвоение. Он использовал карманный калькулятор, и поэтому расчеты длились долго. Фейгенбаум заметил, что значения параметров, соответствующие каждому удвоению, сходятся как геометрическая прогрессия. Это было удивительно: каждый последующий шаг можно было считать аналитически. Знаменатель прогрессии теперь носит название постоянной Фейгенбаума, его обозначают буквой δ, он равен 4,6692...

[1] Бифуркация – математический образ, соответствующий перестройке характера движения реальной (физической, биологической и т.д.) системы. Математически бифуркация есть смена топологической структуры разбиения фазового пространства динамической системы на траектории при малом изменении ее параметров.

[2] Те, кто летал на самолетах на дальних трассах, помнят железный голос командира корабля: “Господа, пристегните, пожалуйста, ремни. Мы попали в турбулентный поток”. И вы вскоре ощущаете на себе это попадание.

Известный американский математик С. Смейл подсказал Фейгенбауму, что удвоения в решении есть и у уравнения $x_{n+1} = \lambda \sin(nx_n)$. Результат был тот же: вновь появилась геометрическая прогрессия со значением $\delta = 4{,}6692...$

Задача. Попробуйте с помощью микрокалькулятора пройти путь Фейгенбаума. Найдите сами δ.

В дальнейшем оказалось, что последовательность удвоений обладает свойством универсальности, которое не зависит от конкретных особенностей системы, а во многих случаях и от размерности фазового пространства. В чем же заключается эта универсальность? В том, о чем написано выше, в том, что Фейгенбаум "выудил" геометрическую прогрессию: расстояние между значениями параметра λ_n, при котором рождается цикл периода 2^n, и значением $\lambda_{кр}$, вслед за которым в системе возникает хаос, удовлетворяет условию $(\lambda_{кр} - \lambda_n) = \text{const} \cdot \delta^{-n}$, где $\delta = 4{,}6692...$ – универсальная постоянная Фейгенбаума. (Правда, это лишь одно проявление того, что называют теорией универсальности, но мы ограничимся сказанным.) Это, в частности, означает, что если в эксперименте обнаружены несколько первых удвоений (в спектре мощности им соответствует появление дискретных пиков на частотах $f_0/2$, $f_0/4$ и т.д., где f_0 – частота основного периодического движения), то можно предсказать значение $\lambda_{кр}$, после достижения которого рождается хаос.

В 1980 году появился эксперимент Либахера и Мауэра по конвекции жидкости, в котором показывалось, что тепловой поток переходит в турбулентное состояние, следуя сценарию Фейгенбаума. В этом эксперименте слой жидкого гелия в стеклянном прямоугольном ящике подогревался снизу (рис. 1, *а*). В качестве управляющего параметра использовалось число Рэлея Ra, пропорциональное ΔT – разности температур между нижней и верхней поверхностями жидкости. Когда разность температур мала, то существует тепловой поток, но жидкость неподвижна. При некоторой $\Delta T_{кр}$ возникает роликовая конвекция: горячая жидкость поднимается в середине ящика, холодная опускается вдоль краев, возникают два вала (ролика) с направленным течением жидкости (рис. 1, *а*). С ростом разности температур валы становятся неустойчивыми; вдоль вала пробегает волна; теплая жидкость поднимается по одному краю вала, холодная опускается по другому (рис. 1, *б*). В измеряемом спектре мощности теплового потока при конвекции в таком слое с увеличением имела место последовательная смена режимов, появлялись субгармоники, кратные частоте f_0 периодического движения: $f_0/2$ и $f_0/4$ т.д. (рис. 2). Экспериментально дальше $f_0/8$ новые удвоения увидеть трудно – спектр становится сплошным.

Сценарий Фейгенбаума стали обнаруживать и в сосредоточенных и в распределенных системах различной природы. Примеров уже не один десяток. В чем причина столь удивительной универсальности?

