

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.Л. Ким

Рассеяние волн в случайно-неоднородных средах: модель скалярного поля

Учебное пособие

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2010

ББК 22.317
К

Р е ц е н з е н т ы

Докт. физ.-мат. наук, зав. каф. квантовой механики физического факультета СПбГУ
В.М. Шабаев

Докт. физ.-мат. наук, зав. каф. статистической физики физического факультета СПбГУ
А.К. Щекин

*Печатается по решению методической комиссии
физического факультета СПбГУ*

Рассеяние волн в случайно-неоднородных средах: модель скалярного поля:
Учеб. пособие. – СПб., 2010. – 32 с.

Настоящее пособие основано на материале спецкурса «Избранные методы в статистической физике», читаемом студентам IV курса физического факультета СПбГУ. В нем изложены основы теории рассеяния электромагнитных волн в системах с флуктуирующей диэлектрической проницаемостью. Рассмотрена упрощенная модель скалярного поля, отражающая основные черты явления и позволяющая ввести основные технические элементы теории – фейнмановскую диаграммную технику, уравнение Дайсона, метод эйконала. На этой основе получено выражение для коэффициента затухания волны за счет рассеяния (коэффициента экстинкции) и рассмотрено его поведение в окрестности критической точки, найдено в борновском приближении выражение для интенсивности рассеянной волны, рассмотрен эффект сверхэкспоненциального затухания волны в жидком кристалле.

ББК 22.317

© Т.Л. Ким

© С.-Петербургский

Государственный

Университет, 2010

Волновое уравнение во флуктуирующей среде.

Рассеяние электромагнитных волн описывается системой уравнений Максвелла, в которых учитываются флуктуации диэлектрической проницаемости ε . Основные особенности теории рассеяния можно проследить на упрощенной модели скалярного поля $u(\vec{r}, t)$, заменяющего собой напряженности электрического и магнитного полей и удовлетворяющего волновому уравнению

$$\frac{\varepsilon(\vec{r})}{c^2} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad \varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon(\vec{r}), \quad (1)$$

где c – скорость света в вакууме. Среднее значение диэлектрической проницаемости ε_0 будем считать не зависящим от координат и времени, таким образом, в среднем система является однородной и изотропной. С хорошей точностью можно считать не зависящей от времени и не усредненную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\vec{r})$, поскольку характерные частоты молекулярных процессов на несколько порядков ниже частот электромагнитного поля $u(\vec{r}, t)$.

Уравнение (1) представляет собой пример стохастического уравнения, поскольку содержит случайный параметр $\delta\varepsilon(\vec{r})$, этот параметр входит в уравнение мультипликативно, а не аддитивно, как в известном уравнении Ланжевена для броуновского движения. Нас будут интересовать усредненные по флуктуациям диэлектрической проницаемости $\delta\varepsilon(\vec{r})$ характеристики поля $u(\vec{r}, t)$, а именно, среднее значение $\langle \hat{u}(\vec{r}, t) \rangle$ и интенсивность $I(\vec{r}, t) : \langle |\hat{u}(\vec{r}, t)|^2 \rangle$. Статистика флуктуаций предполагается заданной, пока укажем на очевидное равенство

$$\delta\delta\varepsilon(\vec{r})\varepsilon = 0. \quad (2)$$

Однородное уравнение (1), очевидно, всегда имеет тривиальное нулевое решение $u(\vec{r}, t) = 0$. Покажем, что нетривиальным решением в отсутствие флуктуаций является плоская волна вида $u(\vec{r}, t) = u_0 \exp[i\vec{k}\vec{r} - i\omega t]$. Действительно, подставляя это выражение в (1), получаем $\frac{-\omega^2 \varepsilon_0}{c^2} u(\vec{r}, t) + k^2 u(\vec{r}, t) = 0$, откуда видно, что плоская волна является нетривиальным решением, если частота и волновой вектор связаны **дисперсионным соотношением**

$$k^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{c^2} \varepsilon k_0^2. \quad (3)$$

Очевидно, любая линейная комбинация плоских волн, удовлетворяющих дисперсионному соотношению, также будет являться решением уравнения (1) (при $\delta\varepsilon = 0$).

Существование ненулевых решений уравнения (1) может быть обусловлено также наличием источника излучения в правой его части. Определим функцию Грина $\hat{G}(r, t)$, как решение уравнения (1), в правой части которого добавлен локализованный в начале координат монохроматический источник с частотой ω , т.е. пропорциональный $e^{-i\omega t}$. Будем считать, что этот источник «адиабатически включается в бесконечно далеком прошлом», добавив в правую часть множитель $e^{\sigma t}$, где σ – малая положительная величина, которая устремляется к нулю в окончательных выражениях:

$$\frac{\varepsilon(\vec{r})}{c^2} \frac{-^2\hat{G}(\vec{r}, t)}{-t^2} - \Delta\hat{G}(\vec{r}, t) = e^{-i\omega t + \sigma t} \delta(\vec{r}), \quad \sigma r + 0. \quad (4)$$

Шляпка над $\hat{G}(r, t)$ напоминает, что эта величина является случайной, нас будет интересовать ее среднее значение $\langle \hat{G}(\vec{r}, t) \rangle GG(\vec{r}, t)$. Будем искать решение уравнения (4) в виде $\hat{G}(\vec{r}, t) = e^{-i\omega t + \sigma t} \hat{G}(\vec{r})$. Для функции $\hat{G}(\vec{r})$ получим

$$-\frac{\varepsilon(\vec{r})\tilde{\omega}^2}{c^2} \hat{G}(\vec{r}) - \Delta\hat{G}(\vec{r}) = \delta(\vec{r}), \quad \tilde{\omega} = \omega + i\sigma. \quad (5)$$

Это уравнение должно быть решено для некоторого поля диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\vec{r})$ и результат усреднен по всевозможным флуктуациям $\delta\varepsilon(\vec{r})$. Однако найти решение уравнения (5) при произвольной $\varepsilon(\vec{r})$ не представляется возможным, поэтому будем искать решение по теории возмущений, считая флуктуацию $\delta\varepsilon(\vec{r})$ малой. Насколько такой путь эффективен, будет видно из дальнейшего. В качестве первого шага найдем функцию Грина $G_0(r, t)$ в отсутствие флуктуаций.

Функция Грина в отсутствие флуктуаций.

Согласно (4), эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{-^2G_0(\vec{r}, t)}{-t^2} - \Delta G_0(\vec{r}, t) = e^{-i\tilde{\omega} t} \delta(\vec{r}). \quad (6)$$

Записывая, как и ранее, $G_0(\vec{r}, t) = e^{-i\tilde{\omega} t} G_0(\vec{r})$, для координатной функции $G_0(r)$ имеем

$$-k_0^2 G_0(\vec{r}) - \Delta G_0(\vec{r}) = \delta(\vec{r}), \quad k_0 r \frac{\sqrt{\varepsilon_0} \tilde{\omega}}{c}. \quad (7)$$

Для дальнейшего существенно, что введенная в (7) величина k_0 имеет, как и $\tilde{\omega}$ из (5), положительную мнимую часть. Уравнение (7) удобно решать с помощью преобразования Фурье, которое запишем в виде

$$f(\vec{k}) = \int d\vec{r} f(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}}, \quad f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} f(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}}. \quad (8)$$

Из (8) видно, что Фурье-образ дельта-функции $\delta(\vec{r})$ равен единице и

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}}. \quad (9)$$

Обозначая Фурье-образ функции $G_0(r)$ через $G_0(\vec{k})$, из (7), (9) находим

$$(k^2 - k_0^2) G_0(\vec{k}) = 1, \quad G_0(\vec{k}) = \frac{1}{(k^2 - k_0^2)}. \quad (10)$$

Функция $G_0(r)$ определяется отсюда обратным преобразованием Фурье:

$$G_0(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k^2 - k_0^2}. \quad (11)$$

Чтобы сосчитать этот интеграл, рассмотрим общий вид Фурье преобразования функции, зависящей только от модуля $k = |\vec{k}|$. Используя сферические координаты с полярной осью вдоль вектора \vec{r} , имеем

$$\underline{d\vec{k}} f(k) e^{i\vec{k}\vec{r}} = \int_0^\theta dk k^2 f(k) \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) e^{ikr \cos(\theta)} \int_0^{2\pi} k d\varphi .$$

Интеграл по углу φ дает, очевидно, 2π , а интеграл по углу θ легко вычисляется:

$$\int_0^\pi d\theta \sin(\theta) e^{ikr \cos(\theta)} = \frac{-1}{ikr} \int_0^\pi d e^{ikr \cos(\theta)} = \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} = \frac{2 \sin(kr)}{kr} .$$

Окончательно получаем

$$\underline{d\vec{k}} f(k) e^{i\vec{k}\vec{r}} = \frac{4\pi}{r} \int_0^\pi k dk k \sin(kr) f(k) . \quad (12)$$

Используя (12), преобразуем (11) к однократному интегралу:

$$G_0(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\pi dk \frac{k \sin(kr)}{k^2 - k_0^2} = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\pi}^\pi dk \frac{k \sin(kr)}{k^2 - k_0^2} = \frac{1}{8\pi^2 r i} \int_{-\pi}^\pi dk \frac{k(e^{ikr} - e^{-ikr})}{k^2 - k_0^2} . \quad (13)$$

Рассматривая в (13) величину k как комплексную переменную, сосчитаем интеграл с помощью теоремы о вычетах. В интеграле $\int_{-k}^k dk \frac{k e^{ikr}}{k^2 - k_0^2}$ замыкаем контур интегрирования в верхней полуплоскости k , в которой экспонента e^{ikr} затухает. Учитывая, что величина k_0 имеет положительную мнимую часть, из двух корней $k = \omega k_0 = c \sqrt{\varepsilon_0} (\omega + i\sigma) / c$ знаменателя срабатывает находящийся в верхней полуплоскости корень с плюсом, таким образом, имеем один вычет, который дает

$$\int_{-\pi}^\pi dk \frac{k e^{ikr}}{k^2 - k_0^2} = 2\pi i \frac{e^{ik_0 r}}{2} = \pi i e^{ik_0 r} . \quad (14)$$

В интеграле $\int_{-k}^k dk \frac{k e^{-ikr}}{k^2 - k_0^2}$ замыкаем интеграл в нижней полуплоскости, при этом направление обхода получается «по часовой стрелке», т.е. «неправильное», поэтому при использовании теоремы вычетов появится дополнительная минус единица. Работает единственный вычет в точке $k = -k_0$, который дает

$$\int_{-k}^\pi dk \frac{k e^{-ikr}}{k^2 - k_0^2} = -\pi i e^{ik_0 r} . \quad (15)$$

Подставляя (14), (15) в (13), находим окончательно

$$G_0(r) = \frac{e^{ik_0 r}}{4\pi r} , \quad (16)$$

$$G_0(r, t) = \frac{e^{ik_0 r - i\omega t}}{4\pi r} = \frac{e^{i\tilde{\omega}(\sqrt{\varepsilon_0} r / c - t)}}{4\pi r} . \quad (17)$$

Получили так называемую расходящуюся сферическую волну, амплитуда которой убывает как $1/r$ по мере удаления от источника, а любая заданная фаза осцилляций

$\tilde{\omega}(\sqrt{\varepsilon_0}r/c - t) = const$ удаляется от источника с постоянной скоростью $c/\sqrt{\varepsilon_0}$. То, что получили именно расходящуюся волну – следствие адиабатического включения источника на минус бесконечности по времени.

Теория возмущений для функции Грина. Диаграммная техника.

