#### МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

## НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ "ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ"

М.В. Москалец

## ОСНОВЫ МЕЗОСКОПИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

учебное пособие

Харьков НТУ "ХПИ" 2010

#### Предисловие

Мезоскопическая физика является одним из наиболее бурно развивающихся разделов современной физики конденсированного состояния. Прогресс, достигнутый в последние десятилетия в изготовлении образцов микронных и субмикронных размеров, позволил открыть целый ряд новых физических эффектов, отсутствующих в макроскопических телах, и поставил на повестку дня возможность создания твердотельных устройств, принцип работы которых базируется на квантовых законах.

Настоящее учебное пособие содержит основы теории мезоскопических систем. Изложенная теория позволяет описать физику основных явлений и условия их наблюдения в таких системах. Отличительной особенностью мезоскопической системы является то, что ее свойства определяются поведением одной квантовой частицы. Поэтому сохранение фазовой когерентности, квантование спектра и квантование заряда являются теми составляющими, которые определяют возникновение мезоскопических эффектов.

Учебное пособие предназначено для студентов и аспирантов, специализирующихся в области физики конденсированного состояния, микроэлектроники и нанофизики. Необходимо знание основ квантовой механики и знакомство со статистической физикой.

# Содержание

Пŗ	оедис	ловие	3		
1.	Вве	дение	7		
	1.1.	Предмет мезоскопики	7		
	1.2.	Промежуточное положение мезоскопики	11		
	1.3.	Пример: от макрорезистора к мезорезистору	15		
2.	Мез	оскопическая система и внешняя среда	25		
	2.1.	Образец и измерительный прибор	25		
	2.2.	Флуктуации термодинамических величин	33		
		2.2.1. Флуктуации числа электронов	33		
		2.2.2. Флуктуации температуры	36		
3.	Фазовая когерентность и проводимость 39				
	3.1.	Уравнение Шредингера и одночастичное приближение	39		
	3.2.	Длина сбоя фазы электрона	42		
		3.2.1. Почему важна фаза волновой функции?	42		
		3.2.2. Что нарушает фазовую когерентность?	46		
4.	Фор	мула Ландауэра	49		
	4.1.	Общее выражение для тока	51		
	4.2.	Функция распределения электронов	52		
	4.3.	Проводимость канала с рассеивателем	55		
	4.4.	Распределение электрического потенциала	59		
5.	Эфб	рект Ааронова-Бома	61		
	5.1.	Природа эффекта	61		
	5.2.	Эффект Ааронова-Бома в вакууме	63		
	5.3.	Эффект Ааронова-Бома в твердом теле	67		

		5.3.1.	Особенности наблюдения эффекта Ааронова-Бома					
			в твердом теле	69				
6.	Проводимость баллистического кольца							
	6.1.	Общее	е решение уравнения Шредингера	72				
	6.2.	Гранич	ные условия к уравнению Шредингера	76				
	6.3.	Вычис	ление проводимости	80				
	6.4.	Свойс	гва проводимости	84				
		6.4.1.	Симметрия относительно инверсии направления тока	84				
		6.4.2.	Зависимость проводимости от магнитного потока.	84				
		6.4.3.	Зависимость проводимости от энергии Ферми	86				
		6.4.4.	Влияние температуры на проводимость	88				
7.	Кван	нтовани	ие спектра	91				
	7.1.	Электр	оон в "квантовом ящике"	91				
		7.1.1.	Волновая функция и спектр	93				
		7.1.2.	Заполнение уровней энергии	95				
	7.2.	7.2. Эффективная размерность образца						
		7.2.1.	Нульмерный образец, 0D — "искусственный атом"	98				
		7.2.2.	Квазиодномерный образец, 1D	99				
		7.2.3.	Квазидвумерный образец, 2D	04				
		7.2.4.	Трехмерный образец, 3D	106				
		7.2.5.	Влияние температуры	107				
8.	Про	водимо	ость баллистического мостика 1	10				
	8.1.	Колич	ество проводящих подзон	112				
	8.2.	Квазис	одномерный мостик	14				
9.	Эле	ктроны	в одномерном кольце 1	26				
	9.1.	Кольц	о без магнитного потока	127				
		9.1.1.	Спектр электронов	127				
		9.1.2.	Ток единичного квантового состояния	131				
		9.1.3.	Полный ток в кольце	131				
	9.2.	Кольц	о, пронизанное магнитным потоком	132				
		9.2.1.	Спектр электронов	134				

9.2.2. Ток единичного квантового состояния	139
9.2.3. Полный ток в кольце	140
0. Персистентный ток	144
10.1. Аналитическое вычисление	146
10.1.1. Макроскопический предел	152
10.2. Численные оценки	152
10.2.1. Амплитуда тока	152
10.2.2. Температура кроссовера	155
10.3. Зависимость тока от температуры	155
10.3.1. Низкие температуры	156
10.3.2. Высокие температуры	161
10.4. Эффект четности	161
1.Эффект кулоновской блокады	. 163
11.1. Квантование заряда в образцах малых размеров	163
11.2. Кулоновская блокада электронного транспорта	167
11.2.1. Проводимость при резонансном туннелировании.	167
11.2.2. Проводимость при наличии эффекта кулоновской	
блокады	170
Рекомендуемая литература	175
Тредметный указатель	. 179

### 1. Введение

Мезоскопическая физика, или сокращенно *мезоскопика*, — это раздел физики конденсированного состояния, изучающий физические свойства образцов малых размеров при низких температурах.

Ниже мы рассмотрим более подробно, насколько малыми должны быть образцы, и насколько низкими должны быть температуры.

#### 1.1. Предмет мезоскопики

Мезоскопика [1, 2] имеет дело с образцами, размер которых *L* достаточно мал в одном или нескольких направлениях, рис. 1.1.



Рис. 1.1. Некоторые характерные типы мезоскопических образцов: односвязные – нульмерные (a), одномерные (b) и двусвязные (c).  $\lambda_F$  – длина волны электрона с энергией Ферми. Характерная длина L порядка одного микрона

Как мы увидим ниже, характерной длиной является длина фазовой когерентности,  $L_{\varphi}$ , величина которой может варьироваться в широких пределах. При низких температурах в качестве грубой оценки можно положить  $L_{\varphi} \sim 10^{-6}$  м. Если ни один из размеров образца не превышает эту длину,  $L \lesssim L_{\varphi}$ , то такой образец является предметом исследования в мезоскопике. Размерность мезоскопического проводящего образца определяют исходя из соотношения между длиной волны  $\lambda_F$  электрона с энергией Ферми и минимальным размером образца, рис. 1.1. Для стандартного металла  $\lambda_F \sim 10^{-10}$  м. В то же время для двумерного электронного газа полупроводниковой гетероструктуры GaAs/AlGaAs эта величина намного больше,  $\lambda_F \sim 10^{-7}$  м.

Мезоскопика изучает те же свойства образцов, которые изучает, собственно, физика конденсированного состояния: кинетические, магнитные и другие. Следует подчеркнуть, что свойства мезоскопических и макроскопических образцов качественно отличаются друг от друга.

В качестве иллюстрации такого различия рассмотрим протекание электрического тока через образец, рис. 1.2. Хорошо известно, что ток — это направленное движение заряженных частиц, например, электронов. Изза столкновений с дефектами, фононами и другими квазичастицами направленное движение электронов затухает. Для поддержания тока необходимо электрическое поле. Такое поле может быть создано, например, с помощью гальванического элемента, подсоединенного к образцу, , рис. 1.2 *a*, или при помощи переменного магнитного потока  $\Phi(t)$  (здесь t — время), пронизывающего замкнутый контур, рис. 1.2 *b*. Мезоскопические же образцы при низких температурах проявляют качественно иное свойство. А именно, даже постоянный во времени магнитный поток может индуцировать незатухающий ток в мезоскопическом кольце, рис. 1.2 *c*.

Другой пример. Электропроводность G = I/V (здесь V – приложенное напряжение, I – ток) макроскопического резистора пропорциональна удельной электропроводности  $\sigma$  и зависит от геометрии образца. Для образца в форме параллелепипеда с длиной L, шириной w и толщиной d электропроводность при протекании тока вдоль стороны L есть:

$$G = \sigma \, \frac{dw}{L}.\tag{1.1}$$



Рис. 1.2. Ток *I* в макроскопическом кольце с батареей (*a*) или с изменяющимся во времени магнитным потоком  $\Phi(t)$  (*b*). В мезоскопическом не сверхпроводящем кольце при низких температурах постоянный во времени магнитный поток  $\Phi = const$  может индуцировать незатухающий ток (*c*)

Поэтому, зависимость G от толщины d является линейной, рис. 1.3 a.

Мезоскопический же резистор такой же формы демонстрирует ступенчатую зависимость электропроводности от толщины, рис. 1.3 *b*. Величина скачка:

$$G_0 = \frac{2e^2}{h},\tag{1.2}$$

называется квантом проводимости,  $G_0 \approx (12.9 \times 10^3 \,\mathrm{Om})^{-1}$ . Здесь  $e = -1.6 \times 10^{-19} \,\mathrm{Kn}$  – заряд электрона,  $h = 6.6 \times 10^{-34} \,\mathrm{Дm} \cdot \mathrm{c}$  – постоянная Планка.

Далее мы, в основном, сконцентрируемся на обсуждении электропроводности мезоскопических образцов как наиболее простой в измерении и весьма информативной характеристики. Особый интерес к изучению этой характеристики связан с тем, что большинство свойств мезоскопических образцов обусловлено характеристиками их электронной



Рис. 1.3. Зависимость проводимости G от толщины w для макроскопического (a) и мезоскопического (b) резисторов

системы. А электропроводность дает непосредственную информацию об электронной системе образца. С другой стороны, изучение электропроводности имеет и большое прикладное значение, поскольку бурное развитие мезоскопики вызвано достижениями технологии изготовления микроскопических (и, уже можно сказать, наноскопических) объектов, что обусловлено требованиями миниатюризации при изготовлении различного рода электронных устройств. Эта чисто техническая причина, фактически, привела к появлению нового научного направления - мезоскопики. Научились изготавливать образцы очень малых размеров и манипулировать такими объектами, например, подводить электрические контакты к образцам микронных и наноразмеров. Это, в свою очередь, позволило применить хорошо развитые методы физических исследований, использующиеся для изучения макроскопических образцов, как искусственно созданных объектов, так и существующих, например, отдельных молекул, кластеров. Можно сказать, что удается измерить вольт-амперную характеристику отдельно взятой молекулы.

Итак, резюме.

Мезоскопика изучает макроскопические характеристики микроскопических объектов.

#### 1.2. Промежуточное положение мезоскопики

Слово "мезоскопика", введенное в физический обиход ван Кэпменом в 1976 году [3], состоит из двух слов: греческого "mesos" — промежуточный и английского "scope" — сфера действия. Поэтому, следуя буквальному переводу, можно сказать, что мезоскопика изучает явления, занимающие некоторое промежуточное положение. Само название наталкивает на мысль сравнить мезоскопические явления с другими, уже известными и лучше изученными явлениями. Каков же основной критерий, отличающий мезоскопические явления от других явлений?

Определяющим, но далеко не единственным, параметром является размер изучаемого образца, а, следовательно, и количество частиц, составляющих образец. Поэтому, мы сравним *мезоскопику* — физику промежуточных размеров, с *микроскопикой* — физикой электронов и атомов, и *макроскопикой* — физикой систем с формально бесконечным числом частиц.

Микроскопические объекты, например, электроны в атоме водорода, описываются квантовой механикой. В квантовой механике состояние частицы характеризуется волновой функцией  $\psi$ , определяемой из уравнения Шредингера. В атоме водорода электрон может находится только в некоторых фиксированных состояниях  $\psi_N$  с вполне определенной энергией  $E_N$ . В этом случае говорят, что электронный спектр дискретен, рис. 1.4, левая часть. Поэтому для целей сравнения, которое мы сейчас проводим, можно считать, что микроскопическим объектам соответствует (i) характерный размер порядка одного ангстрема,  $10^{-10}$  м (размер атома), и (ii) характерная энергия порядка 1 eV или  $10^4 K$  (разность между уровнями энергии электрона в атоме).

Макроскопические же тела характеризуются (i) большим числом составляющих их частиц, атомов или молекул, и (ii) непрерывным спектром, например, для электронов в металле, рис. 1.4, правая часть. Заметим, что физика конденсированного состояния, в отличие от, например, физики сплошных сред, геофизики или астрофизики, изучает макроскопические тела, имеющие размер порядка 1 см<sup>3</sup> и число частиц порядка числа Авогадро,  $N_A \sim 6 \times 10^{26}$  шт/кг-моль.



Рис. 1.4. Дискретный (левая часть) и непрерывный (правая часть) спектры

В дополнение к количественному различию, на макроскопическом уровне появляются также принципиально новые характеристики, отсутствующие для микрообъектов. Это так называемые термодинамические характеристики, например, температура, которая характеризует среднюю энергию, приходящуюся на одну частицу вещества. Возможность применять термодинамическое описание обусловлено тем, что макроскопические тела состоят из большого числа частиц. Закономерно возникает вопрос: если мы будем от макроскопического тела удалять по одному атому, то когда макроскопическое описание сменится микроскопическим? И как это произойдет? Окончательного ответа на этот вопрос нет. Однако, уже известно достоверно, что такой переход не является равномерный, и свойства вещества на промежуточных масштабах отличаются как от свойств макротел, так и от свойств микрочастиц.

Вышесказанное можно проиллюстрировать следующим примером. Возьмем несколько одинаково приготовленных макроскопических образцов. Считается, что их свойства одинаковы. Рассмотрим два проводника и сравним их электросопротивления  $R_1$  и  $R_2$ . Строго говоря, эти две величины будут отличаться. Однако, это отличие  $\Delta R = R_1 - R_2$  будет мало:

$$\frac{\Delta R}{R} \ll 1 \,, \tag{1.3}$$

где  $R = (R_1 + R_2)/2$ . Если же размеры проводников достаточно малы, то различие может достигать 100 %:

$$\frac{\Delta R}{R} \sim 1. \tag{1.4}$$

Во втором случае макрофизика уже не работает, поскольку стали существенными условия, которые не могут быть проконтролированы на макроскопическом уровне. Хотя оба образца изготавливались в одинаковых условиях, однако их измеримые параметры оказались различными. Для таких образцов, которые называют *мезоскопическими*, изменение положения даже одного единственного атома может приводить к изменению характеристик образца, например, его сопротивления на 100%. Заметим, что для наблюдения таких "одночастичных" эффектов необходимы достаточно низкие температуры. Мы на этом остановимся чуть ниже.

Следует подчеркнуть, что рассматриваемые образцы все еще далеки от атомных масштабов: число частиц в образце достаточно велико. Так, для размера мезоскопического образца порядка  $10^{-7}$  м число частиц в нем составляет около  $10^8$  шт, что позволяет подвести измерительные контакты для изучения свойств таких тел. В тоже время, свойства мезоскопических образцов определяются поведением одной микроскопической частицы и поэтому описываются квантовыми законами. Важной особенностью является то, что частицы, составляющие мезоскопический образец, сильно взаимодействуют с окружением. Такое взаимодействие оказывает существенное, а иногда и определяющее влияние на свойства частиц. Так, спектр электронов в мезоскопических образцах может быть дискретным, однако, положение и ширина уровней энергии будет сильно подвержено влиянию окружения.

Заметим, что квантовые законы проявляются на макроскопическом уровне во многих уже известных, и, отнюдь не мезоскопических, явле-

ниях, например, сверхпроводимость. Электроны в металле тоже представляют собой квантовую систему, подчиняющуюся статистике Ферми-Дирака. Однако, в мезоскопике, и это следует подчеркнуть, на макроскопическом уровне проявляется квантовое поведение единичной микрочастицы. Оказываются существенными такие явления, как интерференция, квантование спектра, квантование заряда, и тому подобное.

Это с одной стороны. С другой стороны, никакие другие законы, кроме известных из квантовой и классической физики в мезоскопических системах не действуют.

Подведем итог вышесказанному.

Мезоскопическими являются такие макроскопические тела, свойства которых определяются поведением одной микроскопической частицы.

В таблице 1.1 приведены значения некоторых физических величин, иллюстрирующих различие между макро-, мезо- и микротелами.  $\Delta E$  – расстояние между дискретными уровнями энергии.

Следует отметить, что, собственно, с частицами микронных размеров физика имеет дело давно. Например, при изучении мелкодисперсных сред или при изучении островковых пленок. Однако, если мы рассмотрим *один* отдельно взятый образец микронных размеров (например, одну гранулу или один островок), то тогда это будет предмет мезоскопики. Отсюда видно, что, вообще говоря, невозможно строго разграничить мезоскопику и другие области физики твердого тела, изучающие свойства образцов

Частица	Размер	Кол. частиц	Температура	Тип спектра
Макро-	1 см	$10^{23}$	300 K	непрерывный
Мезо-	$< 1\mu$ м	$10^{6} \div 10^{9}$	< 0.1 K	дискрет., $\Delta E \sim 1  K$
Микро-	1 Å	1	_	дискрет., $\Delta E \sim 10^4  K$

Таблица 1.1

малых размеров.

Развитие технологии изготовления твердотельных низкоразмерных систем (в частности, одномерных (1D), двумерных (2D) систем, созданных методом электронно-лучевой литографии) привело к появлению целого ряда уникальных искусственно созданных мезоскопических объектов, рис. 1.1: 0D - квантовых точек, 1D - квантовых проволочек, 2D структур с нетривиальной топологией (колец) и тому подобное. С одной стороны, необходимо понимание свойств таких объектов, и это важно с практической точки зрения для развития микроэлектроники и создания новых микроэлектронных устройств на базе таких систем. С другой стороны, используя специально сконструированные объекты, можно моделировать ситуации, когда те или иные квантово-механические законы проявляются наиболее ярко. Например, образцы в форме колец наиболее естественно подходят для изучения явления интерференции. В этом случае мезоскопические объекты используются для изучения собственно квантовых законов, и это все происходит во вполне макроскопических масштабах. Это значительно отличается от ситуации с электроном, который, безусловно, подчиняется квантовым законам, но, который невозможно "потрогать руками". Таким образом, мезоскопика не ограничивается решением чисто прикладных задач, а имеет дело также с изучением фундаментальных проблем физики, в частности, квантовой физики.

Ниже мы попытаемся понять, почему именно такие параметры, характеризующие мезоскопику, приведены в таблице 1.1 и какого рода явления присущи мезоскопическим телам. Сейчас же мы рассмотрим простой пример, иллюстрирующий переход от макроскопических к мезоскопическим телам.

#### 1.3. Пример: от макрорезистора к мезорезистору

Мы обратим внимание на два аспекта. Во-первых, почему возможно измерить такую макроскопическую характеристику, как электропроводность, у мезоскопического образца. И, во-вторых, какими новыми особенностями обладает эта характеристика мезоскопического образца по сравнению с аналогичной характеристикой макроскопического образца.



Рис. 1.5. Проводник с однородным (a) и неоднородным (b) по длине поперечным сечением. Мезоскопический проводник и подсоединенные к нему макроскопические электрические контакты (c)

Возьмем однородный проводник, рис. 1.5 *а*. Подсоединим к нему батарею с напряжением V и измерим протекающий ток I. Ток вдоль образца будет однородным и величина тока I = V/R определяется полным сопротивлением R образца:

$$R = \rho \frac{L}{S}.$$
 (1.5)

Здесь L — длина образца, S — площадь поперечного сечения,  $\rho$  — удельная электропроводность.

Выделим среднюю часть образца и будем понемногу уменьшать его размер в этой части, удаляя вещество. Что будет происходить? Для удобства будем полагать, что все три части, средняя уменьшенная и боковые неизменные, по-прежнему имеют прямоугольную форму, рис. 1.5 *b*. Однако, поперечное сечение средней части стало значительно меньшим. Сравним между собой сопротивления разных частей образца. Мы полагаем, что размеры каждой части во всех трех направлениях примерно одинаковы:  $S \sim L^2$ . Обозначим сопротивления левой, правой и средней частей посредством  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ , соответственно:

$$R_{1} = R_{2} = \rho \frac{L_{1}}{S_{1}} \sim \rho \frac{1}{L_{1}},$$

$$R_{3} = \rho \frac{L_{3}}{S_{3}} \sim \rho \frac{1}{L_{3}}.$$
(1.6)

Поскольку  $L_3 \ll L_1$ , то и  $R_3 \gg R_1$ . Таким образом, мы получили очевидный факт: сопротивление всего образца определяется сопротивлением его наиболее узкой части:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 \approx R_3. \tag{1.7}$$

И это соотношение выдерживается тем лучше, чем более узкой будет средняя часть. Здесь еще нет ничего от мезоскопики, но уже видно, что при заданном напряжении ток в цепи определяется пропускной способностью его наиболее узкой части. В дальнейшем эта узкая часть "превратится" в исследуемый мезоскопический образец, а  $R_1$  и  $R_2$  будут представлять собой сопротивления макроскопических электрических контактов, с помощью которых к мезоскопическому образцу подводится ток, рис. 1.5 *с*. Другими словами, ток в цепи определяется физическими процессами, происходящими в исследуемом образце, и не зависит от подводящих контактов.