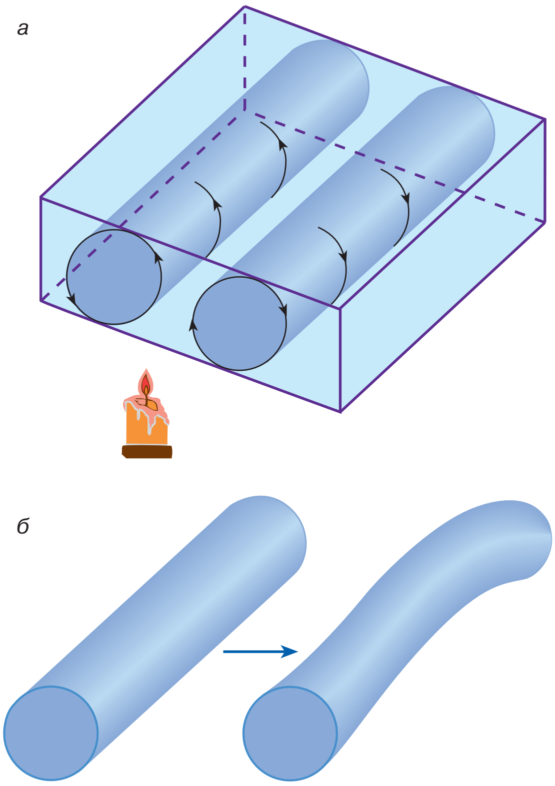

Рис. 1. К объяснению эксперимента по подогреву снизу плоского слоя жидкости: *а* – возникновение роликовой конвекции; *б* – переход от устойчивого ролика к неустойчивому

Для многомерных диссипативных[1] систем объем фазового пространства сжимается по всем направлениям, когда траектории стремятся к предельному циклу. Одно направление характеризуется наиболее медленной сходимостью и определяет линию. В результате приходим к одномерному отображению.

Имеет ли все-таки отношение сценарий возникновения хаоса по Фейгенбауму к проблеме возникновения турбулентности в жидкости? Можно ли это показать (непосредственно из уравнений)? Для ответа на эти вопросы обратимся собственно к проблеме гидродинамической турбулентности.

РАЗВИТАЯ ВИХРЕВАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ. СПЕКТР КОЛМОГОРОВА–ОБУХОВА

Физическая картина турбулентности образно выражена в следующем четверостишии, написанном английским физиком Л. Ричардсоном в 1922 году:

Big whirls make little whirls
Which feed on their velocity,

[1] Диссипативной системой называют такую, для которой уменьшается объем любой достаточно малой области фазового пространства при сдвиге точек, составляющих эту область, по траекториям на время $t > 0$.

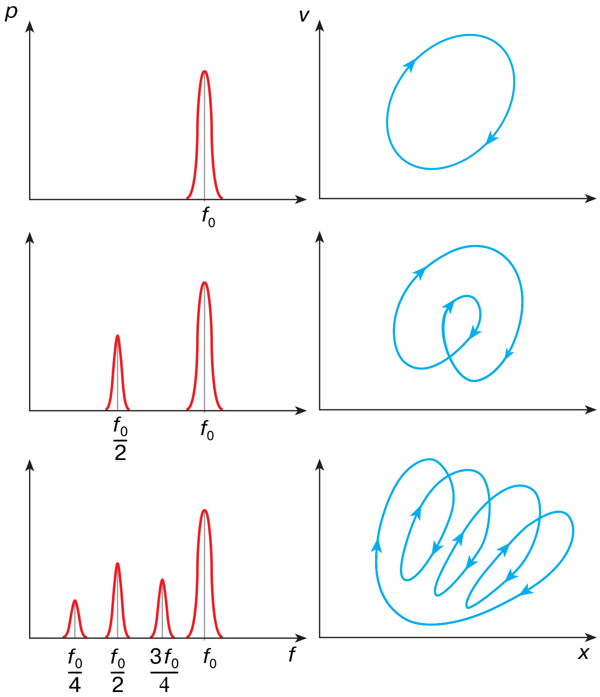

Рис. 2. Спектры мощности теплового потока и фазовые портреты, соответствующие бифуркациям удвоения периода при увеличении числа Рэлея; υ – скорость поперечного движения выбранного горба на неустойчивом ролике, x – перемещение горба

Little whirls have smaller ones
And so on into viscosity.