Оставляя в левой части (5) “главный оператор” $LL(-k_0^2 - \Delta)$, перепишем это уравнение в виде

$$L\hat{G}(\vec{r}) = \frac{\delta\varepsilon(\vec{r})}{\varepsilon_0} k_0^2 \hat{G}(\vec{r}) + \delta(\vec{r}). \quad (18)$$

Для построения теории возмущений удобнее перейти от уравнения в частных производных (18) к интегральному уравнению. Это нетрудно сделать, используя функцию Грина (17). В результате получим:

$$\hat{G}(\vec{r}) = G_0(r) + \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} \int d\vec{r}_1 G_0(\vec{r} - \vec{r}_1) \delta\varepsilon(\vec{r}_1) \hat{G}(\vec{r}_1). \quad (19)$$

Эквивалентность уравнений (18) и (19) легко проверить, подействовав оператором $LL(-k_0^2 - \Delta)$ на обе части уравнения (19) и учитывая, что, согласно (7), $LG_0(r) = \delta(\vec{r})$, $LG_0(\vec{r} - \vec{r}_1) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_1)$.

Полагая в (19) флуктуацию $\delta\varepsilon$ малой, нетрудно написать итерационное решение этого уравнения:

$$\begin{aligned} \hat{G}(\vec{r}) = & G_0(r) + \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} \int d\vec{r}_1 G_0(\vec{r} - \vec{r}_1) \delta\varepsilon(\vec{r}_1) G_0(\vec{r}_1) + \\ & + \frac{k_0^4}{\varepsilon_0^2} \int d\vec{r}_1 G_0(\vec{r} - \vec{r}_1) \delta\varepsilon(\vec{r}_1) \int d\vec{r}_2 G_0(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta\varepsilon(\vec{r}_2) G_0(\vec{r}_2) + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Следующий шаг – вычисление среднего значения $G(\vec{r}) = \langle \hat{G}(\vec{r}) \rangle$ по флуктуациям $\delta\varepsilon$. Первое слагаемое в (20) не зависит от $\delta\varepsilon$, второе дает ноль после усреднения в силу (2), для усреднения третьего слагаемого необходимо знать величину

$$\langle \delta\varepsilon(\vec{r}_1) \delta\varepsilon(\vec{r}_2) \rangle \delta D(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \quad (21)$$

Вследствие трансляционной инвариантности системы величина $D(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ зависит от разности аргументов $D(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$, а в силу изотропности системы – лишь от модуля этой разности $D(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = D(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. В силу принципа ослабления корреляций при удалении точек \vec{r}_1 и \vec{r}_2 друг от друга среднее от произведения в (21) распадается на произведение средних и ввиду (2) обращается в ноль. Таким образом, $D(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Диапазон расстояний, в котором $D(r)$ отлично от нуля, определяется величиной **корреляционного радиуса** r_c . Характерный вид функции $D(r)$ показан на Рис.1:

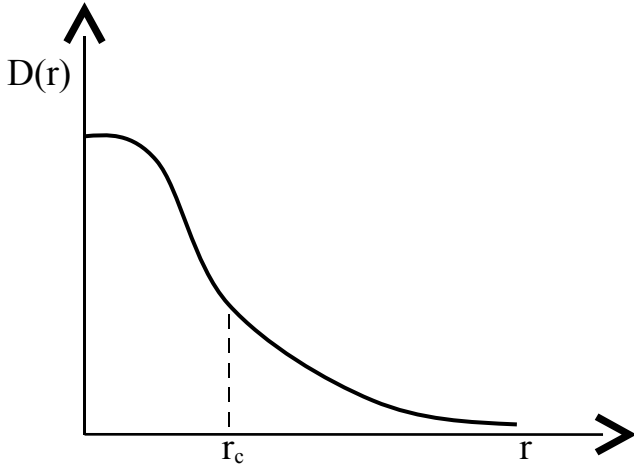


Рис.1

Учет последующих членов разложения требует знания средних значений произведений трех, четырех и т.д. флуктуаций $\delta\mathcal{E}$. Для их нахождения необходимо знание функции распределения флуктуаций. Обычно делается простейшее предположение о гауссовом виде этой функции. Тогда среднее значение произведения нечетного количества $\delta\mathcal{E}$ равно нулю, а среднее от произведения четного числа сомножителей определяется теоремой Вика. Приведем вначале пример применения теоремы Вика к среднему от произведения четырех флуктуаций:

$$\begin{aligned} \langle \delta\mathcal{E}(\vec{r}_1)\delta\mathcal{E}(\vec{r}_2)\delta\mathcal{E}(\vec{r}_3)\delta\mathcal{E}(\vec{r}_4) \rangle &= \langle \delta\mathcal{E}(\vec{r}_1)\delta\mathcal{E}(\vec{r}_2) \rangle \langle \delta\mathcal{E}(\vec{r}_3)\delta\mathcal{E}(\vec{r}_4) \rangle + \\ &+ \langle \delta\mathcal{E}(\vec{r}_1)\delta\mathcal{E}(\vec{r}_3) \rangle \langle \delta\mathcal{E}(\vec{r}_2)\delta\mathcal{E}(\vec{r}_4) \rangle + \langle \delta\mathcal{E}(\vec{r}_2)\delta\mathcal{E}(\vec{r}_3) \rangle \langle \delta\mathcal{E}(\vec{r}_1)\delta\mathcal{E}(\vec{r}_4) \rangle, \end{aligned} \quad (22)$$

таким образом, ответ выражен как сумма всевозможных произведений парных флуктуаций. В общем случае теорема Вика гласит, что среднее от произведения любого числа флуктуаций равно «сумме всевозможных спариваний», смысл этого утверждения ясен из приведенного выше примера.

Теория возмущений наглядно формулируется в терминах фейнмановских диаграмм. Введем элементы диаграммной техники:

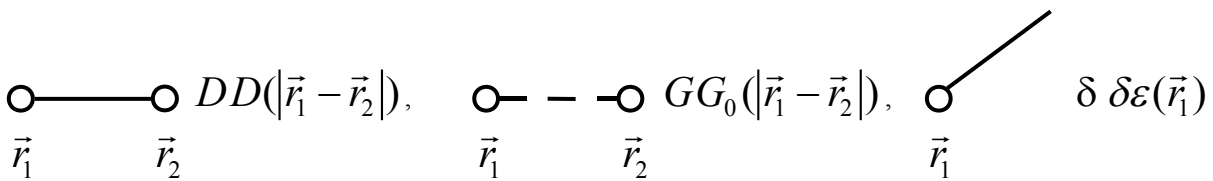


Рис.2

Каждой сплошной линии, соединяющей точки \vec{r}_1 и \vec{r}_2 , сопоставляется множитель $D(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$, пунктирной линии – множитель $G_0(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. Флуктуации $\delta\mathcal{E}(\vec{r}_1)$ сопоставляется «хвостик», исходящий из точки \vec{r}_1 . Теорема Вика на диаграммном языке означает, что усреднение произведения флуктуаций $\delta\mathcal{E}$ сводится к сумме вкладов со всевозможными соединениями «хвостиков» между собой. В частности, равенство (22) имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \begin{array}{cccc} | & | & | & | \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{r}_3 & \vec{r}_4 \end{array} \right\rangle = \begin{array}{cc} \circ & \circ \\ \vec{r}_1 & \vec{r}_2 \end{array} \begin{array}{cc} \circ & \circ \\ \vec{r}_3 & \vec{r}_4 \end{array} + \\
 & + \begin{array}{cccc} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{r}_3 & \vec{r}_4 \end{array} + \begin{array}{cccc} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{r}_3 & \vec{r}_4 \end{array}
 \end{aligned}$$

Рис.3

Ряд теории возмущений (20) на диаграммном языке записывается в виде:

$$\begin{aligned}
 \hat{G}(\vec{r}) = & \begin{array}{cc} \circ & \circ \\ \vec{r} & \vec{0} \end{array} + \begin{array}{ccc} \circ & \bullet & \circ \\ \vec{r} & \vec{r}_1 & \vec{0} \end{array} + \begin{array}{cccc} \circ & \bullet & \bullet & \circ \\ \vec{r} & \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{0} \end{array} + \\
 & + \begin{array}{cccc} \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \circ \\ \vec{r} & \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{r}_3 & \vec{0} \end{array} + \begin{array}{ccccc} \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \circ \\ \vec{r} & \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{r}_3 & \vec{r}_4 & \vec{0} \end{array} + \dots
 \end{aligned}$$

Рис.4

Здесь зачерненная точка подразумевает интегрирование по соответствующей координате. Точку, из которой выходят две пунктирные линии и одна сплошная, будем называть вершиной и сопоставлять ей множитель k_0^2 / ϵ_0 . Изображенный здесь ряд теории возмущений имеет простую физическую интерпретацию. Первое слагаемое описывает распространение сигнала из начала координат $\vec{0}$ в точку \vec{r} в среде без флуктуаций. Во втором слагаемом сигнал распространяется из точки $\vec{0}$ в некоторую точку \vec{r}_1 , в которой произошла флуктуация $\delta\epsilon$, и эта флуктуация является источником вторичной волны, которая уже достигает точки наблюдения \vec{r} – произошел акт однократного рассеяния. Соответственно третье слагаемое описывает двукратное рассеяние и т.д.

Усреднение выражения из Рис.4 проводится согласно сформулированным выше правилам, средние с нечетным числом «хвостиков» равны нулю. В результате получаем:

$$\begin{aligned}
 G(\vec{r}) = & \begin{array}{cc} \circ & \circ \\ \vec{r} & \vec{0} \end{array} + \begin{array}{ccc} \circ & \bullet & \circ \\ \vec{r} & & \vec{0} \end{array} + \begin{array}{cccc} \circ & \bullet & \bullet & \circ \\ \vec{r} & & & \vec{0} \end{array} + \\
 & + \begin{array}{cccc} \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \circ \\ \vec{r} & & & & \vec{0} \end{array} + \begin{array}{ccccc} \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \circ \\ \vec{r} & & & & & \vec{0} \end{array} + \dots
 \end{aligned}$$

Рис.5

Расшифруем для примера в явном виде второе слагаемое:

$$\frac{k_0^4}{\varepsilon_0^2} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 G_0(|\vec{r} - \vec{r}_1|) G_0(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) D(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) G_0(\vec{r}_2) r G_1(\vec{r}) . \quad (23)$$

Это выражение, как и последующие члены теории возмущений, имеет вид *сверток*. Анализ таких выражений значительно упрощается, если перейти к преобразованию Фурье и использовать следующую *теорему о свертке*:

Пусть функция $\varphi(\vec{r})$ имеет вид свертки

$$\varphi(\vec{r}) = \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \dots \int d\vec{r}_n f_1(\vec{r} - \vec{r}_1) f_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \dots f_n(\vec{r}_n) , \quad (24)$$

тогда ее фурье-образ равен произведению фурье-образов сомножителей

$$\varphi(\vec{k}) = f_1(\vec{k}) f_2(\vec{k}) \dots f_n(\vec{k}) . \quad (25)$$

Напомним, как выводится это соотношение для частного случая $n = 2$. Тогда

$$\varphi(\vec{r}) = \int d\vec{r}_1 f_1(\vec{r} - \vec{r}_1) f_2(\vec{r}_1) \quad (26)$$

а для Фурье образов имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{k}) - \int d\vec{r} e^{-i\vec{k}\vec{r}} \varphi(\vec{r}) &= \int d\vec{r} \int d\vec{r}_1 f_1(\vec{r} - \vec{r}_1) f_2(\vec{r}_1) e^{-i\vec{k}[\vec{r} - \vec{r}_1 + \vec{r}_1]} = \\ &= \int d\vec{r}_2 f_1(\vec{r}_2) e^{-i\vec{k}\vec{r}_2} \int d\vec{r}_1 f_2(\vec{r}_1) e^{-i\vec{k}\vec{r}_1} = f_1(\vec{k}) f_2(\vec{k}), \end{aligned} \quad (27)$$

(где введена новая переменная интегрирования $\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{r}_1$), что совпадает с (25).

Использование теоремы о свертке для величины $G_1(\vec{r})$ из (23) дает

$$G_1(\vec{k}) = G_0^2(\vec{k}) \Sigma_1(\vec{k}), \quad (28)$$

где
$$\Sigma_1(\vec{r}) = \frac{k_0^4}{\varepsilon_0^2} G_0(\vec{r}) D(\vec{r}). \quad (29)$$

Суммирование ряда теории возмущений. Уравнение Дайсона.

