

*Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
Санкт-Петербургского государственного университета*

Рецензент: проф. А.П.Гринин (С.-Петербург. ун-т)

**Аджемян Л.П., Антонов Н.В., Васильев А.Н.**

А28 Метод ренормализационной группы в теории развитой турбулентности. СПб: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 1998. – 44с.

Дано подробное систематическое введение в современную ренормгрупповую теорию развитой гидродинамической турбулентности. Излагаются необходимые сведения о квантово-полевой формулировке стохастической динамики, ультрафиолетовой ренормировке, обсуждается вывод и решение уравнений ренормгруппы. Техника ренормгруппы применяется к стохастической модели развитой (однородной, изотропной) турбулентности несжимаемой вязкой жидкости, для которой она позволяет доказать существование инфракрасного скейлинга с колмогоровскими размерностями.

Рекомендуется студентам физического факультета Санкт-Петербургского университета в качестве учебного пособия по спецкурсам "Применение методов квантовой теории поля в статистической физике" и "Статистическая теория турбулентности".

ББК 22.31

- © Л.П.Аджемян,  
Н.В.Антонов,  
А.Н.Васильев, 1998
- © Издательство  
Санкт-Петербургского  
университета, 1998

## Введение

Метод ренормализационной группы (РГ), развитый первоначально в рамках квантовой теории поля в связи с потребностями физики элементарных частиц, был с успехом применен в начале 70-х годов в работах К. Вильсона и других авторов (см. книгу [1] и ссылки в ней) в теории критических явлений для обоснования критической масштабной инвариантности (скейлинга) и вычисления универсальных характеристик критического поведения (критические индексы и нормированные скейлинговые функции) в форме  $\varepsilon$ -разложений. Впоследствии метод РГ был обобщен и на другие задачи, для которых характерна масштабная инвариантность (скейлинг) в инфракрасной области: критическую динамику, случайные блуждания, физику полимеров и, наконец, теорию развитой гидродинамической турбулентности.

Как отмечается, например, в [2], теоретическое описание развитой турбулентности остается пока нерешенной задачей. Большинство аналитических теорий турбулентности приходится рассматривать скорее как полуфеноменологические "модели", чем как "приближения" в том смысле, что они не являются приближениями конечного порядка в некоторой регулярной теории возмущений по малому параметру для какой-либо микроскопической модели типа стохастического уравнения Навье-Стокса. Одним из немногих исключений и является РГ-подход к турбулентности, берущий начало с работы [3].

В отличие от теории критического поведения, аппарат РГ не стал пока общепринятым в теории турбулентности и используется в виде различных достаточно далеких друг от друга формализмов (квантово-полевая РГ, рекурсионные соотношения Вильсона, итерационное усреднение по модам околосеточных масштабов), что крайне затрудняет взаимопонимание работающих в этой области специалистов. Поэтому в настоящей работе систематически используется стандартная квантово-полевая техника РГ, имеющая надежную базу в форме квантово-полевой теории ренормировки и хорошо развитых методов расчета РГ-функций и критических размерностей (аналитическая регуляризация, схема минимальных вычитаний и т.п.) и подробно излагаются не только физические результаты, но и сам аппарат РГ.

В данной работе рассматривается лишь простейшая стохастическая модель развитой изотропной однородной турбулентности несжимаемой жидкости. Дано доказательство существования в этой модели инфракрасного скейлинга с точно известными "колмогоровскими" размерностями. Более сложные вопросы РГ-теории турбулентности, касающиеся ренормировки составных операторов, операторного разложения Вильсона и исследования инфракрасных асимптотик различных скейлинговых функций, рассматриваются в обзорной статье [4].

В РГ-теории турбулентности возник целый ряд новых проблем, с которыми не имели дела в теории критического поведения: "замораживание" критических размерностей, "опасные" составные операторы с отрицательными размерностями и др. Решение этих проблем требует выхода за рамки  $\varepsilon$ -разложений и совместного использования техники РГ с другими методами (инфракрасная теория возмущений, операторное разложение, функциональные уравнения типа Швингера и др.) Эти вопросы, нуждающиеся в дальнейшем исследовании, также рассматриваются в [4].

Основные ссылки по физике развитой турбулентности [5–8], по квантово-полевой теории ренормировки [9–10], по применению метода РГ в теории критического поведения [11–14], по функциональным методам квантовой теории поля [15–16].

## 1. Стохастическое уравнение Навье–Стокса. Феноменология развитой турбулентности

В качестве микроскопической модели развитой (однородной, изотропной) турбулентности несжимаемой вязкой жидкости (газа) рассматривается стохастическое уравнение Навье–Стокса с внешней случайной силой [5]

$$\nabla_t \varphi_i = \nu_0 \Delta \varphi_i - \partial_i P + F_i, \quad \nabla_t \equiv \partial_t + (\varphi \partial). \quad (1)$$

Здесь  $\varphi_i$  — поперечное (в силу несжимаемости) векторное поле скорости,  $P$  и  $F_i$  — давление и поперечная внешняя случайная сила в расчете на единицу массы (все эти величины зависят от  $x \equiv t, \mathbf{x}$ ),  $\nu_0$  — кинематический коэффициент вязкости,  $\nabla_t$  — галилеево-ковариантная производная. Задача (1) рассматривается на всей оси времени  $t$  и доопределется условием запаздывания, а также нулевым асимптотическим условием для  $\varphi$  при

$t \rightarrow -\infty$ . Для  $F$  предполагается гауссово распределение с нулевым средним и заданным коррелятором

$$\langle F_i(x) F_j(x') \rangle = \delta(t - t')(2\pi)^{-d} \int d\mathbf{k} P_{ij}(\mathbf{k}) d_F(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')], \quad (2)$$

в котором  $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$  — поперечный проектор,  $d_F(k)$  — некоторая функция  $k \equiv |\mathbf{k}|$  и параметров модели,  $d$  — размерность пространства  $\mathbf{x}$ . Введение случайной силы феноменологически моделирует стохастичность (которая в реальных условиях должна возникать спонтанно как следствие неустойчивости ламинарного течения) и одновременно — "накачку" энергии в систему за счет взаимодействия с крупномасштабными пульсациями (вихрями). Средняя мощность накачки энергии  $W$  связана с функцией  $d_F$  в (2) точным соотношением

$$W = [(d-1)/2(2\pi)^d] \int d\mathbf{k} d_F(\mathbf{k}). \quad (3)$$

Переход к стохастической задаче позволяет отвлечься от конкретных начальных и граничных условий и рассматривать непосредственно однородную развитую турбулентность [5], при этом поле  $\varphi$  в уравнении (1) соответствует лишь хаотической ("пульсационной") составляющей реальной скорости.

Уравнение (1) решается итерациями по нелинейности с последующим усреднением  $\langle \dots \rangle$  по распределению случайной силы. Вычисляемыми величинами являются различные корреляционные функции  $\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle$ , а также функции отклика — вариационные производные корреляционных функций по "неслучайной внешней силе", вводимой как аддитивная добавка в правую часть уравнения (1). Пользуясь квантово-полевой терминологией, будем называть все эти объекты "функциями Грина". В силу трансляционной инвариантности задачи все они зависят лишь от разностей времен и координат, поэтому одновременные корреляционные функции  $\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle$  с  $t_1 = \dots = t_n \equiv t$  не зависят от общего для всех полей времени  $t$ . Такие объекты называют "статическими", в отличие от "динамических" корреляторов с произвольными временами полей.

Упрощенная физическая картина турбулентности состоит в следующем [5]: энергия внешнего источника (у нас — случайной силы) поступает в систему от крупномасштабных движений

(“вихрей”) с некоторым характерным размером  $l_{max} \equiv 1/m$ , затем переносится по спектру (“дробление вихрей”) за счет нелинейности в уравнении (1) и, наконец, начинает активно диссирировать на масштабах  $l_{min} \equiv 1/\Lambda$  (“диссипативная длина”), где становится существенной роль вязкости. Независимыми являются параметры  $W$ ,  $\nu_0$  и  $m \equiv l_{max}^{-1}$  (последний будем называть “массой” по формальной аналогии с квантово-полевыми моделями), все прочие выражаются через них по соображениям размерности ( $m \sim L^{-1}$ ,  $W \sim L^2 T^{-3}$ ,  $\nu_0 \sim L^2 T^{-1}$ , где  $L$  — длина,  $T$  — время), для нижних границ — через пару  $W$ ,  $m$ , для верхних — через пару  $W$ ,  $\nu_0$ , в частности,  $\Lambda = W^{1/4} \nu_0^{-3/4}$ . Развитая турбулентность характеризуется большим значением числа Рейнольдса  $Re = (\Lambda/m)^{4/3}$  и, как следствие, наличием широкого “инерционного интервала”, определенного неравенствами  $m \ll k \ll \Lambda$  для импульсов ( $\equiv$  волновых чисел) и  $\omega_{min} \equiv W^{1/3} m^{2/3} \ll \omega \ll \omega_{max} \equiv \nu_0 \Lambda^2$  для частот [5].

Основные положения феноменологической теории Колмогорова–Обухова [5] были сформулированы в виде двух гипотез. Первую из них впоследствии пришлось модифицировать в сторону ослабления, и мы приведем сначала первоначальный вариант с обозначением 1', а потом — после необходимых пояснений — более точную современную версию гипотезы с обозначением 1.

**Гипотеза 1' [5].** В области  $k \gg m$ ,  $\omega \gg \omega_{min} = W^{1/3} m^{2/3}$  распределение фурье-компонент  $\varphi(\omega, \mathbf{k})$  случайной скорости  $\varphi(x) \equiv \varphi(t, \mathbf{x})$  зависит от полной мощности накачки  $W$ , но не зависит от “деталей ее устройства”, в том числе и от конкретного значения  $m$ .

**Гипотеза 2 [5].** В области  $k \ll \Lambda$ ,  $\omega \ll \omega_{max} = \nu_0 \Lambda^2$  оно не зависит от коэффициента вязкости  $\nu_0$ .

Из второй гипотезы, в частности, следует, что в ее области применимости парный коррелятор фурье-компонент скорости  $d$ -мерной задачи представим в виде

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i(\omega, \mathbf{k}) \varphi_j(\omega', \mathbf{k}') \rangle &= \\ &= (2\pi)^{d+1} \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{ij}(\mathbf{k}) D(\omega, k), \\ D(\omega, k) &= W^{1/3} k^{-d-4/3} f(Wk^2/\omega^3, m/k), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $f$  — некоторая остающаяся неизвестной функция двух независимых полностью безразмерных аргументов.

В инерционном интервале, где выполнены условия обеих гипотез, второй аргумент функции  $f$  в (4) мал, а первый удовлетворяет неравенствам  $(k/\Lambda)^2 \ll Wk^2/\omega^3 \ll (k/m)^2$ , т.е. фактически произволен. Согласно гипотезе 1' в этой области должна исчезать зависимость от  $m$ , другими словами, функция  $f$  в (4) должна иметь конечный предел при стремлении к нулю ее второго аргумента  $m/k$ . Но уже давно известно [19], что это не так: из-за кинематического эффекта переноса вихрей как целого крупномасштабными движениями с  $k \simeq m$  предел  $m/k \rightarrow 0$  в динамических объектах типа коррелятора (4) не существует. Более правильной является следующая формулировка (см., например, [20]).

**Гипотеза 1.** В области  $k \gg m$  конечный предел при  $m/k \rightarrow 0$  существует для одновременной функции распределения пространственных фурье-компонент  $\varphi(t, \mathbf{k})$  случайного поля скорости  $\varphi(t, \mathbf{x})$ .

Для статического парного коррелятора из гипотезы 2 (или интегрированием по частотам  $\omega$ ,  $\omega'$  равенства (4)) получим представление

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i(t, \mathbf{k}) \varphi_j(t, \mathbf{k}') \rangle &= (2\pi)^d \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{ij}(\mathbf{k}) D_{CT}(k), \\ D_{CT}(k) &= k^{-d} (W/k)^{2/3} f(m/k) \end{aligned} \quad (5)$$

(мы используем одну и ту же букву  $f$  для обозначения различных функций от безразмерных аргументов).

**Гипотеза 1** гарантирует существование конечного предела  $f(0)$  функции  $f(m/k)$  при  $m/k \rightarrow 0$ , величина  $f(0)$  просто связана с известной константой Колмогорова. Представление (5) справедливо для всех  $k \ll \Lambda$ , т.е. как в инерционном интервале  $m \ll k \ll \Lambda$ , где функцию  $f(m/k)$  можно заменить константой  $f(0)$ , так и в “энергосодержащей области” (область накачки  $k \sim m$ ), где она обязательно должна быть нетривиальной (см. ниже).

Вычислив преобразование Фурье функции  $D_{\text{CT}}$  из (5), получим

$$D_{\text{CT}}(r) = (Wr)^{2/3} f(mr) \quad (6)$$

с областью применимости  $r >> 1/\Lambda$ .