Такой же вывод следует из рассмотрения того, как распределено напряжение  $V = V_1 + V_2 + V_3$  в цепи с неоднородным по сечению образцом, рис. 1.6. Ток в каждой части ( $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ , соответственно) должен быть одинаков. Это следует из закона сохранения заряда и того факта, что заряд не накапливается внутри образца:

$$I_1 = I_2 = I_3 \equiv I$$
,  
 $V_1 = R_1 I$ ,  $V_2 = R_2 I$ ,  $V_3 = R_3 I$ .  
(1.8)

Поскольку  $R_3 \gg R_1, R_2$ , напряжение на средней части намного превышает напряжения на массивных частях. Поэтому, все напряжение в цепи приложено к узкой части образца:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \approx V_3.$$
 (1.9)

Тот очевидный факт, что ток в цепи определяется сопротивлением



Рис. 1.6. Распределение электрического потенциала  $\varphi$  по длине образца с неоднородным поперечным сечением

исследуемого образца малых размеров, является основой того, что мы можем использовать электрические измерения для изучения мезоскопических образцов. Измеряемый ток I содержит непосредственную информацию о том, что происходит именно внутри исследуемого образца, а не в подводящих проводах. Изменяя напряжение в цепи, мы непосредственно изменяем напряжение на исследуемом образце, поскольку падение напряжения на подводящих проводах пренебрежимо мало. Благодаря этому, мы можем инжектировать в исследуемый образец электроны с фиксированной максимальной избыточной энергией, равной  $E_{max} = eV$ . Сталкиваясь с фононами и другими квазичастицами, электроны теряют эту энергию, что влияет на сопротивление образца. Поэтому, изучение зависимости R(V) позволяет, в частности, изучать взаимодействие электро-



Рис. 1.7. Мезоскопическая система с одним (a) или двумя  $L_1$  и  $L_2$  альтернативными путями для протекания тока (b)

нов с другими квазичастицами [4]. При этом напряжение в цепи играет роль своего рода "энергетического щупа", с помощью которого можно исследовать данный образец [5].

Следует подчеркнуть, что измерение тока I и прикладывание напряжения V происходит вдали от изучаемого образца. Все это происходит в макроскопических масштабах и приборы используются макроскопические: обычные амперметры и вольтметры. В то же время, изучается мезоскопический образец, например, отдельная гранула, или даже микроскопический — отдельная молекула. Конечно, при этом мы должны какимто образом обеспечить электрическую замкнутость цепи, то есть подвести электрические контакты к исследуемому образцу. Именно последнее и стало возможным, благодаря достижениям современной технологии.

Итак, мы рассмотрели, что сохраняется в данном примере от макромира. Теперь проанализируем, как проявляется микромир. Рассмотрим ситуацию, когда две макроскопические части соединены посредством мезоскопического образца — гранулы, рис. 1.7 *а*. В этом случае протекание тока будет определяться процессами перехода электрона с левого электрода на гранулу и, далее, с гранулы в правый электрод, или в обратном направлении. Что здесь необычного? Необычным здесь является то, что электрон подчиняется квантовым законам (проявляет волновые свойства) и они будут определять измеряемое сопротивление. Наиболее ярко волновые свойства электрона проявляются в том случае, когда мы имеем не одну промежуточную гранулу, а две и более. В этом случае имеется несколько путей, по которым электрон может перейти с левого электрода



Рис. 1.8. Ток *I*, протекающий через два параллельно соединенных макроскопических проводника  $R_a$  и  $R_b$ , (*a*) равен сумме токов  $I_a$  и  $I_b$ , которые протекали бы в той же самой системе в отсутствие либо проводника  $R_b$  (*b*), либо проводника  $R_a$  (*c*)

на правый, рис. 1.7 b.

Вначале рассмотрим, что было бы, если бы вместо мезоскопического были макроскопические проводники. Пусть  $R_a$  и  $R_b$  – сопротивления этих проводников, рис. 1.8. В этом случае ток  $I^{(macro)}$  в цепи равен сумме токов, протекающих через каждый из проводников:

$$I^{(macro)} = I_a + I_b \,. \tag{1.10}$$

Пренебрегая сопротивлениями электродов, мы получаем, что напряжение приложено только к проводника, и можем записать  $I_a = V/R_a$ ,  $I_b = V/R_b$ . Следовательно:

$$I^{(macro)} = \frac{V}{R_a} + \frac{V}{R_b}.$$
 (1.11)

Обратим внимание на то, что каждое из слагаемых в правой части есть ток, который протекал бы через систему, содержащую только один (либо "a", либо "b") проводник. В терминах полного сопротивления R = V/I



Рис. 1.9. Ток  $I^{(meso)}$ , протекающий через две параллельно соединенные гранулы (a), не равен сумме токов  $I_a$  и  $I_b$ , которые протекали бы в той же самой системе в отсутствие либо одной (b), либо другой (c) гранулы

получим:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b}.$$
(1.12)

Величина, обратная сопротивлению называется проводимостью и обозначается G = 1/R. Итак, мы получили хорошо известный из электротехники факт, что проводимость параллельно соединенных резисторов равна сумме их проводимостей:

$$G = G_a + G_b. \tag{1.13}$$

Однако, для мезоскопического проводника вышеприведенные соотношения для токов и проводимостей не будут выполняться, рис. 1.9. Ток  $I^{(meso)}$  в цепи с двумя проводниками, рис. 1.9 *a*, не равен сумме токов  $I_a$  и  $I_b$ , которые протекали бы в этой же цепи, если бы проводимость осуществлялась либо через один, рис. 1.9 *b*, либо через другой, рис. 1.9 *c* проводник:

$$I^{(meso)} \neq I_a + I_b \,. \tag{1.14}$$



Рис. 1.10. Электрон из точки А в точку В может перейти либо через одну, либо через другую гранулу

Почему нарушается равенство для токов, справедливое в макроскопическом случае? Это происходит вследствие явления интерференции, которое приводит к тому, что вероятность перехода квантовой частицы из точки А в точку В, при наличии нескольких путей перехода, не равна сумме вероятностей перехода по каждому из путей в отдельности. Поэтому вышеприведенное неравенство для токов, записанное в терминах проводимости:

$$G \neq G_a + G_b \,, \tag{1.15}$$

просто выражает известный факт, что вероятности в квантовой механике не складываются. В квантовой механике складываются комплекснозначные амплитуды перехода. Вероятность же перехода, которая определяет проводимость рассматриваемой системы, то есть ту действительнозначную величину, которая может быть измерена в эксперименте, определяет ется как квадрат амплитуды.

Давайте введем две амплитуды  $A_a$  и  $A_b$ , соответствующие переходам через каждую из гранул, рис. 1.10. Тогда полная амплитуда перехода A из точки A в точку B есть:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_a + \mathcal{A}_b \,. \tag{1.16}$$



Рис. 1.11. Электрон проходит через мезоскопический образец, оставаясь в фазово-когерентном состоянии, если размер образца L не превышает длину, на которой электрон испытывает неупругие столкновения, например электрон-фононную длину  $l_{e-ph}$ 

Соответственно, проводимость определяется следующим выражением:

$$G = g|\mathcal{A}|^{2} = g|\mathcal{A}_{a}|^{2} + g|\mathcal{A}_{b}|^{2} + 2gRe[\mathcal{A}_{a}\mathcal{A}_{b}^{*}],$$
  

$$G_{a} = g|\mathcal{A}_{a}|^{2}, \quad G_{b} = g|\mathcal{A}_{b}|^{2}, \quad G_{int} = 2gRe[\mathcal{A}_{a}\mathcal{A}_{b}^{*}].$$
(1.17)

Здесь *g* — коэффициент пропорциональности. Таким образом, можно записать:

$$G = G_a + G_b + G_{int}$$
. (1.18)

Из приведенного выражения видно, что присутствует интерференционный вклад  $G_{int}$  в измеряемую величину. Таким образом, макроскопическая измеряемая величина, проводимость, определяется квантовым эффектом интерференции. Если интерференционный вклад оказывается несущественным,  $G_{int} \approx 0$ , то мы возвращается к макроскопической ситуации, когда проводимости складываются.

Когда же начинают сказываться квантовые эффекты? Для этого нужны достаточно низкие температуры и достаточно малые размеры, потому что явление интерференции будет существенным только в том случае, когда электрон, проходящий через систему, описывается волновой функцией с хорошо определенной фазой. Фазово-когерентное состояние разрушается при взаимодействии электрона с другими квазичастицами в твердом теле, например, с колебаниями кристаллической решетки — фононами, рис. 1.11. При понижении температуры уменьшается количество фононов и, соответственно, уменьшается вероятность столкновения электронов с ними. При этом увеличивается длина пробега электрона, на которой он сохраняет фазовую когерентность. Если размер образца не превышает эту длину, то квантовые эффекты будут проявляться.

#### Вопросы для самопроверки

- 1) Что изучает мезоскопика?
- 2) Какие образцы считаются мезоскопическими?
- 3) В чем особенность протекания тока через мезоскопический образец?
- 4) Справедлив ли закон Ома для мезоскопических образцов?

5) При каких условиях явление интерференции влияет на электропроводность?

## 2. Мезоскопическая система и внешняя среда

Одним из существенных вопросов является вопрос о том, что, и каким образом задает те внешние условия, в которых находится мезоскопический образец.

#### 2.1. Образец и измерительный прибор

Для изучения свойств мезоскопического образца (далее будем называть его *мезоскопической системой* (MC) или просто "системой") необходимо тем или иным способом соединить его с одной или несколькими макроскопическими системами. Например, при измерении электрических свойств электрические контакты являются такими макроскопическими системами, рис. 2.1.

Данная проблема полностью аналогична проблеме "классического наблюдателя" в квантовой механике. Чтобы получить какую-либо информацию о квантовой системе, необходимо, чтобы квантовая система провзаимодействовала с классической системой, являющейся измерительным прибором. Вообще говоря, такое взаимодействие значительно изменяет состояние квантовой системы.

В чем особенность такой ситуации в мезоскопике по сравнению с микроскопикой? Особенность состоит в том, что МС постоянно соединена с одной или несколькими макроскопическими системами, которые играют роль внешней среды для исследуемого образца. Макроскопические системы, к которым подсоединен образец, намного превосходят по размеру исследуемую систему. В мезоскопике принято называть эти макроскопические системы: *резервуарами*, *берегами* или *контактами*. Эти резервуары служат источником и/или стоком частиц и энергии. Резервуары полагаются настолько большими, чтобы обмен энергией и/или частицами с МС не влиял на их состояние: в любой ситуации электронные системы в резервуарах остаются в равновесном состоянии, характеризу-



Рис. 2.1. МС всегда связана с окружением. Показано три массивных проводника, имеющих температуру Т и электрохимический потенциал  $\mu$ . Эти проводники играют роль электронных резервуаров. Волнистые линии условно обозначают то, что МС может обмениваться энергией и электронами с резервуарами

емом определенным значением температуры T и химического потенциала  $\mu$ . В частности, электроны в берегах описываются фермиевской функцией распределения, рис. 2.2:

$$f_0(\epsilon_p) = \frac{1}{1 + e^{\frac{\epsilon_p - \mu}{k_B T}}}.$$
 (2.1)

Здесь  $\epsilon_p = p^2/(2m_e)$  — кинетическая энергия электрона, p — импульс электрона,  $m_e = 9.08 \times 10^{-31}$  кг — масса электрона,  $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана.

Функция распределения  $f_0(\epsilon_p)$  показывает, какова вероятность того, что состояние с энергией  $\epsilon_p$  будет занят электроном. При нулевой температуре, T = 0, все состояния с энергией меньшей, чем  $\mu$  заполнены,  $f_0 = 1$ , а все состояния с энергией большей, чем  $\mu$  свободны,  $f_0 = 0$ , поэтому химпотенциал  $\mu$  — это максимальная энергия, которую может иметь



Рис. 2.2. Фермиевская функция распределения  $f_0$  для электронов с температурой T и химпотенциалом  $\mu$ .  $\epsilon_p$  — кинетическая энергия электрона

электрон при нулевой температуре. Эту энергию называют энергией Ферми.

В равновесной ситуации, когда все берега имеют одинаковую температуру T и химпотенциал  $\mu$ , в системе отсутствуют электрический ток и потоки тепла, и мезоскопический образец имеет такую же температуру и химпотенциал, как и берега:

$$T_C = T, \quad \mu_C = \mu. \tag{2.2}$$

В этом случае влияние берегов состоит в том, что в мезоскопическом образце будут заполнены только те уровни, энергия которых не превышает величину химического потенциала  $\mu$ , рис. 2.3. Такое заполнение являет-



Рис. 2.3. Показано заполнение уровней энергии в MC, соединенной с резервуарами. Температура полагается равной нулю.  $\mu$  — химический потенциал электронов в резервуарах. Уровни  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$  заполнены (черные кружочки), а уровни  $E_4$  и  $E_5$  — свободны (светлые кружочки). Двукратное вырождение уровней энергии обусловлено наличием у электрона спина

ся следствием общефизического принципа, согласно которому замкнутая система, в нашем случае, резервуары плюс MC, стремится перейти в состояние с минимальной полной энергией. Поэтому в равновесной ситуации функция распределения для электронов в MC является фермиевской функцией распределения с температурой и химпотенциалом равными, соответственно, температуре и химпотенциалу берегов.

Если к берегам приложена разность потенциалов,  $\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ , то электрохимические потенциалы электронов в берегах,  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , различны:

$$\mu_1 \neq \mu_2, \qquad (2.3)$$
$$\mu_1 = \mu + e\varphi_1, \quad \mu_2 = \mu + e\varphi_2.$$



Рис. 2.4. Если электрохимические потенциалы  $\mu_1$  и  $\mu_2$  берегов различны, то через образец потечет ток I.  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  – электрические потенциалы, приложенные к левому и правому берегу, соответственно

Следствием этого является ток, текущий через образец, рис. 2.4. При этом функция распределения в MC не является равновесной и, вообще говоря, химпотенциал мезоскопического образца не определен. Аналогичная ситуация имеет место, когда температуры берегов различны, и через образец течет тепловой поток. В этом случае температура электронов в мезоскопическом образце не определена.

Несмотря на то, что в токовом состоянии мезоскопическая система сильно неравновесна, берега и в этом случае находятся в равновесии. В частности, это следует из того факта, что все напряжение приложено к MC. Левый контакт имеет потенциал  $\varphi_1$ , а правый контакт имеет потенциал  $\varphi_2$ . Тем не менее, если берега соединить между собой, то потечет ток, рис. 2.5. Неравновесность сосредоточена в очень малой области, а именно, в пределах исследуемого мезоскопического образца, где происходит изменение потенциала от  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$ . В силу сохранения заряда, через образец и через берега течет одинаковый ток. Однако, плотность тока в образце намного превосходит плотность тока в берегах вследствие существенного различия в геометрических размерах. Именно плотность тока характеризует степень неравновесности.

Неравновесность электронов мезоскопического образца хорошо видна, если рассмотреть функцию распределения по энергии. В берегах — это



Рис. 2.5. Заполнение уровней энергии в случае, когда к берегам приложена разность потенциалов V. Стрелками показано движение электронов от одного резервуара через мезоскопическую систему к другому резервуару

равновесная, фермиевская функция распределения, соответствующая данному электрохимическому потенциалу:

$$f_i(E) \equiv f_0(E - \varphi_i) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - \mu(\varphi_i)}{k_B T}}},$$

$$\mu(\varphi_i) = \mu + e\varphi_i, \quad i = 1, 2.$$
(2.4)

Здесь i=1 соответствует левому берегу, а i=2 соответствует правому берегу,  $E=\epsilon_p+e\varphi_i$  — полная энергия электрона, включающая как ки-



Рис. 2.6. Функция распределения для электронов левого  $f_1$  и правого  $f_2$  резервуаров, имеющих различные электрические потенциалы  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ . Функция распределения для электронов МС  $f_{MC}$  в отсутствие неупругой релаксации.  $\alpha$  ( $\beta$ ) — вероятность того, что электрон пришел в МС из левого (правого) резервуара. Температура полагается равной нулю

нетическую энергию  $\epsilon_p$ , так и потенциальную энергию  $e\varphi$ . Отметим, что в том случае, когда потенциал  $\varphi(\vec{r})$  неоднородно распределен в пространстве, удобнее рассматривать в качестве независимой переменной полную энергию E, а не кинетическую энергию  $\epsilon_p$ , как это принято для замкнутой системы.

В образце неравновесная функция распределения  $f_{MC}$  выражается через функции  $f_i$  следующим образом, рис. 2.6:

$$f_{MC}(E) = \alpha f_1(E) + \beta f_2(E),$$

$$\alpha + \beta = 1.$$
(2.5)



Рис. 2.7. Изменение электростатического потенциала при протекании тока через МС (левая часть) и через макроскопический резистор (правая часть)

Здесь  $\alpha(\beta)$  — вероятность того, что электрон пришел в образец из левого (правого) берега. Из рисунка 2.6 видно, что  $f_{MC}$  не является функцией распределения Ферми. Такой вид функции распределения обусловлен от-сутствием неупругих процессов. В результате этого электрон, при движении из одного берега через МС в другой берег, сохраняет полную энергию E.

Рассмотренное токовое состояние существенно отличается от макроскопического токового состояния. В мезоскопическом образце токовое состояние является сильно неравновесным, однако эта неравновесность сосредоточена в небольшой области пространства — в пределах мезоскопической системы. В макроскопическом же резисторе токовое состояние характеризуется значительно меньшей неравновесностью, в силу меньших плотностей тока, которая, однако, захватывает макроскопические области. Неравновесность присутствует там, где есть изменение электростатического потенциала. Это проиллюстрировано на рис. 2.7, где схематически показано изменение электростатического потенциала: скачкообразное — при протекании тока через мезоскопическую систему (левая часть) и непрерывное — при протекании тока через макроскопический резистор (правая часть).

Резюмируя вышесказанное, можно сказать, что резервуары задают те внешние условия, в которых находится мезоскопический образец. Макроскопические берега, оставаясь в равновесии, инжектируют в мезоскопический образец поток частиц с фиксированным, равновесным для данного берега распределением по энергии. В этом случае говорят о протекании тока при заданных внешних условиях, то есть при заданных потенциалах и температурах находящихся в равновесии берегов.

#### 2.2. Флуктуации термодинамических величин

Мезоскопическая система может рассматриваться как подсистема большой замкнутой системы, включающей данный мезоскопический образец и его берега. Хорошо известно, что физические величины, характеризующие подсистему, флуктуируют. Причина этого состоит в обмене с окружением энергией и частицами. Напомним, что под термином "флуктуирование" понимают самопроизвольное, хаотическое изменение во времени значения некоторой физической величины. Обусловлено такое изменение как хаотическим движением частиц, составляющих образец, так и взаимодействием с хаотически движущимися частицами окружающей среды. Следует сказать, что понятие флуктуации дает ключ к пониманию того, почему при уменьшении размеров тел качественно изменяются их свойства еще задолго до того, как будут достигнуты микроскопические масштабы.

#### 2.2.1. Флуктуации числа электронов

Рассмотрим флуктуации числа электронов в проводнике с небольшими размерами, соединенном с макроскопическим резервуаром. Электроны могут переходить из проводника в резервуар и обратно вследствие чего число частиц в образце N флуктуирует со временем, рис. 2.8. Для характеристики отклонения числа частиц N(t) в образце от своего среднего значения  $\bar{N}$  вводят средний квадрат флуктуаций числа частиц  $\langle \delta N^2 \rangle$ ,



Рис. 2.8. Флуктуации числа частиц N в MC, связанной с резервуаром. t - время,  $\bar{N} - среднее число частиц в образце$ 

который определяется следующим выражением:

$$\langle \delta N^2 \rangle = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt [N(t) - \bar{N}]^2.$$
(2.6)

Для малого, но, все же, макроскопического образца величина  $\langle \delta N^2 \rangle$  может быть выражена через  $\bar{N}$  и значение химического потенциала  $\mu$  образца, совпадающего с химпотенциалом резервуара, следующим образом (см. [6]):

$$\langle \delta N^2 \rangle = k_B T \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu} \right)_T.$$
 (2.7)

Зависимость числа электронов  $\bar{N}$  от химпотенциала  $\mu$  для трехмерной системы с непрерывным спектром есть:

$$\bar{N} = \frac{(2m_e\mu)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} V.$$
(2.8)

Здесь  $\hbar = h/(2\pi)$ , V — объем образца. Полагая энергию Ферми  $\mu \sim 10^4$  K, измеряя температуру в градусах, а радиус R в ангстремах (Å), по-

лучим следующую оценку для флуктуаций числа частиц в образце в виде шара с радиусом *R*:

$$\langle \delta N^2 \rangle \sim 3 \times 10^{-7} \, T R^3 \,. \tag{2.9}$$

В макроскопической ситуации флуктуации малы по сравнению со средним числом частиц, но велики по сравнению с единицей:

$$1 \ll \sqrt{\langle \delta N^2 \rangle} \ll N \,. \tag{2.10}$$

Правое неравенство позволяет говорить о хорошо определенном числе частиц в образце, а левое неравенство позволяет пренебрегать дискретной природой заряда.