Чтобы понять, насколько полученный ряд теории возмущений может быть использован для приближенного нахождения усредненной функции Грина, обсудим величину параметра этого разложения. Из ряда *рис.5* видно, что в каждом последующем слагаемом ряда теории возмущений накапливается множитель k_0^4 , который размерен (имеет размерность четвертой степени обратной длины) и сам по себе не может быть параметром разложения. Очевидно, этот множитель обезразмеривается стоящим при нем интегралом, который, в свою очередь, содержит три характерные длины: корреляционный радиус r_c , входящий в функцию $D(r)$, длину волны $\lambda = 2\pi/k_0$ в функции Грина G_0 , и, наконец, сам аргумент r искомой усредненной функции Грина. В обычных условиях длина световой волны λ значительно превышает величину корреляционного радиуса, таким образом, безразмерный параметр

$k_0 r_c = 2\pi r_c / \lambda = 1$ является малым. Что касается расстояния r от источника (аргумента усредненной функции Грина), то обычно интересуются т.н. «дальней зоной», т.е. расстояниями, намного превышающими длину волны ($r \gg \lambda$), тем самым безразмерный параметр $k_0 r = 2\pi r / \lambda$ может считаться большим. Как будет видно из дальнейшего, обезразмеривание множителя k_0^4 реализуется и первым, и вторым способом и, таким образом, в целом параметр разложения теории возмущений рис.5 для функции G не может считаться малым, и для интересующих нас расстояний r он непригоден. Встает вопрос о перестойке ряда теории возмущений. Для этого обсудим вначале вопрос о том, какие из диаграмм дают максимальный вклад в данном порядке теории возмущений.

Диаграммы на Рис.5 включают в себя 1-неприводимые фрагменты (которые нельзя разделить на части, перерезав одну из линий), связанные между собой пунктирными линиями, т.е. функциями G_0 . Интегрирование по относительным координатам неприводимых фрагментов выделяет из промежутка интегрирования область с характерными размерами r_c , что формирует определенную степень малого безразмерного параметра $k_0 r_c$. Последующее интегрирование по «координатам центра тяжести» 1-неприводимых фрагментов не содержит функций $D(r)$, так что здесь этот малый параметр появиться не может, более детальный анализ показывает, что обезразмеривание множителя k_0 осуществляется в этом случае расстоянием r , что приводит к появлению большого безразмерного параметра $k_0 r$. Таким образом, максимальный вклад в данном порядке теории возмущений дают диаграммы с максимальным числом 1-неприводимых фрагментов. Искомая же хорошая теория возмущений вообще не должна содержать 1-приводимых диаграмм.

Переход к такой теории возмущений осуществляется с помощью т.н. **уравнения Дайсона**. Чтобы пояснить идею перехода от ряда Рис.5 к уравнению Дайсона, покажем, каким образом суммируется некоторая подпоследовательность диаграмм, имеющих вид первых трех слагаемых рис.5 и соответствующих по виду диаграмм во всех старших порядках теории возмущений (т.е. «наиболее несвязных» диаграмм). Переходя к фурье-представлению и используя (28), получим

$$G(\vec{k}) = G_0(\vec{k}) + G_0^2(\vec{k})\Sigma_1(\vec{k}) + \dots \quad (30)$$

Используя теорему о свертке в последующих слагаемых рассматриваемой подпоследовательности диаграмм, видим, что каждый раз в них добавляется множитель $G_0(\vec{k})\Sigma_1(\vec{k})$, так что дело сводится к бесконечной геометрической прогрессии, которая легко суммируется:

$$G(\vec{k}) = G_0(\vec{k}) \left[\frac{1}{G} + G_0(\vec{k})\Sigma_1(\vec{k}) + (G_0(\vec{k})\Sigma_1(\vec{k}))^2 + \dots \right] = \frac{G_0(\vec{k})}{1 - G_0(\vec{k})\Sigma_1(\vec{k})}. \quad (31)$$

Переходя в (31) к обратным величинам, получаем соотношение $G^{-1}(\vec{k}) = G_0^{-1}(\vec{k}) - \Sigma_1(\vec{k})$, представляющее собой приближенное выражение уравнения Дайсона. Его можно превратить в точное, заменив $\Sigma_1(\vec{k})$ на величину $\Sigma(\vec{k}) = \Sigma_1(\vec{k}) + \Sigma_2(\vec{k}) + \Sigma_3(\vec{k}) + \dots$, представляющую собой сумму всех 1-неприводимых диаграмм:

$$G^{-1}(\vec{k}) = G_0^{-1}(\vec{k}) - \Sigma(\vec{k}). \quad (32)$$

В частности, $\Sigma_2(\vec{k})$ определяется суммой двух диаграмм

$$\Sigma_2(\vec{r}) = \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \\ \vec{r}_1 \qquad \qquad \qquad \vec{r}_2 \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \\ \vec{r}_1 \qquad \qquad \qquad \vec{r}_2 \end{array}$$

Рис.6

Нетрудно убедиться, что замена в (31) Σ_1 на Σ правильно воспроизводит все диаграммы теории возмущений рис.5.

Ряд (32) для $G^{-1}(\vec{k})$, в отличие от ряда для $G(\vec{k})$, сходится, поскольку из него исключены все 1-неприводимые диаграммы. Рассчитав $G^{-1}(\vec{k})$ в каком-то порядке теории возмущений, мы должны найти затем искомую функцию $G(\vec{k})$ без использования теории возмущений.

Перейдем к координатному представлению для функции Грина. Нас будет интересовать вопрос о том, как повлияет учет флуктуаций на вид расходящейся сферической волны (17). Используя (32) и совершая обратное Фурье-преобразование, с учетом (8) и (10) находим

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k^2 - k_0^2 - \Sigma(k)} . \quad (33)$$

Будем интересоваться асимптотикой этого выражения в дальней зоне (т.е. формально при $r \gg \lambda$). Из теории Фурье-преобразований известно, что такая асимптотика определяется минимальным корнем уравнения $k^2 - k_0^2 - \Sigma(k) = 0$ (приравняли нулю знаменатель в (33)). Считая $\Sigma(k)$ поправкой, можно это уравнение решать итерациями: в нулевом приближении $k = k_0$, в первом приближении

$$k = \sqrt{k_0^2 + \Sigma(k_0)} = k_0 \sqrt{1 + \frac{\Sigma(k_0)}{k_0^2}} \approx k_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Sigma(k_0)}{k_0^2} \right) = k_0 + \Delta k . \quad (34)$$

В рассматриваемом приближении вычисление интеграла (33) дает соотношение (16) с заменой k_0 на k_{eff} :

$$G(r) = \frac{e^{ik_{eff}r}}{4\pi r} . \quad (35)$$

Из этого выражения видно, почему при вычислении $G(r)$ нельзя использовать «лобовую»

теорию возмущений: даже если поправка к k_0 в (35) относительно мала ($\frac{|\Delta k|}{k_0} \ll 1$), разла-

гать в ряд выражение (35) нельзя, т.к. эта поправка умножается на большой параметр r , так что величина $\Delta k r$ не мала. При вычислении же самой величины Δk уже можно использовать теорию возмущений, т.е. последовательно учитывать в Σ вклад Σ_1 , затем Σ_2 и т.д.

Изменение показателя экспоненты (35) по сравнению со случаем распространения сигнала в среде без флуктуаций (16) сводится к относительно малому изменению длины волны (не очень интересный эффект) и к появлению экспоненциального затухания. Последнее имеет место благодаря тому, что величина $\Sigma(k)$ оказывается комплексной $\Sigma(k) = \Sigma'(k) + i\Sigma''(k)$, так что выражение (35) соответствует экспоненциальному затуханию

$$G(r) : e^{-\frac{r}{l_{ext}}}, \quad (36)$$

где длина затухания (длина экстинкции) дается выражением

$$l_{ext} = \frac{-\Sigma''(k_0) x^{-1}}{2k_0 x}. \quad (37)$$

Подчеркнем, что в данном случае экспоненциальное затухание сигнала связано не с поглощением его веществом, а с рассеянием, т.е. превращением исходного сигнала в диффузный свет (поэтому ввели специальный термин «экстинкция», вместо того чтобы говорить о «длине затухания»).

Для иллюстрации рассмотрим модель функции $D(r)$ вида

$$D(r) = A \exp\left(-\frac{r}{r_c}\right). \quad (38)$$

Ограничимся при вычислении Σ первым слагаемым Σ_1 . Из формул (29), (16), (38) имеем:

$$\Sigma(r) \approx \Sigma_1(r) = \frac{Ak_0^4}{\varepsilon_0^2} \frac{e^{ik_0 r - r/r_c}}{4\pi r} \quad (39)$$

Эта функция отличается от $G_0(r)$ из (16) дополнительным множителем $\frac{Ak_0^4}{\varepsilon_0^2}$ и заменой k_0

на $k_0 + i\kappa$, где $\kappa = \frac{1}{r_c}$. Тогда для $\Sigma(k)$ получим

$$\Sigma(k) = \frac{Ak_0^4}{\varepsilon_0^2} 2 \frac{1}{k^2 - (k_0 + i\kappa)^2}, \quad (40)$$

Подставляя это выражение в (37), находим

$$l_{ext}^{-1} = \frac{Ak_0^3}{2\varepsilon_0^2} \operatorname{Im} \frac{1}{-\kappa^2 - 2i\kappa k_0 + \kappa} = \frac{Ak_0^3}{2\varepsilon_0^2} \operatorname{Im} \frac{\kappa \kappa^2 + 2i\kappa k_0 \varepsilon}{\kappa^4 + 4\kappa^2 k_0^2 \varepsilon} = \frac{Ak_0^4}{\varepsilon_0^2 \kappa (\kappa^2 + 4k_0^2)}. \quad (41)$$

Учитывая, что длина волны существенно больше радиуса корреляции ($\lambda \gg r_c$) и, следовательно, $k_0 = \kappa$, получаем окончательно

$$l_{ext} = \frac{\varepsilon_0^2 \kappa^3}{Ak_0^4} = \frac{\varepsilon_0^2}{A(k_0 r_c)^3 k_0} = \frac{\lambda \varepsilon_0^2}{2\pi A(k_0 r_c)^3} \quad (42)$$

Из этого соотношения видно, что длина затухания по порядку величины в $\frac{1}{(k_0 r_c)^3}$ раз

больше длины волны. Поскольку $k_0 r_c = \frac{2\pi r_c}{\lambda} = 1$, это отличие достигает многих поряд-

ков! Эффект экстинкции сильно возрастает в окрестности фазовых переходов второго рода, когда радиус корреляции сильно возрастает.