С точки зрения гипотезы 2 представления (5) и (6) эквивалентны, но в отношении гипотезы 1 это не так: для координатного представления (6), в отличие от импульсного, уже нельзя утверждать, что функция  $f(mr)$  имеет конечный предел при  $m \rightarrow 0$ , т.е. сводится к константе в инерционном интервале  $\Lambda^{-1} << r << m^{-1}$ . Дело в том, что из-за сильной сингулярности коррелятора (5) по  $k$  в нуле существование его фурье-образа (гарантированное по физическому смыслу) может обеспечиваться только подавлением степенной сингулярности функцией  $f(m/k)$  в (5). Отсюда следует, что при малых  $k$  она должна быть нетривиальной и что зависимость  $f$  от своего аргумента  $m/k$  при вычислении фурье-образа ни в коем случае нельзя пренебречь. Это вносит существенную зависимость от  $m$  в  $D_{\text{CT}}(r)$  при любых значениях  $r$ , в том числе и в инерционном интервале  $\Lambda^{-1} << r << m^{-1}$ . Но здесь она может проявляться только в виде аддитивной константы, имеющей смысл  $D_{\text{CT}}(r=0)$ , поскольку для разности  $D_{\text{CT}}(r) - D_{\text{CT}}(r=0)$  степенная сингулярность функции (5) подавляется (при естественном предположении аналитичности  $f(m/k)$  по  $k$  в окрестности  $k=0$ ), поэтому предел  $m \rightarrow 0$  в инерционном интервале для этой разности должен существовать.

Из сказанного следует, что с точностью до исчезающих при  $m \rightarrow 0$  поправок представление (6) в инерционном интервале  $\Lambda^{-1} << r << m^{-1}$  принимает вид

$$D_{\text{CT}}(r) = C_1(W/m)^{2/3} + C_2(Wr)^{2/3}, \quad (7)$$

где первое слагаемое есть  $D_{\text{CT}}(r=0)$ , второе — разность  $D_{\text{CT}}(r) - D_{\text{CT}}(0)$ ,  $C_{1,2}$  — безразмерные положительные константы.

Представления типа (4), (5) можно написать и для более сложных корреляционных функций с любым числом полей  $\varphi$ . Они вытекают только из гипотезы 2 и в совокупности означают наличие инфракрасной (поскольку условия  $k << \Lambda$ ,  $\omega << \nu_0 \Lambda^2$  гипотезы 2 не предусматривают ограничений снизу) масштабной инвариантности (скейлинга) с вполне определенны-

ми "колмогоровскими" размерностями  $\Delta_F \equiv \Delta[F]$  всех "ИК-существенных" величин  $F = \{\varphi \equiv \varphi(x), m, t \sim \omega^{-1}, r \sim k^{-1}\}$  при несущественных  $W, \nu_0$ :

$$\Delta_\varphi = -1/3, \Delta_t = -\Delta_\omega = -2/3, \Delta_k = -\Delta_r = \Delta_m = 1. \quad (8)$$

Напомним, что "скейлинг" есть обобщенная однородность относительно совместного согласованного растяжения  $F \rightarrow \lambda^{\Delta_F} F$  с произвольным параметром  $\lambda > 0$  всех существенных величин  $F$  при фиксированных несущественных (формально им можно приписать нулевые размерности). Инфракрасной (ИК-) асимптотике соответствует  $\lambda \rightarrow 0$ , и утверждение о наличии скейлинга, строго говоря, относится не к точным функциям Грина, а лишь к ведущему члену их ИК-асимптотики  $\lambda \rightarrow 0$ , поскольку в представлениях типа (4), (5) уже отброшены исчезающие при  $k/\Lambda \rightarrow 0, \omega/\nu_0 \Lambda^2 \rightarrow 0$  поправки.

При таком понимании очевидна аналогия между ИК-скейлингом в теории турбулентности и хорошо известным критическим скейлингом в теории фазовых переходов [11–14]: в обоих случаях речь идет о свойствах масштабной инвариантности ведущих сингулярных членов ИК-асимптотики, устанавливаемых первоначально на уровне феноменологии, подтверждающихся экспериментально и нуждающихся в теоретическом объяснении. По поводу эксперимента нужно отметить, что для турбулентности, к сожалению, пока нет прямых экспериментальных данных о динамических объектах с частотной зависимостью. Надежные экспериментальные свидетельства в пользу ИК-скейлинга относятся только к статическим объектам и, в основном, к инерционному интервалу, хотя и здесь не исключена возможность наличия малых отклонений размерностей от их колмогоровских значений (8) [21–24]. Но эти отклонения, если они и есть, невелики, поэтому в дальнейшем мы будем считать ИК-скейлинг с размерностями (8) точным.

Задачей теории является обоснование скейлинга для заданной микромодели и расчет соответствующих критических размерностей ("колмогоровскими" будем называть только конкретные значения (8)) всех ИК-существенных величин. В теории критического поведения эта задача была успешно решена применением метода ренормгруппы (РГ). Этот метод позволяет для любой заданной флуктуационной микромодели установить, имеется ли в ней ИК-скейлинг, и, если да, вычислить искомые

критические размерности (= критические показатели = индексы) в форме  $\varepsilon$ -разложений — степенных рядов по некоторому "параметру отклонения от логарифмичности"  $\varepsilon$ . Конкретный смысл  $\varepsilon$  зависит от модели; для большинства моделей теории критического поведения  $\varepsilon = 4 - d$  — отклонение размерности пространства от четверки с реальным значением  $\varepsilon_p = 4 - d = 1$  для трехмерной задачи. Все вычисления производятся с произвольным  $\varepsilon$  и внутренне самосогласованы только в предположении асимптотической малости этого параметра; переход к реальному значению  $\varepsilon_p = 1$  осуществляется лишь в окончательных ответах и всегда понимается как экстраполяция.

Вся эта схема оказывается приложимой и к теории турбулентности: исходной микромоделью считается стохастическая задача (1) с подходящим выбором коррелятора (2), в который вводится нужный параметр типа  $\varepsilon$  (см. ниже) с определенным "реальным" значением  $\varepsilon_p$  (или областью значений). Стохастическая задача переписывается в форме квантово-полевой модели, к ней оказывается приложимой стандартная техника РГ, позволяющая доказать наличие ИК-скейлинга и вычислить критические размерности в форме  $\varepsilon$ -разложений. Для указанных в (8) величин они обрываются на членах порядка  $\varepsilon$  и принимают колмогоровские значения (8) при подстановке  $\varepsilon = \varepsilon_p$ .

Таким образом, метод РГ позволяет доказать наличие ИК-скейлинга в теории турбулентности, что эквивалентно обоснованию гипотезы 2 Колмогорова. Представления типа (4), (5) будут получаться как ИК-асимптотика общего решения уравнений РГ. Гипотеза 1 на таком языке есть некоторое утверждение о поведении при  $m \rightarrow 0$  входящих в эти представления "скейлинговых функций"  $f$ , зависящих от критически (и канонически) безразмерных аргументов. В теории турбулентности, как и в теории критического поведения, подобные вопросы не относятся к компетенции метода РГ в прямом смысле слова, поскольку вид скейлинговых функций в общем решении уравнений РГ никак не определяется. Их можно вычислить по теории возмущений в форме  $\varepsilon$ -разложений, но это бесполезно для анализа сингулярностей  $m \rightarrow 0$ . Существенную информацию о скейлинговых функциях можно получать другими, более изощренными техническими методами, требующими обобщения РГ-техники на составные операторы. Эти вопросы подробнее обсуждаются в [4, 20], а здесь мы лишь хотим подчеркнуть, что с точки зрения РГ

между гипотезами 1 и 2 имеется принципиальное различие.

Во избежание недоразумений еще раз подчеркнем, что РГ-техника позволяет доказать лишь ИК-скейлинг, т.е. утверждение, эквивалентное гипотезе 2 и относящееся ко всей ее области применимости, в том числе и к области малых  $k \sim m$ . Переменная  $m$  в ИК-скейлинге является также существенной, т.е. "растягивается" при масштабных преобразованиях. В литературе под "колмогоровским скейлингом" обычно понимается иное, а именно соотношения подобия, вытекающие из гипотезы 1 в ее области применимости. Но это не есть скейлинг в точном смысле слова, т.е. утверждение, относящееся ко всем функциям Грина рассматриваемой модели, поскольку гипотеза 1 справедлива лишь для некоторых статических объектов (именно некоторых, а не всех — см. (7)). Утверждения такого типа стандартной техникой РГ никогда не доказываются.

В заключение уточним вид "функции накачки"  $d_F$  в корреляторе (2), используемой в РГ-теории турбулентности. По физическому смыслу реалистическая накачка должна быть инфракрасной, т.е. функция  $d_F$  должна содержать параметр  $m \ll \Lambda$  и основной вклад в интеграл (3) должен набираться от масштабов  $k \sim m$ . С другой стороны, для использования стандартной квантово-полевой техники РГ важно, чтобы функция  $d_F$  имела степенную асимптотику при больших  $k$ . Этому условию удовлетворяет используемая в работах [3, 20] функция

$$d_F = D_0 k^{4-d} (k^2 + m^2)^{-\varepsilon}, \quad (9)$$

где  $\varepsilon > 0$  — тот "параметр отклонения от логарифмичности", о котором говорилось выше. В данной модели он является независимым и не имеет никакого отношения к размерности пространства  $d$  (в отличие от теории критического поведения, где обычно  $\varepsilon = 4 - d$ ). Логарифмической теории (подробно в п.4) соответствует значение  $\varepsilon = 0$ , а инфракрасной накачке (9) становится лишь при  $\varepsilon > 2$ . В области  $0 < \varepsilon < 2$  накачка (9) является ультрафиолетовой (УФ-), интеграл (3) для нее на больших  $k$  расходится, тогда в нем подразумевается обрезание  $k \leq \Lambda$  и интеграл набирается на масштабах  $k \sim \Lambda$ , т.е. в этом случае  $W \sim D_0 \Lambda^{4-2\varepsilon}$ , в отличие от  $W \sim D_0 m^{4-2\varepsilon}$  для  $\varepsilon > 2$ .

В большинстве работ по РГ-теории турбулентности используется более простая чисто степенная накачка

$$d_F = D_0 k^{4-d-2\varepsilon}, \quad (10)$$

соответствующая  $m = 0$  в (9). Это возможно, если интересоваться лишь обоснованием ИК-скейлинга и критическими размерностями (которые при любой накачке не должны зависеть от  $m$ ), а прочие объекты типа скейлинговых функций вычислять по диаграммам теории возмущений только в форме  $\varepsilon$ -разложений. Тогда переход к теории с  $m = 0$  непротиворечив, поскольку коэффициенты  $\varepsilon$ -разложений диаграмм всегда имеют конечные пределы при  $m \rightarrow 0$ . Но это, конечно, не является доказательством гипотезы 1 Колмогорова, поскольку для конечных  $\varepsilon$  в реальной области ИК-накачки  $\varepsilon > 2$  предел  $m \rightarrow 0$  может не существовать (простой пример — функция  $m^{2-\varepsilon}$ : коэффициенты ее  $\varepsilon$ -разложения при  $m \rightarrow 0$  исчезают, а сама она для  $\varepsilon > 2$  расходится). Поэтому гипотезу 1 можно обсуждать только в моделях типа (9) с параметром  $m$  и обязательно вне рамок  $\varepsilon$ -разложения. Но если не касаться этих вопросов, то можно пользоваться максимально упрощенной моделью (10). Для нее "реальным" считается значение  $\varepsilon_p = 2$ , соответствующее границе области ИК-накачки в (9), поскольку для  $\varepsilon > 2$  интеграл (3) с функцией (10) не существует из-за ИК-расходимости, а при  $\varepsilon < 2$  накачка ультрафиолетовая. Отметим, что при  $\varepsilon = 2$  параметр  $D_0$  в (10) приобретает размерность  $W$ . Отметим также, что идеализированной накачке бесконечно большими вихрями соответствует  $d_F(\mathbf{k}) \sim \delta(\mathbf{k})$ , а функцию  $Ck^{-d}$  при подходящем выборе амплитуды  $C$  можно считать степенной моделью  $d$ -мерной  $\delta$ -функции. Более реалистической является, конечно, модель накачки (9) или ее обобщение

$$d_F = D_0 k^{4-d-2\varepsilon} h(m/k), \quad h(0) = 1 \quad (11)$$

с произвольной "достаточно хорошей" функцией  $h(m/k)$ , обеспечивающей сходимость интеграла (3) при малых  $k$  и нормированной на единицу при  $k \gg m$ , где (11) переходит в (10).

Как уже говорилось, большинство результатов РГ-теории турбулентности получено в рамках  $\varepsilon$ -разложений для модели (10) с  $m = 0$ . В некоторых работах использовалась модель (9), их результаты обобщаются непосредственно на модель (11) с произвольной функцией  $h(m/k)$ . Она нетривиальна лишь в энергосодержащей области  $k \sim m$  и определяет вид скейлинговой функции  $f(m/k)$  из (5) в данной области (в низшем порядке  $\varepsilon$ -разложения получается просто  $h \sim f$ , см. п.7). Тем самым  $h$  выражается через измеримую экспериментально функцию  $f$  и

в этом смысле может считаться известной. Большинство относящихся к инерционному интервалу результатов от выбора конкретной функции  $h$  вообще не зависит, и мы будем излагать их для модели (11) с произвольной  $h$ .