В мезоскопических образцах правое неравенство не нарушается, что позволяет рассматривать их как макроскопические тела. Однако левое неравенство нарушается:

$$1 \sim \sqrt{\langle \delta N^2 \rangle} \ll N \,. \tag{2.11}$$

Флуктуации числа частиц не могут быть меньше единицы, частица либо покинула образец, либо нет. Поэтому, если  $\langle \delta N^2 \rangle$ , вычисленное с использованием макроскопических соотношений, приближается к единице, то это сигнализирует о том, что мы подошли к границе применимости макроскопического подхода и должны принимать во внимание дискретную природу вещества, а, следовательно, и квантовые законы, которые описывают поведение частиц, составляющих вещество.

Из выражения (2.9) следует, что средний квадрат флуктуаций становится сравнимым с единицей,  $\langle \delta N^2 \rangle \sim 1$ , при выполнении следующего условия:

$$\langle \delta N^2 \rangle \sim 1 \quad \Rightarrow \quad TR^3 \sim 3 \times 10^6 \, K \, \mathring{A}^3 \,.$$
 (2.12)

Причем, чем ниже температура, тем для более крупных образцов дис-

кретность становится существенной. Подчеркнем, что речь не идет о микроскопических системах, для которых  $\bar{N} \sim 1$  и учет дискретности является привычным, а речь идет о, казалось бы, макроскопических образцах, в которых число частиц все еще велико  $\bar{N} \gg 1$ . Так, полагая,  $T \sim 0.1 K$ , находим, что условие  $\langle \delta N^2 \rangle \sim 1$  выполняется для размеров

$$R \sim 300 \,\mathring{A}$$
. (2.13)

В таком образце среднее число электронов велико,  $\bar{N} \sim 1 \times 10^7$ .

Следует сказать, что эти оценки приведены для случая стандартного металла, с высокой плотностью электронов. В действительности же большинство мезоскопических эффектов наблюдается в полупроводниковых структурах с малой плотностью и с малой эффективной массой электронов. В этом случае длина волны для электронов с энергией вблизи уровня Ферми становится достаточно большой. Если в металле длина волны фермиевского электрона порядка одного ангстрема, то в двумерном электронном газе полупроводниковых гетероструктур длина волны фермиевского электрона порядка десятков нанометров, что значительно облегчает наблюдение различного рода интерференционных эффектов. В таком газе эффективная масса электрона мала,  $m^* = 0.067 m_e$ . Как следствие, критический размер образца при  $T \sim 0.1$  К становится значительно но большим и уже может составлять 0.1 мкм.

Далее, на примере температуры, мы покажем, что с уменьшением размеров образца возникает ситуация, когда среднеквадратичное отклонение сравнивается со значением самой флуктуирующей физической величины. В этом случае такая величина уже не может быть использована для характеристики свойств мезоскопической системы.

#### 2.2.2. Флуктуации температуры

Средний квадрат флуктуаций температуры  $\langle \Delta T^2 
angle$  электронов с непре-
рывным спектром определяется выражением (см. [1], [6]):

$$\langle \Delta T^2 \rangle = \frac{k_B T^2}{C_v} \,, \tag{2.14}$$

где  $C_v$  — теплоемкость электронного газа при постоянном объеме. Мы рассматриваем только электронный вклад в теплоемкость, поскольку при низких температурах решеточным вкладом можно пренебречь. Напомним, что электронная теплоемкость пропорциональна первой степени температуры, а решеточная —  $T^3$ .

Учитывая, что электронная теплоемкость есть:

$$C_v = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 T \frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu}, \qquad (2.15)$$

получим:

$$\frac{\langle \Delta T^2 \rangle}{T^2} = \frac{1}{T} \frac{3k_B}{\pi^2 \partial \bar{N} / \partial \mu}.$$
(2.16)

Подставляя  $\bar{N}$  из уравнения (2.8) найдем, что условие

$$\sqrt{\langle \Delta T^2 \rangle} \sim T \,, \tag{2.17}$$

достигается при следующем соотношении между температурой T и размером R сферического образца:

$$TR^3 \sim 1 \times 10^5 K \,\mathring{A}^3$$
. (2.18)

Здесь радиус образца выражен в ангстремах Å,  $\mu \sim 10^4$  K. При температуре  $T \sim 0.1$  K из условия (2.18) мы получаем критический размер,  $R \sim 100$  Å, что по порядку величины совпадает со значением, приведенным в выражении (2.13).

Таким образом, на примере термодинамических флуктуаций мы показали, что при понижении температуры и уменьшении размеров образца мы сталкиваемся с новым режимом. Этот, мезоскопический режим характеризуется тем, что при описании свойств еще вполне макроскопических образцов необходимо уже применять квантово-механический подход.

Ниже мы рассмотрим такие аспекты квантово-механического поведения, как фазовая когерентность, квантование спектра и квантование заряда, которые являются наиболее существенными для большинства мезоскопических явлений.

#### Вопросы для самопроверки

1) Какова роль электронных резервуаров?

2) Что такое функция распределения? Какова функция распределения электронов в мезоскопическим образце, соединенном с резервуарами? 3) Охарактеризовать заполнение уровней в мезоскопическим образце при нулевой температуре.

4) Чем отличается токовое состояние в мезоскопическом образце от то-кового состояния в макроскопическом образце?

5) В чем особенность флуктуаций термодинамических величин мезоскопических образцов?

## 3. Фазовая когерентность и проводимость

Ниже мы остановимся на тех условиях, которые необходимы для того, чтобы квантовые свойства носителей тока проявились в электропроводности мезоскопического образца.

# 3.1. Уравнение Шредингера и одночастичное приближение

Одним из главных аспектов квантово-механического поведения частиц является волновой характер движения. Это отражено в основном уравнении (нерелятивистской) квантовой механики — уравнении Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t, \mathbf{r})}{\partial t} = \mathcal{H}\psi(t, \mathbf{r}).$$
 (3.1)

Здесь  $\psi(t, \mathbf{r})$  — волновая функция, описывающая состояние квантовой частицы,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  — радиус-вектор,  $\mathcal{H}$  — оператор энергии (гамильтониан):

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + U(t, \mathbf{r}), \qquad (3.2)$$

состоящий из кинетической части:

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$
(3.3)

соответствующей движению электрона, и потенциальной части U(t,r), описывающей взаимодействие электрона с окружением.

В стационарных условиях, когда потенциальная энергия не зависит от времени,

$$U = U(\mathbf{r}) \,, \tag{3.4}$$

энергия E электрона сохраняется так же, как и в случае свободного движения, и волновую функцию можно представить в следующем виде:

$$\psi(t, \mathbf{r}) = e^{-iEt/\hbar} \psi(\mathbf{r}) , \qquad (3.5)$$

где  $\psi(\mathbf{r})$  удовлетворяет следующему уравнению Шредингера:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\mathbf{r})\right)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}).$$
(3.6)

Для электрона, свободно движущегося в пустом пространстве U = 0, волновая функции есть:

$$\psi(t, \mathbf{r}) = e^{-iEt/\hbar + i\mathbf{pr}/\hbar}.$$
(3.7)

Здесь  $\mathbf{p}$  — вектор импульса электрона. Эта волновая функция соответствует частице, движущейся вдоль направления, задаваемого вектором  $\mathbf{p}$ , со скоростью  $v = p/m_e$ .

В общем случае для определения волновой функции необходимо уравнение Шредингера дополнить граничными условиями. Например, если границы образца непроницаемые для электрона, то волновая функция должна обращаться в нуль на граничной поверхности Σ:

$$\psi(\mathbf{r}\in\Sigma) = 0. \tag{3.8}$$

Кроме того, волновая функция должна быть соответствующим образом нормирована. Квадрат волновой функции определяет плотность вероятности обнаружения частицы в заданной точке пространства, поэтому соответствующий интеграл по всей доступной для частицы части пространства V должен быть равен единице:

$$\int_{V} dV |\psi(\mathbf{r})|^2 = 1. \qquad (3.9)$$

Используя уравнения (3.6), (3.8) и (3.9), можно определить спектр разрешенных состояний  $\psi_i$ , i=1,2,... для электрона в рассматриваемой системе и соответствующие им энергии  $E_i$ . Некоторые примеры будут рассмотрены ниже. Однако, знание только спектра не достаточно для описания свойств системы.

Мезоскопическая система обычно содержит много электронов. Электроны являются Ферми-частицами, поэтому в одном квантовом состоянии может находится не более одной частицы. В связи с этим необходимо также знать, какие из уровней энергии заняты электронами, а какие свободны. Ответ на этот вопрос дает функция распределения, f(E). Эта функция показывает, какова вероятность того, что данный уровень энергии E занят.

В состоянии термодинамического равновесия, если мезоскопическая система может обмениваться энергией и частицами с резервуаром, то функция распределения для электронов мезоскопического образца является функция распределения Ферми, рис. 2.2. При нулевой температуре равновесное заполнение энергетических состояний в мезоскопическом образце, контактирующем с резервуарами, изображено на рис. 2.3.

Приближение, основанное на использовании одночастичного уравнения Шредингера и фермиевской функции распределения, будем называть приближением невзаимодействующих электронов. Во многих случаях такое приближение позволяет правильно описать наблюдаемые эффекты или, по крайней мере, позволяет дать наглядную физическую картину и описать явление на качественном уровне.

Приближение невзаимодействующих электронов довольно хорошо работает в макроскопических твердых телах, несмотря на то, что концентрация электронов довольно высока и, казалось бы, взаимодействие между частицами должно существенно влиять на свойства системы. Объяснение этому дает теория Ферми-жидкости Ландау [8]. Действительно,

взаимодействие между электронами важно и такое взаимодействие приводит к тому, что электроны в металле составляют взаимодействующую систему частиц или квантовую Ферми-жидкость. Однако, существенное упрощение состоит в том, что при малых по сравнению с температурой вырождения Ферми-системы энергиях, а для металлов температура вырождения порядка энергии Ферми и составляет 10<sup>4</sup> K, многочастичный спектр системы может быть представлен как одночастичный спектр некоторых возбуждений, которые не взаимодействуют между собой. Такие возбуждения называют "квазичастицами". Квазичастицы имеют спин 1/2, как и реальные электроны. Однако, они могут иметь заряд либо е, тогда их называют квазиэлектронами, либо -е, тогда их называют квазидырками (или просто дырками). Масса квазичастиц *m*<sup>\*</sup> может отличаться от массы свободного электрона m<sub>e</sub>. Например, в двумерном электронном газе, существующем на границе раздела GaAs/AlGaAs, эффективная масса электрона  $m^* = 0.067 m_e$ . С учетом этого, мы можем использовать уравнение Шредингера (3.6), если массу электрона  $m_e$  заменим на эффективную массу  $m^*$ .

#### 3.2. Длина сбоя фазы электрона

Сейчас мы переходим к рассмотрению одного из ключевых условий наблюдения мезоскопических эффектов. Это условие состоит в сохранении фазовой когерентности электроном, распространяющимся через мезоскопический образец. Говорят, что электрон сохраняет фазовую когерентность, если его состояние может быть описано с помощью волновой функции. Тогда, задав фазу волновой функции в какой-либо точке пространства, и, используя уравнение Шредингера, возможно однозначно определить фазу волновой функции электрона во всем доступном для него пространстве.

#### 3.2.1. Почему важна фаза волновой функции?

Рассмотрим образец в форме кольца рис. 3.1. Для распространения электрона из точки A в точку B имеется два пути,  $L_1$  и  $L_2$ . Двигаясь из ле-



Рис. 3.1. Прохождение электронной волны через двусвязный образец – кольцо. Стрелками показано направление движения электрона. В т. A электронная волна расщепляется на две волны, распространяющиеся по верхней  $L_1$  и по нижней  $L_2$  ветвям кольца, соответственно. В т. B эти волны интерферируют

вого проводника, электронная волна расщепляется в точке А на две волны, которые соединяются и интерферируют в точке В. Результат интерференции может быть определен путем измерения сопротивления такого мезоскопического кольца.

Пусть  $A_1$  и  $A_2$  амплитуды для распространения электрона из точки А в точку В вдоль верхнего и нижнего пути, соответственно:

$$\mathcal{A}_1 = A_1 e^{i\varphi_1},$$

$$\mathcal{A}_2 = A_2 e^{i\varphi_2}.$$
(3.10)

Здесь  $A_{1(2)}$  и  $\varphi_{1(2)}$  – соответствующие модуль и фаза амплитуды перехода. Полная амплитуда перехода  $\mathcal{A}$  из точки A в точку B есть сумма амплитуд  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$ . При этом вероятность прохождения электрона из точки A в точку B равна квадрату полной амплитуды перехода. Как мы уже

говорили, вероятность прохождения определяет проводимость системы,  $G = g |A_1 + A_2|^2$ , которая состоит из трех частей:

$$G = G_1 + G_2 + G_{int},$$
  

$$G_1 = g A_1^2, \quad G_2 = g A_2^2,$$
  

$$G_{int} = 2 g A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$
  
(3.11)

Здесь  $G_{1(2)}$  — проводимости каждой из ветвей кольца, а  $G_{int}$  — интерференционный вклад в проводимость, обусловленный двусвязной геометрией.

Прикладывая магнитное поле H перпендикулярно плоскости кольца, можно изменять разность фаз между амплитудами перехода вдоль путей  $L_1$  и  $L_2$ :

$$\Delta \varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} + \Delta \varphi_0 \,, \qquad (3.12)$$

где  $\Phi = HS$  — магнитный поток, S — площадь кольца,  $\Phi_0 = h/e \approx 4.14 \times 10^{-15}$  Вб — квант магнитного потока,  $\Delta \varphi_0$  — разность фаз в отсутствие магнитного поля. Следовательно, изменяя магнитный поток, можно изменять интерференционный вклад в проводимость:

$$G_{int} = 2 g A_1 A_2 \cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} + \Delta\varphi_0\right) . \qquad (3.13)$$

Зависимость проводимости от магнитного потока  $\Phi$  приведена на рис. 3.2. При  $\Delta \varphi = \pi$  наблюдается деструктивная интерференция, две волны гасят друг друга, и вероятность электрону попасть в правый проводник мала. В этом случае проводимость системы, определяемая возможностью прохождения электрона из левого проводника в правый проводник, мала:

$$G_{min} = g(A_1 - A_2)^2. (3.14)$$

При  $\Delta \varphi = 2\pi$  наблюдается конструктивная интерференция, две вол-



Рис. 3.2. Зависимость проводимости G кольца от магнитного потока  $\Phi$ . Верхний рисунок соответствует несимметричному кольцу  $A_1 \neq A_2$ . Нижний рисунок соответствует симметричному кольцу  $A_1 = A_2$ 

ны усиливают друг друга, что приводит к увеличению проводимости системы:

$$G_{max} = g(A_1 + A_2)^2. (3.15)$$

Наиболее ярко этот эффект проявляется для симметричного кольца, рис. 3.2, нижний рисунок, когда амплитуды прохождения через обе ветви одинаковы,  $A_1 = A_2 = A$ . В этом случае отношение минимальной и максимальной проводимости к классическому значению  $G_{cl} = 2gA^2 = G_1 + G_2$ , которое было бы в макроскопическом случае, когда интерфе-

ренционные эффекты отсутствуют, есть:

$$\frac{G_{min}}{G_{cl}} = 0, \qquad \frac{G_{max}}{G_{cl}} = 2.$$
 (3.16)

Таким образом, явление интерференции непосредственно влияет на такую макроскопическую характеристику, как проводимость, и поэтому может быть предметом исследования в мезоскопике.

#### 3.2.2. Что нарушает фазовую когерентность?

Нарушают фазовую когерентность и, тем самым, препятствуют проявлению интерференционных эффектов, неупругие столкновения электронов с другими квазичастицами, например, фононами, магнонами, а также между собой. Неупругие столкновения изменяют энергию электрона и нарушают эволюцию волновой функции, описываемую уравнением Шредингера, внося случайный вклад в фазу электрона. Как следствие, разность фаз становится флуктуирующей во времени, что приводит к подавлению интерференционного вклада в измеряемую физическую величину. Следует подчеркнуть, что упругие процессы могут быть описаны уравнением Шредингера, поэтому они не уничтожают интерференционную картину. Влияние упругого рассеяния описывается потенциальной энергией  $U(\mathbf{r})$  в уравнении (3.6).

Вероятность процесса рассеяния, в том числе неупругого, может быть охарактеризована средним временем между последовательными рассеяниями данного рода. В случае неупругих рассеяний электронов это время обозначают посредством  $\tau_{\varphi}$ . За время  $\tau_{\varphi}$  электрон с энергией Ферми и скоростью  $v_F = \sqrt{2\mu/m_e}$  переместится на расстояние

$$L_{\varphi} = v_F \, \tau_{\varphi} \,, \tag{3.17}$$

которое называют длиной сбоя фазы или длиной фазовой когерентности. Мы рассматриваем электроны с энергией близкой к энергии Ферми потому, что при низких температурах именно такие электроны участвуют в процессах переноса. Пусть линейный размер образца есть *L*. Тогда, пренебречь влиянием неупругих процессов на движение электрона через мезоскопический образец можно в том случае, если размер образца не превосходит длину фазовой когерентности:

$$L \ll L_{\varphi}(T) \,. \tag{3.18}$$

Это условие является основным для наблюдения мезоскопических эф-фектов.

Оценим величину  $L_{\varphi}$  для металлических образцов. Основными источниками неупругой релаксации при низких температурах являются электронэлектронное  $\tau_{e-e}$  и электрон-фононное  $\tau_{e-ph}$  рассеяние. Сравним соответствующие им времена рассеяния. Для трехмерного образца имеем по порядку величины (см. напр. [8]):

$$\tau_{e-e} \sim \frac{\hbar \,\mu}{(k_B T)^2}, \qquad \tau_{e-ph} \sim \frac{\hbar^3 \,\omega_D^2}{(k_B T)^3}.$$
(3.19)

Здесь  $\omega_D$  – дебаевская частота (предельная частота фононов). Положив  $\mu \sim 10^4 K$  и  $\omega_D \sim 100 K$ , получим, что электрон-электронное взаимодействие становится определяющим,  $\tau_{\varphi} \approx \tau_{e-e} < \tau_{e-ph}$ , при следующих температурах:

$$T < \frac{(\hbar\omega_D)^2}{k_B\,\mu} \sim 1\,K\,. \tag{3.20}$$

При  $T \sim 1 K$  время неупругой релаксации составляет,  $\tau_{\varphi} \sim 10^{-7}$  с. С учетом характерного значения,  $v_F \sim 10^5$  м/с, находим длину сбоя фазы,  $L_{\varphi}(T \sim 1 K) \sim 10^{-2}$  м. В реальных металлических образцах, с учетом диффузионного характера движения электронов, значение  $L_{\varphi}$  несколько меньше. Обычно при  $T \sim 1 K$  имеем,  $L_{\varphi} \sim 10^{-6}$  м.

#### Вопросы для самопроверки

1) Сформулировать постановку задачи для определения спектра электронов в мезоскопическим образце.

2) Охарактеризовать одночастичное приближение. В чем заключаются его достоинства и недостатки?

3) Что такое длина сбоя фазы и какова ее роль для электропроводности?

4) Какие физические процессы нарушают фазовую когерентность?

5) Как зависят от температуры характерные времена рассеяния электронов на электронах и на фононах?

## 4. Формула Ландауэра

Вычислим проводимость одномерного баллистического проводника, содержащего единичный рассеиватель, рис. 4.1. Формула Ландауэра [9]:

$$G = \frac{2e^2}{h}\mathcal{T}, \qquad (4.1)$$

сводит определение проводимости,  $G = \lim_{V \to 0} I/V$ , проводника к определению квантовомеханической вероятности прохождения  $\mathcal{T}$  электрона через потенциальный барьер, соответствующий рассеивателю, присутствующему в проводнике. Можно сказать, что задача кинетики — определение тока, протекающего через фазово-когерентный образец, сведена к квантовомеханической задаче рассеяния.