Получим теперь выражение для длины затухания l_{ext} **без конкретизации вида функции $D(r)$** . Запишем выражение для Фурье-образа $\Sigma(r)$ из (29) с использованием теоремы о свертке и формулы (10):

$$\begin{aligned}\Sigma(k) &= \frac{k_0^4}{(2\pi)^3 \varepsilon_0^2} \int d\vec{k}_1 G_0(\vec{k}_1) D(\vec{k} - \vec{k}_1) = \frac{k_0^4}{(2\pi)^3 \varepsilon_0^2} \int d\vec{k}_1 \frac{D(\vec{k} - \vec{k}_1)}{k_1^2 - k_0^2} = \\ &= \frac{k_0^4}{(2\pi)^3 \varepsilon_0^2} \int d\vec{k}_1 \frac{D(\vec{k} - \vec{k}_1)}{(k_1 - k_0)(k_1 + k_0)}.\end{aligned}\quad (43)$$

Фурье-образ $D(k)$ является вещественной величиной, и создается впечатление, что у $\Sigma(k)$ из (43) отсутствует мнимая часть. На самом деле подынтегральное выражение содержит полюс при $k_1 = k_0$, правило обхода которого при интегрировании диктуется тем, что k_0 содержит малую мнимую добавку (см. формулы (7), (5)). Используем **формулу Сохоцкого**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x \mp i\sigma} = \delta\pi i \int dx \delta(x) f(x) + P \int dx \frac{f(x)}{x} = (\pi i f(0) + P \int dx \frac{f(x)}{x}), \quad (44)$$

$$\sigma = +0$$

где P – символ интеграла в смысле главного значения. Роль σ в (43) играет $\text{Im}(k_0)$, а роль x – разность $k_1 - \text{Re}(k_0)$, $\text{Re}(k_0) = k_0$ при $\sigma \rightarrow 0$. Вклад в $\text{Im}\Sigma$ дается первым слагаемым в правой части формулы Сохоцкого, поэтому из (43), (44) получаем:

$$\Sigma''(k) = \frac{\pi k_0^4}{(2\pi)^3 \varepsilon_0^2} \int d\vec{q} \frac{\delta(q - k_0) D(\vec{k} - \vec{q})}{q + k_0} . \quad (45)$$

Запишем интеграл в сферической системе:

$$\int d\vec{q} \dots = \int_0^q dq q^2 \int d\hat{q} \dots, \quad \hat{q} = \frac{\vec{q}}{q}, \quad (46)$$

где $\int d\hat{q}$ – интеграл по всевозможным ориентациям единичного вектора \vec{q} (интеграл по углам). Выполняя интегрирование по модулю q с использованием δ -функции, получаем:

$$\Sigma''(k) = \frac{k_0^5}{16\pi^2 \varepsilon_0^2} \int d\hat{q} D(\vec{k} - k_0 \hat{q}) . \quad (47)$$

Подставляя это выражение в (37), находим

$$l_{ext}^{-1} = \frac{k_0^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2} \int d\hat{q} D(k_0(\hat{k} - \hat{q})) . \quad (48)$$

Результат интегрирования по всевозможным ориентациям \hat{q} в (48) не зависит от направления единичного вектора \hat{k} .

Можно показать, что полученный нами эффект затухания сферической волны за счет рассеяния на флуктуациях \mathcal{E} имеет место также и для плоской волны, причем выражение для длины затухания по-прежнему дается соотношением (48).

Интенсивность рассеяния в борновском приближении (однократное рассеяние).

Измеряемой на эксперименте величиной является обычно интенсивность, определяемая квадратом модуля поля $I(\vec{r}, t) : \langle |\hat{u}(\vec{r}, t)|^2 \rangle$. Типичная установка по изучению рассеяния имеет следующий вид

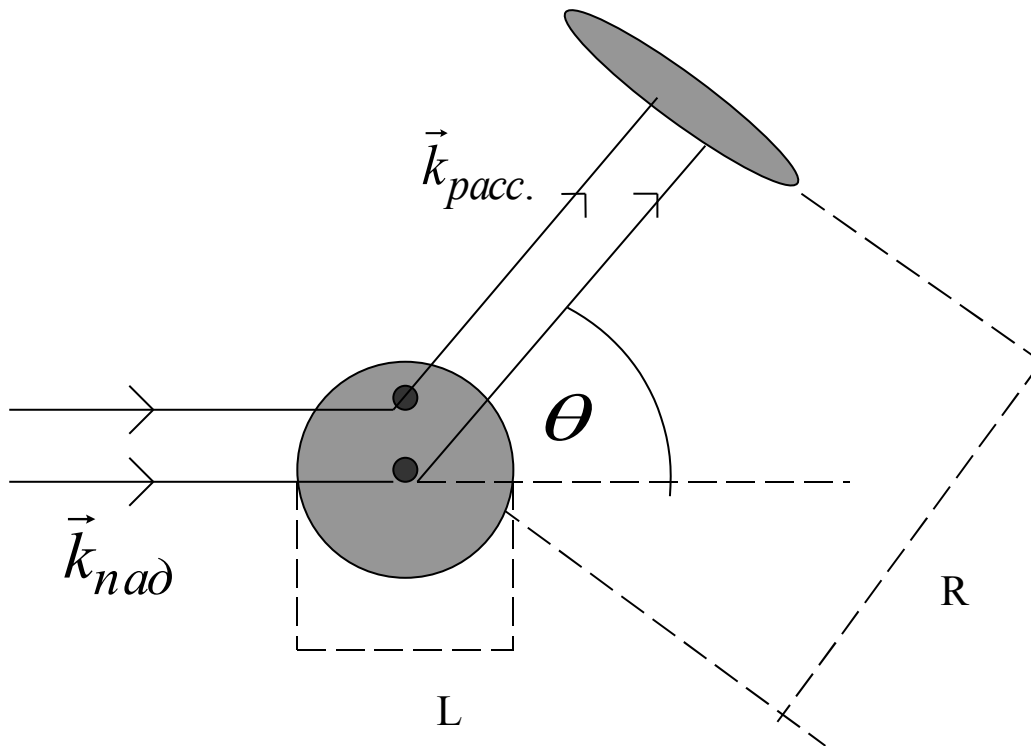


Рис.7. Схема однократного рассеяния

Предполагается, что далеко слева находится источник света, генерирующий плоскую монохроматическую волну $u(\vec{r}, t) = u_0 \exp[i\vec{k}_{nad}\vec{r} - i\omega t]$, распространяющуюся в направлении

$\hat{k} = \frac{\vec{k}_{nad}}{k_{nad}}$ по среде с постоянной диэлектрической проницаемостью ε_0 , так что

$|\vec{k}_{nad}| = k_0 \omega \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c}$. В области, условно изображенной на рисунке кружком, диэлектрическая проницаемость испытывает флуктуации $\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon(\vec{r})$, что приводит к эффекту

рассеяния исходной волны. Мы будем считать для простоты, что постоянная составляющая ε_0 диэлектрической проницаемости в этой области совпадает со значением во всем остальном пространстве, чтобы исключить эффекты геометрической оптики (преломление и отражение света на границе двух сред) и рассматривать эффекты рассеяния «в чистом виде».

Буквой L на рисунке обозначен характерный размер рассеивающей системы, а буквой R – ее расстояние до измеряющего интенсивность прибора, условно обозначенного линзой. Будем рассматривать ситуацию, когда $R \gg L$. Величина L будет также полагаться малой по сравнению с длиной экстинкции l_{ext} , что позволяет пренебречь затуханием волны внутри рассеивающего объема. В то же время величина R намного превышает, естественно, длину

волны падающего света $R \gg \lambda = \frac{2\pi}{k_0}$. Угол θ между направлениями падающей и рассе-

янной волны носит название *угла рассеяния*, он меняется в пределах от нуля (“рассеяние вперед”) до π (“рассеяние назад”).

В рассматриваемой задаче нас будет интересовать решение $\hat{u}(\vec{r}, t)$ однородного волнового уравнения, обращаемое в плоскую волну $u_0(\vec{r}, t) = u_0 \exp[i\vec{k}_{nao} \vec{r} - i\omega t]$ вдали от рассеивающего объема. Записывая его в виде $\hat{u}(\vec{r}, t) = \hat{u}(\vec{r}) \exp[-i\omega t]$, для зависящей только от координат функции $\hat{u}(\vec{r})$ получим уравнение

$$k_0^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 1 + \frac{\delta \varepsilon(\vec{r})}{\varepsilon_0} \hat{u}(\vec{r}) + \Delta \hat{u}(\vec{r}) = 0. \quad (49)$$

Эквивалентное интегральное уравнение имеет вид, аналогичный (19)

$$\hat{u}(\vec{r}) = u_0(\vec{r}) + \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} \int d\vec{r}_1 G_0(\vec{r} - \vec{r}_1) \delta \varepsilon(\vec{r}_1) \hat{u}(\vec{r}_1), \quad u_0(\vec{r}) = u_0 \exp[i\vec{k}_{nao} \vec{r}], \quad (50)$$

где интегрирование проводится по области, занимаемой рассеивающей системой. В отличие от (19), где неоднородный член уравнения был обусловлен локализованным в начале координат источником, неоднородное слагаемое в (50) обеспечивает требуемое обращение решения в плоскую волну вдали от рассеивающего объема (с учетом затухания функции Грина $G_0(\vec{r} - \vec{r}_1)$ при больших значениях аргумента, т.е. вдали от рассеивающего объема). Итерационное решение уравнения (50) имеет вид

$$\hat{u}(\vec{r}) = u_0(\vec{r}) + \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} \int d\vec{r}_1 G_0(\vec{r} - \vec{r}_1) \delta \varepsilon(\vec{r}_1) u_0(\vec{r}_1) + \dots \quad (51)$$

Для интенсивности $I = \langle |\hat{u}(\vec{r}, t)|^2 \rangle = \langle |\hat{u}(\vec{r})|^2 \rangle$ из (51) с учетом (2) находим

$$\begin{aligned} I &= |u_0(\vec{r})|^2 + \frac{k_0^4}{\varepsilon_0^2} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 G_0(\vec{r} - \vec{r}_1) G_0^*(\vec{r} - \vec{r}_2) u_0(\vec{r}_1) u_0^*(\vec{r}_2) \langle \delta \varepsilon(\vec{r}_1) \delta \varepsilon(\vec{r}_2) \rangle + \dots = \\ &= |u_0(\vec{r})|^2 + \frac{k_0^4 |u_0|^2}{\varepsilon_0^2} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 G_0(\vec{r} - \vec{r}_1) G_0^*(\vec{r} - \vec{r}_2) \exp[i\vec{k}_{nao} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] \langle \delta \varepsilon(\vec{r}_1) \delta \varepsilon(\vec{r}_2) \rangle + \dots \end{aligned} \quad (52)$$

Первое слагаемое в (52) представляет собой интенсивность падающей волны, второе – интенсивность рассеяния $I_{расс.}$ в низшем, борновском, приближении (интенсивность однократного рассеяния). Для небольших рассеивающих объемов, линейный размер которых намного меньше длины экстинкции, борновское приближение вполне оправданно. Подставляя в (52) соотношения (16), (21), а также $u_0(\vec{r})$ из (50), получаем

$$I_{расс.} = \frac{k_0^4 |u_0|^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \int_{\vec{r}_1} \int_{\vec{r}_2} \frac{\exp[ik_0(|\vec{r} - \vec{r}_1| - |\vec{r} - \vec{r}_2|) + i\vec{k}_{над}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]}{|\vec{r} - \vec{r}_1||\vec{r} - \vec{r}_2|} D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (53)$$

Упростим это выражение, используя малость отношения $\frac{L}{R}$. Считая, что начало координат лежит внутри рассеивающего объема, видим, что во всей области интегрирования $|\vec{r}_1|, L, |\vec{r}_2|, L$, в то время как $|\vec{r}|; R$. Таким образом, для знаменателей в (53) можно с малой *относительной* погрешностью : $\frac{L}{R}$ положить $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1||\vec{r} - \vec{r}_2|} \cong \frac{1}{R^2}$. В показателе экспоненты в (53) такой точности, однако, недостаточно, поскольку здесь нужна малая *абсолютная* погрешность. При этом надо помнить, что расстояния в показателе экспоненты обезразмериваются длиной волны $\lambda = \frac{2\pi}{k_0}$, которая намного меньше прочих характерных размеров. Уточним расчет:

имеем $(\vec{r} - \vec{r}_1)^2 = r^2 - 2\vec{r}\vec{r}_1 + r_1^2$; $r^2 - 2\vec{r}\vec{r}_1$, откуда находим $|\vec{r} - \vec{r}_1|$; $\sqrt{r^2 - 2\vec{r}\vec{r}_1} = r\sqrt{1 - 2\vec{r}\vec{r}_1/r^2}$; $r(1 - \vec{r}\vec{r}_1/r^2) = r - \vec{r}\vec{r}_1/r$ и, аналогично, $|\vec{r} - \vec{r}_2|$; $r - \vec{r}\vec{r}_2/r$. Подставляя эти выражения в показатель экспоненты в (53), получаем

для него приближенное выражение $i\frac{r}{-}\vec{k}_{над} - k_0\frac{\vec{r}}{r-}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Здесь отношение $\frac{\vec{r}}{r}$ представляет собой единичный вектор направления рассеянной волны, а его произведение на k_0 – не что иное, как волновой вектор рассеянной волны $\vec{k}_{расс} = k_0\frac{\vec{r}}{r}$. Таким образом, рассматриваемый показатель экспоненты можно записать в виде $-i\vec{q}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$, где $\vec{q} = \vec{k}_{расс} - \vec{k}_{над}$ – так называемый *переданный импульс*. Это название связано с тем, что величина $\hbar\vec{k}$ в квантовой механике является импульсом фотона, таким образом $\hbar\vec{k}_{над}$ – импульс падающего фотона, $\hbar\vec{k}_{расс}$ – импульс рассеянного, а $\hbar\vec{q} = \hbar\vec{k}_{над} - \hbar\vec{k}_{расс}$ – дополнительный импульс, который рассеивающая среда “передала” фотону.