Для моделей типа (11), в отличие от (10), можно сформулировать и пытаться решить новую интересную "проблему замораживания": поскольку выбор конкретного значения  $\varepsilon$  в области  $\varepsilon > 2$  характеризует одну из "деталей устройства" ИК-накачки, хотелось бы показать, что относящиеся к инерционному интервалу результаты от этого выбора не зависят в соответствии с гипотезой 1 Колмогорова. Для критических размерностей это удается сделать [20]: зависящие от  $\varepsilon$  в области  $0 < \varepsilon < 2$  критические размерности достигают колмогоровских значений (8) при  $\varepsilon = 2$  и не изменяются в дальнейшем при возрастании  $\varepsilon$ . Такое "замораживание размерностей" в области  $\varepsilon \geq 2$  согласуется с гипотезой 1 Колмогорова, но не доказывает ее в полном объеме, поскольку остается нерешенной трудная проблема зависимости от  $m$  в инерционном интервале. Гипотезу 2 (независимость от  $\nu_0$ ) в области  $\varepsilon > 2$  удается доказать полностью (подробнее см. п.8).

## 2. Квантово-полевая формулировка

Хорошо известно [25–26], что любая стохастическая задача

$$\partial_t \varphi(x) = V(x; \varphi) + F(x), \quad \langle F(x)F(x') \rangle = D_F(x, x') \quad (12)$$

для поля или системы полей  $\varphi(x) \equiv \varphi(t, \mathbf{x})$  с произвольным, не содержащим производных  $\varphi$  по времени функционалом  $V$  и произвольным коррелятором  $D_F$  гауссовой случайной силы  $F$  при стандартном (как для (1)) доопределении эквивалентна квантовой теории удвоенного набора полей  $\Phi \equiv \varphi, \varphi'$  с функционалом действия

$$\begin{aligned} S(\Phi) &= \varphi' D_F \varphi'/2 + \varphi'[-\partial_t \varphi + V] \equiv \\ &\equiv 1/2 \int \int dx dx' \varphi'(x) D_F(x, x') \varphi'(x') + \\ &+ \int dx \varphi'(x) [-\partial_t \varphi(x) + V(x; \varphi)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Это значит, что статистические средние  $\langle \dots \rangle$  случайных величин можно отождествить с функциональными средними с весом  $\exp S(\Phi)$ , поэтому производящие функционалы полных ( $G(A)$ ) и связных ( $W(A)$ ) функций Грина задачи (12) представляются функциональным интегралом

$$G(A) = \exp W(A) = \int D\Phi \exp[S(\Phi) + A\Phi] \quad (14)$$

с произвольными источниками  $A \equiv A_\varphi, A_{\varphi'}$  в линейной форме

$$A\Phi \equiv \int dx [A_\varphi(x)\varphi(x) + A_{\varphi'}(x)\varphi'(x)]. \quad (15)$$

Производящий функционал 1-неприводимых функций Грина определяется преобразованием Лежандра  $W(A)$  по  $A$ :

$$\Gamma(\Phi) = W(A) - A\Phi, \quad \Phi(x) = \delta W(A)/\delta A(x). \quad (16)$$

Независимым аргументом здесь считается  $\Phi$ , а  $A = A(\Phi)$  определяется неявно вторым равенством (16). Источник  $A_{\varphi'}$  имеет смысл неслучайной внешней силы (добавки к  $V$  в (12)), поэтому, в частности, функция Грина  $\langle\varphi\varphi'\rangle$  модели (13) совпадает с простейшей функцией отклика  $\delta\langle\varphi\rangle/\delta A_{\varphi'}|_{A=0}$  в исходной задаче (12).

В дальнейшем мы всегда будем для краткости пользоваться приведенной в (13)–(15) компактной формой записи, подразумевая все нужные интегрирования по переменным  $x \equiv t, \mathbf{x}$  и суммирования по индексам полей  $\Phi$  и источников  $A$ .

Интеграл (14) — стандартная конструкция квантовой теории поля, поэтому все функции Грина имеют стандартные фейнманские диаграммные представления, см., например, [16]. Роль линий в диаграммах играют элементы  $2 \times 2$  матрицы затравочных пропагаторов  $\langle\Phi\Phi\rangle_0$ , связанной соотношением  $\langle\Phi\Phi\rangle_0 = K^{-1}$  с матрицей  $K$  в свободной (квадратичной по  $\Phi$ ) части действия  $S_0 = -\Phi K \Phi/2$ . Если  $V = L\varphi +$  нелинейные члены (с некоторой линейной операцией  $L$ ,  $\text{Re}L \leq 0$ ), затравочные пропагаторы для действия (13) имеют вид

$$\begin{aligned} \langle\varphi\varphi'\rangle_0 &= \langle\varphi'\varphi\rangle_0^T = (\partial_t - L)^{-1}, \quad \langle\varphi'\varphi'\rangle_0 = 0, \\ \langle\varphi\varphi\rangle_0 &= \langle\varphi\varphi'\rangle_0 D_F \langle\varphi'\varphi\rangle_0, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $T$  — символ транспонирования линейной операции (перестановка аргументов в координатном представлении и  $\delta^T = -\delta$  для производных). Пропагатор  $\langle\varphi\varphi'\rangle_0$  — запаздывающий (это дополнительное условие к задаче (12)),  $\langle\varphi'\varphi\rangle_0$  — опережающий, что вместе с равенством  $\langle\varphi'\varphi'\rangle_0 = 0$  приводит к исчезновению любой 1-неприводимой функции Грина  $\langle\varphi \dots \varphi\rangle_{1-n}$  только полей  $\varphi$  (без  $\varphi'$ ) из-за присутствия в ее диаграммах замкнутого цикла запаздывающих линий. По той же причине исчезают также все вакуумные петли и все связные функции  $\langle\varphi' \dots \varphi'\rangle_{\text{св}}$  только полей  $\varphi'$  (без  $\varphi$ ) [27].

Представление (13), (14) получено в работах [25–26], но сама диаграммная техника типа (17) была сформулирована ранее в [18, 28–29]. В теории турбулентности она известна как диаграммная техника Уайлъда [18]. Функциональная формулировка (13), (14) существенно облегчает получение точных функциональных соотношений типа уравнений Швингера и, что особенно важно, позволяет применить к стохастической задаче (12) стандартную квантово-полевую технику РГ.

В [25–26] и других работах к действию (13) добавляют слагаемое с закороченной линией  $\langle\varphi\varphi'\rangle_0$ , формально порождаемое определителем линейной операции  $-\partial_t + \delta V/\delta\varphi$ . Эта добавка точно сокращает все диаграммы с закороченной линией  $\langle\varphi\varphi'\rangle_0$ , появляющиеся среди прочих по правилам фейнмановской диаграммной техники для действия (13), но не возникающие при построении диаграмм непосредственно итерациями стохастического уравнения (12). Следя [27], условимся в дальнейшем просто доопределять в диаграммах закороченную линию  $\langle\varphi\varphi'\rangle_0$  нулем. Такое доопределение сводится к одновременному исчезновению лишних диаграмм и компенсирующей их добавки к действию (13).

Применение сформулированной выше общей теоремы к стохастическим уравнениям ланжевеновского типа приводит к квантово-полевым моделям критической динамики [17]. Для стохастического уравнения Навье–Стокса (1), (2) таким путем получается теория двух поперечных векторных полей  $\Phi \equiv \varphi, \varphi'$  с функционалом действия

$$S(\Phi) = \varphi' D_F \varphi'/2 + \varphi'[-\partial_t \varphi + \nu_0 \Delta \varphi - (\varphi \partial) \varphi], \quad (18)$$

в котором  $D_F$  — коррелятор случайной силы (2). Поперечность

вспомогательного поля  $\varphi'$  позволяет опустить в (18) чисто продольный вклад  $\partial_t P$  из (1).

Затравочные пропагаторы (17) для модели (18) в импульсно-частотном представлении имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\langle\varphi\varphi'\rangle_0 &= \langle\varphi'\varphi\rangle_0^* = (-i\omega + \nu_0 k^2)^{-1}, \quad \langle\varphi'\varphi'\rangle_0 = 0, \\ \langle\varphi\varphi\rangle_0 &= d_F(k)/(\omega^2 + \nu_0^2 k^4).\end{aligned}\quad (19)$$

с функцией  $d_F(k)$  из (2). По векторным индексам все линии кратны поперечному проектору  $P_{ij}(\mathbf{k})$ , который в записи (19) опущен, но всегда будет подразумеваться. Взаимодействию в (18) отвечает трехконцовая вершина  $-\varphi'(\varphi\partial) = \varphi'_i V_{ij,s} \varphi_j \varphi_s / 2$  с вершинным множителем

$$V_{ij,s} = i(k_j \delta_{is} + k_s \delta_{ij}), \quad (20)$$

где  $\mathbf{k}$  — импульс, втекающий в вершину через поле  $\varphi'$ . На рис. 1 приведены для иллюстрации диаграммы точных функций Грина  $\langle\varphi\varphi\rangle$  и  $\langle\varphi\varphi'\rangle$  в однопетлевом приближении.

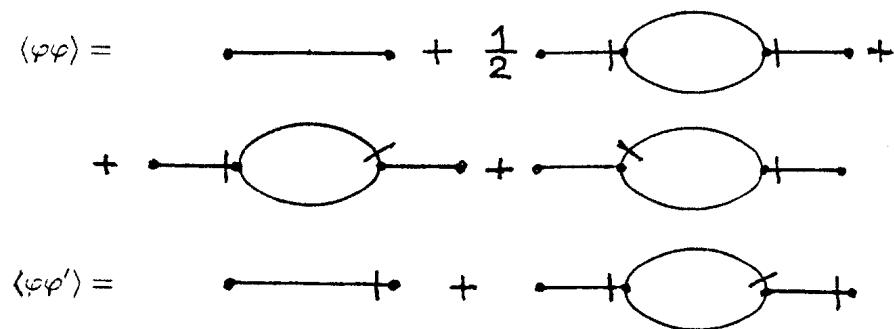


Рис. 1

Линиям диаграмм отвечают затравочные пропагаторы (19), вершинам — множители (20), перечеркнутый конец линии соответствует полю  $\varphi'$ , неперечеркнутый — полю  $\varphi$ .

Роль параметра разложения в теории возмущений ("константа связи" или "заряд" в терминологии квантовой теории поля) играет  $g_0 \equiv D_0/\nu_0^3$  с  $D_0$  из (11). В некоторых работах, например [3], вводится дополнительный формальный параметр разложения  $\lambda_0$  (реальное значение  $\lambda_0 = 1$ ) как множитель при

вершине (20). Это удобно, если диаграммы строятся непосредственно итерациями уравнения (1), но не обязательно, поскольку фактическим параметром разложения является тогда комбинация  $g_0 \lambda_0^2$ . Мы не будем вводить  $\lambda_0$ , чтобы не искажать простой вид ковариантной производной  $\nabla_t = \partial_t + (\varphi\partial)$  в уравнении (1).

### 3. ИК- и УФ-сингулярности диаграмм теории возмущений

Поясним проблемы, возникающие в теории возмущений для модели (18) с накачкой типа (11) на примере парного коррелятора скорости, следя за работе [20]. При конечном  $\varepsilon > 0$  все диаграммы коррелятора в области больших импульсов и частот сходятся, поэтому могут вычисляться без УФ-обрезания  $\Lambda$ . При таком способе вычислений (общепринято для моделей теории критического поведения с размерной регуляризацией) возникающие при  $\varepsilon \rightarrow 0$  УФ-расходимости проявляются в форме полюсов по  $\varepsilon$ , а ряд теории возмущений для коррелятора принимает вид

$$\langle\varphi\varphi\rangle = \langle\varphi\varphi\rangle_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (g_0 k^{-2\varepsilon})^n A_n(\omega/\nu_0 k^2, m/k, \varepsilon) \right], \quad (21)$$

где  $g_0 = D_0/\nu_0^3$  с  $D_0$  из (11), полюса по  $\varepsilon$  содержатся в коэффициентах  $A_n$ . Из (21) видно, что для определения асимптотики  $k \rightarrow 0$  при фиксированном заряде  $g_0$  и коэффициентах  $A_n$  необходимо суммировать весь ряд — в этом и состоит "первая ИК-проблема", которая будет решаться методом РГ. На уровне канонических размерностей это проблема определения асимптотики  $\lambda \rightarrow 0$  для выражения (21) с заменой  $k \rightarrow \lambda k$ ,  $\omega \rightarrow \lambda^2 \omega$ ,  $m \rightarrow \lambda m$  при фиксированных "несущественных переменных"  $g_0$ ,  $\nu_0$ . При более точной формулировке первой ИК-проблемы, как следует из РГ-анализа (подробно в п.6), канонические значения показателей степеней  $\lambda$  для всех ИК-существенных переменных  $F$  следует заменить их критическими размерностями  $\Delta_F$ , причем все они также подлежат определению (кроме  $\Delta_k = 1$  — это просто условие нормировки размерностей).

Следует подчеркнуть, что сформулированная выше ИК-проблема нетривиальна при любом  $\varepsilon > 0$ , в том числе и для области  $0 < \varepsilon < 2$ , когда накачка (11) является ультрафиолетовой.

В этой области из (3) имеем  $W \simeq D_0 \Lambda^{4-2\varepsilon}$  с точностью до несущественного безразмерного коэффициента порядка единицы, что вместе с определениями  $\Lambda = (W/\nu_0^3)^{1/4}$  и  $g_0 = D_0/\nu_0^3$  дает  $g_0 \simeq \Lambda^{2\varepsilon}$ . Аналогично для области ИК-накачки  $\varepsilon > 2$  из (3) имеем  $W \simeq D_0 m^{4-2\varepsilon}$ , откуда следует  $g_0 \simeq (\Lambda/m)^4 m^{2\varepsilon}$ . В обоих случаях безразмерный параметр разложения  $g_0/k^{2\varepsilon}$  в искомой ИК-асимптотике не мал ( $(\Lambda/k)^{2\varepsilon}$  в первом случае и  $\Lambda^4/k^{2\varepsilon} m^{4-2\varepsilon}$  во втором), следовательно, ряд (21) нужно суммировать, что и есть "первая ИК-проблема". Поэтому нельзя отождествлять характер накачки и соответствующих сингулярностей: даже для накачки УФ-типа с  $0 < \varepsilon < 2$  в (11) ряд теории возмущений содержит ИК-сингулярности, которые и будут суммироваться методом РГ.