Рис. 4.1. Одномерный баллистический проводник с единичным рассеивателем, расположенным в точке с координатой  $x = x_0$ , соединяет два макроскопических резервуара электронов, имеющих различные потенциалы,  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ 

Для того, чтобы получить формулу Ландауэра, вычислим ток I, протекающий проводник, если к берегам приложена разность потенциалов V (см. рис. 4.1). Левый берег имеет потенциал  $\varphi_1 = V/2$ , и правый берег имеет потенциал  $\varphi_2 = -V/2$ .

Вначале укажем, каким образом можно вычислить ток I, переносимый электронами в баллистическом образце. Рецепт следующий: необходимо вычислить ток  $I_p$ , переносимый электроном, находящимся в какомто квантовом состоянии  $\psi_p$ , а затем просуммировать по всем состояниям с учетом их заполнения:

$$I = \sum_{p} I_p f(p) \,. \tag{4.2}$$

Здесь индекс p нумерует разрешенные квантовые состояния, а функция распределения f(p) учитывает вклад только занятых состояний.

В одномерном баллистическом проводнике волновая функция удовлетворяет уравнению Шредингера для свободной частицы:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2}.$$
(4.3)

Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$\psi_p(t,x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i\epsilon_p t/\hbar + p x/\hbar}, \qquad (4.4)$$

где p – импульс электрона, а  $\epsilon_p = p^2/(2m_e)$  – энергия электрона.

Импульс электрона, p, нумерует квантовые состояния. Мы полагаем, что проводник имеет бесконечную длину, и поэтому не накладываем никаких граничных условий. Вследствие этого импульс p и, соответственно, энергия  $\epsilon_p$  могут принимать любые значения. В таком случае говорят, что спектр непрерывен. При наличии непрерывного спектра суммирование по квантовым состояниям заменяется на интегрирование:

$$\sum_{p} \to \frac{L}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dp \,. \tag{4.5}$$

#### 4.1. Общее выражение для тока

Подставляя в квантовомеханическое выражение для тока

$$I[\psi] = i \frac{e\hbar}{2m_e} \left( \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \equiv -\frac{e\hbar}{m_e} Im \left[ \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right] , \qquad (4.6)$$

выражение (4.4), получим для величины  $I_p \equiv I[\psi_p]$  следующее:

$$I_p = \frac{e \,\mathrm{v}}{L}\,,\tag{4.7}$$

где v =  $p/m_e$  – скорость электрона, находящегося в состоянии  $\psi_p$ . Отметим, что в качестве положительного направления для тока выбрано направление оси x.

Полный ток, протекающий через одномерный неограниченный баллистический проводник, вычисляется по следующей формуле:

$$I = \frac{2e}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dp \, \mathbf{v} \, f(p) \,. \tag{4.8}$$

Здесь коэффициент "2"учитывает два направления спина электрона.

Удобно перейти от интегрирования по импульсам к интегрированию по кинетической энергии. Для этого запишем (*p* > 0):

$$dp = d\epsilon_p \frac{1}{d\epsilon_p/dp} = d\epsilon_p \frac{1}{v}, \qquad (4.9)$$

где v = |v| - модуль скорости электрона. Подставляя (4.9) в (4.8), получим выражение для тока в следующем виде:

$$I = \frac{2e}{h} \int_{0}^{\infty} d\epsilon_p [f(\epsilon_p, p > 0) - f(\epsilon_p, p < 0)]. \qquad (4.10)$$

Здесь  $f(\epsilon_p, p > 0) - функция распределения для электронов, движущихся направо, а <math>f(\epsilon_p, p < 0) - функция распределения для электронов, движущихся налево.$ 

Упрощение, достигнутое переходом к интегрированию по энергии, состоит в том, что в одномерном случае скорость электрона выпадает из выражения для тока.

#### 4.2. Функция распределения электронов

Прежде чем приступать к нахождению функции распределения, сделаем следующее замечание. Если в задаче присутствует неоднородно распределенный электрический потенциал, то, как уже отмечалось, вычисления удобно производить, выбрав в качестве независимой переменной полную энергию  $E = \epsilon_p + e\varphi(x)$ . Это связано с тем, что при движении электрона сохраняется его полная энергия E, а кинетическая энергия  $\epsilon_p$ изменяется. В нашем случае такое изменение происходит только в месте контакта проводника с резервуарами. В самом же проводнике, как мы увидим ниже, электрический потенциал  $\varphi$  постоянен и не зависит от координаты x вдоль канала, поэтому мы не учитывали его при решении уравнения Шредингера.

Вычислим функцию распределения электронов справа от барьера,  $x > x_0$ , обозначив ее через  $f_R$ . По направлению к рассеивателю, p < 0, движутся электроны, пришедшие из правого резервуара, рис. 4.3. Такие электроны описываются функцией распределения для правого резервуара,  $f_2$ . Электроны же, движущиеся от рассеивателя, p > 0, можно разбить на две группы. В первую группу входят электроны, первоначально двигавшиеся из правого резервуара и отраженные от рассеивателя. Такие



Рис. 4.2. Электронный поток с единичной интенсивностью налетает на потенциальный барьер. Поток с интенсивностью T туннелирует сквозь барьер. Поток с интенсивностью R отражается от барьера. В силу закона сохранения числа частиц, 1 = T + R

электроны описываются функцией распределения  $R f_2$ , где R = 1 - T -вероятность отражения электрона от потенциального барьера. Во вторую группу входят электроны, двигавшиеся из левого резервуара и протуннелировавшие через потенциальный барьер. Такие электроны описываются функцией распределения  $T f_1$ , где  $f_1 - ф$ ункция распределения электронов в левом резервуаре. Следовательно, функция распределения в проводнике справа от рассеивателя есть:

$$f_{\mathcal{R}}(E) = \begin{cases} f_2(E), & p < 0, \\ Rf_2(E) + \mathcal{T}f_1(E), & p > 0. \end{cases}$$
(4.11)

Для вычисления тока необходимо подставить в выражение (4.10) функцию распределения  $f \equiv f_{\mathcal{R}}$ , выраженную через кинетическую энергию электрона  $\epsilon_p$  в той точке  $x = x_2 > x_0$ , где вычисляется ток. Пусть  $\varphi_{\mathcal{R}}$  – электрический потенциал в точке  $x = x_2$ , тогда, подставляя  $\epsilon_p = E - e\varphi_{\mathcal{R}}$ в (4.11) и учитывая выражение (2.4) для функций распределения электро-



Рис. 4.3. Стрелками показаны направления электронных потоков. По направлению к рассеивателю движутся электроны из правого резервуара с функцией распределения  $f_2$ . По направлению от рассеивателя движутся отраженные электроны с функцией распределения  $Rf_2$  и протуннелировавшие электроны с функцией распределения  $Tf_1$ 

нов в резервуарах, получим:

$$f_{\mathcal{R}}(\epsilon_p) = \begin{cases} f_0(\epsilon_p + e[\varphi_{\mathcal{R}} - \varphi_2]), & p < 0, \\ Rf_0(\epsilon_p + e[\varphi_{\mathcal{R}} - \varphi_2]) + \mathcal{T}f_0(\epsilon_p + e[\varphi_{\mathcal{R}} - \varphi_1]), & p > 0. \end{cases}$$

$$(4.12)$$

Проанализируем приведенное выражение. Легко понять, что фермиевские функции распределения  $f_0$  с различными аргументами описывают распределение по энергии  $f_i(\epsilon_p, \varphi)$  частиц, пришедших из резервуаров с

потенциалами  $\varphi_i$  (i = 1, 2) в точку с потенциалом  $\varphi$ :

$$f_i(\epsilon_p, \varphi) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\epsilon_p + e[\varphi - \varphi_i) - \mu}{k_B T}\right)}.$$
(4.13)

В соответствующем резервуаре, где  $\varphi = \varphi_i$ , приведенное выражение сводится к равновесной функции распределения. В точку с большим (меньшим) потенциалом,  $\varphi > \varphi_i$  ( $\varphi < \varphi_i$ ), электроны приходят ускоренными (замедленными). Следовательно, при нулевой температуре максимальная кинетическая энергия электронов

$$\epsilon_p^{(max)} = \mu + |e|(\varphi - \varphi_i), \qquad (4.14)$$

в точке с потенциалом  $\varphi$  будет больше (меньше), чем в соответствующем резервуаре, где максимальная кинетическая энергия электронов при нулевой температуре равна энергии Ферми  $\mu$ .

#### 4.3. Проводимость канала с рассеивателем

При вычислении проводимости G мы полагаем, что разность потенциалов мала,  $V \rightarrow 0$ , поэтому в главном приближении можно пренебречь влиянием электрического поля на волновую функцию электрона и использовать выражение для тока (4.10), полученное в случае свободных электронов. Подставляя выражения (4.12) в выражение для тока (4.10), получим:

$$I = \frac{2e}{h} \int_{0}^{\infty} d\epsilon_p \mathcal{T}(\epsilon_p) [f_1(\epsilon_p, \varphi_{\mathcal{R}}) - f_2(\epsilon_p, \varphi_{\mathcal{R}})].$$
(4.15)

Здесь функции  $f_{1(2)}(\epsilon_p, \varphi)$  определены в уравнении (4.13).

Это основное выражение, связывающее в одномерном случае ток, протекающий через образец, с вероятностью прохождения  $\mathcal{T}$  электрона через образец.

Упростим полученное выражение предположив, что приложенное напряжение мало по сравнению с температурой и энергией Ферми:

$$|eV| \ll k_B T \,, \mu \,. \tag{4.16}$$

В этом случае функцию распределения (4.13) можно разложить в ряд Тэйлора по степеням малой разности потенциалов  $\varphi_{\mathcal{R}} - \varphi_i$ . Ограничиваясь членами первого порядка, получим:

$$f_i(\epsilon_p, \varphi_{\mathcal{R}}) \approx f_0(\epsilon_p) + \frac{\partial f_0(\epsilon_p)}{\partial \epsilon_p} e\left(\varphi_{\mathcal{R}} - \varphi_i\right).$$
 (4.17)

Подставляя это выражение в (4.15) и учитывая, что  $\varphi_1 - \varphi_2 = V$ , найдем ток:

$$I = \frac{2e^2}{h} V \int_{0}^{\infty} d\epsilon_p \, \mathcal{T}(\epsilon_p) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_p}\right) \,. \tag{4.18}$$

Обратим внимание на то, что ток зависит только от приложенного напряжение V и не зависит от потенциала  $\varphi$  в той точке, в которой вычислялся ток. Проводимость G = I/V есть:

$$G = G_0 \int_0^\infty d\epsilon_p \, \mathcal{T}(\epsilon_p) \left( -\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_p} \right) \,, \tag{4.19}$$

где  $G_0$  — квант проводимости, (1.2),

Проводимость *G* зависит от вероятности туннелирования для электронов с энергией вблизи энергии Ферми. Это следует из того, что производная от фермиевской функции распределения по энергии

$$\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_p} = -\frac{1}{4k_B T} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\epsilon_p - \mu}{2k_B T}\right)},\tag{4.20}$$



Рис. 4.4. Зависимость от энергии производной фермиевской функции распределения

отлична от нуля только в интервале энергий с шириной порядка  $4k_BT$  вблизи  $\epsilon_p = \mu$ , рис. 4.4. Следовательно, для правильного вычисления проводимости мезоскопического проводника важным является соотношение между характерным интервалом энергий, на котором существенно изменяется вероятность туннелирования, и температурой.

При нулевой температуре, T = 0, зависимость (4.20) вырождается в  $\delta$ -функцию Дирака:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_p} = -\delta(\epsilon_p - \mu), \qquad (4.21)$$

и выражение (4.19) переходит в выражение (4.1) с  $\mathcal{T} \equiv \mathcal{T}(\mu)$ .

Полученное выражение может быть применено также к случаю, когда произвольный мезоскопический образец соединен двумя одномерными баллистическими проводниками с резервуарами. В этом случае проводимость мезоскопического образца определяется исключительно вероятностью  $\mathcal{T}$  прохождения электрона через образец. Коэффициент пропорциональности, который мы выше обозначали буквой g, есть квант проводимости  $G_0$ .

Необходимо сделать два замечания в связи с приведенными вычислениями. Во-первых, из выражения (4.1) следует, что даже в отсутствие



Рис. 4.5. Схема измерения проводимости,  $G = I/V_0$ , где I — ток, протекающий через образец,  $V_0$  — напряжение, измеряемое вольтметром. Вольтметр, обозначенный кружочком, может быть подсоединен, либо вдали от рассеивателя (*a*), в этом случае он измеряет разность потенциалов между удаленными резервуарами,  $V_0 = V$ , либо в непосредственной близости от рассеивателя (*b*), в этом случае вольтметр измеряет изменение потенциала на рассеивателе,  $V_0 = \Delta \varphi$ 

всякого рассеяния,  $\mathcal{T} = 1$ , проводимость конечна,  $G = G_0$ . Таким образом, одномерный баллистический канал, соединяющий два резервуара, сам по себе оказывает сопротивление протеканию тока. Это сопротивление равно,  $R_0 \equiv 1/G_0 = h/2e^2 \approx 12.9 \times 10^3$  Ом.

Во-вторых, обратим внимание на то, что проводимость определена как отношение тока I, протекающего через образец, к разности потенциалов V удаленных резервуаров, рис. 4.5 a. Это отличается от принятого в макроскопической физике определения, когда проводимость определяется как отношение тока к разности потенциалов  $\Delta \varphi$  между одним и другим краем образца, рис. 4.5 b.

Строго говоря, и в мезоскопике можно использовать последнее определение проводимости, однако при этом будет получен совершенно другой ответ для величины проводимости, которую в этом случае обозначим через  $G_{\mathcal{T}}$ . Поэтому, чтобы сравнивать результаты вычислений с результатами измерений, необходимо знать, как именно производится измерение.

Для определения  $G_{\mathcal{T}}$  необходимо вычислить изменение потенциала,  $\Delta \varphi$ , в непосредственной близости от рассеивателя.

#### 4.4. Распределение электрического потенциала

Будем по-прежнему полагать, что между резервуарами приложено напряжение V. Определим потенциалы непосредственно слева,  $\varphi_{\mathcal{L}}$ , и непосредственно справа,  $\varphi_{\mathcal{R}}$ , от рассеивателя, предположив, что выполняется условие электронейтральности. Для этого вычислим плотность n(V)электронов в канале, когда приложено напряжение V, и потребуем, чтобы эта величина равнялась плотности n(0) электронов в отсутствие напряжения, V = 0:

$$n(V=0) = n_{\mathcal{L}}(V) = n_{\mathcal{R}}(V).$$
 (4.22)

Плотность электронов в одномерном проводнике выражается через функцию распределения следующим образом:

$$n_i = \frac{2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dp f_i(p), \quad i = \mathcal{L}, R.$$
(4.23)

Функция распределения  $f_{\mathcal{R}}$  определена в уравнении (4.12). Аналогично вычисляется функция распределения  $f_{\mathcal{L}}$  слева от рассеивателя:

$$f_{\mathcal{L}}(\epsilon_p) = \begin{cases} f_0(\epsilon_p + e[\varphi_{\mathcal{L}} - \varphi_1]), & p > 0, \\ Rf_0(\epsilon_p + e[\varphi_{\mathcal{L}} - \varphi_1]) + \mathcal{T}f_0(\epsilon_p + e[\varphi_{\mathcal{L}} - \varphi_2]), & p < 0, \\ (4.24) \end{cases}$$

где  $\varphi_{\mathcal{L}}$  – потенциал слева от рассеивателя. Отметим, что при V=0 имеем,  $f_{\mathcal{R}}=f_{\mathcal{L}}=f_0$ . Подставляя (4.12) и (4.24) в уравнение (4.23) и затем в (4.22) и раскладывая в ряд по степеням малой разности потенциалов, получаем:

$$\varphi_{\mathcal{R}} = -R \frac{V}{2}, \qquad \varphi_{\mathcal{L}} = R \frac{V}{2},$$

$$\Delta \varphi = \varphi_{\mathcal{L}} - \varphi_{\mathcal{R}} = R V.$$
(4.25)

Следовательно, проводимость,  $G_{\mathcal{T}} = I/\Delta \varphi$ , есть:

$$G_{\mathcal{T}} = G_0 \frac{\mathcal{T}}{R} \,. \tag{4.26}$$

С уменьшением вероятности отражения,  $R \to 0$ , проводимость, определенная согласно последнему выражению, неограниченно возрастает,  $G_T \to \infty$ . Это обусловлено тем, что в отсутствие рассеяния электростатический потенциал постоянен вдоль канала, и поэтому  $\Delta \varphi = 0$ .

Следует отметить, что в первоначальном варианте формула Ландауэра имела вид (4.26). Однако, после многочисленных дискуссий стало понятно [1], что именно выражение (4.1) соответствует обычной ситуации в эксперименте, когда измеряется разность потенциалов между резервуарами, а не напряжение на образце.

#### Вопросы для самопроверки

1) Записать формулу Ландауэра для электропроводности и объяснить ее структуру.

2) Что такое квант проводимости? Какова его величина?

3) Охарактеризовать функцию распределения электронов в одномерном баллистическом канале с рассеивателем.

4) Вывести выражение для тока в одномерном баллистическом канале с рассеивателем.

5) Рассмотреть распределение электрического потенциала вблизи рассеивателя и объяснить разницу между проводимостью примеси в баллистическом канале и проводимостью баллистического канала с примесью.

## 5. Эффект Ааронова-Бома

Сохранение фазовой когерентности при распространении электронов в мезоскопических образцах при низких температурах обусловливает чувствительность транспортных свойств таких объектов к фазе волновой функции электрона. Это, с одной стороны, обеспечивает возможность изучать фундаментальные проблемы квантовой физики с помощью хорошо развитых методов исследования транспортных свойств твердых тел, с другой же стороны, предоставляет дополнительную возможность управлять свойствами образцов, что может быть использовано при создании электронных устройств нового поколения.

Далее мы рассмотрим одну из возможностей влиять на фазу волновой функции электрона, связанную с эффектом Ааронова-Бома [10].

#### 5.1. Природа эффекта

В 1959 году Ааронов и Бом [10] показали, что в квантовой механике электромагнитные потенциалы, векторный  $\mathbf{A}$  и скалярный  $\varphi$ , приобретают непосредственный физический смысл и могут быть измерены экспериментально.

В этой связи необходимо сказать, что в классической физике имеют смысл только электрическое и магнитное поля, определяющие силу, действующую на электрический заряд, рис.5.1. Напряженность электрического поля **E** и индукция магнитного поля **B** выражаются через производные электромагнитных потенциалов следующим образом:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} ,$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} .$$
(5.1)

Введение векторного  ${f A}$  и скалярного  $\varphi$  потенциалов может рассмат-



Рис. 5.1. Напряженность E электрического и индукция B магнитного полей определяют силы F, действующие на движущийся со скоростью v заряд q: электрическую – F = qE(a) и магнитную – F = qvB(b). Направление сил показано для q > 0

риваться как удобная параметризация, поскольку выражения (5.1) автоматически удовлетворяют уравнениям Максвелла для электромагнитного поля в вакууме:

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$div\mathbf{B} = 0.$$
(5.2)

Кроме того, приведенные выражения Eq.(5.1) не определяют однозначно векторный и скалярный потенциалы. Если сделать такие замены:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \operatorname{grad} \lambda \,, \tag{5.3}$$
$$\varphi \to \varphi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \,,$$

где  $\lambda$  — произвольная дифференцируемая функция координат и времени, то ни напряженность электрического поля, ни индукция магнитного поля не изменятся, поэтому электромагнитные потенциалы не определены однозначно и, с точки зрения классической физики, должны рассматриваться лишь как математические объекты, не имеющие никакого отношения к физическому миру. В рамках классической физики только силы, зависящие от Е и В, могу быть измерены.

В квантовой теории дело обстоит иначе. Ааронов и Бом показали, что фаза волновой функции частицы непосредственно зависит от электромагнитных потенциалов и возможна постановка эксперимента, когда такая зависимость будет наблюдаться.

Эффект Ааронова-Бома (АБ) состоит в том, что электромагнитные потенциалы непосредственно влияют на интерференционную картину, образуемую заряженными частицами (электронами) движущимися в той области пространства, где присутствуют векторный и/или скалярный потенциалы, однако, напряженности электрического и/или магнитного полей равны нулю.