Почти дословный перевод звучит так:

Большие вихри рождают малые завихрения,
Которые питаются их скоростью.
Малые завихрения порождают еще меньшие,
Пока все не погубит вязкость.

В журнале "Успехи математических наук", посвященном юбилею академика А.М. Обухова, одного из классиков теории турбулентности, есть стихотворный вариант перевода:

В поток бурлящий бросив взгляд,
Вихрей увидишь там каскад:
Меньшой у большего энергию берет,
Пока мельчайших вязкость не сотрет.

Будем называть турбулентностью такое состояние среды, при котором возбуждены движения (турбулентные пульсации) разных масштабов, причем имеет место перекачка энергии между ними. Под масштабом будем понимать порядок величины тех расстояний, на протяжении которых существенно меняется скорость движения.

Когда число Рейнольдса[1] велико, турбулентное движение жидкости характеризуется беспорядочным, нерегулярным изменением скорости со временем в каждой точке потока. Это развитая турбулентность, полной количественной теории которой не существует. Но есть интересные качественные результаты, некоторые из которых мы изложим.

Пусть сначала в некоторой среде было возбуждено движение вещества большого масштаба (большой масштаб – это масштаб порядка величины характеристических длин, определяющих размеры области, в которой происходит турбулентное движение). По мере возрастания числа Рейнольдса вслед за крупномасштабными появляются и движения меньшего масштаба. Чем меньше масштаб пульсаций, тем позже они появляются. Если нет взаимодействия крупномасштабных движений с движениями других масштабов, то энергия первых затухает из-за диссипативных процессов, сохраняя свой крупномасштабный характер. Но если движения нелинейные, то энергия от движений крупных масштабов переходит к движению меньших масштабов, где она диссипирует в тепловую. Конечно, для поддержания стационарного состояния потока турбулентной жидкости необходимо наличие внешних источников, непрерывно подпитывающих крупномасштабное движение.

Предположим далее, что движение вещества имеет характер вихрей разного масштаба. Введем характерный размер вихря l (скажем, диаметр вихря) и соответствующую скорость u_l вихревого движения. Вместо l можно ввести волновое число вихря $k = 2\pi/l$. Основная характеристика турбулентности – спектральная функция – распределение энергии по различным масштабам движения или скорости движения от масштаба. Для вихревой турбулентности имеет место спектр Колмогорова–Обухова, полученный для изотропной и однородной турбулентности несжимаемой жидкости (плотность жидкости считается постоянной). Используем далее соображения размерности. Предположим, что перекачка энергии между вихрями различных масштабов определяется только одним параметром ε – потоком энергии через всю иерархию вихрей от самых больших к самым малым. Если считать, что энергия крупномасштабных движений не диссипирует непосредственно в тепло, то величина энергии, передаваемой от вихрей этого масштаба к вихрям меньшего масштаба, постоянна, то есть не зависит ни от масштаба движений, ни от соответствующих скоростей. В системе единиц LMT размерность

[1] Число Рейнольдса Re есть безразмерная комбинация из трех величин ν, l, u, которые в системе LMT имеют размерности $[\nu] = L^2T^{-1}$, $[l] = L$, $[u] = LT^{-1}$; $\mathrm{Re} = ul/\nu$. Если речь идет, например, об обтекании твердого тела жидкостью, то u – скорость набегающего потока, ν – кинематическая вязкость жидкости, l – линейный размер, характеризующий геометрические свойства тела.