Подставляя полученные результаты в (53), находим

$$I_{расс.} = \frac{k_0^4 |u_0|^2}{(4\pi\epsilon_0 R)^2} \int_{\vec{r}_1} \int_{\vec{r}_2} \exp[-i\vec{q}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)] D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (54)$$

Подынтегральное выражение в (54) зависит только от разности $\vec{r}' = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, которую естественно выбрать в качестве новой переменной интегрирования, в качестве второй переменной выберем $\vec{R}' = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$. Учитывая, $d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 = d\vec{r}' d\vec{R}'$, из (54) получим

$$I_{\text{расс.}} = \frac{k_0^4 |u_0|^2}{(4\pi\epsilon_0 R)^2} \underline{d\vec{r}'} \underline{d\vec{R}'} \exp(-i\vec{q}\vec{r}') D(r'). \quad (55)$$

Интеграл по $d\vec{R}'$ дает объем системы V , а интеграл по $d\vec{r}'$ – Фурье-образ функции $D(r)$. Окончательно получаем

$$I_{\text{расс.}} = \frac{k_0^4 |u_0|^2 VD(\vec{q})}{(4\pi\epsilon_0 R)^2}. \quad (56)$$

Эта формула является основным результатом борновского приближения в рассеянии. Обсудим некоторые ее свойства.

1). Как видно из (56), интенсивность рассеяния пропорциональна четвертой степени

k_0 , т.е. обратно пропорциональна четвертой степени длины волны $\lambda = \frac{2\pi}{k_0}$ – закон

Рэлея. Тем самым свет рассеивается тем сильнее, чем меньше его длина волны, этим объясняется голубой цвет неба.

2). Интенсивность рассеяния пропорциональна объему рассеивающей системы.

Это естественное на первый взгляд свойство относится только к рассматриваемому однократному рассеянию.

3). Интенсивность $I_{\text{расс.}}$ зависит от угла рассеяния θ через переданный импульс \vec{q} .

Функция $D(\vec{q})$ зависит только от модуля q , из определения получаем

$$q^2 = k_{\text{расс}}^2 + k_{\text{над}}^2 - 2\vec{k}_{\text{расс}} \vec{k}_{\text{над}} = 2k_0^2(1 - \cos\theta) = 4k_0^2 \sin^2 \theta / 2, \quad \text{где учтено, что}$$

$$|\vec{k}_{\text{расс}}| = |\vec{k}_{\text{над}}| = k_0. \quad \text{Таким образом}$$

$$q = 2k_0 \sin \theta / 2, \quad (57)$$

величина переданного импульса меняется от $q = 0$ при $\theta = 0$ до $q = 2k_0$ при $\theta = \pi$. Функция $D(r)$ отлична от нуля в области порядка корреляционного радиуса r_c , поэтому максимальное значение показателя экспоненты в Фурье-образе $D(q) = \underline{d\vec{r}'} \exp(-i\vec{q}\vec{r}') D(r')$ – порядка $2k_0 r_c = 4\pi r_c / \lambda = 1$ для случаев, когда длина волны значительно превышает величину радиуса корреляции. Тогда $D(q) ; D(q = 0)$ и интенсивность рассеяния не зависит от угла рассеяния – мы имеем дело с **круговой индикатрисой рассеяния**. Величина переданного импульса возрастает до такой степени, что появляется угловая зависимость рассеяния, либо если мы используем источник с более “жестким” излучением, чем видимый свет (с меньшей длиной волны, т.е. с большей частотой), либо при приближении к точкам фазового перехода II рода и критическим точкам, когда радиус корреляции аномально возрастает.

Соотношение (56) используют для экспериментального определения корреляционной функции $D(r)$: измеряя интенсивность рассеяния для углов $0 \theta \theta \pi \pi$, находят $D(q)$ в диапазоне $0 q q k 2k_0$, затем обратным преобразованием Фурье находят $D(r)$

$$D(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{q} \exp(i\vec{q}\vec{r}) D(q) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\pi dq q \sin(qr) D(q), \quad (58)$$

где мы использовали соотношение (12). В последнем интеграле эксперимент позволяет определить $D(q)$ лишь в диапазоне $0 < q < 2k_0$. Функция $D(q)$ при больших q убывает с характерным масштабом r_c^{-1} . Чтобы можно было с достаточной точностью отбросить вклад области $2k_0 < q < \infty$, необходимо выполнение неравенства $2k_0 r_c \gg 1$. Чтобы добиться этого, используют источники с “жестким” излучением (рентген), т.е. с малой длиной волны λ и большим k_0 . Видимый свет используется при исследованиях систем вблизи точек фазовых переходов II рода и критических точек, где радиус корреляции r_c аномально велик.

Рассмотрим в заключение интегральную интенсивность рассеяния $I_{\text{инт}}$, т.е. суммарное рассеяние по всем направлениям \hat{k}_1 $k \frac{\vec{k}_{\text{расс}}}{k_{\text{расс}}}$ рассеянной волны

$$I_{\text{инт}} = \int d\hat{k}_1 I_{\text{расс}}(\vec{q}), \quad \vec{q} = \vec{k}_{\text{расс}} - \vec{k}_{\text{пад}} = k_0(\hat{k}_1 - \hat{k}), \quad (59)$$

где \hat{k} – единичный вектор направления падающей волны $\hat{k} = \frac{\vec{k}_{\text{пад}}}{k_{\text{пад}}}$, а $I_{\text{расс}}(\vec{q})$ определяется формулой (56). Сравнивая соотношения (48) и (59), получаем

$$2I_{\text{ext}}^{-1} = \frac{I_{\text{инт}} R^2}{V |u_0|^2}. \quad (60)$$

Соотношение (60), связывающее длину затухания с интегральной интенсивностью рассеяния является частным случаем так называемой *оптической теоремы*. Его физический смысл состоит в том, что потеря энергии исходной волны и, как следствие, ее экспоненциальное затухание, равна суммарной энергии рассеяния единицей объема по всем направлениям. Множитель 2 в левой части (60) связан с тем, что показатель экспоненты, определяющей затухание интенсивности I , в два раза больше соответствующего показателя для поля u .

Рассеяние вблизи критических точек.

Корреляционная функция $D(r)$ в окрестности критической точки приобретает две характерные особенности:

- 1) как уже отмечалось, в этой области аномально возрастает радиус корреляции, изменяющийся при приближении к критической точке по закону $r_c = r_0 \tau^{-\nu}$, где r_0 – некоторый микромасштаб (порядка значения r_c вдали от точки), $\tau = \frac{T - T_c}{T_c}$ – безразмерное отклонение температуры T от критической T_c , ν – так называемый критический индекс радиуса корреляции, численно $\nu \approx 0.63$;
- 2) в области $r \ll r_0$ функция $D(r)$ приобретает универсальный вид, не зависящий от конкретного вещества и с хорошей точностью описывается формулой Орнштейна-Цернике

$$D(r) = A r_0 \frac{\exp(-r/r_c)}{r}, \quad r \gg r_0, \quad (61)$$

где различные вещества отличаются лишь значениями двух параметров – микро масштаба r_0 и амплитуды A .

В области $r \sim r_0$ функция $D(r)$ по-прежнему остается не универсальной, но многие интегральные характеристики в окрестности критической точки целиком определяются областью $r \sim r_0$ и поэтому также приобретают универсальное поведение. К их числу относится обратная длина затухания (48), неограниченно возрастающая при $T \rightarrow T_c$. Вскоре мы убедимся в этом прямым расчетом.

Нам потребуется Фурье-образ функции (61), его легко найти, если учесть, что функция (61) отличается от (16) лишь амплитудой и заменой $k \rightarrow i/r_c$. Из этого следует, что

$$D(k) = \frac{4\pi A r_0}{k^2 + r_c^{-2}}. \quad (62)$$

Подставляя эту формулу в (56) и учитывая (57), для интенсивности рассеяния получаем

$$I_{\text{расс.}} = \frac{k_0^4 |u_0|^2 V A r_0}{4\pi (\varepsilon_0 R)^2} \varepsilon \frac{1}{4k_0^2 \sin^2(\theta/2) + r_c^{-2}}. \quad (63)$$

Из этого соотношения видно, что в окрестности критической точки индикатриса рассеяния “вытянута вперед”, в самой критической точке, когда $r_c^{-1} = 0$, она сингулярна на нулевом угле рассеяния.

Перейдем к вычислению длины затухания. Подставим (62) в (48) и перейдем к интегрированию в сферической системе координат с полярной осью вдоль вектора \hat{k} . Тогда подынтегральное выражение в (48) запишется в виде

$$D(k_0 \left| \hat{k} - \hat{k}_1 \right|) = \frac{4\pi A r_0}{k_0^2 (\hat{k} - \hat{k}_1)^2 + r_c^{-2}} = \frac{4\pi A r_0}{2k_0^2 (1 - \cos \theta) + r_c^{-2}}. \quad (64)$$

Это выражение не зависит от угла φ , интегрирование по которому дает 2π , так что из (48) получаем

$$l_{\text{ext}}^{-1} = \frac{A r_0 k_0^4}{4\varepsilon_0^2} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{2k_0^2 + r_c^{-2} - 2k_0^2 \cos \theta} = \frac{A r_0 k_0^4}{4\varepsilon_0^2} \int_{-1}^1 dx \frac{1}{2k_0^2 + r_c^{-2} - 2k_0^2 x},$$

где в последнем равенстве сделана замена $\cos \theta = x$. Выполняя интегрирование, окончательно получаем

$$l_{\text{ext}}^{-1} = \frac{A r_0 k_0^2}{8\varepsilon_0^2} \ln(1 + 4k_0^2 r_c^2). \quad (65)$$

Из этого выражения видно, что обратная длина затухания логарифмически обращается в бесконечность при $T \rightarrow T_c$ ($r_c \rightarrow 0$). Соответственно длина затухания обращается в критической точке в ноль, т.е. исходный луч мгновенно затухает, войдя во флуктуирующую среду. Этот не физический факт является следствием того, что сильное затухание является

следствием сильного рассеяния, поэтому уже нельзя ограничиваться первым слагаемым в Σ , как это сделано при выводе формулы (48). Как будет показано в следующем разделе, сильное затухание в критической точке приводит к смене самого закона затухания на “сверхэкспоненциальный”, т.е. на более быстрый, чем экспонента в (39).

В заключение этого раздела отметим, что обращение обратной длины затухания Γ_{ext}^{-1} в бесконечность в критической точке можно было увидеть, не производя явных вычислений. Слегка переписав подынтегральное выражение в (48), вместо (64) запишем

$$D(k_0 | \hat{k} - \hat{k}_1 |) = \frac{4\pi A r_0}{4k_0^2 \sin^2(\theta/2) + r_c^{-2}}.$$

Непосредственно в критической точке это приводит к выражению

$$D(k_0 | \hat{k} - \hat{k}_1 |) = \frac{\pi A r_0}{k_0^2 \sin^2(\theta/2)}, \quad T = T_c, \quad (66)$$

содержащему неинтегрируемую сингулярность на нулевом угле.

Эйкональное приближение. Сверхэкспоненциальное затухание.

В реальном эксперименте всегда есть погрешность δT в фиксации температуры системы. Даже совершенные системы термостатирования не позволяют “держат” температуру (т.е. не давать ей “плавать” под влиянием внешних условий) точнее, чем $10^{-4} K$. Поэтому с уверенностью подойти к критической точке можно только на величину $T - T_c \sim 10^{-4} K$.