#### 5.2. Эффект Ааронова-Бома в вакууме

Поясним суть эффекта AБ на примере свободного электрона, движущегося в поле векторного потенциала. В отсутствие электромагнитных полей,  $\mathbf{A} = \mathbf{0}, \varphi = 0$ , волновая функция  $\psi$  свободного электрона представляет собой плоскую волну (чтобы не загромождать формулы, мы рассматриваем только координатную часть волновой функции):

$$\psi_p(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar},\tag{5.4}$$

Когда в пространстве присутствует электромагнитное поле, описываемое векторным потенциалом  $A(\mathbf{r})$ , то волновая функция свободного электрона приобретает следующий вид:

$$\psi_p(\mathbf{r}, \mathbf{A}) = e^{\frac{i}{\hbar} \int [\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r})] d\mathbf{r}}, \qquad (5.5)$$

где интегрирование производится вдоль траектории движения частицы. В том случае, если на электрон не действуют ни электрическая, ни магнитная силы, то его траектория остается такой же, как и в отсутствие векторного потенциала. Однако, фаза волновой функции изменяется, что и



Рис. 5.2. Схема электронного интерферометра Ааронова-Бома. Пучок электронов расщепляется на два пучка в точке О. Зеркала 1 и 2 направляют пучки в детектор О', где они интерферируют. Стрелками показано направление движения электронов. Соленоид (показано штриховкой) создает магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий плоскость интерферометра. Соленоид должен быть достаточно длинным, чтобы магнитное поле было пренебрежимо слабым на траектории движения электронов. Направление векторного потенциала **A** показано пунктирной окружностью со стрелками

было зарегистрировано в эксперименте по интерференции пучков элек-тронов [11].

Схема эксперимента по интерференции электронных пучков в вакууме представлена на рис. 5.2. В таком эксперименте электронный пучок расщепляется на два пучка, каждый из которых проходит путь O'1O, имеющий длину  $L_1$ , или O'2O, имеющий длину  $L_2$ , соответственно. Затем эти пучки должны сойтись в одной точке и проинтерферировать. Длинный тонкий соленоид с магнитным потоком  $\Phi$  создает векторный потенциал, величина которого A вне соленоида зависит только от расстояния R до оси соленоида:

$$A = \frac{\Phi}{2\pi R} \,. \tag{5.6}$$

Направлен векторный потенциал по касательной к окружности радиуса

*R*. Индукция магнитного поля, соответствующая потенциалу (5.6), равна нулю:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0. \tag{5.7}$$

Интерференционная картина, то есть, регистрируемая детектором интенсивность  $J_{O'}$  электронного пучка в точке приемника O' зависит от разности фаз  $\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ , где  $\varphi_i$ , i = 1, 2, - фаза, приобретаемая электроном при движении вдоль траектории длиной  $L_i$ . Определим эту зависимость. Для этого будем исходить из того, что величина  $J_{O'}$  пропорциональна вероятности W(O', O) перехода от источника O к детектору O', которая, в свою очередь, есть:

$$W(O', O) = |\mathcal{A}(O', O)|^2, \qquad (5.8)$$

где  $\mathcal{A}(O', O)$  — амплитуда перехода. Согласно основным принципам квантовой механики, полная амплитуда перехода между некоторыми двумя точками есть сумма частичных амплитуд перехода, соответствующих различным возможным путям перехода между рассматриваемыми точками. В рассматриваемом случае есть всего две такие амплитуды:  $\mathcal{A}_1$ , соответствующая пути O'1O, и  $\mathcal{A}_2$ , соответствующая пути O'2O, поэтому имеем:

$$\mathcal{A}(O',O) = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2. \tag{5.9}$$

Амплитуда перехода между точками с координатами **r** и **r**' связывает значения волновой функции в этих точках:

$$\psi(\mathbf{r}') = \mathcal{A}(\mathbf{r}', \mathbf{r})\psi(\mathbf{r}). \qquad (5.10)$$

Подставляя выражение (5.10) в (5.5), получим выражение для амплитуды перехода в следующем виде:

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = e^{\frac{i}{\hbar} \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} [\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}'')] d\mathbf{r}''}, \qquad (5.11)$$

где интегрирование производится вдоль траектории движения частицы. С учетом полученного выражения представим введенные выше амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  в следующем виде,  $A_i = e^{i\varphi_i}$ , i = 1, 2, где соответствующие фазы есть:

$$\varphi_{1} = \frac{1}{\hbar} \int_{O'1O} d\mathbf{r} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}),$$

$$\varphi_{2} = \frac{1}{\hbar} \int_{O'2O} d\mathbf{r} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}).$$
(5.12)

Подставляя приведенные выражения в (5.9) и далее в (5.8), вычислим вероятность найти частицу в месте регистрации:

$$W(\mathbf{r}) = |\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2|^2 = 2\{1 + \cos(\Delta\varphi)\}, \qquad (5.13)$$

где

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\hbar} \int_{O'1O} d\mathbf{r} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) - \frac{1}{\hbar} \int_{O'2O} d\mathbf{r} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})$$

$$= \frac{p}{\hbar} (L_1 - L_2) - \frac{e}{\hbar} \oint_{O'1O2O'} d\mathbf{r} \mathbf{A} .$$
(5.14)

Здесь мы учли, что импульс p остается постоянным по величине, поскольку, по предположению, отсутствуют силы, действующие на электрон. Интеграл по замкнутому контуру,  $\oint d\mathbf{r} \mathbf{A}$ , преобразуем в интеграл по площади S, охватываемой этим контуром, и получим:

$$\oint d\mathbf{r}\mathbf{A} = \iint_{S} d\mathbf{S} \operatorname{rot}\mathbf{A}.$$
(5.15)

Согласно уравнению (5.1), ротор векторного потенциала определяет индукцию В магнитного поля. Двойной интеграл в уравнении (5.15) есть магнитный поток Ф, пронизывающий замкнутый контур O'1O2O':

$$\Phi = \iint_{S} d\mathbf{S} \,\mathbf{B} \,. \tag{5.16}$$

Заметим, что в случае однородного магнитного поля величина магнитного потока равна,  $\Phi = B S$ . Если же магнитный поток создается тонким соленоидом, как в рассматриваемом эксперименте, то  $\Phi = B S_0$ , где  $S_0 \ll S$  — площадь поперечного сечения соленоида.

Подставляя выражения (5.14) - (5.16) в (5.13), получим:

$$W(O', O) = 2\left\{1 + \cos\left(\frac{p}{\hbar}[L_1 - L_2] - 2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\right\}.$$
 (5.17)

Таким образом, интенсивность  $J_{O'} \sim W(O', O)$  регистрируемого электронного пучка периодична по магнитному потоку с периодом, равным кванту магнитного потока.

Проанализируем полученное выражение. На первый взгляд, нет ничего необычного. Все выражено через магнитный поток, который есть произведение магнитной индукции на площадь. Магнитная индукция создает силу, действующую на движущийся электрон, что, казалось бы, и изменяет интерференционную картину. Однако, необычным здесь является то, что эффект присутствует и в том случае, когда электроны движутся в пространстве свободном от силовых полей: на траектории движения  $\mathbf{B} = 0$ и  $\mathbf{E} = 0$ , а магнитный поток существует в малой области, охватываемой траекториями O'1O и O'2O, рис. 5.2.

Следует, однако, заметить, что электрическая и магнитная силы также влияют на интерференционную картину. Силы изменяют траекторию движения, что приводит к изменению так называемого динамического вклада в фазу, который определяется интегралом  $\hbar^{-1} \int d\mathbf{r} \, \mathbf{p}$  в выражении (5.14).

#### 5.3. Эффект Ааронова-Бома в твердом теле

По-видимому, первым наблюдением эффекта Ааронова-Бома в твердом теле было наблюдение квантования магнитного потока в сверхпроводящих цилиндрах Литтлом и Парксом в 1962 году [12]. Предсказано же такое квантование было Ф. Лондоном в 1950 году [13], то есть, еще до работы Ааронова и Бома 1959 года.

Другое проявление эффекта АБ связано с так называемым эффектом слабой локализации, а именно, с проявлением интерференционных явлений в проводимости образцов нормального металла при низких температурах. В работе Альтшулера, Аронова и Спивака 1981 года [14] был предсказан эффект осцилляции в магнитном поле сопротивления полого цилиндра нормального металла при низких температурах. В том же году этот эффект был экспериментально обнаружен в работе Шарвина Д.Ю. и Шарвина Ю.В. [15].

Оба эти эффекта, по совершенно разным причинам, периодичны по магнитному потоку с периодом, равным так называемому сверхпроводящему кванту магнитного потока  $\Phi_{0s}$ :

$$\Phi_{0s} = \frac{h}{2e} \,. \tag{5.18}$$

В случае сверхпроводников это связано с тем, что носителями тока являются пары электронов (куперовские пары), имеющие заряд q = 2e, что приводит к увеличению в два раза вклада, пропорционального векторному потенциалу, в фазу волновой функции в выражении (5.12). Это, в свою очередь, приводит к уменьшению в два раза периода осцилляций по магнитному потоку в выражении (5.17).

В случае со слабой локализацией уменьшения периода в два раза связано с тем, что рассматриваемый эффект обусловлен интерференцией на самопересекающихся траекториях, проходимых электроном, как показано на рис. 5.3. В этом случае фаза, приобретаемая электроном при движении в поле векторного потенциала, учитывается дважды.

Осцилляции же с периодом по магнитному полю, равным  $\Phi_0 = h/e$ , наблюдаются только для мезоскопических образцов. Эта история довольно давняя и начинается задолго до работы Ааронова и Бома. Так, Хунд в 1938 году [16] и Дингл в 1952 году [17] предсказывали, что энергетический спектр и термодинамические равновесные свойства, например, намагниченность, малых электронных систем должны осциллировать в функции



Рис. 5.3. Две самопересекающиеся электронные траектории, сплошная и пунктирная линии, определяют добавку к электропроводности макроскопического проводника, обусловленную эффектом слабой локализации. Направление движения электрона показано стрелками. Внешнее магнитное поле создает магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий траекторию движения

магнитного потока с периодом  $\Phi_0$ . Однако, собственно, мезоскопический этап в физике эффекта Ааронова-Бома в твердом теле начинается в 80е годы двадцатого века. Так, в работе Бьюттикера, Имри и Азбеля 1984 года [18] было предсказано, что сопротивление одномерного мезоскопического кольца с присоединенными к нему двумя контактами при низких температурах должно осциллировать при изменении магнитного потока, пронизывающего такое кольцо, с периодом  $\Phi_0$ . Этот эффект неоднократно наблюдался экспериментально, начиная с 1985 года, смотри, например, [19], [20].

## 5.3.1. Особенности наблюдения эффекта Ааронова-Бома в твердом теле

Влияние эффекта Ааронова-Бома на движение электронов в твердом теле отличается от аналогичного влияния на движение электронов в вакууме. Во-первых, такое отличие обусловлено тем, что в твердом теле источником магнитного потока всегда является магнитное поле, присутствующее также на траектории движения электронов. Во-вторых, отличие обусловлено тем, что в твердом теле электроны не детектируются непосредственно после интерференции, а продолжают движение. Для пояснения последнего отличия давайте рассмотрим две схемы, соответствующие экспериментам по интерференции электронных пучков в вакууме, рис. 5.2 и электропроводности мезоскопического кольца, рис. 6.1. В обоих случаях наличие магнитного потока приводит к изменению частичных амплитуд перехода электрона между начальной и конечной точками. В первом случае имеются всего две такие амплитуды, определяющие полную амплитуду перехода (5.9). Это обусловлено тем, что, после интерференции в конечной точке O', электроны поглощаются детектором. Во втором же случае электроны не поглощаются в конечной точке R, а могут продолжать движение по кольцу в прямом или обратном направлении, поэтому полная амплитуда перехода  $\mathcal{A}(R, L)$  равна сумме бесконечной последовательности частичных амплитуд:

$$\mathcal{A}(R,L) = \mathcal{A}_{R1L} + \mathcal{A}_{R1L2R1L} + \dots + \mathcal{A}_{R2L} + \mathcal{A}_{R2L1R2L} + \dots$$
 (5.19)

Суммирование бесконечной последовательности амплитуд эквивалентно решению уравнения Шредингера с граничными условиями, учитывающими геометрию образца.

#### Вопросы для самопроверки

1) Что такое эффект Ааронова-Бома?

2) При выполнении каких условий наблюдается эффект Ааронова-Бома?

3) Объяснить принцип работы интерферометра Ааронова-Бома.

4) В чем особенность проявления эффекта Ааронова-Бома в твердом теле?

5) Какова периодичность электропроводности по магнитному потоку, обусловленная эффектом Ааронова-Бома?

## 6. Проводимость баллистического кольца

Вычислим проводимость одномерного баллистического кольца, соединенного одномерными проводниками с двумя резервуарами и пронизанного магнитным потоком  $\Phi$ , рис. 6.1.

Согласно формуле Ландауэра (4.1), проводимость G образца пропорциональна квантовомеханической вероятности T для электронов с энергией Ферми,  $E = \mu$ , прохождения через образец из одного подводящего контакта в другой.

Для того, чтобы вычислить вероятность прохождения  $\mathcal{T}$ , рассмотрим задачу о прохождении через кольцо электронной волны с единичной амплитудой, движущейся по левому проводнику, рис. 6.1.



Рис. 6.1. Электронная волна  $e^{ikx}$ , двигаясь из левого резервуара через кольцо, пронизанное магнитным потоком  $\Phi$ , частично отражается с амплитудой  $re^{-ikx}$  и частично проходит с амплитудой  $\tau e^{ikx'}$ . Вероятность прохождения через кольцо равна  $\mathcal{T} = |\tau|^2$ . Направление векторного потенциала показано пунктирной окружностью. Цифры 1 и 2 нумеруют ветви кольца. Направления координатных осей  $x, \xi, \zeta, x'$  показаны стрелками. Начало отсчета координатных осей  $x, \xi, \zeta$  находится в точке L, а координатная ось x' начинается в точке R

### 6.1. Общее решение уравнения Шредингера

Запишем уравнение Шредингера для волновой функции электрона  $\psi$  при наличии магнитного поля (учтем, что заряд электрона отрицателен: e = -|e|):

$$\frac{1}{2m_e} \left(-i\hbar\nabla + |e|\mathbf{A}\right)^2 \psi = E\psi.$$
(6.1)

Здесь A — векторный потенциал, соответствующий магнитному потоку  $\Phi$ , создаваемому соленоидом, проходящим через кольцо. Выберем векторный потенциал аксиально симметричным с осью симметрии, проходящей через центр кольца перпендикулярно плоскости кольца. На рисунке 6.1 направление векторного потенциала показано пунктирной окружностью со стрелками. В такой калибровке величина векторного потенциала зависит только от радиуса окружности R:

$$A = \frac{\Phi}{2\pi R} \,. \tag{6.2}$$

Рассмотрим, как векторный потенциал влияет на волновую функцию электрона в различных участках нашего образца. Выделим четыре одномерных участка OL, L1R, L2R и RO'. В каждом из них введем свою координатную ось, x,  $\xi$ ,  $\zeta$ , и x', соответственно. Положительное направление осей показано стрелками на рисунке 6.1. Обозначим волновую функцию для электрона в каждом участке через  $\psi_L$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  и  $\psi_R$ , соответственно. На каждом из участков волновая функция зависит только от одной координаты.

На участках OL и RO' векторный потенциал направлен перпендикулярно осям координат, поэтому он выпадает из соответствующего уравнения Шредингера и, таким образом, не оказывает влияния на движение электронов. Уравнение Шредингера на участках OL и RO' имеет следующий вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2\psi_{\alpha}}{dx^2} = E\psi_{\alpha}, \quad \alpha = L, R,$$
(6.3)
На участках кольца L1R и L2R векторный потенциал направлен вдоль координатных осей (в отрицательном и положительном направлении соответствующих координатных осей  $\xi$  и  $\zeta$ ), и поэтому сохраняется в уравнении Шредингера:

$$L1R: -\frac{\hbar^{2}}{2m_{e}} \left(\frac{d}{d\xi} - i\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_{0}}\right)^{2} \psi_{1} = E\psi_{1}.$$

$$L2R: -\frac{\hbar^{2}}{2m_{e}} \left(\frac{d}{d\zeta} + i\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_{0}}\right)^{2} \psi_{2} = E\psi_{2}.$$
(6.4)

Здесь мы ввели длину кольца  $L = 2\pi R$ .

Исключим векторный потенциал из приведенных уравнений. Для этого представим волновую функцию в следующем виде:

$$L1R: \quad \psi_1 = e^{i\xi \frac{2\pi}{L} \frac{\Phi}{\Phi_0}} \psi(\xi) ,$$

$$L2R: \quad \psi_2 = e^{-i\zeta \frac{2\pi}{L} \frac{\Phi}{\Phi_0}} \psi(\zeta) .$$
(6.5)

Далее проведем вычисления только для ветви L1R. Для другой ветви вычисления проводятся аналогично.

Подставим (6.5) в уравнение (6.4) и получим:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{d}{d\xi}-i\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2e^{i\xi\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}}\psi(\xi)=Ee^{i\xi\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}}\psi(\xi)\,.$$

Далее возведем в квадрат:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left( \frac{d^2}{d\xi^2} - 2i\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}\frac{d}{d\xi} - \left[\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}\right]^2 \right) e^{i\xi\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}}\psi(\xi) = Ee^{i\xi\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}}\psi(\xi) \,,$$

и выполним дифференцирование по *ξ*:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left( e^{i\xi\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}} \frac{d^2}{d\xi^2} \psi(\xi) + 2i\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0} e^{i\xi\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}} \frac{d}{d\xi} \psi(\xi) - \left[\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}\right]^2 e^{i\xi\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}} \psi(\xi) -2i\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0} e^{i\xi\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}} \frac{d}{d\xi} \psi(\xi) + 2\left[\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}\right]^2 e^{i\xi\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}} \psi(\xi) - \left[\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}\right]^2 e^{i\xi\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}} \psi(\xi) \right) = E e^{i\xi\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}} \psi(\xi) \,.$$

Видно, что в круглых скобках уничтожаются все слагаемые, кроме первого: второе с четвертым, третье и пятое с шестым. Далее разделим левую и правую части равенства на ненулевой множитель  $e^{i\xi \frac{2\pi}{L} \frac{\Phi}{\Phi_0}}$  и получим уравнение, которому удовлетворяет введенная нами функция  $\psi(\xi)$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} = E\psi(\xi)\,.$$

Это уравнение в точности такое же, как и для прямолинейных участков, см. (6.3). Отметим, что полная волновая функция для электронов, движущихся по криволинейным участкам, определяется выражением (6.5), которое включает также фазовый множитель, зависящий от магнитного потока.

Рассмотрим решение уравнения (6.3). Это уравнение имеет два фундаментальных решения,  $\psi^{(\pm)} = e^{\pm ikx}$ , представляющих собой плоские волны, бегущие в положительном и отрицательном направлении оси x.  $k = \sqrt{2m_e E}/\hbar$  — волновой вектор электрона, зависящий от его энергии E > 0. Частное решение рассматриваемого уравнения записывается в виде суммы фундаментальных решений с неопределенными коэффициентами, которые необходимо будет определить, исходя из граничных условий.

Итак, мы можем записать решение уравнения Шредингера в каждом

из выделенных участков в следующем виде:

$$\psi_L = e^{ikx} + re^{-ikx},$$
  

$$\psi_1 = \left(A_1 e^{ik\xi} + B_1 e^{-ik\xi}\right) e^{i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0 L}},$$
  

$$\psi_2 = \left(A_2 e^{ik\zeta} + B_2 e^{-ik\zeta}\right) e^{-i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0 L}},$$
  

$$\psi_R = \tau e^{ikx'}.$$
  
(6.6)

Слагаемые в правых частях имеют простой физический смысл.

 $e^{ikx}$  — падающая волна, т.е., плоская волна, соответствующая электрону движущемуся из левого резервуара.

 $re^{-ikx}$  — отраженная волна, т.е., плоская волна, движущаяся по направлению от кольца к левому резервуару. Величина r называется амплитудой отражения. Квадрат этой величины определяет *вероятность отражения*:

$$\mathcal{R} = |r|^2 \,. \tag{6.7}$$

 $A_1 e^{ik\xi} e^{i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{\xi}{L}}$  и  $A_2 e^{ik\zeta} e^{-i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{\zeta}{L}}$  – волны, распространяющиеся от точ-ки L к точке R по соответствующим плечам кольца.

 $B_1 e^{-ik\xi} e^{i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{\xi}{L}}$  и  $B_2 e^{-ik\zeta} e^{-i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{\zeta}{L}}$  – волны, распространяющиеся от точ-ки R к точке L по соответствующим плечам кольца.

 $\tau e^{ikx'}$  — прошедшая волна, т.е., плоская волна, движущаяся по направлению от кольца к правому резервуару. Обратим внимание на то, что в рассматриваемой задаче нет волны, движущейся от правого резервуара к кольцу. Величина  $\tau$  называется амплитудой прохождения, а ее квадрат,

$$\mathcal{T} = |\tau|^2 \,, \tag{6.8}$$

называется вероятностью прохождения.