потока энергии, отнесенная к единице массы, есть $[\varepsilon] = L^2T^{-3}$. Пусть движение в некоторых масштабах l не зависит от других параметров, кроме ε. Будем искать $u_l = f(l, \varepsilon)$, для чего составим матрицу размерностей:

	u_1	l	ε
L	1	1	2
M	0	0	0
T	–1	0	–3

Имеем: $\dfrac{[u_l]}{[l]^\alpha[\varepsilon]^\gamma} = 1$ или $\dfrac{LT^{-1}}{L^\alpha L^{2\gamma}T^{-3\gamma}} = 1$. Следовательно, $1 = \alpha + 2\gamma$ и $1 = 3\gamma$, то есть $\alpha = \gamma = 1/3$. Окончательно получаем закон Колмогорова–Обухова в виде

$$u_l = C_1(\varepsilon l)^{1/3}, \tag{1}$$

где C_1 – неизвестная постоянная.

Определим спектральную функцию энергии турбулентного движения W_k, отнесенную к единице массы, таким образом, чтобы энергия, заключенная в движениях с волновыми числами в интервале от k до $k + dk$, равнялась $W_k dk$ и была функцией ε и k. В системе LMT размерность $W_k dk$ равна L^3T^{-2}, тогда

$$W_k dk = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}. \tag{2}$$

Это эквивалентная форма закона Колмогорова–Обухова.

Задача. Получите сами из соображений размерности закон (2).

Вернемся к воспоминаниям Г. Моффата [1, с. 63–64]. "В мою память врезались и некоторые другие события на марсельской конференции. Среди них доминирует драма закона $k^{-5/3}$. Экспериментальное доказательство, представленное на конференции Бобом Стюартом, ... казалось, разрешило вопрос. Его эксперименты, проведенные при числе Рейнольдса $3 \cdot 10^8$ в приливном канале между островом Ванкувер и материковой Канадой, обеспечили убедительную поддержку закона $k^{-5/3}$ в нескольких октавах спектра.

Для величины C на основании результатов экспериментов было получено значение

$$C = 1{,}44 \pm 0{,}6.$$

Таким образом, здесь это состоялось – классический пример долгожданного экспериментального доказательства, давшего подтверждение теоретического аргумента основополагающей важности. И все-таки существовала важная проблема, которая серьезно затрагивала правдоподобие теории Колмогорова. Это была проблема перемежаемости... Действительно, на той же самой марсельской конференции Колмогоров сам обратил внимание на эту проблему... Принимая во внимание пространственную перемежаемость флуктуаций скорости диссипации ε, Колмогоров показал, что формулу (2) следует заменить выражением

$$W_k dk = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}(kl_0)^{-\gamma},$$

где γ – малое положительное число[1]... В итоге изменение выражения (2) было небольшим. Тем не менее модификация основополагающих гипотез подобия была глубокой. Оказалась утраченной прекрасная простота ранней теории, не осталось аспектов турбулентности, претендующих на роль простых. Эта драма идей длится и поныне".

Вернемся к нашей модели турбулентности. При движении самых больших масштабов ε уже не является единственным определяющим параметром: скорости движения в этих масштабах зависят и от геометрии среды, и от той причины, которая вызывает движения в самых крупных масштабах.

Со стороны малых масштабов спектр Колмогорова–Обухова ограничен влиянием вязкости или других диссипативных процессов. Нижняя граница масштабов l_ν спектра Колмогорова–Обухова будет зависеть от ε и ν – коэффициента кинематической вязкости, размерность которого в системе LMT есть L^2T^{-1}. Тогда

$$l_\nu = C_2\left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}. \tag{3}$$

Задача. Выведите сами формулу (3) для нижней границы l_ν спектра Колмогорова–Обухова.

Как же возникает турбулентность? Мы уже писали о сценариях Ландау, Рюэля и Такенса и о том, что под подозрением находится сценарий Фейгенбаума.