Это означает, что можно следить за ростом критического радиуса $r_c = r_0 \tau^{-\nu}$ (где $\tau = (T - T_c)/T_c$, $\nu \approx 0.63$) лишь до некоторого максимального значения порядка $12000 r_0$ (для оценки взято $T_c = 300 K$). Это очень большой рост, но соответствующая длина экстинкции (64) вырастет намного меньше (из-за очень медленного роста логарифма). Экспериментально рост длины затухания, конечно, наблюдают, но проблема ее расходимости при $T = T_c$ является скорее академической.

Однако известны и широко используются в настоящее время вещества, у которых флуктуации ведут себя подобно флуктуациям в критической точке в широком диапазоне температур – это **нематические жидкие кристаллы** (НЖК). Для них проблема “нулевой длины затухания” является актуальной. Рассмотрим ее решение на основе так называемого **эйконального** приближения.

Рассмотрим систему, в которой жидкий кристалл занимает полупространство $z \geq 0$. НЖК характеризуется сильно развитыми флуктуациями $\delta\epsilon(\vec{r})$ диэлектрической проницаемости $\epsilon(\vec{r}) = \epsilon_0 + \delta\epsilon(\vec{r})$, коррелятор которых имеет вид

$$D(r) = A \frac{r_0}{r}, \quad r \gg r_0. \quad (67)$$

Замечание. При рассмотрении НЖК мы, как и ранее при рассмотрении поля $\hat{u}(\vec{r})$, пренебрегаем значковой структурой рассматриваемых величин, что не меняет качественно получаемых результатов.

Будем считать для простоты, что полупространство $z < 0$ характеризуется тем же, что и НЖК, значением ϵ_0 (но флуктуаций $\delta\epsilon(\vec{r})$ здесь нет). Пусть на НЖК падает перпендику-

лярно границе раздела плоская монохроматическая волна $u_0(\vec{r}, t) = u_0 \exp[ik_0 z - i\omega t]$. Войдя в жидкий кристалл, волна будет рассеиваться, и, как следствие, ее среднее значение $\langle \hat{u}(\vec{r}, t) \rangle$ будет затухать. Нашей задачей будет описать характер этого затухания.

Как обычно, выделим прежде всего явную зависимость искомого решения от времени в виде $\hat{u}(\vec{r}, t) = e^{-i\omega t} \hat{u}(\vec{r})$, тогда функция $\hat{u}(\vec{r})$ будет удовлетворять уравнению (49). Напомним, что общая идеология решения подобных стохастических задач состоит в том, что надо найти решение уравнения (49) при произвольной флуктуации $\delta\mathcal{E}(\vec{r})$, и затем усреднить результат по всевозможным флуктуациям. Буквально эту программу выполнить не удастся – точное решение при произвольной $\delta\mathcal{E}(\vec{r})$ не найти. До сих пор мы следовали по такому пути – искали решение по теории возмущений, рассматривая $\delta\mathcal{E}(\vec{r})$ как формальный малый параметр, а затем усредняли полученный результат. Выяснили, что “лобовая” теория возмущений несостоятельна, она не описывает затухания волны, а более адекватной является теория возмущений “в показателе экспоненты” (см. (35) и текст ниже). Но применительно к системам с бесконечным радиусом корреляции типа (67) и этого оказывается недостаточно, необходимо модифицировать теорию возмущений. Основная идея метода эйконала состоит в том, чтобы еще до усреднения переписать решение в экспоненциальной форме, а затем строить теорию возмущений для показателя экспоненты. Итак, будем искать решение в виде

$$\hat{u}(\vec{r}) = u_0 \exp[ik_0 z + i\hat{\psi}(\vec{r})] , \quad (68)$$

где $\hat{\psi}(\vec{r})$ - новая неизвестная функция, так называемый эйконал. Подставляя (68) в (49) и учитывая, что

$$\begin{aligned} \Delta \hat{u}(\vec{r}) &= u_0 \psi_j k_j e^{ik_0 z + i\hat{\psi}(\vec{r})} = u_0 \Delta e^{i\hat{\psi}(\vec{r})} r_j i_j e^{ik_0 z} + 2e_j e^{ik_0 z} e_j e^{i\hat{\psi}(\vec{r})} + e^{ik_0 z} i_j k_j e^{i\hat{\psi}(\vec{r})} \Psi \\ &= u_0 e^{ik_0 z + i\hat{\psi}(\vec{r})} \underline{\Delta} k_0^2 - 2k_0 k_z \hat{\psi}(\vec{r}) - (r_j \hat{\psi}(\vec{r}))^2 + i +_j e_j \hat{\psi}(\vec{r}) \Xi, \end{aligned}$$

получим уравнение на $\hat{\psi}(\vec{r})$:

$$\frac{k_0^2 \delta\mathcal{E}(\vec{r})}{\varepsilon_0} - 2k_0 \psi_z \hat{\psi}(\vec{r}) - (i_j \hat{\psi}(\vec{r}))^2 + i)_j \hat{\psi}(\vec{r}) = 0 . \quad (69)$$

На первый взгляд это нелинейное уравнение еще сложнее, чем исходное (49), его использование становится оправданным именно для систем с очень далекими и медленно меняющимися флуктуациями $\delta\mathcal{E}(\vec{r})$, как в (67). Действительно, для флуктуаций такого типа можно ожидать, что решение $\hat{\psi}(\vec{r})$ будет обладать такими же свойствами, тогда любое дифференцирование этой плавной функции может считаться “меткой малости”. С таких позиций последними двумя слагаемыми в (69) в главном приближении можно пренебречь и мы приходим к простому уравнению

$$\varepsilon_z \hat{\psi}(\vec{r}) = \frac{k_0 \delta\mathcal{E}(\vec{r})}{2\varepsilon_0} , \quad (70)$$

допускающему интегрирование при произвольной $\delta\mathcal{E}(\vec{r})$:

$$\hat{\psi}(\vec{r}) = \frac{k_0}{2\varepsilon_0} \int_0^z dz_1 \delta\mathcal{E}(z_1, \vec{\rho}), \quad \vec{r} = \{z, \vec{\rho}\} , \quad (71)$$

где мы ввели вектор $\vec{\rho}$, как составляющую вектора \vec{r} в плоскости, ортогональной оси z и учли при интегрировании, что $\hat{\psi}(\vec{r})|_{z=0} = \hat{\psi}(z=0, \vec{\rho}) = 0$. Подставляя (71) в (68), находим

$$\hat{u}(\vec{r}) ; u_0 \exp \left[ik_0 z + \frac{ik_0}{2\varepsilon_0} \int_0^z dz_1 \delta\varepsilon(z_1, \vec{\rho}) \right] \varepsilon \quad (72)$$

Полученное приближенное решение должно быть оправдано, по большому счету, тем, что на этом решении отброшенные поправки действительно малы. Мы не будем делать этого, а покажем, что решение (72) имеет очень простую интерпретацию, которую иногда кладут в основу ее вывода (но тогда неясен вопрос с поправками).

Будем рассуждать так. Что такое $k_0 z$ в показателе (72)? Это – набег фазы волны, прошедшей расстояние z вдоль оси z в системе с однородной диэлектрической проницаемостью ε_0 . Вспоминая, что $k_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0}$, можно записать $k_0 z = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} z$. Пусть имеем систему с неоднородной $\varepsilon(\vec{r})$, медленно меняющейся с координатой. Тогда на малых кусочках траектории луча можно считать $\varepsilon(\vec{r})$ локально постоянной, и для набег фазы при прохождении лучом малого расстояния dz_1 около точки \vec{r} использовать выражение $\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\vec{r})} dz_1$, на конечном расстоянии от нуля до z ответ получается интегрированием $\frac{\omega}{c} \int_0^z dz_1 \sqrt{\varepsilon(z_1, \vec{\rho})}$.

Учтем в этом выражении, что $\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1$ и разложим корень в ряд:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{c} \int_0^z dz_1 \sqrt{\varepsilon(z_1, \vec{\rho})} &= \frac{\omega}{c} \int_0^z dz_1 \sqrt{\varepsilon_0 + \delta\varepsilon(z_1, \vec{\rho})} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \int_0^z dz_1 \sqrt{1 + \frac{\delta\varepsilon(z_1, \vec{\rho})}{\varepsilon_0}} ; \\ &; k_0 z + \frac{k_0}{2\varepsilon_0} \int_0^z dz_1 \delta\varepsilon(z_1, \vec{\rho}). \end{aligned}$$

Полученный таким образом набег фазы совпадает с эйкональным приближением (72).

Следующий шаг состоит в усреднении выражения (72) с гауссовым распределением флуктуаций $\delta\varepsilon$. С этой целью напомним основные формулы для распределения Гаусса многих переменных.

Распределение Гаусса для многих переменных.

Пусть имеем набор $\{a\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ распределенных по Гауссу случайных величин. Соответствующая функция распределения дается выражением

$$\rho(\{a\}) = C \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^n a_j A_{jl} a_l \right] \quad (73)$$

где A – симметричная матрица, а постоянная C определяется из условия нормировки

$$\int_{-a}^a da_1 \int_{-a}^a da_2 \dots \int_{-a}^a da_n \rho(\{a\}) = 1. \quad (74)$$

Среднее значение нечетного числа сомножителей a_j с распределением (73) равно нулю, среднее значение пары дается формулой

$$\langle a_m a_k \rangle = (A)_{mk}^{-1}, \quad (75)$$

среднее значение от произведения четного числа сомножителей a_j дается уже упоминавшейся формулой Вика. Эта формула является следствием выражения для так называемой производящей функции

$$W(\{\alpha\}) = W(\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \alpha \left\langle \exp \prod_{j=1}^n \alpha_j a_j \right\rangle_{\alpha}, \quad (76)$$

знание которой позволяет простым дифференцированием рассчитать средние значения от произведения любого числа сомножителей:

$$\langle a_1 a_2 \dots a_l \rangle = \frac{\partial^l W(\{\alpha\})}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_l} \Big|_{\{\alpha\}=0}. \quad (77)$$

Функцию $W(\{\alpha\})$ с распределением (73) удастся рассчитать в явном виде

$$W(\{\alpha\}) = \exp \prod_{j,l=1}^n \alpha_j (A)_{jl}^{-1} \alpha_l, \quad (78)$$

или, с учетом (75),

$$W(\{\alpha\}) = \exp \prod_{j,l=1}^n \alpha_j \langle a_j a_l \rangle \alpha_l. \quad (79)$$

Подстановка (79) в (77) позволяет доказать теорему Вика. Полагая в (77) $l = 2m$ (четное число сомножителей), имеем

$$\begin{aligned} \langle a_1 \dots a_{2m} \rangle &= \frac{\partial^{2m}}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_{2m}} \exp \prod_{j,l=1}^n \alpha_j \langle a_j a_l \rangle \alpha_l \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \frac{\partial^{2m}}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_{2m}} \prod_{k=0}^m \frac{1}{k!} \prod_{j,l=1}^n \alpha_j \langle a_j a_l \rangle \alpha_l \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial^{2m}}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_{2m}} \frac{1}{m!} \prod_{j,l=1}^n \alpha_j \langle a_j a_l \rangle \alpha_l \Big|_{\alpha=0}, \end{aligned} \quad (80)$$

где мы учли, что в сумме по k выживает единственное слагаемое с $k = m$.

Докажем соотношения (75), (78).