# 6.2. Граничные условия к уравнению Шредингера

Волновая функция (6.6) содержит шесть неизвестных величины: r,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  и  $\tau$ . Для того, чтобы их определить, необходимо использовать граничные условия к уравнениям (6.3) и (6.4). Такими условиями являются условия сшивки решений в точках L и R. В этих точках волновая функция должна быть непрерывной и должен сохраняться ток. Таким образом, для определения указанных шести неизвестных имеем шесть граничных условий:

(i) 
$$\psi_L(L) = \psi_1(L)$$
,  
(ii)  $\psi_L(L) = \psi_2(L)$ ,  
(iii)  $\psi_1(R) = \psi_R(R)$ ,  
(iv)  $\psi_2(R) = \psi_R(R)$ ,  
(v)  $(I_L - I_1 - I_2) \Big|_L = 0$ ,  
(vi)  $(I_1 + I_2 - I_R) \Big|_R = 0$ .  
(6.9)

Здесь  $I_i$  — проекция тока в ветви i = L, 1, 2, R на положительное направление соответствующей координатной оси. При этом, входящий в узел, L или R, ток учитывается со знаком плюс, а выходящий из узла ток учитывается со знаком минус, рис. 6.2. Узел, в котором сходятся три проводника, принято называть Y-контактом.

Первые четыре уравнения в (6.9) непосредственно определяют соотношение между искомыми коэффициентами. Пятое и шестое уравнения необходимо преобразовать. Для этого запишем квантовомеханическое выражение для тока (в ветвях L1R и L2R учитываем наличие про-



Рис. 6.2. Диаграмма, иллюстрирующая правило знаков для токов в У-контакте, которое мы используем. Входящий в узел ток имеет знак "+", а выходящий из узла ток имеет знак "-". В теории электрических цепей такое правило известно как правило Кирхгофа

дольного векторного потенциала смотри, например, [7]):

$$I_{L} = -\frac{e\hbar}{m_{e}} \operatorname{Im} \left[ \psi_{L} \frac{d\psi_{L}^{*}}{dx} \right] ,$$

$$I_{1} = -\frac{e\hbar}{m_{e}} \operatorname{Im} \left[ \psi_{1} \frac{d\psi_{1}^{*}}{d\xi} \right] + \frac{e^{2}}{m_{e}} A \psi_{1} \psi_{1}^{*} ,$$

$$I_{2} = -\frac{e\hbar}{m_{e}} \operatorname{Im} \left[ \psi_{2} \frac{d\psi_{2}^{*}}{d\zeta} \right] - \frac{e^{2}}{m_{e}} A \psi_{2} \psi_{2}^{*} ,$$

$$I_{R} = -\frac{e\hbar}{m_{e}} \operatorname{Im} \left[ \psi_{R} \frac{d\psi_{R}^{*}}{dx'} \right] .$$
(6.10)

Подставим эти выражения в уравнение (v): системы уравнений (6.9) и получим (опускаем общий числовой множитель  $e\hbar/m_e$ ):

(v) 
$$\left(-\frac{e\hbar}{m_e} \operatorname{Im}\left[\psi_L \frac{d\psi_L^*}{dx}\right]\right) - \left(-\frac{e\hbar}{m_e} \operatorname{Im}\left[\psi_1 \frac{d\psi_1^*}{d\xi}\right] - \frac{e^2}{m_e} A\psi_1 \psi_1^*\right)$$
  
 $- \left(-\frac{e\hbar}{m_e} \operatorname{Im}\left[\psi_2 \frac{d\psi_2^*}{d\zeta}\right] + \frac{e^2}{m_e} A\psi_2 \psi_2^*\right) = 0.$ 

Здесь все величины вычисляются в точке L. Учтем, что в соответствие с уравнениями (i) и (ii) из (6.9), в этой точке волновая функция непрерывна. Обозначая это значение через  $\psi(L)$ , мы можем переписать вышеприведенное уравнение в следующем виде:

(v) 
$$-\frac{e\hbar}{m_e} \operatorname{Im} \left[ \psi(L) \Pi^* \right] + \frac{e^2}{m_e} A \left( \psi_1 \psi_1^* - \psi_2 \psi_2^* \right) = 0,$$
  
$$\Pi = \frac{d\psi_L}{dx} - \frac{d\psi_1}{d\xi} - \frac{d\psi_2}{d\zeta}.$$

Множитель при векторном потенциале *А* обращается в нуль в силу непрерывности волновой функции. Таким образом, условие сохранения тока в узле принимает следующий вид:

$$Im [\psi \Pi^*] = 0. (6.11)$$

Общее решение для этого уравнения есть:

$$\Pi = \alpha \psi \,, \tag{6.12}$$

где  $\alpha$  — действительная константа. Физический смысл параметра  $\alpha$  состоит в том, что он характеризует прозрачность потенциального барьера возможно присутствующего в рассматриваемом узле. Если  $\alpha = 0$ , то барьер отсутствует, а, если  $\alpha \to \infty$ , то в узле присутствует непрозрачный для электронов барьер — электроны полностью отражаются от узла.

Ниже мы рассмотрим простейший случай:  $\alpha = 0$ . При этом условие сохранения тока принимает вид:

$$\Pi \equiv \sum_{i} \frac{d\psi_i}{dx_i} = 0.$$
(6.13)

Заметим, что производные входят в сумму со знаком плюс или минус в соответствии с правилом знаков, которое мы применяли для токов, рис. 6.2.

Граничное условие (6.13) называют граничным условием Гриффиса [21]. Он, по-видимому, первый применил это условие в задачах подобного рода. Иногда это условие называют условием Дирихле согласно общепринятой терминологией для граничных задач в математической физике. Записывая уравнение (6.13) в точках L и R, преобразуем выражения (v) и (vi) в (6.9) к следующему виду:

(v) 
$$\left(\frac{d\psi_L}{dx} - \frac{d\psi_1}{d\xi} - \frac{d\psi_2}{d\zeta}\right)\Big|_L = 0,$$
  
(vi)  $\left(\frac{d\psi_1}{d\xi} + \frac{d\psi_2}{d\zeta} - \frac{d\psi_R}{dx'}\right)\Big|_R = 0.$ 
(6.14)

Подставляя (6.6) в (6.9), учитывая уравнения (6.14) и учитывая значения соответствующих координат в точках пересечения,

 $\begin{array}{ll} L: & x=0\,, \ \ \xi=0\,, \ \ \zeta=0\,, \\ R: \ \ \xi=L/2\,, \ \ \zeta=L/2\,, \ \ x'=0\,, \end{array}$ 

получим соотношения для определения неизвестных коэффициентов (для упрощения расчетов рассматриваем симметричное подсоединение контактов к кольцу: длина верхнего и нижнего плечей одинакова и равна L/2):

(i) 
$$1 + r = A_1 + B_1$$
,

(ii) 
$$1 + r = A_2 + B_2$$
,

(iii) 
$$\left(A_1 e^{ik\frac{L}{2}} + B_1 e^{-ik\frac{L}{2}}\right) e^{i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} = \tau$$

(iv) 
$$\left(A_2 e^{ik\frac{L}{2}} + B_2 e^{-ik\frac{L}{2}}\right) e^{-i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} = \tau$$
, (6.15)

(v) 
$$1 - r - (A_1 - B_1) - (A_2 - B_2) = 0$$

(vi) 
$$\left(A_1 e^{ik\frac{L}{2}} - B_1 e^{-ik\frac{L}{2}}\right) e^{i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}}$$

$$+ \left( A_2 e^{ik\frac{L}{2}} - B_2 e^{-ik\frac{L}{2}} \right) e^{-i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} - \tau = 0$$

Из всех коэффициентов нас интересует только  $\tau$ , квадрат которого

согласно уравнениям (6.8) и (4.1) определяет проводимость рассматриваемой структуры.

### 6.3. Вычисление проводимости

Для определения коэффициента  $\tau$  исключим все коэффициенты, соответствующие внутренним ветвям системы, то есть исключим коэффициенты  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$  и  $B_2$ . В результате получим два уравнения, содержащие только r и  $\tau$ .

Для этого поступим следующим образом. Из уравнений (i) и (ii) в (6.15) получаем:

$$B_1 = 1 + r - A_1,$$
  

$$B_2 = 1 + r - A_2.$$
(6.16)

Подставим полученные выражения в оставшиеся уравнения (iii) – (v):. В шестое уравнение удобнее подставить не  $B_1$  и  $B_2$ , а сразу выражение, получаемое из уравнений (iii) и (iv), соответственно:

$$B_1 e^{-ik\frac{L}{2}} e^{i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} = \tau - A_1 e^{ik\frac{L}{2}} e^{i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}},$$
$$B_2 e^{-ik\frac{L}{2}} e^{-i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} = \tau - A_2 e^{ik\frac{L}{2}} e^{-i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}}$$

После подстановки, имеем:

(iii) 
$$A_1 \left( e^{ik\frac{L}{2}} - e^{-ik\frac{L}{2}} \right) + (1+r)e^{-ik\frac{L}{2}} = \tau e^{-i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}},$$
  
(iv)  $A_2 \left( e^{ik\frac{L}{2}} - e^{-ik\frac{L}{2}} \right) + (1+r)e^{-ik\frac{L}{2}} = \tau e^{i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}},$   
(v)  $A_1 + A_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}r,$ 
(6.17)

(vi) 
$$A_1 e^{i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} + A_2 e^{-i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} = \frac{3}{2}\tau e^{-ik\frac{L}{2}}.$$

80

Из уравнения (v) выразим,  $A_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}r - A_1$ , и подставим это в оставшиеся уравнения:

(iii) 
$$A_1\left(e^{ik\frac{L}{2}} - e^{-ik\frac{L}{2}}\right) = \tau e^{-i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} - (1+r)e^{-ik\frac{L}{2}},$$

(iv) 
$$A_1\left(e^{ik\frac{L}{2}} - e^{-ik\frac{L}{2}}\right) = \frac{3}{2}e^{ik\frac{L}{2}} - \frac{1}{2}e^{-ik\frac{L}{2}} + \frac{r}{2}\left(e^{ik\frac{L}{2}} + e^{-ik\frac{L}{2}}\right) - \tau e^{i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}},$$

(vi) 
$$A_1\left(e^{i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} - e^{-i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}}\right) = \frac{3}{2}\tau e^{-ik\frac{L}{2}} - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}r\right)e^{-i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}}.$$
(6.18)

Далее подставим уравнение (iii) в (iv) и получим (после умножения всех слагаемых на  $e^{ik\frac{L}{2}}$ ):

(iv) 
$$\tau e^{i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} e^{ik\frac{L}{2}} \left( e^{-i2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} + 1 \right) - r \left( \frac{1}{2} e^{ikL} + \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2} e^{ikL} + \frac{1}{2}.$$
 (6.19)

После этого домножим уравнение (vi) на  $\left(e^{ik\frac{L}{2}} - e^{-ik\frac{L}{2}}\right)$ , а уравнение (iii) на  $\left(e^{i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} - e^{-i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}}\right)$  и вычтем уравнение (iii) из уравнения (vi). В результате, после домножения на  $e^{i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}}e^{ik\frac{L}{2}}$ , получим следующее уравнение:

(vi) 
$$\tau e^{i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} e^{ik\frac{L}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-ikL} + e^{-i2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}}\right) + r \left(e^{i2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} - \frac{1}{2}\left\{1 + e^{ikL}\right\}\right)$$
  
$$= \frac{3}{2}e^{ikL} - e^{i2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} - \frac{1}{2}.$$
(6.20)

Уравнения (6.19) и (6.20) содержат характеристики системы как целого: коэффициент отражения r и коэффициент прохождения  $\tau$ .

Систему неоднородных линейных уравнений (6.19) и (6.20) решим методом определителей. Для сокращения записи введем величину  $\tau'$  =

 $au e^{i\pirac{\Phi}{\Phi_0}}e^{ikrac{L}{2}}$  и запишем:

$$\tau' = \frac{\Delta_{\tau'}}{\Delta}, \qquad (6.21)$$

.

где определители  $\Delta$  и  $\Delta_{\tau'}$  есть:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-i2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} + 1 & -\left(\frac{1}{2}e^{ikL} + \frac{3}{2}\right) \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-ikL} + e^{-i2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} & e^{i2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} - \frac{1}{2}(1 + e^{ikL}) \end{vmatrix},$$
(6.22)

$$\Delta_{\tau'} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2}e^{ikL} + \frac{1}{2} & -\left(\frac{1}{2}e^{ikL} + \frac{3}{2}\right) \\ \frac{3}{2}e^{ikL} - e^{i2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} - \frac{1}{2} & e^{i2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} - \frac{1}{2}(1+e^{ikL}) \end{vmatrix}$$

Вычислим определитель  $\Delta$ :

$$\Delta = \left\{ e^{-i2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} + 1 \right\} \left\{ e^{i2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} - \frac{1}{2}(1+e^{ikL}) \right\}$$
$$- \left\{ -\left(\frac{1}{2}e^{ikL} + \frac{3}{2}\right) \right\} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-ikL} + e^{-i2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} \right\}$$
$$= \frac{1}{2} + e^{i2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} + e^{-i2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} - \frac{1}{4}e^{ikL} - \frac{9}{4}e^{-ikL}$$
$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 + 4\cos\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) - \cos(kL) - 4e^{-ikL} \right\}$$
$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 + 4\cos\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) - 5\cos(kL) \right\} + i2\sin(kL) .$$

Домножая на комплексно сопряженное число, получаем:

$$|\Delta|^{2} = \frac{1}{4} \left\{ 1 + 4\cos\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_{0}}\right) - 5\cos(kL) \right\}^{2} + 4\sin^{2}(kL).$$

82

Далее вычислим  $\Delta_{\tau'}$ :

$$\Delta_{\tau'} = \left\{ \frac{3}{2} e^{ikL} + \frac{1}{2} \right\} \left\{ e^{i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}} - \frac{1}{2} (1 + e^{ikL}) \right\}$$
$$- \left\{ -\left(\frac{1}{2} e^{ikL} + \frac{3}{2}\right) \right\} \left\{ \frac{3}{2} e^{ikL} - e^{i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}} - \frac{1}{2} \right\}$$
$$= -1 + e^{ikL} e^{i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}} + e^{ikL} - e^{i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}} = \left(e^{ikL} - 1\right) \left(e^{i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}} + 1\right) \,.$$

Квадрат модуля этого определителя есть:

$$|\Delta_{\tau'}|^2 = |e^{ikL} - 1|^2 |e^{i2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} + 1|^2$$
$$= 4 \{1 - \cos(kL)\} \{1 + \cos\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\}.$$

Итак, получаем амплитуду прохождения:

$$\tau = \frac{e^{-i\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}}e^{-ik\frac{L}{2}}\left(e^{ikL} - 1\right)\left(e^{i2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} + 1\right)}{\frac{1}{2}\left\{1 + 4\cos\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) - 5\cos(kL)\right\} + i2\sin(kL)}$$
(6.23)

Вычисляя вероятность прохождения,  $\mathcal{T} = |\tau|^2$ , получим для проводимости,  $G = \frac{2e^2}{h} \mathcal{T}(\mu)$ , следующее:

$$G = \frac{2e^2}{h} \frac{\{1 - \cos(k_F L)\} \left\{1 + \cos\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\right\}}{\frac{1}{16} \left\{1 + 4\cos\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) - 5\cos\left(k_F L\right)\right\}^2 + \sin^2\left(k_F L\right)}.$$
 (6.24)

Здесь  $k_F$  — волновое число для электрона с энергией Ферми,  $E = \mu$ .

# 6.4. Свойства проводимости

Величина проводимости G одномерного кольца зависит от магнитного потока  $\Phi$ , размера кольца L и от величины волнового числа  $k_F$ . При этом, влияния кинематической фазы  $k_F L$  и магнитной фазы  $2\pi \Phi/\Phi_0$  оказываются независимыми друг от друга, что отличается от случая электронных пучков в вакууме, (5.17), когда указанные фазы складываются.

#### 6.4.1. Симметрия относительно инверсии направления тока

Следует сказать, что, если бы мы рассмотрели движение электрона из правого резервуара в левый, мы получили бы точно такое же выражение для вероятности прохождения и, соответственно, для проводимости. Это есть проявление общего правила, которое говорит о том, что проводимость мезоскопического образца с двумя контактами не зависит от того, куда течет ток, слева направо (проводимость –  $G_{21}$ ) или справа налево (проводимость –  $G_{12}$ ):

$$G_{12} = G_{21} \,. \tag{6.25}$$

Данное равенство связано с тем, что квантовомеханическая вероятность прохождения в стационарном случае не зависит от направления движения. Такая симметрия для проводимости мезоскопического образца действительно наблюдается в эксперименте [22],

#### 6.4.2. Зависимость проводимости от магнитного потока

На рисунке 6.3 приведена зависимость проводимости G от магнитного потока  $\Phi$ , (6.24), вычисленная для нескольких значений произведения  $k_F L$ . Из указанного рисунка можно сделать следующие выводы.

1. Зависимость  $G(\Phi)$  периодична по магнитному потоку с периодом, равным кванту магнитного потока  $\Phi_0 = h/e$ . Последняя величина в два раза больше так называемого сверхпроводящего кванта магнитного потока  $\Phi_0^{(s)} = h/(2e)$ , характерного для явлений, наблюдаемых в сверхпроводниках.



Рис. 6.3. Зависимость проводимости G кольца от захваченного магнитного потока  $\Phi$  для значений произведения  $k_F L = 63$ (сплошная кривая); 66 (пунктирная кривая).  $G_0 = 2e^2/h$  — квант проводимости;  $\Phi_0 = h/e$  — квант магнитного потока

2. При следующих значениях магнитного потока:

$$\Phi = \frac{1}{2}\Phi_0 + n\Phi_0, \quad n = 1, 2, \dots,$$
(6.26)

величина проводимости обращается в нуль, G = 0. Такое поведение существенно отличается от случая массивных металлов, для которых поправки к проводимости, обусловленные эффектом Ааронова-Бома, малы и составляют доли процента.

3. Проводимость есть четная функция магнитного потока:

$$G(\Phi) = G(-\Phi). \tag{6.27}$$

Последнее свойство можно объяснить, исходя из принципа симметрии кинетических коэффициентов, принципа Онзагера, согласно которо-



Рис. 6.4. Зависимость проводимости *G* кольца от произведения  $k_F L$  для значений магнитного потока  $\Phi = 2\pi n \Phi_0$ , где n = 0, 1, 2, ... (сплошная кривая);  $(0.4 + 2\pi n)\Phi_0$  (пунктирная кривая)

му при изменении направления магнитного поля и одновременном изменении направления движения на противоположное величина проводимости должна остаться неизменной:

$$G_{12}(\Phi) = G_{21}(-\Phi).$$
 (6.28)

Из уравнений (6.25) и (6.28) следует требуемое равенство (6.27).

#### 6.4.3. Зависимость проводимости от энергии Ферми

При изменении энергии Ферми изменяется произведение  $k_F L$ , входящее в выражение для проводимости (6.24). На рисунке 6.4 приведена зависимость  $G(k_F L)$  для нескольких значений магнитного потока  $\Phi$ . Из указанного рисунка вытекает следующее. 1. Осцилляции имеют большую амплитуду. В общем случае значение проводимости G изменяется от  $G_0$  до нуля.

2. Период осцилляций мал, то есть, при небольшом изменении энергии Ферми проводимость существенно изменяется. Оценим величину периода. Поскольку осциллирующим множителем является  $\cos(k_F L)$  или  $\sin(k_F L)$ , то период осцилляций по волновому вектору есть:

$$\Delta k_F = \frac{2\pi}{L} \,. \tag{6.29}$$

Волновое число выражается через длину волны  $\lambda_F$  следующим образом:  $k_F = 2\pi/\lambda_F$ . Следовательно, для мезоскопического кольца, то есть, для кольца с размером значительно превышающим длину волны электрона,  $L \gg \lambda_F$ , получаем, что период осцилляций  $\Delta k_F$  мал по сравнению со значением волнового числа  $k_F$ :

$$\Delta k_F \ll k_F \,. \tag{6.30}$$

В таком случае выражение для периода  $\Delta_F$  осцилляций по энергии можно вычислить следующим образом:

$$\Delta_F \approx \frac{d\mu}{dk} \Delta k_F = \hbar v_F \Delta k_F \,, \tag{6.31}$$

где  $v_F = \hbar k_F/m_e$  — скорость электрона с энергией Ферми. Подставляя выражение (6.29), получим:

$$\Delta_F = \frac{hv_F}{L}.\tag{6.32}$$

Относительная величина периода осцилляций достаточно мала:

$$\frac{\Delta_F}{\mu} \sim \frac{\lambda_F}{L} \ll 1. \tag{6.33}$$

Оценим значение периода  $\Delta_F$  для характерных параметров двумерного газа электронов:  $\mu \sim 100 \, K$ ,  $\lambda_F \sim 100 \, Å$ . Для кольца с размером  $L \sim 10^{-6}$  м получим:

$$\Delta_F \sim 1 \, K \, .$$

Для наблюдения рассматриваемых осцилляций проводимости как температура, так и напряжение, при котором производится измерение тока, должны быть существенно меньше указанной величины.