Из приведенных выше оценок видно, что эти сингулярности ослабляются с уменьшением параметра  $\varepsilon > 0$  и при  $\varepsilon = 0$  формально исчезли бы совсем, если бы мы могли перейти в (21) к этому пределу. Но это невозможно из-за присутствия в (21) УФ-расходимостей — полюсов по  $\varepsilon$ . Устранение этих полюсов есть классическая "УФ-проблема", общее решение которой дается теорией УФ-ренормировки. В рамках этой теории получаются и уравнения РГ, выражающие простую идею неоднозначности ренормировки (подробно в п.4). Сказанное выше относительно предела  $\varepsilon \rightarrow 0$  до некоторой степени поясняет, почему метод РГ, генетически связанный с проблемой УФ-расходимостей, оказывается полезным инструментом для решения на первый взгляд совершенно другой проблемы ИК-сингулярностей.

Решение "первой ИК-проблемы" приведет к обоснованию гипотезы 2 Колмогорова. Гипотеза 1 связана со "второй ИК-проблемой" — возможным наличием сингулярностей при  $m/k \rightarrow 0$  коэффициентов  $A_n$  в (21). В нашей модели (11) с конечным значением  $\varepsilon$  такие сингулярности действительно существуют, так что проблема нетривиальна. Как уже говорилось, эта вторая ИК-проблема, в отличие от первой, не решается автоматически пересуммированием рядов теории возмущений с помощью обычной техники РГ. В моделях критического поведения аналогичные проблемы также существуют и решаются в рамках теории ренормировки составных операторов с помощью операторного разложения Вильсона [10, 14]. Эти вопросы подробно обсуждаются в работе [20], а здесь мы лишь отметим, что вторую ИК-проблему всегда обсуждают уже в рамках общего ре-

шения первой, т.е. после отбрасывания всех несущественных по общей ИК-размерности поправок. Другими словами, сначала выделяется только ведущий член ИК-асимптотики  $\lambda \rightarrow 0$  (см. выше) при любом фиксированном отношении  $m/k$ , и уже потом обсуждается асимптотика  $m/k \rightarrow 0$  этого выражения.

#### 4. УФ-ренормировка. Уравнения РГ

Приведем необходимые для дальнейшего краткие сведения о квантово-полевой теории ренормировки и аппарате РГ, подробное изложение можно найти в монографиях [9, 10].

Мы будем говорить о моделях, в которых диаграммы вычисляются без УФ-обрезания  $\Lambda$  (эта величина может входить лишь через параметры типа  $g_0$ ), а УФ-расходимости проявляются в форме полюсов по некоторому безразмерному "параметру отклонения от логарифмичности"  $\varepsilon$ . Сюда относятся наши модели типа (18), а также различные конкретные модели теории критического поведения с размерной регуляризацией [12–14].

Устраняющая УФ-расходимости (в данном случае — полюса по  $\varepsilon$ ) процедура мультипликативной ренормировки состоит в следующем: исходное действие  $S(\Phi)$  объявляется неренормированным, его параметры  $\epsilon_0$  (буквой  $\epsilon$  обозначен весь набор параметров) — затравочными, они считаются некоторыми (подлежащими определению) функциями новых ренормированных параметров  $\epsilon$ , а новым ренормированным действием считается функционал  $S_R(\Phi) = S(Z_\Phi \Phi)$  с некоторыми (также подлежащими определению) константами ренормировки полей  $Z_\Phi$  (по одной на каждую независимую компоненту поля  $\Phi$ ). В неренормированных полных функциях Грина  $G_n = \langle \Phi \dots \Phi \rangle$  функциональное усреднение  $\langle \dots \rangle$  проводится с весом  $\exp S(\Phi)$ , в ренормированных функциях  $G_n^R$  — с весом  $\exp S_R(\Phi)$ , из связи между функционалами  $S$  и  $S_R$  вытекает связь  $G_n^R = Z_\Phi^{-n} G_n$  между соответствующими функциями Грина, при этом по определению  $G_n = G_n(\epsilon_0, \varepsilon, \dots)$  (многоточие — прочие аргументы типа координат или импульсов), а величины  $G_n^R$  и  $Z_\Phi$ , по соглашению, выражаются через параметры  $\epsilon$ . Соответствие  $\epsilon_0 \Leftrightarrow \epsilon$  в рамках теории возмущений преполагается взаимно-однозначным, поэтому независимыми переменными можно считать любой из наборов  $\epsilon_0$  или  $\epsilon$ .

В дальнейшем удобнее работать не с полными функциями

Грина,  $G_n \equiv \langle \Phi \dots \Phi \rangle$ , а с их "связными частями"  $W_n \equiv \langle \Phi \dots \Phi \rangle_{\text{св}}$  или с 1-неприводимыми  $\Gamma_n \equiv \langle \Phi \dots \Phi \rangle_{1-\text{н}}$ . Связь между соответствующими производящими функционалами выражается соотношением (14) и первым равенством (16), из которых по известному (см. выше) правилу ренормировки  $G_n$  находятся аналогичные формулы ренормировки для  $W_n$  и  $\Gamma_n$ , в подробной записи

$$\begin{aligned} W_n^R(\epsilon, \varepsilon, \dots) &= Z_\Phi^{-n}(\epsilon, \varepsilon) W_n(\epsilon_0(\epsilon, \varepsilon), \varepsilon, \dots), \\ \Gamma_n^R(\epsilon, \varepsilon, \dots) &= Z_\Phi^n(\epsilon, \varepsilon) \Gamma_n(\epsilon_0(\epsilon, \varepsilon), \varepsilon, \dots). \end{aligned} \quad (22)$$

Входящие сюда функции  $\epsilon_0(\epsilon, \varepsilon)$ ,  $Z_\Phi(\epsilon, \varepsilon)$  можно выбирать произвольно, что соответствует произволу выбора нормировки поля и параметров  $\epsilon$  при заданных  $\epsilon_0$ . Основное утверждение теории ренормировки состоит в том, что для так называемых мультипликативно-ренормируемых моделей эти функции можно выбрать так, чтобы обеспечить УФ-конечность (в данном случае конечность предела  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) функций  $W_n^R(\epsilon, \varepsilon, \dots)$  при фиксированных параметрах  $\epsilon$ . При таком выборе все УФ-расходимости (полюса по  $\varepsilon$ ) оказываются сосредоточенными в функциях  $\epsilon_0(\epsilon, \varepsilon)$  и  $Z_\Phi(\epsilon, \varepsilon)$  и отсутствуют в ренормированных функциях  $W_n^R(\epsilon, \varepsilon, \dots)$ . Отметим, что из УФ-конечности в указанном смысле какой-нибудь одной системы функций Грина (полных, связных или 1-неприводимых) автоматически следует УФ-конечность и любой другой, в дальнейшем для определенности будем говорить о связных функциях  $W_n$ .

Уравнения РГ пишутся для ренормированных функций  $W_n^R$ , которые отличаются от исходных неренормированных  $W_n$  только нормировкой и поэтому с равным правом могут использоваться для анализа критического скейлинга. Приведем элементарный вывод уравнений РГ [20]. Требование устранения расходимостей не определяет функции  $\epsilon_0(\epsilon, \varepsilon)$ ,  $Z_\Phi(\epsilon, \varepsilon)$  однозначно, в них остается произвол, допускающий введение в эти функции (а через них — и в  $W_n^R$ ) дополнительного размерного параметра — ренормировочной массы  $\mu$ :

$$W_n^R(\epsilon, \mu, \varepsilon, \dots) = Z_\Phi^{-n}(\epsilon, \mu, \varepsilon) W_n(\epsilon_0(\epsilon, \mu, \varepsilon), \varepsilon, \dots). \quad (23)$$

Изменение  $\mu$  при фиксированных  $\epsilon_0$  ведет к изменению  $\epsilon$ ,  $Z_\Phi$  и  $W_n^R$  при неизменных  $W_n(\epsilon_0, \varepsilon, \dots)$ . Обозначим  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$  дифференциальную операцию  $\mu \partial_\mu$  при фиксированных  $\epsilon_0$  и подействуем ею

на обе части равенства  $Z_\Phi^n W_n^R = W_n$ . Это и даст основное дифференциальное уравнение РГ

$$[\mathcal{D}_{\text{РГ}} + n\gamma_\Phi] W_n^R(\epsilon, \mu, \varepsilon, \dots) = 0, \quad \gamma_\Phi \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_\Phi, \quad (24)$$

где  $\mathcal{D}_{\text{РГ}}$  — оператор  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu = \mu \partial_\mu|_{\epsilon_0}$ , выраженный в переменных  $\epsilon$ ,  $\mu$ :

$$\mathcal{D}_{\text{РГ}} = \tilde{\mathcal{D}}_\mu = \mu \partial_\mu + \sum_e (\tilde{\mathcal{D}}_\mu e) \partial_e, \quad (25)$$

с суммированием по всем ренормированным параметрам  $e$ . Коэффициенты дифференциального оператора (25) и  $\gamma_\Phi$  из (24) называются РГ-функциями и вычисляются через различные константы ренормировки  $Z$ . Все РГ-функции УФ-конечны, т.е. не имеют полюсов по  $\varepsilon$ , это — следствие УФ-конечности функций  $W^R$  в (24). Отметим, что из формул ренормировки  $\Gamma_n^R$  в (22) получится аналогичное (24) уравнение с заменой  $\gamma_\Phi \rightarrow -\gamma_\Phi$ .

В общей теории ренормировки [10] различают неренормированное ( $S$ ), ренормированное ( $S_R$ ) и базовое ( $S_B$ ) действие, последнее получается из  $S$  заменой всех затравочных параметров их ренормированными аналогами. УФ-расходимости устраняются добавкой к базовому действию  $S_B$  всех необходимых контрчленов  $\Delta S$ , которые находятся по известным правилам (см. ниже). Если получаемое таким путем ренормированное действие  $S_R(\Phi) = S_B(\Phi) + \Delta S(\Phi)$  можно воспроизвести изложенной выше процедурой переопределения полей и параметров в исходном неренормированном действии  $S(\Phi)$ , модель является мультипликативно-ренормируемой. Поэтому первым шагом при РГ-анализе любой модели является определение явного вида всех необходимых для устранения УФ-расходимостей контрчленов и проверка мультипликативной ренормируемости теории.

Вид необходимых контрчленов определяется по каноническим размерностям 1-неприводимых функций Грина базовой теории с действием  $S_B$ . Динамические модели типа (13), в отличие от статических, двухмасштабны, т.е. каждой величине  $F$  (поля и параметры в функционале действия) можно сопоставить [21] две независимые канонические размерности — импульсную  $d_F^k$  и частотную  $d_F^\omega$ , определив их из естественных условий нор-

мировки

$$d_k^k = -d_x^k = 1, \quad d_k^\omega = d_x^\omega = 0, \quad d_\omega^k = d_t^k = 0, \quad d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1,$$

и требования безразмерности (импульсной и частотной) каждого слагаемого функционала действия. По  $d_F^k$  и  $d_F^\omega$  можно затем ввести "суммарную" (полную) каноническую размерность  $d_F$ . Определение этой величины в общем случае зависит от модели; для нашей модели (18) следует положить  $d_F = d_F^k + 2d_F^\omega$ , поскольку в действие (18) входит комбинация  $\partial_t + \text{const} \cdot \Delta$ , т.е.  $\omega \sim k^2$  по суммарной размерности (отметим, что существуют модели критической динамики, в которых  $\omega \sim k^4$  [17]).

Суммарная размерность  $d_F$  играет в теории ренормирований динамических моделей такую же роль, как обычная (импульсная) размерность в статических задачах. Канонические размерности произвольной 1-неприводимой функции Грина  $\Gamma = \langle \Phi \dots \Phi \rangle_{1-n}$  для  $d$ -мерной задачи определяются соотношениями

$$\begin{aligned} d_\Gamma^k &= d - \sum_{\Phi} d_{\Phi}^k, \quad d_\Gamma^\omega = 1 - \sum_{\Phi} d_{\Phi}^\omega, \\ d_\Gamma &= d_\Gamma^k + 2d_\Gamma^\omega = d + 2 - \sum_{\Phi} d_{\Phi} \end{aligned} \quad (26)$$

с суммированием по всем полям  $\Phi$ , входящим в данную функцию  $\Gamma$ . Значение суммарной размерности  $d_\Gamma$  в логарифмической теории, т.е. при  $\varepsilon = 0$ , есть формальный индекс УФ-расходимости  $\delta \equiv d_\Gamma(\varepsilon = 0)$  (мы формулируем сейчас общие правила, в нашей модели (18) размерности (26) от  $\varepsilon$  не зависят, см. п.5). "Поверхностные УФ-расходимости", для устранения которых требуются контрчлены, могут присутствовать только в тех функциях  $\Gamma$ , для которых  $\delta$  есть целое неотрицательное число [9, 10].