УРАВНЕНИЕ НАВЬЕ–СТОКСА И ОДНОМЕРНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ. СЦЕНАРИЙ ФЕЙГЕНБАУМА?

Попробуем оправдать подозрение, используя рассуждения очень хорошей и единственной в своем роде книги [3].

Если жидкость неидеальная (вязкая), то разные слои жидкости движутся с разной скоростью. Тогда существует сила трения между слоями, направленная вдоль продольной оси x и действующая на единичную площадь: $F_x = -\eta\dfrac{\partial u_x}{\partial y}$, y – поперечная координата, u_x – составляющая скорости вдоль оси x, η – динамическая вязкость, размерность которой в системе LMT есть $L^{-1}MT^{-1}$.

Для вязкой жидкости справедливо уравнение Навье–Стокса

[1] У Г. Морффата l_0 – масштаб длины некоторой области, в которой энергия подводится к турбулентности со скоростью ε в единице массы.

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}, \tag{4}$$

где ρ – постоянная плотность жидкости, p – давление, $\nu=\eta/\rho$ – кинематическая вязкость. В стационарном случае, когда $\frac{\partial}{\partial t}=0$, уравнение (4) принимает вид

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}. \tag{5}$$

Если l – характерный масштаб длины данного течения, то слагаемое в левой части уравнения (5), характеризующее нелинейность, можно оценить как u^2/l, а последнее слагаемое в правой части, ответственное за диссипацию, – как $\nu u/l^2$. Отношение величин, полученных в результате оценки, приводит к уже известному числу Рейнольдса

$$\mathrm{Re}=\frac{ul}{\nu}.$$

Если $\mathrm{Re}\ll 1$, то нелинейным по скорости слагаемым в (5) можно пренебречь. Вернемся к уравнению Навье–Стокса и, учитывая наши оценки, запишем (4) качественно в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=au^2+b+cu, \tag{6}$$

где все коэффициенты постоянные.

Пусть в жидкости имеется некоторое характерное течение с периодом T. Тогда приближенно левую часть в уравнении (6) можно переписать так:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\approx[u(t+T)-u(t)]\cdot\frac{1}{T}. \tag{7}$$

Подставляя соотношение (7) в (6), перепишем это уравнение для скорости u в разностной форме:

$$u(t+T)=\alpha u(t)+\beta u^2(t)+\gamma, \tag{8}$$

где α, β, γ – некоторые новые постоянные. Линейные слагаемые в уравнении (8), не теряя общности, можно убрать, если перейти в другую систему координат, которая движется относительно исходной с некоторой скоростью $V=\mathrm{const}$ (то есть $u(t)\longrightarrow u(t)+V$). Тогда уравнение (8) становится таким:

$$u(t+T)=u_0+\frac{\lambda u^2(t)}{u_0}, \tag{9}$$

где u_0 – некоторая характерная скорость течения жидкости (например, скорость тела, движущегося в жидкости), λ – безразмерная постоянная. Эта постоянная может быть качественно идентифицирована с числом Re, так как отношение нелинейного слагаемого в уравнении Навье–Стокса к “вязкому” слагаемому порядка числа Re (это следует, в частности, из того, как мы выше получили число Re).

Окончательно приходим к разностному уравнению

$$u(t+T)=u_0-\mathrm{Re}\frac{u^2(t)}{u_0}, \tag{10}$$

которое качественно сохраняет основные особенности исходного уравнения Навье–Стокса. Знак минус в уравнении (10) появился из-за того, что в случае знака плюс скорость u при повторении периодов времени T при $u_0>0$ будет неограниченно возрастать.