#### 6.4.4. Влияние температуры на проводимость

Выражение (6.24) определяет проводимость кольца при нулевой температуре резервуаров, к которым оно присоединено. Если резервуары имеют отличную от нуля температуру, T > 0, то проводимость есть:

$$G = \int_{0}^{\infty} dEG(E) \left( -\frac{\partial f_0(E)}{\partial E} \right) , \qquad (6.34)$$

где G(E) определено в (6.24), где следует заменить  $\mu$  на E.

С увеличением температуры амплитуда осцилляций проводимости в функции энергии Ферми уменьшается и при  $T \gg T^*$ , где

$$k_B T^* = \frac{h v_F}{2\pi^2 L} \,, \tag{6.35}$$

указанные осцилляции полностью исчезают. Такое сглаживание мезоскопических осцилляций связано с усреднением по энергии электронов, вносящих вклад в ток. Отметим, что, фактически,  $k_B T^* \approx \Delta_F / 20 \ll \Delta_F$ .

Несмотря на то, что отмеченное выше сглаживание осцилляций довольно часто встречается в мезоскопике, не все явления чувствительны к усреднению по энергии электронов. Так, в рассматриваемом нами случае при высоких температурах  $T \gg T^*$  сохраняется зависимость проводимости от магнитного потока.



Рис. 6.5. Зависимость проводимост<br/>иGкольца от захваченного магнитного поток<br/>а $\Phi$  при $T\gg T^*$ 

Действительно, подставляя выражение (6.24) в (6.34), и, выполняя интегрирование по энергии, при  $T \gg T^*$  получим:

$$G = \frac{2e^2}{h} \frac{\cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) + 1}{\cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) + \frac{3}{2}}.$$
(6.36)

Данное выражение не зависит от энергии Ферми, однако, сохраняет зависимость от магнитного потока, с периодом равным  $\Phi_0$ . График зависимости  $G(\Phi)$ , (6.36), приведен на рис. 6.5. Сохранение зависимости проводимости от  $\Phi$  при температурах больших, чем  $T^*$ , но все еще достаточно низких, чтобы выполнялось условие  $L \ll L_{\varphi}(T)$ , связано с изменением фазы волновой функции при наличии магнитного потока, одинаковым для всех электронов, поэтому усреднение по энергии, которое присутствует в выражении (6.34), не уничтожает эффект.

# Вопросы для самопроверки

1) Сформулировать постановку задачи для определения коэффициента прохождения через одномерное баллистическое кольцо с магнитным потоком.

2) Вывести граничное условие для волновой функции в Ү-контакте.

3) Записать выражение для коэффициента прохождения через кольцо с магнитным потоком. От чего зависит коэффициент прохождения?

4) Почему проводимость кольца зависит от энергии Ферми?

5) Почему проводимость кольца зависит от магнитного потока?

# 7. Квантование спектра

Еще один аспект квантовой физики, который проявляется в мезоскопике, — это квантование спектра электрона. Электрон не может выйти за пределы образца, поэтому его волновая функция обращается в нуль на поверхности образца. Это приводит к тому, что уровни энергии электрона оказываются квантованными, то есть состояния, в которых может находиться электрон, можно пронумеровать целыми числами. Если размер образца достаточно мал, то разность между разрешенными уровнями энергии электронов становится большой и оказывает существенное влияние на свойства образца.

Волновые функции, описывающие стационарные состояния, в которых может находится электрон, и энергии, соответствующие этим состояниям, зависят от формы и размеров образца.

## 7.1. Электрон в "квантовом ящике"

Для иллюстрации основных особенностей, обусловленных квантованием спектра, рассмотрим простейший случай, допускающий аналитическое решение, а именно, рассмотрим образец в форме параллелепипеда с длинами ребер

$$L_x, L_y, L_z. \tag{7.1}$$

Введем координатные оси *x*, *y* и *z*, как показано на рис. 7.1. Область доступная электрону ограничена следующими пределами:

$$0 \le x \le L_x, \quad 0 \le y \le L_y, \quad 0 \le z \le L_z.$$
(7.2)

Потенциал внутри "ящика" положим равным нулю. Уравнение Шре-



Рис. 7.1. Схематическое изображение "квантового ящика". Электрон может свободно двигаться внутри, но не может выйти за пределы, ограниченные стенками параллелепипеда

дингера в прямоугольной системе координат примет следующий вид [7]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z) \,. \tag{7.3}$$

Здесь  $\psi(x, y, z)$  – волновая функция электрона, E – энергия электрона.

Уравнение Шредингера — это дифференциальное уравнение второго порядка. Для уравнения (7.3) можно записать общее решение. Нас интересуют частные решения этого уравнения, описывающие состояния, в которых могут находится электроны в данном образце. Для того, чтобы определить эти частные решения мы должны сформулировать граничные условия, которым удовлетворяет волновая функция электрона.

Волновая функция  $\psi$  обращается в нуль на границе "ящика". Это требование является следствием одного из принципов квантовой механики, согласно которому  $\psi$  есть непрерывная функция координат и времени. Следовательно, требуемые граничные условия есть:

$$\psi(x = 0, y, z) = \psi(x = L_x, y, z) = 0,$$
  

$$\psi(x, y = 0, z) = \psi(x, y = L_y, z) = 0,$$
  

$$\psi(x, y, z = 0) = \psi(x, y, z = L_z) = 0,$$
  
(7.4)

Кроме того, волновая функция должен быть нормирована:

$$\int_{0}^{L_{x}} dx \int_{0}^{L_{y}} dy \int_{0}^{L_{z}} dz |\psi(x, y, z)|^{2} = 1.$$
(7.5)

Это условие обозначает, что электрон находится только в области, ограниченной стенками "ящика".

#### 7.1.1. Волновая функция и спектр

Решение уравнения (7.3) может быть представлено в виде произведения трех решений одномерного уравнения Шредингера:

$$\psi(x, y, z) = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z),$$

$$E = E_x + E_y + E_z,$$
(7.6)

где каждая из функций  $\psi_{\xi}, \xi = x, y, z$  удовлетворяет следующей граничной задаче:

$$-\frac{\hbar^{2}}{2m_{e}}\frac{\partial^{2}\psi_{\xi}}{\partial\xi^{2}} = E_{\xi}\psi_{\xi},$$
  

$$\psi_{\xi}(\xi = 0) = \psi_{\xi}(\xi = L_{\xi}) = 0,$$
  

$$\int_{0}^{L_{\xi}} d\xi |\psi_{\xi}|^{2} = 1.$$
(7.7)

93

Решение этой задачи может быть записано в следующем виде:

$$\psi_{\xi}(\xi) = Ae^{ik_{\xi}\xi} + Be^{-ik_{\xi}\xi}, \qquad 0 \le \xi \le L_{\xi}, \tag{7.8}$$

где A, B – числовые множители. Граничное условие в точке  $\xi = 0$ ,  $\psi_{\xi}(0) = 0$ , приводит к условию B = -A, откуда следует, что:

$$\psi_{\xi}(\xi) = A' \sin(k_{\xi}\xi), \qquad (7.9)$$

где A' = 2iA. В свою очередь, граничное условие в точке  $\xi = L_{\xi}$ ,  $\psi_{\xi}(L_{\xi}) = 0$ , имеет вид  $\sin(k_{\xi}L_{\xi}) = 0$ . Это условие определяет допустимые значения для волнового числа  $k_{\xi}$  и энергии  $E_{\xi}$ , соответствующих волновой функции электрона  $\psi_{\xi}$ :

$$k_{\xi}(n_{\xi}) = \frac{\pi n_{\xi}}{L_{\xi}}, \quad n_{\xi} = 1, 2 \dots,$$

$$E_{\xi}(n_{\xi}) = \frac{\hbar^2 k_{\xi}^2(n_{\xi})}{2m_e} = \frac{\hbar^2 n_{\xi}^2}{8m_e L_{\xi}^2}.$$
(7.10)

Величины  $k_{\xi}$  и  $E_{\xi}$  можно назвать волновым числом и энергией, соответствующим движению электрона вдоль ось  $\xi$ .

В соответствие с (7.6) получаем для волновой функции и энергии электрона в трехмерном ящике:

$$\psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin(k_x x) \sqrt{\frac{2}{L_y}} \sin(k_y y) \sqrt{\frac{2}{L_z}} \sin(k_z z) ,$$

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{h^2}{8m_e} \left( \frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right) .$$
(7.11)

Из полученный выражений видно, что допустимые состояния электрона в образце могут быть пронумерованы набором из трех целых чисел,  $n_x$ ,  $n_y$ , и  $n_z$ .



Рис. 7.2. Обмен частицами между мезоскопической системой (MC) и резервуаром приводит к тому, что все квантовые уровни MC, имеющие энергию меньшую, чем химпотенциал резервуара  $\mu$ , заполнены (черные кружочки), а все уровни с большей энергией — не заполнены (светлые кружочки)

#### 7.1.2. Заполнение уровней энергии

Пусть рассматриваемый образец может обмениваются частицами с резервуаром электронов, рис. 7.2. Какие из квантовых уровней в образце будут заняты, а какие — будут свободные?

Для ответа на этот вопрос заметим, что в состоянии термодинамического равновесия замкнутая система, которая в нашем случае включает электроны резервуара и электроны мезоскопического образца, имеет минимальную энергию:

$$\mathcal{E}_{tot} \equiv \mathcal{E}_{res} + \mathcal{E}_{MC} = \min$$
 (7.12)

Здесь  $\mathcal{E}_{tot}$  — энергия всей системы,  $\mathcal{E}_{res}$  — энергия резервуара,  $\mathcal{E}_{MC}$  — энергия электронов в образце.

Резервуар представляет собой макроскопическую систему электронов, находящуюся в равновесном состоянии и характеризующуюся величиной химического потенциала  $\mu$ , который в трехмерном случае связан с пространственной плотность частиц  $n_e$  следующим образом:

$$\mu = (3\pi^2 n_e)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_e} \,. \tag{7.13}$$

С квантово-механической точки зрения величина  $\mu$  является энергией Ферми, то есть максимальной энергией, которую имеют электроны в резервуаре при нулевой температуре. С другой стороны, для макроскопической системы величина  $\mu$  сохраняет также свой термодинамический смысл, а именно: химпотенциал равен изменению энергии системы при изменении числа частиц в ней на единицу.

Давайте вычислим, на какую величину  $\delta \mathcal{E}_{tot}$  изменится энергия системы, если один электрон перейдет из резервуара в образец. Электрон покидает резервуар, поэтому энергия резервуара уменьшится на величину  $\mu$ ,  $\delta \mathcal{E}_{res} = -\mu$ . В образце электрон займет незанятый уровень с наименьшей энергией. Пусть это уровень с энергией  $E_{min}^{(free)}$ . Тогда энергия MC увеличится на  $E_{min}^{(free)}$ ,  $\delta \mathcal{E}_{MC} = E_{min}^{(free)}$ . При этом изменение энергии всей системы,  $\delta \mathcal{E}_{tot} = \delta \mathcal{E}_{res} + \delta \mathcal{E}_{MC}$ , есть:

$$\delta \mathcal{E}_{tot} = E_{min}^{(free)} - \mu \,. \tag{7.14}$$

Отсюда видно, что переходы электронов из резервуара в образец будут приводить к уменьшению энергии системы,  $\delta \mathcal{E}_{tot} < 0$ , до тех пор, пока в образце не заполняться все квантовые уровни с энергией меньшей, чем химпотенциал  $\mu$  резервуара, рис. 7.2.

Таким образом, если уровни энергии электронов в образце описываются выражением (7.11), то при нулевой температуре будут заполнены все состояния, удовлетворяющие следующему условию:

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{h^2}{8m_e} \left( \frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right) \le \mu.$$
(7.15)

Это условие определяет те значения натуральных чисел  $n_x$ ,  $n_y$  и  $n_z$ , которые соответствуют заполненным состояниям.

Оценим значение  $n_{\xi}^{(max)}$ , соответствующее занятому уровню с максимальной энергией. Для этого введем понятие длины волны электрона с энергией Ферми:

$$\lambda_F = \frac{h}{\sqrt{2m_e\mu}}.\tag{7.16}$$

Для 2D электронного газа  $\mu_{2D} = 10^{-2}$  эB, а вместо  $m_e$  необходимо использовать  $m^* = 0.067 m_e$ , поэтому для фермиевской длины волны получаем:  $\lambda_{F,2D} \approx 4.7 \times 10^{-8}$  м.

Используя величину  $\lambda_F$ , мы можем оценить число заполненных состояний,  $n_{\xi}^{(max)}$ , соответствующих движению вдоль выбранного направления  $\xi = x, y, z$ , следующим образом:

$$n_{\xi}^{max} = \left[\frac{L_{\xi}}{\lambda_F/2}\right] \,, \tag{7.17}$$

где [X] — обозначает целую часть числа X. Для образца с размером  $L_{\xi} = 10^{-6}$  м, созданного в 2D газе электронов, получаем:  $n_{\xi}^{max} \approx 10^{-6}/(2 \times 10^{-8}) = 50$ . При этом полное число N заполненных уровней в образце по порядку величины равно:  $N \sim n_x^{max} n_y^{max} n_z^{max}$ .

Если размер образца хотя бы в одном измерении меньше половины фермиевской длины волны

$$L_{\xi} < \frac{\lambda_F}{2}, \qquad (7.18)$$

то ни одно квантовое состояние не будет заполнено. Электроны в такой образец не будут переходить из резервуара, поэтому при малых напряжениях такой образец не будет пропускать ток.

## 7.2. Эффективная размерность образца

Уравнение (7.17) позволяет нам классифицировать образцы следующим образом.



Рис. 7.3. Длина волны  $\lambda_F$  электрона с энергией Ферми является характерным размером, определяющим эффективную размерность мезоскопического проводника. 0D — нульмерный проводник (квантовая точка); 1D — (квази-)одномерный проводник; 2D — (квази-)двумерный проводник

#### 7.2.1. Нульмерный образец, 0D - "искусственный атом"

Пусть все три размера образца сравнимы с длиной волны электрона  $\lambda_F$ , рис. 7.3 (0D):

$$L_{x} \geq \frac{\lambda_{F}}{2} \quad \Rightarrow \quad n_{x}^{(max)} \geq 1 ,$$

$$L_{y} \geq \frac{\lambda_{F}}{2} \quad \Rightarrow \quad n_{y}^{(max)} \geq 1 ,$$

$$L_{z} \geq \frac{\lambda_{F}}{2} \quad \Rightarrow \quad n_{z}^{(max)} \geq 1 ,$$
(7.19)

тогда в образце оказываются заполненными всего несколько состояний. Число электронов  $N_e$  в образце при нулевой температуре может быть вычислено по следующей формуле:

$$N_e = 2 \sum_{n_x=1}^{n_x^{(max)}} \sum_{n_y=1}^{n_y^{(max)}} \sum_{n_z=1}^{n_z^{(max)}} \theta\left(\mu - E(n_x, n_y, n_z)\right).$$
(7.20)

Здесь коэффициент 2 учитывает наличие спина у электрона,  $\theta(x)$  – ступенчатая функция Хевисайда, равная 1 при x > 0 и равная нулю при x < 0. Если  $N_e \sim 1$ , то в этом случае говорят, что образец представляет собой искусственно созданный атом. Еще такие объекты называют квантовыми точками, подчеркивая тем самым, что они не имеют макроскопических размеров ни в одном измерении.

Если в какую-либо физическую величину *X* вносит аддитивный вклад каждый занятый уровень, то значение этой величины определяется при нулевой температуре следующим образом:

$$X = 2\sum_{n_x=1}^{n_x^{(max)}} \sum_{n_y=1}^{n_y^{(max)}} \sum_{n_z=1}^{n_z^{(max)}} X(n_x, n_y, n_z) \theta\left(\mu - E(n_x, n_y, n_z)\right).$$
(7.21)

Обобщение на случай ненулевых температур будет приведено ниже.

#### 7.2.2. Квазиодномерный образец, 1D

Пусть  $L_x$  намного превосходит  $\lambda_F$ , рис. 7.3 (1D):

$$L_x \gg \frac{\lambda_F}{2} \implies n_x^{(max)} \gg 1 ,$$
  

$$L_y \ge \frac{\lambda_F}{2} \implies n_y^{(max)} \ge 1 ,$$
  

$$L_z \ge \frac{\lambda_F}{2} \implies n_z^{(max)} \ge 1 .$$
(7.22)

В таком случае занятыми оказываются много уровней, соответствующих движению вдоль оси x. Разность между энергиями соседних уровней становится чрезвычайно малой,  $\Delta E_x \sim \mu/n_x^{(max)} \rightarrow 0$ , поэтому спектр, соответствующий движению вдоль оси x, можно считать непрерывным. Тогда мы можем переписать выражение (7.11) для энергии электрона в следующем виде:

$$E(p_x, n_y, n_z) = \frac{p_x^2}{2m_e} + \frac{h^2}{8m_e} \left(\frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right), \qquad (7.23)$$

где мы ввели импульс электрона  $p_x = \hbar k_x$ .

Из уравнения (7.23) следует, что удобно разбить все уровни энергии на группы. Для этого поступим следующим образом. Зафиксируем какие либо значения натуральных чисел  $n_y = n_y^{(0)}$  и  $n_z = n_z^{(0)}$ . Тогда зависимость  $E(p_x, n_y^{(0)}, n_z^{(0)})$ , фактически, является спектром одномерной частицы, то есть частицы, которая свободно движется вдоль оси x и имеет импульс  $p_x$ . Группа уровней  $E(p_x, n_y^{(0)}, n_z^{(0)})$  называется одномерной подзоной. Нумеруются такие подзоны числами  $n_y$  и  $n_z$ .

Перепишем уравнение (7.23) в следующем виде:

$$E(p_x, n_y, n_z) = E(p_x) + E(n_y, n_z).$$
(7.24)

Здесь  $E(p) = p^2/(2m_e)$  — энергия частицы в подзоне, величина  $E(n_y, n_z)$ , фиксированная для данной подзоны, называется энергией дна подзоны.

Сколько подзон будет иметь заполненные уровни зависит от энергии  $\Phi$ ерми  $\mu$ , и размеров образца вдоль осей y и z. Номера подзон, в которых будет хотя бы один заполненный уровень определяется следующим условием рис. 7.4:

$$E(n_y, n_z) < \mu \,. \tag{7.25}$$

От условия (7.15) данное неравенство отличается только тем, что мы пренебрегаем вкладом энергии, соответствующей движению вдоль оси x. С



Рис. 7.4. Если дно одномерной подзоны имеет энергию меньше, чем энергия Ферми  $\mu$ , то такая подзона содержит заполненные уровни энергии и, поэтому вносит вклад в проводимость. На схеме подзоны  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$  – проводящие, а подзона  $E_4$  – не проводящая

формальной (математической) точки зрения, такое пренебрежение обусловлено тем, что мы полагаем  $L_x \to \infty$ . С физической же точки зрения, это соответствует тому, что в случае непрерывного спектра, энергия  $E(p_x)$ может быть сколь угодно малой и, поэтому не оказывает влияние на рассматриваемое неравенство. Как только энергия Ферми превысит дно зоны, сразу же начнут заполняться уровни, соответствующие продольному движению вдоль оси x.

Если заполнены уровни только в одной подзоне  $n_y = 1$ ,  $n_z = 1$ , то образец называют одномерным. Если несколько подзон имеют заполненные уровни, то образец называют *квазиодномерным*.

Изменить число подзон, содержащих заполненные состояния можно различными способами. Например, изменяя величину химпотенциала  $\mu$  электронов резервуара. Если в качестве резервуара выступает двумерный электронный газ, то плотность электронов и, соответственно, величина химпотенциала легко регулируется внешним металлическим затвором, на который подается отрицательный (порядка 1 В) потенциал. Другой способ состоит в прикладывании разности потенциалов  $\Delta \varphi = \varphi_{MC} - \varphi$  между образцом (потенциал  $\varphi_{MC}$ ) и резервуаром (потенциал  $\varphi$ ). В этом случае уравнение (7.25) примет следующий вид:

$$E(n_y, n_z) + e\varphi_{MC} < \mu + e\varphi.$$
(7.26)

Откуда видно, что, изменяя величину  $\Delta \varphi$ , можно изменять количество заполненных подзон,  $E(n_y, n_z) < \mu - e \Delta \varphi$ . Кроме того, изменить количество заполненных подзон, можно изменяя размеры образца  $L_y, L_z$ . Это удобно делать для проводящих структур, созданных в двумерном электронном газе. В этом случае границы образца создаются с помощью дополнительных металлических затворов, имеющих отрицательный потенциал. Изменяя величину этого потенциала, можно изменять геометрические размеры образца. Этот случай более подробно мы разберем в следующем разделе, где будем рассматривать особенности кондактанса одномерного баллистического мостика с изменяемой толщиной.