При анализе расходимостей нужно также учитывать следующие дополнительные соображения.

- Для любой динамической модели типа (13) все 1-неприводимые функции Грина только основных полей  $\varphi$  (без  $\varphi'$ ) обращаются в нуль (см. п.2) и поэтому, естественно, не порождают контрчленов.
- Если по каким-либо причинам из всех диаграмм данной функции Грина выделяется наружу в виде множителей некоторое число внешних импульсов или частот, реальный

индекс расходимости  $\delta'$  оказывается меньше  $\delta = d_\Gamma(\varepsilon = 0)$  на соответствующее число единиц (функция  $\Gamma$  порождает контрчлены, только если  $\delta'$  — неотрицательное целое число).

- Иногда формально разрешенные по размерности расходимости отсутствуют в силу требований симметрии, например галилеевой инвариантности модели (18).

Эти общие соображения и формулы (26) позволяют для любой конкретной динамической модели перечислить все "поверхностно расходящиеся" функции  $\Gamma$  и найти явный вид соответствующих контрчленов — добавок  $\Delta S(\Phi)$  к базовому действию  $S_B(\Phi)$ . Контрчлены порождаются каждой диаграммой поверхности расходящихся ( $\delta' = 0, 1, 2 \dots$ ) функций  $\Gamma$  и строятся по следующим правилам.

- Контрчлен диаграммы данной функции  $\Gamma = \langle \Phi \dots \Phi \rangle_{1-n}$  содержит столько же полей, что и  $\Gamma$ .
- Любой контрчлен  $\Delta S(\Phi)$  обязательно локален, т.е. представляется одним интегралом по  $x \equiv t, \mathbf{x}$  от произведения полей  $\Phi$  и их производных в данной точке  $x$ .
- Суммарная размерность всех производных  $\partial_t$  и  $\partial$  в каждом контрчлене равна  $\delta \equiv d_\Gamma(\varepsilon = 0)$ .
- Если размерности (26) для поверхностно расходящихся функций  $\Gamma$  отличаются от целочисленных на величину порядка  $\varepsilon$ , то соответствующие поправки в контрчленах всегда воспроизводятся множителями  $\mu^\varepsilon$ .

В заключение отметим, что ввиду обязательной локальности всех контрчленов нелокальные вклады действия (если они есть) никогда не ренормируются, т.е. одинаковы в  $S_B(\Phi)$  и в  $S_R(\Phi)$ .

## 5. РГ-анализ стохастической гидродинамики. ИК-скейлинг

В этом разделе мы воспроизведем основные результаты РГ-анализа модели (18), выполненного впервые в [3], следуя работе [20].

Рассмотрим сначала упрощенную "безмассовую" модель со степенной накачкой (10). Соответствующие неренормированное и базовое действия имеют вид

$$S(\Phi) = g_0 \nu_0^3 \varphi' k^{4-d-2\varepsilon} \varphi'/2 + \varphi'[-\partial_t \varphi + \nu_0 \Delta \varphi - (\varphi \partial) \varphi], \quad (27)$$

$$S_B(\Phi) = g \mu^{2\varepsilon} \nu^3 \varphi' k^{4-d-2\varepsilon} \varphi'/2 + \varphi'[-\partial_t \varphi + \nu \Delta \varphi - (\varphi \partial) \varphi]. \quad (28)$$

Нелокальный вклад записан символически, нужные суммирования по индексам поперечных векторных полей  $\Phi \equiv \varphi, \varphi'$  и интегрирования по  $x \equiv t, \mathbf{x}$  подразумеваются,  $\mu$  в (28) — ренормировочная масса,  $e_0 \equiv \{\nu_0, g_0\}$  — затравочные, а  $e \equiv \{\nu, g\}$  — соответствующие ренормированные параметры.

Канонические размерности полей и параметров модели для случая произвольной размерности  $d$  пространства  $\mathbf{x}$  приведены в таблице

F	$\varphi$	$\varphi'$	$m, \mu$	$\nu, \nu_0$	W	$g_0$	g
$d_F^k$	-1	$d+1$	1	-2	-2	$2\varepsilon$	0
$d_F^\omega$	1	-1	0	1	3	0	0
$d_F$	1	$d-1$	1	0	4	$2\varepsilon$	0

По этим размерностям из (26) находим  $\delta = d_\Gamma = d + 2 - n_\varphi - (d-1)n_{\varphi'}$ , где  $n_\varphi$  и  $n_{\varphi'}$  — числа соответствующих полей в  $\Gamma$ . Из (20) видно, что на каждую внешнюю линию  $\varphi'$  в диаграммах  $\Gamma$  обязательно выделяется множитель  $\partial$ . Отсюда следует, что число производных в контрчлене не меньше чем  $n_{\varphi'}$  и  $\delta' = \delta - n_{\varphi'} = d + 2 - n_\varphi - dn_{\varphi'}$  по правилам п.4. По виду  $\delta$  и  $\delta'$  заключаем, что при  $d > 2$  поверхностные расходимости есть лишь в 1-неприводимых функциях  $\langle \varphi' \varphi \rangle$  ( $\delta = 2, \delta' = 1$ ) и  $\langle \varphi' \varphi \varphi \rangle$  ( $\delta = 1, \delta' = 0$ ), а в соответствующих контрчленах обязательно есть символ  $\partial$ . Поэтому первая функция порождает только контрчлен  $\varphi' \Delta \varphi$  без добавки  $\varphi' \partial_t \varphi$  той же размерности, а вторая порождает контрчлен с тремя полями  $\varphi', \varphi, \varphi$  и одним  $\partial$ , всегда сводящийся к  $\varphi' (\varphi \partial) \varphi$  при учете поперечности всех полей. Но

этот разрешенный по размерности контрчлен в действительности запрещен галилеевой инвариантностью [4], которая требует, чтобы операции  $\partial_t$  и  $(\varphi \partial)$  входили в контрчлены лишь в виде ковариантной производной  $\nabla_t = \partial_t + (\varphi \partial)$ . Поэтому из отсутствия контрчлена  $\varphi' \partial_t \varphi$  следует отсутствие  $\varphi' (\varphi \partial) \varphi$ . В особом случае  $d = 2$  появляется новая поверхностная расходимость в 1-неприводимой функции  $\langle \varphi' \varphi' \rangle$  ( $\delta = 2, \delta' = 0$ ), порождающая контрчлен  $\varphi' \Delta \varphi'$ . Двумерная задача рассматривается в [32], а мы будем всегда считать  $d > 2$ .

Для  $d > 2$  нужен только один контрчлен  $\varphi' \Delta \varphi$ . Его добавка к (28) приводит к ренормированному действию

$$S_R(\Phi) = g \mu^{2\varepsilon} \nu^3 \varphi' k^{4-d-2\varepsilon} \varphi'/2 + \varphi'[-\partial_t \varphi + Z_\nu \nu \Delta \varphi - (\varphi \partial) \varphi], \quad (29)$$

в котором  $Z_\nu$  — константа ренормировки. Она полностью безразмерна и поэтому может зависеть только от единственного полностью безразмерного ренормированного параметра  $g$  (зависимость от  $\varepsilon$  и  $d$  всегда подразумевается).

Явный вид  $Z_\nu$  зависит от выбора "схемы вычитаний". Назначением контрчлена является сокращение полюсов по  $\varepsilon$  в диаграммах, поэтому коэффициент при контрчлене обязан содержать такие полюса. Но его конечная часть может выбираться произвольно, ее фиксация и есть выбор "схемы вычитаний". Наиболее удобной в практических расчетах является "схема минимальных вычитаний" (MS) (см., например, [10]), в которой контрчлены содержат только полюса по  $\varepsilon$  и никаких конечных вкладов. Физические результаты от выбора конкретной схемы не зависят, поэтому выбор схемы — вопрос удобства, и мы всегда будем пользоваться принятой в большинстве современных работ схемой MS.

В этой схеме из расходящихся выражений при ренормировке вычитаются только полюса по  $\varepsilon$  без изменения конечных вкладов, а константы ренормировки  $Z$  всегда имеют следующий вид:

$$Z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(g) \varepsilon^{-k} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g^n \sum_{k=1}^n a_{nk} \varepsilon^{-k}. \quad (30)$$

Коэффициенты  $a_{nk}$  в наших моделях могут зависеть только от размерности пространства  $d$ , отсутствие  $\varepsilon$  в вычетах  $a_k(g)$  — специфика схемы MS. Однопетлевые диаграммы порождают в

(30) вклады порядка  $g$ , двухпетлевые —  $g^2$ , и так далее, кратность полюса по  $\varepsilon$  никогда не превышает числа петель в диаграмме.

Ренормированное действие (29) получается из неренормированного (27) следующей ренормировкой параметров:

$$\nu_0 = \nu Z_\nu, \quad g_0 = g \mu^{2\varepsilon} Z_g, \quad Z_g = Z_\nu^{-3} \quad (31)$$

без ренормировки полей, т.е.  $Z_F = 1$ . Модель мультиплексивно ренормируема, и к ней приложима стандартная схема вывода РГ-уравнений типа (24), причем в данном случае  $\gamma_F = 0$  из-за отсутствия ренормировки полей. Таким образом, в модели (27) "аномально мало" расходимостей по сравнению с обычными моделями теории критического поведения типа  $\varphi^4$ : есть лишь одна независимая константа ренормировки  $Z_\nu$ , а  $Z_g$  выражается через  $Z_\nu$  ввиду отсутствия ренормировки нелокального вклада коррелятора случайной силы в (29).

Все выводы сохраняются при замене степенной накачки (10) более реалистической моделью (9) или (11). При этом затравочный параметр  $m_0$  не ренормируется ( $m_0 = m$ ) и к соотношениям (31) добавляется тривиальное равенство

$$m_0 = m Z_m, \quad Z_m = 1. \quad (32)$$

Константы  $Z$  вычисляются непосредственно по диаграммам базовой теории. В общем случае по константе ренормировки  $Z_F$  любой величины  $F$  (поля или параметра) определяется соответствующая РГ-функция  $\gamma_F(g)$  — аномальная размерность данной величины  $F$ , а по любому заряду  $g$  (в общем случае зарядом следует считать любой полностью безразмерный параметр, от которого зависят константы  $Z$ ) вводится соответствующая  $\beta$ -функция  $\beta(g)$ :

$$\beta \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu g, \quad \gamma_F \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F = \beta \partial_g \ln Z_F, \quad (33)$$

где  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu \equiv \mu \partial_\mu|_{e_0}$  (см. п.4). Из (31) имеем

$$\gamma_g = -3\gamma_\nu, \quad \beta = g(-2\varepsilon - \gamma_g) = g(-2\varepsilon + 3\gamma_\nu), \quad (34)$$

а РГ-оператор (25) с  $e = \{g, \nu\}$  принимает вид

$$\mathcal{D}_{\text{РГ}} = \mathcal{D}_\mu + \beta(g) \partial_g - \gamma_\nu(g) \mathcal{D}_\nu, \quad \mathcal{D}_x \equiv x \partial_x, \quad (35)$$

где введено удобное в дальнейшем обозначение  $\mathcal{D}_x$  для любого аргумента  $x$  ренормированных функций Грина.

В схеме MS все константы ренормировки имеют вид  $Z = 1 +$  полюса по  $\varepsilon$ , поэтому из определений (33), (34) вытекает удобная для практических расчетов формула

$$\gamma_F \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F = -2\mathcal{D}_g a_1(g), \quad (36)$$

в которой  $a_1(g)$  — вычет в полюсе первого порядка по  $\varepsilon$  в представлении (30) для  $Z_F$ . Сокращение вкладов старших полюсов  $a_n(g)/\varepsilon^n$  с  $n \geq 2$  — следствие гарантированной УФ-конечности РГ-функций  $\gamma_F$  (см. п.4). Из (36) также следует, что в схеме MS все РГ-функции  $\gamma_F$  не зависят от  $\varepsilon$ , а в  $\beta$ -функции (34) вся зависимость от  $\varepsilon$  сосредоточена в первом слагаемом  $-2\varepsilon g$ .

Расчет константы  $Z_\nu$  для модели (29) в однопетлевом приближении дает [27]

$$Z_\nu = 1 - ag/2\varepsilon + O(g^2), \quad a = C_d/4(d+2), \quad (37)$$

где

$$C_d \equiv (d-1)S_d/(2\pi)^d, \quad S_d \equiv 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2). \quad (38)$$

$S_d$  в (38) — площадь поверхности единичной сферы в  $d$ -мерном пространстве,  $\Gamma(x)$  — гамма-функция,  $a = 1/20\pi^2$  для  $d = 3$ . Отсюда по формулам (34), (36) находятся РГ-функции в однопетлевом приближении

$$\gamma_\nu(g) = ag + O(g^2), \quad \beta_g = -2\varepsilon g + 3ag^2 + O(g^3). \quad (39)$$

Положительность коэффициента  $a$  в (37) обеспечивает при малых  $\varepsilon > 0$  наличие в физической области  $g > 0$  ИК-устойчивой (=ИК-притягивающей) неподвижной (=фиксированной) точки  $g_* = 2\varepsilon/3a + O(\varepsilon^2)$  уравнения РГ ( $\beta(g_*) = 0, \beta'(g_*) > 0$ ). Из условия  $\beta(g_*) = 0$  и последнего равенства (34) значение  $\gamma_\nu(g_*)$  находится точно без вычисления диаграмм:  $\gamma(g_*) = 2\varepsilon/3$  без поправок  $\varepsilon^2, \varepsilon^3$  и т.д. Явный расчет константы (37) по диаграммам нужен лишь для проверки положительности коэффициента  $a$ , т.е. для доказательства существования  $g_*$  в области  $g > 0$ .