Строго периодическое решение уравнения (10) означает, что $u_1(t+T)=u_1(t)$, следовательно, из (10) получаем квадратное уравнение для u_1:

$$u_1=u_0-\mathrm{Re}\frac{u_1^2}{u_0},$$

откуда

$$u_1=\frac{\sqrt{1+4\mathrm{Re}}-1}{2\mathrm{Re}}u_0. \tag{11}$$

В (11) для определенности взят положительный корень. Пусть теперь периодическое решение слабо возмущено: $u=u_1+\Delta u$. Подставляя это выражение для u в уравнение (10) и ограничиваясь членами первого порядка по Δu, получаем

$$\Delta u(t+T)=-2\mathrm{Re}u_1\Delta u(t)\frac{1}{u_0}. \tag{12}$$

Если $2\mathrm{Re}u_1<u_0$, то из (12) следует, что $|\Delta u(t+T)|<|\Delta u(t)|$. Это означает, что возмущение со временем уменьшается и, следовательно, периодическое течение со скоростью (11) является устойчивым. Когда $2\mathrm{Re}u_1>u_0$, это течение неустойчиво, так как возмущение возрастает со временем. Течение теряет устойчивость при значениях $\mathrm{Re}=\mathrm{Re}_1$ и $u_1=\langle u_1\rangle$, которые удовлетворяют соотношению

$$2\,\mathrm{Re}_1\langle u_1\rangle=u_0. \tag{13}$$

Подставляя $\mathrm{Re}=\mathrm{Re}_1$ и $u_1=\langle u_1\rangle$ в соотношение (11), а затем исключая $\langle u_1\rangle$ из получившегося соотношения и равенства (13), находим

$$\sqrt{4\mathrm{Re}_1+1}=2\quad\text{и}\quad\mathrm{Re}_1=3/4. \tag{14}$$

Таким образом, периодическое течение со скоростью u_1 устойчиво при $\mathrm{Re}<\mathrm{Re}_1$ и неустойчиво при $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_1$. Из уравнения (12) и равенства (13) видно, что на границе устойчивости $\Delta u(t+T)=-\Delta u(t)$ и, следовательно,

$$\Delta u(t+2T)=-\Delta u(t+T)=\Delta u(t).$$

Таким образом, течение со скоростью $\langle u_1\rangle+\Delta u$ тоже периодическое, но с периодом $2T$, то есть с удвоенным периодом исходного течения[1]. Чтобы найти условие потери устойчивости этого периодического течения с периодом $2T$, проитерируем уравнение (10) еще через один период. Это дает

$$u(t+2T) =$$
$$= u_0\left[(1-\mathrm{Re}) + 2\mathrm{Re}^2\frac{u^2(t)}{u_0^2} - \mathrm{Re}^3(\mathrm{Re}-1)\frac{u^4(t)}{u_0^4}\right]. \quad (15)$$

Так как $u < u_0$, последним слагаемым в уравнении (15) можно пренебречь (четвертая степень $\frac{u(t)}{u_0}$ дает малый числовой вклад в (15)).

Введем обозначения

$$u(t) = \tilde{u}(t)(1-\mathrm{Re}), \qquad \lambda = 2\mathrm{Re}^2(\mathrm{Re}-1). \quad (16)$$

С учетом (16) упрощенное уравнение (15) примет вид

$$\tilde{u}(t+2T) = u_0 - \lambda\frac{\tilde{u}^2(t)}{u_0}. \quad (17)$$

Формально уравнение (17) совпадает с уравнением (10), если заменить u на $\tilde{u}$ и Re на λ (период, конечно, другой). Но тогда, рассуждая, как в случае периода T, можно сделать вывод, что потеря устойчивости происходит при $\lambda = \lambda_2 = 3/4$, и, поскольку $\lambda = 2\mathrm{Re}^2(\mathrm{Re} - 1)$, находим, что соответствующее число Рейнольдса $\mathrm{Re}_2 \approx 1{,}23$.