Начнем с вычисления нормировочного множителя C в (73). Интеграл в (74) легко можно было бы вычислить с помощью формулы

$$\int_{-a}^a da \exp(-\beta a^2) = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, \quad (81)$$

если бы показатель экспоненты в (73) содержал только сумму квадратов случайных величин. От недиагональных элементов суммы можно избавиться, сделав в (74) подходящую линейную замену переменных

$$a_j = \prod_{k=1}^n b_{jk} y_k \quad (82)$$

и выбирая матрицу b так, чтобы было

$$\prod_{j,l=1}^n a_j A_{jl} a_l = \prod_{j,l,k,m=1}^n b_{jk} y_k A_{jl} b_{lm} y_m = \prod_{j=1}^n y_j^2, \quad (83)$$

Это налагает на матрицу b условие

$$\prod_{j,l=1}^n b_{jk} A_{jl} b_{lm} = \delta_{km}, \quad (84)$$

из которого, в частности, следует, что, как и A , матрица b является симметричной. С учетом этого соотношение (84) можно записать в матричном виде:

$$(bAb)_{km} = \delta_{km}, \quad \text{или} \quad bAb = 1. \quad (85)$$

Домножая (84) слева и справа на b^{-1} , находим отсюда, что $A = b^{-2}$ и, следовательно,

$$b^2 = A^{-1}. \quad (86)$$

Сосчитаем интеграл (74), переходя к переменным y_j из (82). Учитывая, что при такой линейной замене

$$da_1 \dots da_n = \left| \frac{y(a_1 \dots a_n)}{y_1 \dots y_n} \right| dy_1 \dots dy_n = |Det b| dy_1 \dots dy_n, \quad (87)$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} da_1 \dots da_n \rho(\{a\}) &= C |Det b| \int_{-\infty}^{\infty} y_1 \dots y_n \exp \left(-\frac{1}{2} \prod_{j=1}^n y_j^2 \right) dy_1 \dots dy_n \\ &= C |Det b| (\sqrt{2\pi})^n = 1, \end{aligned}$$

где мы воспользовались формулой (81) с $\beta = \frac{1}{2}$. Отсюда находим нормировочную постоянную:

$$C = \frac{1}{|Det b| (2\pi)^{n/2}}. \quad (88)$$

Входящий в (88) $|Det b|$ можно выразить непосредственно через детерминант исходной матрицы A , учитывая, что, согласно (85), $(Det b)^2 Det A = 1$, следовательно,

$$\text{Det } b = \frac{1}{(\text{Det } A)^{1/2}}. \quad (89)$$

Учитывая (88), (89), получаем окончательную формулу нормированного распределения Гаусса (73)

$$\rho(\{a\}) = \frac{(\text{Det } A)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^n a_j A_{jl} a_l \right]. \quad (90)$$

Перейдем к доказательству формулы (75). С учетом (82), (83), (87) имеем

$$\begin{aligned} \langle a_m a_k \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} da_1 \dots da_n a_m a_k \rho(\{a\}) = \\ &= |\text{Det } b| \int_{-\infty}^{\infty} b_{mj} b_{kl} dy_1 \dots dy_n y_j y_l \frac{1}{|\text{Det } b| (2\pi)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{s=1}^n y_s^2 \right] = \end{aligned}$$

По соображениям четности интеграл в этом выражении равен нулю при $j \neq l$, откуда, с учетом (81) и (86), находим

$$\begin{aligned} \langle a_m a_k \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} b_{mj} b_{kl} dy_1 \dots dy_n y_j^2 \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{s=1}^n y_s^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} b_{mj} b_{kj} dy_j = \\ &= (b^2)_{mk} = (A^{-1})_{mk}, \end{aligned}$$

что и доказывает соотношение (75).

Докажем теперь соотношение (78). Из (76), (90) имеем

$$W(\{\alpha\}) = \left\langle \exp \left[-\sum_{j=1}^n \alpha_j a_j \right] \right\rangle = \frac{(\text{Det } A)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} da_1 \dots da_n \exp \left[-\sum_{j,l=1}^n a_j A_{jl} a_l - \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k \right].$$

Переходя к переменным (82), и учитывая (87), (89), находим отсюда

$$W(\{\alpha\}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \dots dy_n \exp \left[-\sum_{j=1}^n y_j^2 + \sum_{j,k=1}^n \alpha_k b_{kj} y_j \right].$$

Выделяя в показателе экспоненты полные квадраты

$$-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n y_j^2 + \sum_{j,k=1}^n \alpha_k b_{kj} y_j = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n y_j^2 - \sum_{k=1}^n \alpha_k b_{kj} y_j + \sum_{j,k,k_1=1}^n \alpha_k b_{kj} \alpha_{k_1} b_{k_1 j} \quad \text{и переходя к}$$

переменным интегрирования $Y_j = y_j - \sum_{k=1}^n \alpha_k b_{kj}$, получим

$$W(\{\alpha\}) = \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j,k,k_1=1}^n \alpha_k b_{kj} \alpha_{k_1} b_{k_1j} \right]}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{j=1}^n dY_j \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n Y_j^2 \right]$$

$$= \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j,k,k_1=1}^n \alpha_k b_{kj} \alpha_{k_1} b_{k_1j} \right]$$

где мы использовали соотношение (81). Учитывая симметричность матрицы b , а также соотношение (86), преобразуем показатель экспоненты к виду

$$\sum_{j,k,k_1=1}^n \alpha_k b_{kj} \alpha_{k_1} b_{k_1j} = \sum_{j,k,k_1=1}^n \alpha_k b_{kj} b_{j k_1} \alpha_{k_1} = \sum_{k,k_1=1}^n \alpha_k (b^2)_{kk_1} \alpha_{k_1} = \sum_{k,k_1=1}^n \alpha_k (A^{-1})_{kk_1} \alpha_{k_1},$$

что и доказывает соотношение (78).

Используем теперь формулу (79) для нахождения среднего значения поля, даваемого выражением (72):

$$u(r) = \langle \hat{u}(\vec{r}) \rangle; u_0 \exp[ik_0 z] \left\langle \exp \left[\frac{\varepsilon ik_0}{2\varepsilon_0} \int_0^z dz_1 \delta\varepsilon(z_1, \vec{\rho}) \right] \right\rangle. \quad (91)$$

Для этого сформулируем правила перехода от случая дискретного набора многих переменных $\{a\}$ $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ к непрерывному набору $\delta\varepsilon$. Сравнивая усредняемые экспоненты в (76) и (91), заключаем, что суммирование по дискретному набору $\prod_{j=1}^n \dots$ в (76) заменяется в

(91) интегрированием $\int_0^z dz_1 \dots$, дискретный набор $\{a\}$ $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ заменяется непрерыв-

ной случайной переменной $\delta\varepsilon(z_1)$, роль множителей α_j в (76) играет произведение $\frac{ik_0}{2\varepsilon_0}$ (в

данном случае оно не зависит от переменной интегрирования z_1). Используя результат усреднения экспоненты (76) – формулу (79) – для вычисления среднего в (91), надо сделать

в (79) соответствующие замены $\prod_{j=1}^n \int_0^z dz_1, \prod_{l=1}^n \int_0^z dz_2, \alpha_j \alpha_l d - \frac{k_0^2}{4\varepsilon_0^2}$, а среднее значение $\langle a_j a_l \rangle$ заменить на $\langle \delta\varepsilon(z_1, \vec{\rho}) \delta\varepsilon(z_2, \vec{\rho}) \rangle = D(z_1 - z_2)$. Это дает

$$\left\langle \exp \left[\frac{\varepsilon ik_0}{2\varepsilon_0} \int_0^z dz_1 \delta\varepsilon(z_1, \vec{\rho}) \right] \right\rangle = \exp \left[-\frac{k_0^2}{8\varepsilon_0^2} \int_0^z dz_1 \int_0^z dz_2 D(z_1 - z_2) \right]. \quad (92)$$

Упростим интеграл в (92). Учитывая, что $D(x) = D(|x|)$, область интегрирования в (92) – квадрат со стороной z – заменим на удвоенный интеграл по половине квадрата – $\int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2$, а затем вместо z_2 введем новую переменную интегрирования $x = z_1 - z_2$:

$$\int_0^z \int_0^{z_1} dz_1 dz_2 D(z_1 - z_2) = 2 \int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 D(z_1 - z_2) = 2 \int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dx D(x) .$$

Проинтегрируем теперь полученное выражение по частям по z_1 :

$$J = 2z \int_0^z dx D(x) - 2 \int_0^z dz_1 z_1 D(z_1) = 2 \int_0^z dx (z - x) D(x) .$$

Подставляя это выражение в (92), а полученный результат – в (91), находим

$$u(r) = u_0 \exp \left[ik_0 z - \frac{k_0^2}{4\varepsilon_0^2} \int_0^z dx (z - x) D(x) \right] . \quad (93)$$

Будем интересоваться в (93) расстояниями $z \gg r_0$ и выделим в интеграле главный при больших z вклад. Этот вклад обусловлен медленным затуханием функции $D(x)$ из (67) при больших x , благодаря чему первое слагаемое в интеграле логарифмически расходится при $z \gg r_0$. Подставляя (67) в (93) и вычисля вклад в интеграл в области применимости формулы (67) $br_0 \ll x \ll z$, где $b \gg 1$, имеем

$$\int_0^z dx z D(x) ; \int_{br_0}^z dx \frac{Ar_0}{x} = Az r_0 \ln(z / br_0) .$$

Подставляя это выражение в (93), находим окончательно

$$u(r) = u_0 \exp \left[ik_0 z - \frac{Ak_0^2 r_0}{4\varepsilon_0^2} z \ln(z / br_0) \right] . \quad (94)$$

Формула (94) показывает, что затухание луча в жидком кристалле происходит “сверхэкспоненциально” – если записать множитель, определяющий затухание, в обычной форме $\exp(-z / l_{ext})$, то в данном случае коэффициент при z зависит от z :

$l_{ext}^{-1} = l_{ext}^{-1}(z) = \frac{Ak_0^2 r_0}{4\varepsilon_0^2} \ln(z / br_0)$ и неограниченно растет с ростом z , а соответствующая

“длина затухания” $l_{ext}(z)$ обращается в ноль.

Отметим, что в показателе экспоненты в (93) присутствуют и обычные, линейные по z вклады, которыми мы пренебрегли по сравнению со “сверхэкспоненциальным” – это вклад от области $0 < x < br_0$ в первом слагаемом, и все второе слагаемое.

Учет зависимости диэлектрической проницаемости от времени.

Учет зависимости флуктуаций $\delta\varepsilon$ от времени приводит к появлению тонких физических эффектов, главным из которых является то, что рассеянная волна не является в этом случае монохроматической, а включает в себя целый спектр частот. Хотя эти частоты весьма близки к частоте падающего света, форма спектра надежно определяется современными приборами, а из формы спектра удастся извлекать важную физическую информацию о рассеивающей системе.

Итак, пусть в волновом уравнении (1) флуктуации $\delta\varepsilon$ зависят от времени:

$$\frac{\varepsilon(\vec{r}, t)}{c^2} \frac{\varepsilon^2 u}{\varepsilon t^2} - \Delta u = 0, \quad \varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon(\vec{r}, t) . \quad (95)$$

Статистику $\delta\varepsilon$ по-прежнему будем считать гауссовой с нулевым средним и коррелятором

$$\langle \delta\varepsilon(\vec{r}_1, t_1) \delta\varepsilon(\vec{r}_2, t_2) \rangle \delta D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, t_1 - t_2), \quad (96)$$

зависящим от разности $t_1 - t_2$ в силу предполагаемой трансляционной инвариантности по времени. Если эта разность велика, то вступает в силу принцип ослабления корреляций и среднее в (96) обращается в ноль. Характерные времена τ , на которых флуктуации скоррелированы по времени, определяются молекулярными процессами в системе, как уже отмечалось, они намного больше времени ω^{-1} , характеризующего световую волну, т.е.

$$\omega\tau \gg 1. \quad (97)$$

Для построения теории возмущений нам потребуется функция Грина $G_0(\vec{r}, t)$ уравнения (95) в отсутствие флуктуаций

$$\frac{\varepsilon_0}{c^2} \delta \frac{\delta^2 G_0(\vec{r}, t)}{\delta t^2} - \Delta G_0(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r})\delta(t). \quad (98)$$

Эта функция должна отвечать принципу причинности, т.е. быть запаздывающей:

$$G_0(\vec{r}, t < 0) = 0. \quad (99)$$

Для ее Фурье-образа по времени это проявляется в том, что величина

$$G_0(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} G_0(\vec{r}, t) = \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} G_0(\vec{r}, t), \quad (100)$$

рассматриваемая как функция комплексной частоты ω , не имеет особенностей в верхней полуплоскости $\text{Im } \omega > 0$, т.к. в этой области в экспоненте в (100) появляется дополнительный затухающий множитель. Аналогичным свойством обладает и функция $G_0(\vec{k}, \omega)$.