Из решения уравнения РГ следует (см. п.6), что при наличии ИК-устойчивой неподвижной точки ведущие члены ИК-асимптотики функций Грина  $W_n^R$  любой однозарядной модели

удовлетворяют РГ-уравнению (24) с заменой в нем  $g \rightarrow g_*$ . В нашей модели с учетом (35) и  $\gamma_\Phi = 0$  из (24) получаем

$$[\mathcal{D}_\mu - \gamma_\nu^* \mathcal{D}_\nu] W_n^R = 0, \quad \gamma_\nu^* \equiv \gamma_\nu(g_*) = 2\varepsilon/3. \quad (40)$$

Каноническая масштабная инвариантность выражается уравнениями

$$\left[ \sum_F d_F^k \mathcal{D}_F - d_{W_n}^k \right] W_n^R = 0, \quad \left[ \sum_F d_F^\omega \mathcal{D}_F - d_{W_n}^\omega \right] W_n^R = 0, \quad (41)$$

в которых  $F$  — набор всех аргументов  $W_n$ ,  $n = \{n_\varphi, n_{\varphi'}\}$  и  $d_F^{k,\omega}$ ,  $d_{W_n}^{k,\omega}$  — канонические размерности величин  $F$  и  $W_n^R$ . Каждое из уравнений (40), (41) описывает скейлинг с растяжением тех переменных, производные по которым входят в дифференциальный оператор. Интересуясь скейлингом, в котором некоторые из переменных  $F$  фиксированы, нужно исключить соответствующие производные  $\mathcal{D}_F$  путем комбинирования имеющихся уравнений. Для функций  $W_n^R$  модели типа (18) с  $D_0 = g_0 \nu_0^3$  в координатном представлении имеем  $F = \{t, \mathbf{x}, \mu, \nu, g, m\}$ , где  $t$  — набор всех времен,  $\mathbf{x}$  — набор координат, и нас интересует скейлинг с растяжением  $t, \mathbf{x}, m$  при фиксированных  $\mu, \nu, g$ . Подставив в (40), (41) нужные размерности из таблицы, после исключения  $\mathcal{D}_\mu$  и  $\mathcal{D}_\nu$  получим искомое уравнение "критического" ИК-скейлинга

$$[-\mathcal{D}_x + \Delta_t \mathcal{D}_t + \Delta_m \mathcal{D}_m - \Delta_n] W_n^R = 0 \quad (42)$$

с коэффициентами

$$\Delta_t = -\Delta_\omega = -2 + \gamma_\nu^*, \quad \Delta_n = d_{W_n}^k + \Delta_\omega d_{W_n}^\omega, \quad \Delta_m = d_m^k, \quad (43)$$

имеющими смысл соответствующих критических размерностей. Подстановка в (43) известных (см. (40) и таблицу) значений  $\gamma_\nu^* = 2\varepsilon/3$ ,  $d_{W_n}^k = -n_\varphi + (d+1)n_{\varphi'}$ ,  $d_{W_n}^\omega = n_\varphi - n_{\varphi'}$  (размерность связной функции  $W_n^R$  равна сумме размерностей ее полей) приводит к следующим выражениям для критических размерностей:

$$\Delta_\varphi = 1 - 2\varepsilon/3, \quad \Delta_{\varphi'} = d - \Delta_\varphi, \quad \Delta_t = -\Delta_\omega = -2 + 2\varepsilon/3, \quad \Delta_m = 1. \quad (44)$$

Они не имеют поправок  $\varepsilon^2, \varepsilon^3$  и т.д. и совпадают с колмогоровскими размерностями (8) при реальном значении  $\varepsilon = 2$ .

В этом и состоит основной результат работы [4], воспроизведенный впоследствии многими авторами. Напомним, что точное РГ-уравнение (24) принимает вид (40) лишь для ИК-асимптотик функций Грина. Анализ точного уравнения и условий выхода в критический режим, а также расчет амплитудных множителей в скейлинговых законах обсуждаются в п.б.

## 6. Решение уравнений РГ. Инвариантные переменные. РГ-представления корреляционных функций

Рассмотрим подробнее решение уравнений РГ в модели (18) с накачкой типа (11) на примере парного коррелятора скорости  $D = \langle \varphi \varphi \rangle$  при  $d > 2$  [20]. Ввиду отсутствия ренормировки полей (см. п.5) их ренормированные функции Грина  $W_n^R$  совпадают с неренормированными  $W_n$ , различие лишь в выборе переменных и формы теории возмущений (по  $g$  или по  $g_0$ ). В ренормированных переменных  $D$  зависит от  $k, \omega, g, \nu, \mu, m$ . Из соображений размерности имеем (поперечный проектор везде опускаем)

$$D = \nu k^{-d} R(s, g, z, u), \quad s = k/\mu, \quad z = \omega/\nu k^2, \quad u = m/k, \quad (45)$$

где  $R$  — функция полностью безразмерных аргументов. Коррелятор  $D = W_2^R$  удовлетворяет РГ-уравнению (24) с  $\gamma_\Phi = 0$  и  $\mathcal{D}_{\text{РГ}}$  из (35):

$$\mathcal{D}_{\text{РГ}} D = 0, \quad \mathcal{D}_{\text{РГ}} = \mathcal{D}_\mu + \beta(g) \partial_g - \gamma_\nu(g) \mathcal{D}_\nu. \quad (46)$$

Из (45) и (46) следует РГ-представление

$$D = \bar{\nu} k^{-d} R(1, \bar{g}, \bar{z}, \bar{u}), \quad \bar{z} = \omega/\bar{\nu} k^2, \quad \bar{u} = u = m/k. \quad (47)$$

"Инвариантные переменные"  $\bar{g}, \bar{\nu}, \bar{u}$  — это зависящие от "масштабного параметра"  $s \equiv k/\mu$  первые интегралы уравнения (46), нормированные при  $s = 1$  на  $g, \nu, u$  соответственно (напомним, что первым интегралом линейного дифференциального уравнения в частных производных называют любое его частное решение). Равенство  $\bar{u} = u = m/k$  — следствие отсутствия  $\mathcal{D}_m$  в операторе (46) из-за отсутствия ренормировки параметра  $m$ , см. (32). Равенство (47) справедливо, поскольку обе его части удовлетворяют уравнению РГ и совпадают при  $s = 1$  в силу условий нормировки для инвариантных переменных.

Отметим также, что правая часть (47) удовлетворяет уравнению РГ для любой функции  $R(1, \bar{g}, \bar{z}, \bar{u})$ , т.е. зависимость  $R$  от

инвариантных переменных самим уравнением РГ не определяется. В данном случае функция  $R$  определена исходным соотношением (45), позволяющим вычислять ее по диаграммам в виде ряда по  $g$  (см. ниже).

Аналогом (47) для статического (одновременного) коррелятора

$$D_{\text{СТ}} = 1/2\pi \int d\omega D = \nu^2 k^{2-d} R(s, g, u) . \quad (48)$$

является представление (учитываем  $\bar{u} = u$ )

$$D = \bar{\nu}^2 k^{2-d} R(1, \bar{g}, u) . \quad (49)$$

Инвариантные переменные всегда можно выразить через РГ-функции. Для оператора (46) инвариантный заряд  $\bar{g} = \bar{g}(s, g)$  неявно определяется соотношениями

$$\ln s = \int_g^{\bar{g}} dx/\beta(x), \quad \bar{g}(1, g) = g, \quad (50)$$

а для инвариантной вязкости  $\bar{\nu} = \bar{\nu}(s, \nu, g)$  имеем

$$\bar{\nu} = \nu \exp \int_g^{\bar{g}} \gamma_\nu(x) dx / \beta(x) = (g\nu^3 / \bar{g}s^{2\varepsilon})^{1/3} = (g_0\nu_0^3 / \bar{g}k^{2\varepsilon})^{1/3} . \quad (51)$$

Второе равенство (51) следует из первого и связей (34) между РГ-функциями, а третье — из второго и формул ренормировки параметров (31). В однопетлевом приближении (39) получаемое из (50) выражение для  $\bar{g}$  имеет вид

$$\bar{g}(s, g) = gg_* / [g_*s^{2\varepsilon} + g(1 - s^{2\varepsilon})], \quad (52)$$

где  $g_* = 2\varepsilon/3a$  с константой  $a$  из (37) — координата неподвижной точки в данном приближении.

Выражения типа (47), (49) с указанием явного вида инвариантных переменных типа (50), (51) будем называть РГ-представлениями соответствующих функций Грина. Вычислив РГ-функции (33) и функцию  $R$  в (45), (48) в некотором конечном порядке ренормированной теории возмущений по  $g$  и подставив их в РГ-представление, получим соответствующее приближение “улучшенной теории возмущений”, в котором частично отсуммированы вклады старших порядков (подробнее см. ниже).

Формулы (50), (51) выражают инвариантные переменные  $\bar{e} \equiv \{\bar{g}, \bar{\nu}\}$  через ренормированные параметры  $e \equiv \{g, \nu\}$  и масштабную переменную  $s = k/\mu$ :  $\bar{e} = \bar{e}(e, s)$  и обратно  $e = e(\bar{e}, s)$ . Для дальнейшего удобно выразить  $\bar{e}$  через импульс  $k$  и затравочные параметры  $e_0 \equiv \{g_0, \nu_0\}$ , имеющие в нашей модели непосредственный физический смысл. Это всегда возможно, так как параметры  $e_0$  ренорминвариантны ( $D_{\text{РГ}e_0} = 0$  в силу определения операции  $D_{\text{РГ}}$ , см. п.4), т.е. являются некоторыми первыми интегралами уравнения РГ и, как следствие, некоторыми функциями любого другого полного набора первых интегралов, в данном случае — переменных  $\bar{e}$ . С учетом характера зависимостей в формулах (31), (50), (51) и соображений размерности (полностью безразмерными являются только  $g$  и  $\bar{g}$ ) очевидны соотношения

$$g_0 k^{-2\varepsilon} = F_1(\bar{g}), \quad \nu_0 = \bar{\nu} F_2(\bar{g}) \quad (53)$$

с некоторыми (пока неизвестными) функциями  $F_1, F_2$ . Подставляя в первое из них выражение (31) для  $g_0$ , получаем

$$g_0 k^{-2\varepsilon} = F_1(\bar{g}) = s^{-2\varepsilon} g Z_g(g), \quad (54)$$

отсюда с учетом нормировки  $\bar{g} = g$  при  $s = 1$  находим  $F_1(g) = g Z_g(g)$ . Аналогично из второго равенства (53) и формулы ренормировки  $\nu_0$  в (31) получим  $F_2(g) = Z_\nu(g)$ . Таким образом, искомые связи между инвариантными и затравочными переменными можно записать в виде

$$g_0 k^{-2\varepsilon} = \bar{g} Z_g(\bar{g}), \quad \nu_0 = \bar{\nu} Z_\nu(\bar{g}). \quad (55)$$

В эти формулы входят константы ренормировки  $Z$ , которые, в свою очередь, можно выразить через более простые объекты — РГ-функции (34). Из формулы ренормировки заряда в (31) и определения  $\beta$ -функции в (33) вытекает соотношение  $\partial_g \ln Z_g = -1/g - 2\varepsilon/\beta(g)$ , интегрируя которое с учетом нормировки  $Z_g(0) = 1$ , получаем

$$Z_g(g) = \exp \left[ - \int_0^g dx [2\varepsilon/\beta(x) + 1/x] \right]. \quad (56)$$

Отметим, что для  $\beta$ -функции (34) добавка  $1/x$  в (56) обеспечивает сходимость интеграла при  $x = 0$ . Отметим также, что

из приведенного выше выражения для  $\partial_g \ln Z_g$  вытекает равенство  $\partial_g \ln[gZ_g] = -2\varepsilon/\beta(g) \geq 0$ , доказывающее монотонное возрастание функции  $gZ_g(g)$  в интервале  $0 < g < g_*$ , где  $\beta$ -функция отрицательна. При  $g \rightarrow g_*$  функция  $gZ_g(g)$  расходится.

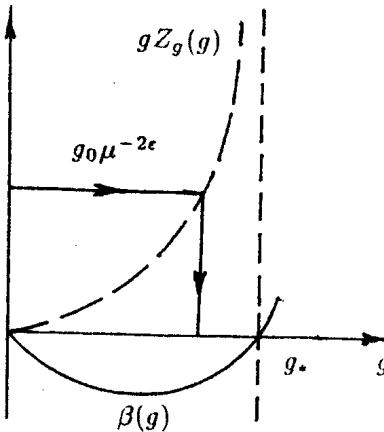


Рис. 2

На рис. 2 сплошной линией показано поведение функции  $\beta(g)$ , а штриховой — функции  $gZ_g(g)$ ; там же показано графическое решение уравнения ренормировки  $g_0\mu^{-2\varepsilon} = gZ_g(g)$  (см. (31)) относительно  $g$ . Аналогичное соотношение связывает величины  $g_0k^{-2\varepsilon}$  и  $\bar{g}$  согласно первому равенству (55). Здесь следует сказать, что показанное на рис. 2 поведение  $\beta$ -функции гарантировано только в рамках  $\varepsilon$ -разложения, т.е. для асимптотически малых  $\varepsilon$ .