Таким образом, периодическое течение с периодом $2T$ устойчиво при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_2$ и неустойчиво при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_2$. Произведя еще одну итерацию уравнения (10), очевидно придем к выводу, что потеря устойчивости периодического течения с периодом $4T$ происходит при $\mu = 3/4$, где $\mu = 2\lambda^2(\lambda - 1)$, то есть $\lambda = \lambda_3 \approx 1{,}23$ и $\mathrm{Re}_3 \approx 1{,}34$. Следующее число Рейнольдса, при котором теряет устойчивость течение с периодом $8T$, $\mathrm{Re}_4 \approx 1{,}364$. Проделывая подобную процедуру бесконечное число раз, получим, что полная потеря устойчивости течений со всеми периодами имеет место при достижении критического числа $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = \mathrm{Re}_\infty = 2\mathrm{Re}_{\text{кр}}^2(\mathrm{Re}_{\text{кр}} - 1)$. Откуда $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \approx 1{,}366$. В рамках нашего подхода область $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\text{кр}}$ соответствует возникновению турбулентности. Отметим быстрое сближение чисел Рейнольдса Re_n с ростом номера n, соответствующего потере устойчивости периодического течения с периодом $2^{n-1}T$. Вспомним геометрическую прогрессию Фейгенбаума и рассчитаем δ по формуле $\frac{\mathrm{Re}_3 - \mathrm{Re}_2}{\mathrm{Re}_4 - \mathrm{Re}_3}$, используя полученные значения Re.

[1] Сказанное справедливо не только для $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_1$, но в общем случае для любых Re. Тогда Δu не есть произвольное малое возмущение, как мы предложили выше, а имеет определенное конечное значение. Ему соответствует определенное конечное значение скорости течения $u = \langle u_1\rangle + \Delta u$, имеющего период $2T$.

Расчет дает $\delta \approx 4{,}67$. Правда, следует заметить, что результат сильно зависит от точности вычислений и величины n, поскольку $\frac{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}{\Lambda_{n+2} - \Lambda_{n+1}} \longrightarrow \delta$ лишь при $n \longrightarrow \infty$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, подозрения подтвердились: один из путей перехода к турбулентности — сценарий Фейгенбаума. Но только один из ..., поскольку есть и другие сценарии. Например, если за течением наблюдать достаточно долго при постоянных условиях, то в ламинарном потоке могут появляться вихри со случайным поведением, после чего картина снова становится ламинарной. Таким образом, ламинарная и хаотическая фазы процесса чередуются. Такой переход к хаосу носит название перемежаемости. О сценариях Ландау и Рюэля и Такенса мы уже упоминали. Существуют гипотезы о возникновении турбулентности, не связанные с хаотическими автоколебаниями. Одна из последних гипотез, принадлежащая П.С. Ланда, основана на том, что принципиальную роль играют флуктуации и именно они обусловливают наблюдаемые турбулентные возмущения (напомним, в автоколебаниях роль флуктуаций мала).

Исследования продолжаются, а турбулентность не спешит раскрыть свои тайны. Тем, кого заинтересовала проблема, рекомендуем специальный номер журнала “Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика” № 2 за 1995 год, целиком посвященный гидродинамической турбулентности и когерентным структурам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моффат Г.* Некоторые направления развития теории турбулентности // Современная гидродинамика: Успехи и проблемы. М.: Мир, 1984. 501 с.
2. *Крайтчфилд Д.П., Фармер Дж.Д., Паккард Н.Х., Шоу Р.С.* Хаос // В мире науки. 1987. № 2. С. 16–28.
3. *Крайнов В.П.* Качественные методы в физической кинетике и гидродинамике. М.: Высш. шк., 1989. С. 131–134.

* * *

Дмитрий Иванович Трубецков, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Российской Академии наук, зав. кафедрой электроники и волновых процессов, ректор Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Область научных интересов: радиофизика, сверхвысокочастотная электроника, теория колебаний и волн, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор 14 монографий и учебных пособий, более 100 статей.