Для функции $G_0(\vec{r}, \omega)$ получаем из (98) уравнение

$$-\frac{\varepsilon_0 \omega^2}{c^2} G_0(\vec{r}, \omega) - \Delta G_0(\vec{r}, \omega) = \delta(\vec{r}), \quad (101)$$

совпадающее с (7), если заменить в (101) множитель ω^2 на $\tilde{\omega}^2$. Величина $\tilde{\omega}$ была введена в (7) с целью отбора решения, отвечающего адиабатическому включению монохроматического источника в бесконечно далеком прошлом. Оказывается, что полученную таким образом функцию Грина (16), рассматриваемую как функцию частоты ω , можно отождествить с искомой $G_0(\vec{r}, \omega)$, т.е. положить

$$G_0(\vec{r}, \omega) = \frac{\exp(i\sqrt{\varepsilon_0} \omega r)}{4\pi r}. \quad (102)$$

Действительно, эта функция удовлетворяет уравнению (101), а ее Фурье-образ

$$G_0(\vec{r}, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} G_0(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\omega}{2\pi} \exp[i\omega(\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c} r - t)] = \frac{\delta(\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c} r - t - \frac{\pi}{2})}{4\pi r} \quad (103)$$

удовлетворяет условию (99) (т.к. при $t < 0$ аргумент δ -функции положителен при всех r). Нетрудно убедиться, что функции (102) и ее Фурье-образ по координате (10) действительно не имеют особенностей в верхней плоскости комплексной переменной ω .

Частотный спектр рассеянного света в борновском приближении

Сохраняя прежнюю постановку задачи о рассеянии монохроматической волны, учтем зависимость $\delta\varepsilon$ от времени. Используя найденную функцию Грина, перепишем уравнение (95) в интегральном виде, аналогичном (50)

$$\hat{u}(\vec{r}, t) = u_0(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \int_{\vec{r}_1} d\vec{r}_1 \int_{t_1} dt_1 G_0(\vec{r} - \vec{r}_1, t - t_1) \delta\varepsilon(\vec{r}_1, t_1) \frac{\omega^2}{t_1^2} \hat{u}(\vec{r}_1, t_1), \quad (104)$$

$$u_0(\vec{r}, t) = u_0 \exp[i\vec{k}_{nao} \vec{r} - i\omega t].$$

В приближении однократного рассеяния решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{u}(\vec{r}, t) & ; u_0(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \int_{\vec{r}_1} d\vec{r}_1 \int_{t_1} dt_1 G_0(\vec{r} - \vec{r}_1, t - t_1) \delta\varepsilon(\vec{r}_1, t_1) \frac{\delta^2}{t_1^2} u_0(\vec{r}_1, t_1) = \\ & = u_0(\vec{r}, t) + \frac{\omega^2}{c^2} u_0 \int_{\vec{r}_1} d\vec{r}_1 \int_{t_1} dt_1 G_0(\vec{r} - \vec{r}_1, t - t_1) \delta\varepsilon(\vec{r}_1, t_1) \exp[i\vec{k}_{nao} \vec{r}_1 - i\omega t_1] t \\ & = u_0(\vec{r}, t) + \hat{u}_1(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (105)$$

Из (104) получаем интенсивность рассеяния в борновском приближении:

$$\begin{aligned} I_{racc.}(\vec{r}, t) & = \langle |\hat{u}_1(\vec{r}, t)|^2 \rangle = \frac{k_0^4 |u_0|^2}{\varepsilon_0^2} \int_{\vec{r}_1} d\vec{r}_1 \int_{t_1} dt_1 \int_{\vec{r}_2} d\vec{r}_2 \int_{t_2} dt_2 G_0(\vec{r} - \vec{r}_1, t - t_1) G_0^*(\vec{r} - \vec{r}_2, t - t_2) r \\ & \langle \delta\varepsilon(\vec{r}_1, t_1) \delta\varepsilon(\vec{r}_2, t_2) \rangle \exp[i\vec{k}_{nao} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - i\omega(t_1 - t_2)]. \end{aligned} \quad (106)$$

Учитывая (95) и раскладывая все функции в (106) в интегралы Фурье по времени

$$\begin{aligned} G_0(\vec{r} - \vec{r}_1, t - t_1) & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 e^{-i\omega_1(t-t_1)} G_0(\vec{r} - \vec{r}_1, \omega_1), \\ G_0^*(\vec{r} - \vec{r}_2, t - t_2) & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 e^{i\omega_2(t-t_2)} G_0^*(\vec{r} - \vec{r}_2, \omega_2), \\ D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, t_1 - t_2) & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_3 e^{-i\omega_3(t_1-t_2)} D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \omega_3), \end{aligned} \quad (107)$$

получим:

$$\begin{aligned} I_{racc.}(\vec{r}, t) & = \frac{k_0^4 |u_0|^2}{(2\pi)^3 \varepsilon_0^2} \int_{\vec{r}_1} d\vec{r}_1 \int_{\vec{r}_2} d\vec{r}_2 \int_{t_1} dt_1 \int_{t_2} dt_2 \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 G_0(\vec{r} - \vec{r}_1, \omega_1) G_0^*(\vec{r} - \vec{r}_2, \omega_2) \omega \\ & D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \omega_3) \exp\{i[t_1(\omega_1 - \omega_3 - \omega) + t_2(\omega - \omega_2 + \omega_3) + t(\omega_2 - \omega_1)]\} \exp[i\vec{k}_{nao} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Выполняя в (108) интегрирование по времени, имеем:

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\pi}{=} dt_1 e^{it_1[\omega_1 - \omega_3 - \omega]} = 2\pi \delta(\omega_1 - \omega_3 - \omega), \\
& \stackrel{-}{=} dt_2 e^{it_2[-\omega_2 + \omega_3 + \omega]} = 2\pi \delta(\omega - \omega_2 + \omega_3).
\end{aligned} \tag{109}$$

Используя полученные δ -функции (109), выполним в (108) интегрирование по частотам ω_1 и ω_2 :

$$\begin{aligned}
I_{\text{расс.}}(\vec{r}, t) &= \frac{k_0^4 |u_0|^2}{2\pi \varepsilon_0^2} \stackrel{=}{=} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 G_0(\vec{r} - \vec{r}_1, \omega_1) G_0^*(\vec{r} - \vec{r}_2, \omega_2) D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \omega_3) \omega \\
& \stackrel{=}{=} \delta(\omega_1 - \omega_3 - \omega) \delta(\omega - \omega_2 + \omega_3) \exp[t(\omega_2 - \omega_1)] \exp[i\vec{k}_{\text{над.}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] = \\
& = \frac{k_0^4 |u_0|^2}{2\pi \varepsilon_0^2} \stackrel{=}{=} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \int d\omega_3 G_0(\vec{r} - \vec{r}_1, \omega + \omega_3) G_0^*(\vec{r} - \vec{r}_2, \omega + \omega_3) D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \omega_3) \exp[i\vec{k}_{\text{над.}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]
\end{aligned} \tag{110}$$

Формула (110) показывает, что интенсивность рассеяния не зависит от времени, она представляет собой сумму вкладов сферических волн с частотами $\omega + \omega_3$, отличающимися на ω_3 от частоты ω падающего на систему монохроматического излучения. Однако эта сдвигка частоты на самом деле очень мала. Действительно, функция $D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \omega_3)$ в (110) затухает на частотах $\omega_3 > \tau^{-1}$, превышающих характерные частоты τ^{-1} движения молекул. Следовательно, интегрирование по ω_3 в (110) ограничено областью $0 - \omega_3 \tau \tau^{-1}$, в которой $\omega_3 = \omega$ в силу (97).

Таким образом, спектр частот, дающих вклад в интенсивность рассеяния, лежит в очень узкой окрестности частоты падающего излучения. Тем не менее, современные приборы могут с большой точностью измерять вид этого спектра. С этой целью в них включают спектральный анализатор, пропускающий в прибор лишь свет в узком диапазоне частот $\Delta\omega$ в окрестности некоторой частоты Ω (которую можно менять). Будем отсчитывать эту частоту от частоты падающего излучения $\Omega = \omega + \omega_*$. Тогда фиксирование частоты $\omega + \omega_3$ пропускаемой сферической волны в (110) означает, что мы должны снять интегрирование по ω_3 и положить в подынтегральном выражении $\omega_3 = \omega_*$: $\int d\omega_3 \psi(\omega_3) \rightarrow \Delta\omega \psi(\omega_*)$. В результате получим для **спектральной интенсивности рассеяния** соотношение

$$\begin{aligned}
I_{\text{расс.}}(\vec{r}, \omega_*) &= \frac{k_0^4 |u_0|^2 \Delta\omega}{2\pi \varepsilon_0^2} \stackrel{=}{=} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 G_0(\vec{r} - \vec{r}_1, \omega + \omega_*) G_0^*(\vec{r} - \vec{r}_2, \omega + \omega_*) \int \\
& \stackrel{=}{=} D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \omega_*) \exp[i\vec{k}_{\text{над.}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)].
\end{aligned} \tag{111}$$

Как уже отмечалось, в той области частот ω_* , где функция $D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \omega_*)$ отлична от нуля, выполняется неравенство $\omega \gg \omega_*$, поэтому малой сдвигкой аргументов в функциях $G_0(\omega + \omega_*)$ можно пренебречь:

$$\begin{aligned}
I_{\text{расс.}}(\vec{r}, \omega_*) &= \frac{k_0^4 |u_0|^2 \Delta\omega}{2\pi \varepsilon_0^2} \stackrel{=}{=} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 G_0(\vec{r} - \vec{r}_1, \omega) G_0^*(\vec{r} - \vec{r}_2, \omega) D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \omega_*) \int \\
& \stackrel{=}{=} \exp[i\vec{k}_{\text{над.}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)].
\end{aligned} \tag{112}$$

Формула (112) отличается от интенсивности рассеяния (52) дополнительным множителем $\frac{\Delta\omega}{2\pi}$ и заменой функции $D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ на $D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \omega_*)$. Дальнейшие упрощения этой формулы полностью аналогичны изложенным на стр. 15-16, что дает:

$$I_{\text{расс.}}(\omega_*) = \frac{k_0^4 |u_0|^2 VD(\vec{q}, \omega_*) \Delta\omega}{2\pi (4\pi\epsilon_0 R)^2} . \quad (113)$$

Соотношение (113) представляет собой окончательный результат расчета спектральной интенсивности рассеяния в борновском приближении (приближении однократного рассеяния). Оно показывает, что уширение спектральной линии описывается частотной зависимостью коррелятора флуктуаций диэлектрической проницаемости, измерение $I_{\text{расс.}}(\omega_*)$ дает возможность, таким образом, экспериментально определять вид коррелятора $D(\vec{q}, \omega_*)$.

Интегральная интенсивность (56) получается из спектральной интенсивности (113), если в последней заменить интервал $\Delta\omega$ на дифференциально малый интервал $d\omega_*$ и проинтегрировать по всем ω_* . Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_* D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \omega_*) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_* D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \omega_*) e^{-i\omega_* t} \Big|_{t=0} = \\ &= D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, t=0) = \langle \delta\epsilon(\vec{r}_1) \delta\epsilon(\vec{r}_2) \rangle, \end{aligned}$$

т.е. интегрирование по частоте приводит к статическому коррелятору в (56).

Литература

1. А. Исимару. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т.1, Т.2. М. Мир, 1981.
2. С.М. Рыгов, Ю.А. Кравцов, В.И. Татарский. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. М. Наука, 1978.
3. И.Л. Фабелинский. Молекулярное рассеяние света. М., 1965.
4. V.L. Kuz'min, V.P. Romanov, L.A. Zubkov. Propagation and scattering of light in fluctuating media. Physics Reports. V. 248. N 2-5. p.71-368. 1994.