Вычисляя РГ-функции лишь в виде начальных отрезков рядов по  $g$ , мы не имеем, строго говоря, никакой достоверной информации об их поведении при  $g \sim 1$ . Одним из "символов веры" современной теории критического поведения является допущение, что показанная на рис. 2 качественная картина поведения  $\beta$ -функции (достоверная при асимптотически малых  $\varepsilon$ ) остается правильной и для больших  $\varepsilon$  вплоть до реальных значений  $\varepsilon_p \sim 1$ . Важно, что неподвижная точка  $g_*$  с ростом  $\varepsilon$  смещается, но не исчезает. — только в этом случае техника РГ является полезным инструментом для анализа ИК-поведения функций Грина. Единственным аргументом в пользу такого допущения, которое мы переносим, естественно, и на обсуждаемые сейчас модели, является общепризнанный успех теории критического поведения в объяснении (качественном, а часто и количественном) огромной массы экспериментальных данных.

Из показанной на рис. 2 процедуры графического решения уравнений

$$g_0\mu^{-2\varepsilon} = gZ_g(g), \quad g_0k^{-2\varepsilon} = \bar{g}Z_g(\bar{g})$$

можно сделать следующие выводы.

1. Значения  $g$  и  $\bar{g}$  всегда остаются внутри интервала  $[0, g_*]$  независимо от величины затравочного заряда, т.е.  $g$  и  $\bar{g}$  — малые величины при малом  $g_* \sim \varepsilon$ .

2.  $\bar{g}(s, g) \rightarrow g_* \sim \varepsilon$  при  $s \equiv k/\mu \rightarrow 0$  и  $\bar{g}(s, g) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ , т.е. неподвижная точка  $g_* \sim \varepsilon$  является "ИК-притягивающей" (синонимы — "ИК-устойчивой", "ИК-стабильной"), а три-виальная неподвижная точка  $g_* = 0$  является "УФ-притягивающей". Каждая из них управляет соответствующей асимптотикой функции Грина.

Конкретизируем общие формулы (55) в однопетлевом приближении (39). Из (56) тогда получим  $Z_g(g) = g_*/(g_* - g)$ , отсюда  $g_0\mu^{-2\varepsilon} = gg_*/(g_* - g)$  согласно (31), что позволяет получить для инвариантных переменных (50) и (51) выражения

$$\bar{g} = g_*[1 + g_*/k^{-2\varepsilon}g_0]^{-1}, \bar{\nu} = \nu_0[1 + g_0k^{-2\varepsilon}/g_*]^{1/3}, \quad (57)$$

не содержащие ренормировочной массы  $\mu$ .

## 7. ИК-скейлинг при фиксированных $g_0$ и $\nu_0$

Рассмотрим теперь интересующую нас ИК-асимптотику корреляторов (45) и (48). Она получается элементарно из общих РГ-представлений (47), (49) заменой всех инвариантных переменных  $\bar{e}$  их асимптотическими выражениями, которые будем обозначать  $\bar{e}_*$ . Ключевую роль играет тот факт, что в данной асимптотике  $\bar{g}_* = g_* = \text{const}$  (координата ИК-притягивающей неподвижной точки), в отличие от других величин типа  $\bar{\nu}_*$ , оставшихся нетривиальными функциями своих аргументов. Таким образом, для ведущего члена ИК-асимптотики динамического коррелятора (47) получаем

$$D = \bar{\nu}_*k^{-d}f(\bar{z}_*, u), \quad \bar{z}_* \equiv \omega/\bar{\nu}_*k^2, \quad f(z, u) \equiv R(1, g_*, z, u), \quad (58)$$

а для статического коррелятора (49) аналогично

$$D_{\text{СТ}} = \bar{\nu}_*^2k^{2-d}f(u), \quad f(u) \equiv R(1, g_*, u), \quad (59)$$

где  $\bar{\nu}_*$  — ИК-асимптотика инвариантной переменной (51):

$$\bar{\nu}_* = [g_0\nu_0^3/g_*k^{2\varepsilon}]^{1/3} = (D_0/g_*)^{1/3}k^{-2\varepsilon/3}. \quad (60)$$

Параметры  $g_0$  и  $\nu_0$  в  $\tilde{\nu}_*$  группируются в комбинацию  $D_0 \equiv g_0\nu_0^3$ , входящую в коррелятор случайной силы (11).

Аналогичные (58), (59) асимптотические представления можно получить для любых функций Грина, они всегда удовлетворяют упрощенному РГ-уравнению (46) с заменой в нем  $g \rightarrow g_*$ .

При фиксированных  $g_0$  и  $\nu_0$  формулы (58)–(60) соответствуют ИК-скейлингу с критическими размерностями (44) независимо от явного вида содержащихся в (58), (59) "скейлинговых функций"  $f$ . При сопоставлении с (44) нужно учитывать, что в координатном представлении критическая размерность любой связной функции Грина равна сумме размерностей всех входящих в нее полей, а в импульсном для корреляторов имеем

$$\Delta[D(k, \omega)] = 2\Delta_\varphi - \Delta_\omega - d, \quad \Delta[D_{\text{CT}}(k)] = 2\Delta_\varphi - d. \quad (61)$$

Скейлинговые функции  $f$  выражаются приведенными в (58), (59) формулами через соответствующие функции  $R$  в корреляторах (45), (48). Функции  $R$  можно вычислять непосредственно по диаграммам в форме рядов

$$R(g, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} g^n R_n(\dots) \quad (62)$$

ренормированной теории возмущений, многоточием в (62) обозначены все отличные от  $g$  аргументы  $R$ . Сделав замену  $g \rightarrow g_*$ , разложив затем  $g_*$  и  $R_n$  по  $\varepsilon$  и сгруппировав вклады одного порядка, получим из (62)  $\varepsilon$ -разложения соответствующих скейлинговых функций:

$$f(z, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f_n(z, u), \quad f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f_n(u). \quad (63)$$

Важно, что для расчета любого конечного порядка по  $\varepsilon$  в (63) требуется лишь конечное число диаграмм, поскольку  $g_* \sim \varepsilon$ , а коэффициенты  $R_n$  в (62) для ренормированных корреляторов не содержат полюсов по  $\varepsilon$ , которые могли бы компенсировать малость  $g_* \sim \varepsilon$ . Отметим также, что в рассматриваемой модели все коэффициенты  $f_n$  в (63) оказываются конечными в пределе  $u \equiv m/k \rightarrow 0$  в согласии с гипотезой I' Колмогорова (хотя это не является ее доказательством, см. обсуждение в п.1).

В низшем (первом) порядке ренормированной теории возмущений для модели (11) имеем

$$D = \frac{g\nu^3 \mu^{2\varepsilon} k^{4-d-2\varepsilon} h(u)}{|i\omega + \nu k^2|^2}, \quad D_{\text{CT}} = \frac{g\nu^2 \mu^{2\varepsilon} k^{2-d-2\varepsilon} h(u)}{2}. \quad (64)$$

Первое из этих выражений получено подстановкой в соответствующий затравочный коррелятор (19) функции (11) с  $D_0 = g_0\nu_0^3$  и последующей заменой  $\nu_0 \rightarrow \nu$ ,  $g_0 \rightarrow g\mu^{2\varepsilon}$ , а второе — интегрированием первого по  $\omega$  согласно (48). Из формул (64) легко находятся первые члены соответствующих рядов (62), (63).

В работах по теории турбулентности вместо статического коррелятора (48) часто рассматривают "спектр пульсационной энергии"  $E(k)$ , связанный с (48) следующим простым соотношением:

$$E(k) = (C_d/2)k^{d-1}D_{\text{CT}}(k) \quad (65)$$

с  $C_d$  из (38). Его РГ-представление автоматически получается из (59). В низшем порядке из (64) находим

$$E(k) = C_d \bar{g} \nu^2 k h(u)/4 \quad (66)$$

с  $\bar{g}$ ,  $\nu$  из (57). В ИК-асимптотике  $k^{2\varepsilon}/g_0 \rightarrow 0$  получаем

$$E(k) = (C_d D_0)^{2/3} [\varepsilon(d+2)/24]^{1/3} k^{1-4\varepsilon/3} h(u). \quad (67)$$

При сужении на инерционный интервал  $u \equiv m/k \ll 1$  функция  $h(u)$  в этих формулах переходит в  $h(0) = 1$  согласно (11).

В заключение сделаем несколько замечаний общего характера.

### 1. Об условиях выхода в критический режим

Условием реализации скейлинговых представлений типа (58) с нетривиальной зависимостью от  $\omega$  и  $m$  является, во-первых, близость инвариантного заряда  $\bar{g}(s, g)$  к неподвижной точке  $g_*$ , во-вторых, конечность по порядку величины всех аргументов скейлинговой функции  $f$  в (58). Первое обеспечивается достаточной малостью импульса  $k$  в масштабной переменной  $s = k/\mu$  инвариантного заряда, а второе — согласованной (посредством критических размерностей) малостью всех прочих ИК-существенных переменных, в данном случае  $k \rightarrow 0$ ,  $\omega \sim k^{\Delta_\omega} \rightarrow 0$ ,  $m \sim k^{\Delta_m} \rightarrow 0$  с  $\Delta_F$  из (44).

## 2. О ренорминвариантности этих условий

Может показаться, что нужную малость аргумента  $s = k/\mu$  функции  $\bar{g}(s, g)$  можно обеспечить не малостью импульса  $k$ , а выбором достаточно большого значения ренормировочной массы  $\mu$ , являющейся добавочным произвольным параметром ренормированной теории (см. п.4). Это действительно так, если считать ренормированный заряд  $g$  произвольным независимым параметром (как и делается в релятивистских моделях квантовой теории поля). Но в теории турбулентности, как и в теории критического поведения, первичными являются измеримые экспериментально затравочные параметры  $\epsilon_0$ , а в ренормированных параметрах  $\epsilon$  при фиксированных  $\epsilon_0$  присутствует неявно зависимость от  $\mu$ . Критерий выхода в критический режим формулируется полностью в терминах переменных  $\epsilon$ , которые, как пояснялось ранее (см., например, (55)), всегда могут быть выражены через затравочные параметры  $\epsilon_0$  и переменные типа  $k$ ,  $\omega$  без участия  $\mu$ . Поэтому обсуждаемый критерий от произвола в выборе параметра  $\mu$  в действительности не зависит. Из (55) или (57) видно, что в терминах затравочных переменных малость  $s = k/\mu$  заменяется требованием малости безразмерного параметра  $k^{2\epsilon}/g_0$ .

## 3. Что суммируется РГ-представлениями?

Точный и внутренне самосогласованный ответ на этот вопрос можно сформулировать только в рамках "идеологии малых  $\epsilon$ ", т.е. в предположении асимптотической малости этого параметра. Прежде всего, необходимо пояснить, в чем состоит "первая ИК-проблема" (см. п.3) на таком языке. В ренормированной теории все величины вычисляются в форме рядов по  $g$  типа (62). Мы знаем (см. п.6), что при любом значении  $g_0$  ренормированный заряд  $g$  находится внутри интервала  $[0, g_* \sim \epsilon]$ , так что можно считать  $g \sim \epsilon$ . Ввиду малости  $g \sim \epsilon$  и отсутствия полюсов по  $\epsilon$  в коэффициентах ряда (устраненных УФ-ренормировкой) может показаться, что в  $\epsilon$ -схеме вообще нет надобности в каких-либо бесконечных пересуммированиях вкладов ряда (62). Это верно, но только не для критической области: прямые вычисления показывают, что в коэффициентах  $R_n$  входят множители типа  $(s^{-2\epsilon} - 1)/\epsilon$  (см., например, разложение по  $g$  выражения (52) для  $\bar{g}$ ), которые УФ-конечны (т.е. конечны в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $s = \text{const}$ ) и являются величинами порядка единицы при  $s = k/\mu \sim 1$ , но становятся величинами порядка  $1/\epsilon$  и выше при  $|\epsilon \ln s| \geq 1$ ,

т.е. для достаточно малых  $s$ . Максимальное число таких "больших" множителей порядка  $1/\epsilon$  в членах ряда теории возмущений никогда не превосходит числа "малых" множителей  $g \sim \epsilon$ , но может достигать его или отличаться лишь на фиксированное конечное число. Это значит, что в области малых  $s$  фактически появляется новый параметр

$$\xi \equiv g(s^{-2\epsilon} - 1)/\epsilon, \quad (68)$$

все степени которого нужно суммировать при собирании вкладов одного порядка по  $\epsilon$ , — в этом и состоит "первая ИК-проблема" на языке ренормированной теории с малым  $\epsilon$ . Такое суммирование и осуществляется РГ-представлениями типа (47), (49), позволяющими эффективно строить  $\epsilon$ -разложения исследуемых величин даже при наличии в них множителей (68). Последние суммируются в инвариантные переменные  $\bar{\epsilon}$ , ИК-асимптотика которых легко находится из общих соображений, а в функции  $R(1, \bar{g}, \bar{z}, \bar{u})$  с  $s = 1$  проблемы "опасных множителей" (68) не существует. Поэтому представление (47) при  $\bar{g} \sim \epsilon$  и конечных (по порядку величины) значениях инвариантных переменных  $\bar{z}$ ,  $\bar{u}$ , автоматически решает проблему построения  $\epsilon$ -разложения  $D$  при наличии множителей (68). Точность по  $\epsilon$  определяется при этом числом петель с учетом  $g \sim \epsilon$  (например, в  $\beta$ -функции (34) при  $g \sim \epsilon$  однопетлевое приближение (39) соответствует низшему порядку  $\sim \epsilon^2$ , двухпетлевой вклад  $\epsilon^3$  дает поправку порядка  $\epsilon^3$ , и т.д.).

Однако функции типа  $R(1, \bar{g}, \bar{z}, \bar{u})$  в (47) могут иметь аналогичные (68) "опасные множители" с другими аргументами, например с  $\bar{u} = u = m/k$  вместо  $s = k/\mu$ . Такие множители РГ-представлением не суммируются, но это иногда удается сделать другими методами. В модели (18) эта проблема существует и связана с гипотезой 1 Колмогорова, которая подробно рассмотрена в [20].

В настоящее время конкретные формулы типа (67) известны лишь с однопетлевой точностью, что соответствует низшему порядку по  $\epsilon$  в скейлинговых функциях (63). Расчет следующих порядков в (63) — сложная, но сугубо техническая проблема. Большого смысла в такой работе и нет, поскольку связанные с гипотезой 1 Колмогорова проблемы в рамках  $\epsilon$ -разложения вообще не решаются (см. п.1), а с чисто количественной точки зрения учет поправок по  $\epsilon$  при большом "реальном значении"

$\varepsilon_p \geq 2$  вряд ли приведет к практически более точным результатам. В действительности важно лишь то, что РГ-представления типа (47), (49) — точные формулы, гарантирующие наличие ИК-скейлинга с точными размерностями (44). В этом отношении аналогия с теорией критического поведения на "идеологическом уровне" полная, а на техническом теория турбулентности даже проще, поскольку  $\varepsilon$ -разложения (44) обрываются на линейных членах.

### 8. ИК-скейлинг при фиксированных $W$ и $\nu_0$ : независимость от $\nu_0$ и "замораживание" критических показателей при $\varepsilon > 2$

В этом разделе приводится доказательство [20] независимости функций Грина моделей типа (18), (11) от коэффициента вязкости  $\nu_0$  во всей области ИК-накачки  $\varepsilon > 2$ , а также "замораживания" критических размерностей (44) в этой области на "колмогоровских" значениях (8).

Полученные в п.5 выражения (44) для критических размерностей соответствовали ИК-скейлингу при фиксированных значениях  $g_0$  и  $\nu_0$  или  $g$ ,  $\nu$  и  $\mu$  в ренормированных терминах. Для моделей теории критического поведения задача так всегда и ставится, и формулы типа (44) являются окончательными ответами (хотя обычно там ряды по  $\varepsilon$  не обрываются). В данном случае это не совсем так, поскольку в теории Колмогорова–Обухова [5] речь идет о скейлинге при фиксированных  $\nu_0$  и  $W$ . Мощность накачки  $W$  связана с параметром  $D_0 = g_0\nu_0^3 = g\nu^3\mu^{2\varepsilon}$  в (11) соотношением (3), и для получения окончательных ответов нужно выразить  $g_0$  через  $W$ .

Взяв для определенности модель (9) и вычислив интеграл (3) с УФ-обрезанием  $\Lambda = (W/\nu^3)^{1/4}$ , получим

$$W = \frac{D_0 C_d}{4(2-\varepsilon)} \left\{ (\Lambda^2 + m^2)^{2-\varepsilon} + \frac{m^{4-2\varepsilon}}{1-\varepsilon} - \frac{(2-\varepsilon)m^2((\Lambda^2 + m^2)^{1-\varepsilon})}{1-\varepsilon} \right\} \quad (69)$$

с  $C_d$  из (38). Число Рейнольдса  $Re \simeq (\Lambda/m)^{4/3}$  для развитой турбулентности очень велико, поэтому из (69) следует:

$$D_0 \equiv g_0\nu_0^3 = W B(\Lambda, m, \varepsilon) \simeq \begin{cases} c_1 W \Lambda^{2\varepsilon-4} & \text{при } 2 > \varepsilon > 0, \\ c_2 W m^{2\varepsilon-4} & \text{при } \varepsilon > 2, \end{cases} \quad (70)$$

где  $c_1 = 4(2-\varepsilon)/C_d$ ,  $c_2 = c_1(1-\varepsilon)$ . Определение точной функции  $B(\Lambda, m, \varepsilon)$  в (70) ясно из сопоставления с (69), в частности,  $B(\Lambda, m, 2) = 2/C_d \ln(\Lambda/m)$  при  $\varepsilon = 2$ . Простые приближения (70) пригодны вне переходной области вблизи  $\varepsilon = 2$ , ее ширина невелика (порядка  $1/\ln Re$ ), поэтому в дальнейшем будем считать приближения (70) верными всюду вплоть до  $\varepsilon = 2$ . Отметим, что представление типа (70) справедливо для любой модели типа (11). От выбора конкретной модели зависят лишь несущественные для дальнейшего значения коэффициентов  $c_1$ ,  $c_2$  и вид функции  $B(\Lambda, m, \varepsilon)$  в узкой "переходной области" вблизи  $\varepsilon = 2$ .

Независимость ИК-асимптотик функций Грина от коэффициента вязкости  $\nu_0$  в области  $\varepsilon > 2$  очевидна из (70) и того факта (впервые отмеченного в [30]), что параметры  $g_0$  и  $\nu_0$  входят в выражения типа (58) только через их комбинацию  $g_0\nu_0^3 \equiv D_0$  в представлении (60) для  $\bar{\nu}_*$ . В области  $0 < \varepsilon < 2$  так не будет, поскольку здесь останется зависимость от  $\nu_0$  через  $\Lambda$  в (70).

Это утверждение доказывает при  $\varepsilon > 2$  гипотезу 2 Колмогорова (см. п.1), из которой автоматически вытекает ИК-скейлинг с "колмогоровскими" размерностями (8). Поясним механизм "замораживания" показателей (44) во всей области  $\varepsilon > 2$  на их колмогоровских значениях при  $\varepsilon = 2$ .

Как уже говорилось, в теории Колмогорова–Обухова фиксированными (и в этом смысле "критически безразмерными") считаются параметры  $\nu_0$  и  $W$ , следовательно и их функция  $\Lambda = (W/\nu_0^3)^{1/4}$ , тогда как  $m$  — размерный параметр с  $\Delta_m = 1$ . Из (70) видно, что при  $0 < \varepsilon < 2$  параметры  $D_0$  и  $g_0$  критически безразмерны, а при  $\varepsilon > 2$  они приобретают критическую размерность

$$\Delta[D_0] = \Delta[g_0] = 2\varepsilon - 4 \quad (\varepsilon > 2). \quad (71)$$

Выражения (44) получаются из формул критического скейлинга (58), (60) в предположении безразмерности  $g_0$ , поэтому справедливы лишь в области  $0 < \varepsilon < 2$ . При  $\varepsilon > 2$  учет (71) в формулах (58), (60) приводит к новым значениям размерностей  $\Delta'_\varphi = \Delta_\varphi + \Delta[D_0]/3$ ,  $\Delta'_\omega = \Delta_\omega + \Delta[D_0]/3$ ,  $\Delta'_m = \Delta_m = 1$ . Они не зависят от  $\varepsilon$  и совпадают с величинами (44) при  $\varepsilon = 2$ , т.е. с колмогоровскими размерностями (8). В этом и состоит утверждение о замораживании размерностей в области  $\varepsilon \geq 2$  [20]. Оно согласуется с гипотезой 1 Колмогорова в том смысле, что размерности характеризуют поведение функций Грина и в инерци-

онном интервале, где не должно быть зависимости от "деталей устройства накачки" (см. п.1), а выбор конкретного значения  $\varepsilon > 2$  в области ИК-накачки как раз является одной из таких "деталей".

Таким образом, стандартный РГ-анализ модели (18), (11) в переменных  $W$ ,  $\nu_0$ ,  $t$  позволяет доказать независимость функций Грина от вязкости во всей области ИК-накачки  $\varepsilon > 2$ , что доказывает в этой области гипотезу 2 Колмогорова. Основным нерешенным вопросом остается проблема зависимости скейлинговых функций от аргумента  $m/k$ . Для обоснования гипотезы 1 необходимо доказать существование конечного предела при  $t \rightarrow 0$  для статических корреляторов при всех  $\varepsilon > 2$ . Как уже говорилось, эти вопросы выходят за рамки собственно метода РГ и требуют использования дополнительных, более сложных методов — операторного разложения, инфракрасной теории возмущений, функциональных уравнений Швингера и др. Подробное изложение этих вопросов можно найти в обзорной статье [4], а также в работах [20, 31, 33–37].

## Л и т е р а т у р а

1. Вильсон К., Когут Дж. Ренормализационная группа и  $\varepsilon$ -разложение. М.: Мир, 1975.
2. Sulem P.-L., Fournier J.-D., Pouquet A. // Lecture Notes in Physics. 1979. V.104. P.321.
3. De Dominicis C., Martin P.C. // Phys.Rev. A. 1979. V.19. P.419.
4. Аджемян Л.Ц., Антонов Н.В., Васильев А.Н. // Успехи физ. наук. 1996. Т.166. С.1257.
5. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т.2. СПб: Гидрометеоиздат, 1996.
6. Orszag S.A. Fluid Dynamics. London: Gordon and Breach, 1977. P.235.
7. McComb W.D. The Physics of Fluid Turbulence. Oxford: Clarendon, 1990.
8. Ландау Л.Д., Лишинец Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
9. Богоявленов И.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
10. Коллинз Дж. Переформировка. М.: Мир, 1988.
11. Наташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982.
12. Brézin E., Le Guillou J.C., Zinn-Justin J. // Phase Transitions and Critical Phenomena. 1976. V.6. P.125.
13. Amit D.J. Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena. N.Y.: McGraw-Hill, 1978.
14. Zinn-Justin J. Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Oxford: Clarendon, 1989.
15. Попов В.Н. Контигуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.
16. Васильев А.Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Л.: ЛГУ, 1976.
17. Halperin B.I., Hohenberg P.C. // Rev. Mod. Phys. 1977. V.49. P.435.
18. Wyld H.W. // Ann. Phys. 1961. V.14. P.143.
19. Кадомцев Б.Б. Вопросы теории плазмы, Т.4. М.: Атомиздат, 1964. С.188.
20. Аджемян Л.Ц., Антонов Н.В., Васильев А.Н. // Журн. экспер. и теор. физики. 1989. Т.95. С.1272.

21. Antonia R.A., Satyaprakash B.R., Hussian A.K.M.F. // J. Fluid. Mech. 1982. V.119. P.55.
22. Anselmet F., Gagne Y., Hopfinger E., Antonia R.A. // J. Fluid. Mech. 1984. V.140. P.63.
23. Кузнецов В.Р., Сабельников В.А. Турублентность и горение. М.: Наука, 1986.
24. Кузнецов В.Р., Прасковский А.А., Сабельников В.А. // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. 1988. N6. С.51.
25. Janssen H.K. // Z. Phys. B. 1976. V.23. P.377.
26. De Dominicis C. // Journ. de Phys. 1976. V.37. Suppl. C1. P.247.
27. Аджемян Л.Д., Васильев А.Н., Письман Ю.М. // Теор. и матем. физика. 1983. Т.57. С.286.
28. Келдыш Л.В. // Журн. экспер. и теор. физики. 1964. Т.47. С.1515.
29. Martin P.C., Siggia E.D., Rose H.A. // Phys.Rev. A. 1973. V.8. P.423.
30. Fournier J.-D., Frish U. // Phys. Rev. A. 1983. V.28. P.1000.
31. Аджемян Л.Д., Антонов Н.В., Ким Т.Л. // Теор. и матем. физика. 1994. Т.100. С.382.
32. Hopkinton J., Nalimov M.Yu. // Z. Phys. B. 1996. V.99. P.297.
33. Аджемян Л.Д., Васильев А.Н., Гнатич М. // Теор. и матем. физика. 1988. Т.74. С.180.
34. Аджемян Л.Д., Борисенок С.В., Гирина В.И. // Теор. и матем. физика. 1996. Т.105. С.450.
35. Антонов Н.В., Борисенок С.В., Гирина В.И. // Теор. и матем. физика. 1996. Т.106. С.92.
36. Антонов Н.В., Борисенок С.В., Гирина В.И. // Теор. и матем. физика. 1996. Т.107. С.47.
37. Антонов Н.В., Васильев А.Н. // Теор. и матем. физика. 1997. Т.110. С.122.

## Содержание

Введение .....	3
1. Стохастическое уравнение Навье–Стокса. Феноменология развитой турбулентности .....	4
2. Квантово-полевая формулировка .....	13
3. ИК- и УФ-сингулярности диаграмм теории возмущений .	17
4. УФ-реноформировка. Уравнения РГ .....	19
5. РГ-анализ стохастической гидродинамики. ИК-скейлинг	24
6. Решение уравнений РГ. Инвариантные переменные.	
РГ-представления корреляционных функций .....	29
7. ИК-скейлинг при фиксированных $g_0$ и $\nu_0$ .....	33
8. ИК-скейлинг при фиксированных $W$ и $\nu_0$ : независимость от $\nu_0$ и замораживание критических показателей при $\varepsilon > 2$ .	38
Литература .....	41