Максимальная энергия, до которой заполнены уровни в данной подзоне при нулевой температуре называют *химпотенциалом данной подзоны*,  $\mu(n_y, n_z)$ . Эта величина зависит от химпотенциала резервуара  $\mu$  и номера подзоны (ниже мы полагаем  $\Delta \varphi = 0$ ):

$$\mu(n_y, n_z) = \mu - E(n_y, n_z).$$
(7.27)

Таким образом, в квазиодномерном образце химпотенциалы, соответствующие различным одномерным подзонам, различны. Этим, в частности, квазиодномерный образец, содержащий N подзон отличается от совокупности N одномерных образцов.

Рассмотрим правило суммирования по энергетическим уровням в квазиодномерном случае при нулевой температуре. Фактически, выражение (7.21) остается в силе. Покажем как перейти от суммирование по дискретным состояниям, нумеруемых числом  $n_x$ , к интегрированию по "непрерывной" переменной  $p_x$ . Строго говоря, при конечном размере  $L_x < \infty$ , величина  $p_x = \hbar k_x$  дискретная (см. уравнение (7.10) для  $k_{\xi}$  при  $\xi = x$ ). Однако, если  $L_x$  достаточно большая, то разность

$$\delta p_x = p_x(n_x + 1) - p_x(n_x) = \frac{h}{2L_x} \to 0,$$

столь мала, что при вычислении физических величин можно заменить ее дифференциалом,  $\delta p_x \to dp_x$ . При этом суммирование по  $n_x$  заменяется на интегрирование по  $p_x$  следующим образом (используем  $1 = (2L_x/h)\delta p_x$ ):

$$\sum_{n_x} \equiv \frac{2L_x}{h} \sum_{n_x} \delta p_x = \frac{2L_x}{h} \int_{0}^{p_x^{(max)}} dp_x = \frac{L_x}{h} \int_{-p_x^{(max)}}^{p_x^{(max)}} dp_x \,.$$

Здесь положительные и отрицательные значения импульса соответствуют электрону, движущемуся в положительном и отрицательном направлении оси x, соответственно.

Таким образом, получаем правило суммирования по спектру в квазиодномерном случае (обозначим  $p_x^{(max)} = p_F(n_y, n_z)$ ):

$$X = \frac{L_x}{h} \sum_{n_y=1}^{n_y^{(max)}} \sum_{n_z=1}^{n_z^{(max)}} \int_{-p_F(n_y, n_z)}^{p_F(n_y, n_z)} dp_x X(p_x, n_y, n_z) \theta(\mu - E(p_x, n_y, n_z)). \quad (7.28)$$

В качестве примера используем выражение (7.28) и вычислим число электронов в образце при T = 0. Учитывая, что

$$p_F(n_y, n_z) = \sqrt{2m_e\mu(n_y, n_z)},$$
$$\mu(n_y, n_z) = \mu - E(n_y, n_z),$$

103

получим (без учета спина):

$$N_{e} = L_{x} \frac{2\sqrt{2m_{e}\mu}}{h} \sum_{n_{y}=1}^{n_{y}^{(max)}} \sum_{n_{z}=1}^{n_{z}^{(max)}} \sqrt{A}\theta(A),$$

$$A = 1 - n_{y}^{2} \left(\frac{\lambda_{F}/2}{L_{y}}\right)^{2} - n_{z}^{2} \left(\frac{\lambda_{F}/2}{L_{z}}\right)^{2}.$$
(7.29)

С учетом спина электрона и в отсутствие внешнего магнитного поля выражение (7.29) следует умножить на два.

## 7.2.3. Квазидвумерный образец, 2D

Если размер образца в двух направлениях, например  $L_x$ , и  $L_y$ , намного превосходит длину волны электрона с энергией Ферми,  $\lambda_F$ , а в третьем направлении ( $L_z$ ) размер образца сравним с фермиевской длиной волны,

$$L_x \gg \frac{\lambda_F}{2}, \quad \Rightarrow \quad n_x^{(max)} \gg 1,$$

$$L_y \gg \frac{\lambda_F}{2}, \quad \Rightarrow \quad n_y^{(max)} \gg 1,$$

$$L_z \ge \frac{\lambda_F}{2}, \quad \Rightarrow \quad n_z^{(max)} \ge 1.$$
(7.30)

то такой образец называется квазидвумерным образцом, рис. 7.3 (2D).

Спектр электронов в квазидвумерном образце состоит из дискретной части  $E(n_z)$ , соответствующей квантованию движения вдоль оси z, и непрерывной части, соответствующей свободному движению частицы в плоскости, рис. 7.5. Введем следующие обозначения для компонентов двумерного импульса электрона:

$$p_x = \frac{hn_x}{2L_x}, \quad p_y = \frac{hn_y}{2L_y}.$$



Рис. 7.5. Схематическое изображение двумерной энергетической подзоны  $E(p_x, p_y)$ .  $E(n_z)$  — энергия дна подзоны

Тогда запишем спектр электрона в следующем виде:

$$E(p_x, p_y, n_z) = E(p_x, p_y) + E(n_z),$$
  

$$E(p_x, p_y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m_e},$$
  

$$E(n_z) = \frac{h^2}{8m_e L_z^2} n_z^2.$$
(7.31)

Совокупность квантовых уровней энергии, соответствующих фиксированному  $n_z = n_z^{(0)}$ , называют *двумерной подзоной*. Величину  $E(n_z^{(0)})$ называют энергией дна двумерной подзоны. Заполненные уровни есть только в тех подзонах, для которых выполнено следующее условие:

$$E(n_z) < \mu \,. \tag{7.32}$$

Если при данной энергии Ферми  $\mu$  в образце заполнена только од-

на 2D подзона ( $n_z^{(max)} = 1$ ), то такой образец называют двумерным. Если заполнено несколько подзон, то образец называют *квазидвумерным*. Разность

$$\mu(n_z) = \mu - E(n_z), \qquad (7.33)$$

называется химпотенциалом данной  $(n_z)$  подзоны.

Суммирование по спектру в квазидвумерном случае записывается следующим образом:

$$X = \frac{L_x L_y}{h^2} \sum_{n_z=1}^{n_z^{(max)}} \iint_{-p_F(n_z)}^{p_F(n_z)} dp_x dp_y X(p_x, p_y, n_z) \theta(\mu - E(p_x, p_y, n_z)) .$$
(7.34)

Для числа электронов в образце получаем (без учета спина):

$$N_{e} = L_{x}L_{y} \frac{2\pi m_{e}\mu}{h^{2}} \sum_{n_{z}=1}^{n_{z}^{(max)}} \sqrt{A}\theta(A) ,$$

$$A = 1 - n_{z}^{2} \left(\frac{\lambda_{F}/2}{L_{z}}\right)^{2} .$$
(7.35)

#### 7.2.4. Трехмерный образец, 3D

И, наконец, рассмотрим трехмерный случай, когда размеры образца во всех трех направлениях намного превышают фермиевскую длину волны:

$$L_x \gg \frac{\lambda_F}{2}, \quad \Rightarrow \quad n_x^{(max)} \gg 1,$$

$$L_y \gg \frac{\lambda_F}{2}, \quad \Rightarrow \quad n_y^{(max)} \gg 1,$$

$$L_z \gg \frac{\lambda_F}{2}, \quad \Rightarrow \quad n_z^{(max)} \gg 1.$$
(7.36)

В данном случае спектр уже не содержит дискретной части и соот-

ветствует свободному движению электрона в объеме. Компоненты трехмерного импульса электрона есть:

$$p_x = \frac{hn_x}{2L_x}, \quad p_y = \frac{hn_y}{2L_y}, \quad p_z = \frac{hn_y}{2L_z}$$

Спектр электронов не содержит дискретной части:

$$E(p_x, p_y, p_z) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m_e}.$$
(7.37)

Химпотенциал электронов в образце совпадает с химпотенциалом резервуара электронов.

Суммирование по спектру записывается следующим образом:

$$X = \frac{L_x L_y L_z}{h^3} \iiint_{-p_F}^{p_F} dp_x dp_y dp_z X(p_x, p_y, p_z) \theta(\mu - E(p_x, p_y, p_z)).$$
(7.38)

Число электронов в образце:

$$N_e = L_x L_y L_z \frac{4\pi (2m_e\mu)^{\frac{3}{2}}}{3h^3}.$$
 (7.39)

Плотность электронов  $n_e = N_e/V$  (где  $V = L_x L_y L_z$  – объем образца) связана с химпотенциалом  $\mu$  тем же соотношением, что и для макроскопического тела (7.13) (различие в два раза обусловлено спином электрона, который не учитывался в уравнении (7.39)).

#### 7.2.5. Влияние температуры

В заключении этого раздела кратко рассмотрим влияние температуры. Если температура резервуара отлична от нуля  $T \neq 0$ , то уровни

энергии в резервуаре заполнены в соответствие с функцией распределения Ферми:

$$f_0(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-\mu}{k_B T}}}.$$
(7.40)

Если рассматриваемый образец обменивается с резервуаром энергией и частицами (электронами), то в состоянии термодинамического равновесия функция распределения для электронов в образце тоже есть функция распределения Ферми с такими же как и в резервуаре температурой и химпотенциалом  $f_{MC}(E) = f_0(E)$ . Во всех формулах, где мы производили суммирование вкладов от отдельных квантовых уровней необходимо учесть вероятность заполнения этих уровней, то есть ввести под знак суммирования (или интегрирования) функцию распределения  $f_0(E)$ .

Например, в квазиодномерном случае мы должны записать:

$$X = \frac{L_x}{h} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x f_0 \left( E(p_x, n_y, n_z) \right) X(p_x, n_y, n_z) .$$
(7.41)

Заметим, что при T = 0 имеем  $f_0(E) = \theta(\mu - E)$  и вышеприведенное выражение переходит в выражение (7.28).

В неравновесном случае, вместо функции распределения Ферми  $f_0$ , необходимо использовать неравновесную функцию распределения, которую следует определять в каждом конкретном случае отдельно.

#### Вопросы для самопроверки

1) Сформулировать постановку задачи: "электрон в квантовом ящике". 2) Получить спектр энергий и собственные волновые функции для электрона в одномерном квантовом ящике.

3) Получить спектр энергий и собственные волновые функции для электрона в двумерном квантовом ящике.
4) Получить спектр энергий и собственные волновые функции для электрона в трехмерном квантовом ящике.
5) Заполнение уровней в квантовом ящике, соединенном с резервуаром.
6) Что такое эффективная размерность образца?
7) Что такое энергетическая подзона?
8) Как влияет температура на заполнение уровней в квантовом ящике?

# 8. Проводимость баллистического мостика

Ниже мы рассмотрим один из примеров, иллюстрирующих то, каким образом квантование спектра влияет на свойства мезоскопических образцов. Мы рассмотрим проводимость (квази)одномерного баллистического мостика, соединяющего два резервуара электронов, между которыми приложена разность потенциалов V, рис. 8.1.

Мы покажем, что проводимость G изменяется скачками при изменении ширины  $L_y$  мостика [23]. Толщину  $L_z$  мостика, равную толщине двумерного электронного слоя, будем считать фиксированной.



Рис. 8.1. Баллистический квазиодномерный канал с шириной  $L_y$  имеет  $N_y = [L_y/\lambda_F]$  проводящих одномерных подзон (здесь [x] — целая часть х;  $\lambda_F$  — длина волны электрона с энергией Ферми). Проводимость *G* такого канала пропорциональна числу проводящих подзон  $N_y$ 



Рис. 8.2. Двумерный электронный газ

Проводящие мостики с изменяемой шириной получают, в частности, в двумерном электронном слое, образующемся на границе раздела между арсенидом галлия (GaAs) и допированным алюминием арсенидом галлия (AlGaAs), рис. 8.2, верхняя часть. Ширину  $L_y$  проводящего канала изменяют с помощью управляющих металлических электродов, изображенных на схеме черными четырехугольниками, расположенными в верхней плоскости, рис. 8.2, нижняя часть. Двумерный электронный газ расположен в нижней плоскости. Если на металлические электроды (затворы) подать отрицательный потенциал  $V_g \sim -3$  В, то в области геометрической тени затворов (проецирование показано тонкими пунктирными линиями) в двумерном электронном газе образуются непроводящие области, между которыми образуется проводящий канал. На рисунке непроводящие области ограничены толстыми сплошными линиями. Направление протекания тока I показано стрелкой. При увеличении отрицательного потенциала затворов,  $-V_{g1} > -V_{g0}$ , область тени увеличивается (показано толстыми пунктирными линиями), что приводит к уменьшению ширины проводящего канала,  $L_{y1} < L_{y0}$ .

## 8.1. Количество проводящих подзон

Изменение ширины мостика приводит к изменению числа одномерных подзон, содержащих занятые уровни. Такие подзоны называют "проводящими", поскольку электроны, занимающие уровни в этих подзонах, принимают участие в переносе тока через мостик.

Определим число проводящих подзон N. Поскольку толщина мостика фиксирована  $L_z = L_{z0}$ , мы определим химпотенциал двумерного слоя следующим образом (полагаем, что только  $n_z = 1$  подзона заполнена):

$$\mu_{2D} = \mu - \frac{h^2}{8m_e L_{z0}^2}.$$
(8.1)

Проводящими будут те подзоны, для которых выполнено следующее условие:

$$E(n_y) \equiv \frac{h^2 n_y^2}{8m_e L_y^2} < \mu_{2D} \,. \tag{8.2}$$

Напомним, что энергия Ферми для электронов в одномерной подзоне есть:

$$\mu(n_y) = \mu_{2D} - E(n_y).$$
(8.3)

Только те одномерные зоны, для которых  $\mu(n_y) > 0$  будут содержать электроны и будут вносить вклад в ток.



Рис. 8.3. При увеличении ширины  $L_y$  канала, энергия дна одномерной подзоны  $E(n_y)$ , соответствующая поперечному движению электронов, уменьшается. Начиная с критического значения  $L_y \ge L_{y1}$ , когда  $E(n_y) \le \mu$ , рассматриваемая подзона становится проводящей

Вначале предположим, что ширина мостика настолько мала, что ни для одной подзоны не выполняется условие (8.2). Это означает, что энергия поперечного движения  $E(n_y)$  превышает химпотенциал  $\mu_{2D}$ , поэтому у электронов, находящихся в резервуаре, недостаточно энергии, чтобы войти в мостик, рис. 8.3. Энергия  $E(n_y)$  поперечного движения играет роль своеобразного потенциального барьера.

При увеличении ширины мостика  $L_y$  потенциальный барьер  $E(n_y)$  будет уменьшаться, поскольку  $E(n_y) \sim 1/L_y^2$ . И при некотором значении  $L_{y1}$  начнет заполнятся первая подзона. Это произойдет при выполнении следующего условия:

$$E(n_y = 1) = \mu_{2D},$$

$$L_{y1} = \frac{h}{2\sqrt{2m_e\mu_{2D}}} = \frac{\lambda_F}{2},$$

$$\lambda_F = \frac{h}{\sqrt{2m_e\mu_{2D}}}.$$
(8.4)

Строго говоря при  $L_y = L_{y1}$  значение химпотенциала, соответствующее этой зоне, будет равно нулю,  $\mu(n_y = 1) = 0$ , поэтому электроны еще не начнут заполнять эту зону. Однако, уже при  $L_y > L_{y1}$ , эта зона начнет заполнятся. Подчеркнем, что при переходе из резервуара в мостик полная энергия электрона сохраняется. При этом часть энергии расходуется на поперечную степень свободы,  $E(n_y)$ , а оставшаяся энергия соответствует движению электрона вдоль мостика. При дальнейшем увеличении ширины мостика дно второй зоны опустится ниже уровня химпотенциала и начнет заполняться вторая зона. Это произойдет при выполнении следующего равенства:

$$E(n_y = 2) = \mu_{2D},$$

$$L_{y2} = \frac{2h}{2\sqrt{2m_e\mu_{2D}}} = 2\frac{\lambda_F}{2}.$$
(8.5)

И так далее. N-я подзона начнет заполняться при  $L_y > L_{yN}$ , где:

$$L_{yN} = N \frac{\lambda_F}{2} \,. \tag{8.6}$$

Отсюда легко получить ответ на вопрос: Сколько подзон будут проводящими, при данной величине ширины мостика  $L_y$ ? Ответ непосредственно следует из уравнения (8.6): число  $N_y$  проводящих подзон есть:

$$N_y = \left[\frac{L_y}{\lambda_F/2}\right] \,. \tag{8.7}$$

Здесь [A] — есть целая часть числа. Проводящих подзон столько, сколько раз половина фермиевской длины волны помещается на ширине мостика. Одной фермиевской полудлине волны соответствует одна проводящая подзона. График зависимости  $N_y(L_y)$  представляет собой ступенчатую функцию, рис. 8.4.

### 8.2. Квазиодномерный мостик

Проводимость определяется следующим образом:

$$G = \lim_{V \to 0} \frac{I}{V} \,. \tag{8.8}$$

Здесь *I* ток, протекающий по мостику, если к берегам приложена разность потенциалов:

$$V = \varphi_{left} - \varphi_{right} \,, \tag{8.9}$$

где  $\varphi_{right(left)}$  — потенциал правого (левого) резервуаров.



Рис. 8.4. Количество проводящих подзон  $N_y$  скачкообразно изменяется при изменении ширины канала  $L_y$ . Соответственно, и проводимость  $G \sim N_y$  канала скачкообразно изменяется в функции  $L_y$ 

Ранее мы уже записывали выражение для тока в случае одномерного проводника. В случае квазиодномерного проводника (когда есть несколько проводящих подзон) отличие будет состоять в том, что необходимо дополнительно просуммировать по этим подзонам. С физической точки зрения это соответствует тому, что подзоны одновременно проводят ток, то есть они включены параллельно, поэтому токи, протекающие по таким подзонам должны складываться. С формальной точки зрения суммирование вкладов отдельных подзон следует из того, что при вычислении тока, необходимо:

1) во-первых, вычислить ток, переносимый электроном, находящимся в каком-либо квантовом состоянии;

2) и, во-вторых, просуммировать по всем состояниям, в которых находятся электроны, при этом заполнение состояний учитывается функцией распределения.

Начнем с первого пункта. В квантовой механике в отсутствие магнитного поля плотность тока переносимого электроном в состоянии, описываемом волновой функцией  $\psi(x, y, z)$ , определяется следующим выражением:

$$\vec{j}(x,y,z) = -\frac{e\hbar}{m_e} Im \left[ \psi(x,y,z) \vec{\nabla} \psi^*(x,y,z) \right]$$

Здесь оператор-вектор  $\vec{\nabla} = (\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z)$  имеет следующие проекции на координатные оси:

$$abla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Волновая функция  $\psi(x, y, z)$  (7.6) равна произведению  $\psi_x(x)$ ,  $\psi_y(y)$  и  $\psi_z(z)$ . Волновые функции  $\psi_y(y)$  и  $\psi_z(z)$  соответствуют движению поперек мостика. В случае, когда боковые стенки мостика непроницаемые, имеем:

$$\psi_y(y) = \sqrt{\frac{2}{L_y}} \sin(k_y y), \quad \psi_z(z) = \sqrt{\frac{2}{L_z}} \sin(k_z z).$$

Вдоль оси "х" мостик соединен с резервуарами. Мы полагаем, что электрон может свободно (без отражения) проходить из мостика в резервуар и обратно, поэтому для определения коэффициентов *A* и *B* в выражении для волновой функции (7.8):

$$\psi_x(x) = Ae^{ik_xx} + Be^{-ik_xx} \,,$$

можно использовать то, что состояния, соответствующие различным направлениям импульса электрона  $p_x = \hbar k_x > 0$  и  $p_x = \hbar k_x < 0$  не связаны между собой. Эти состояния соответствуют частицам, пришедшим из различных берегов-резервуаров. Таким образом, можно записать:

$$\psi_x(x, p_x) = \begin{cases} p_x > 0, & Ae^{ik_x x}, \\ \\ p_x < 0, & Be^{-ik_x x}. \end{cases}$$

Из условия нормировки,

$$\int_{0}^{L_{x}} dx |\psi_{x}|^{2} = 1 \,,$$

находим:

$$A = B = \frac{1}{\sqrt{L_x}}.$$

Используя приведенные выше волновые функции, вычислим:

$$j_x(y,z) = \frac{ev_x}{L_x} |\psi_y(y)|^2 |\psi_z(z)|^2,$$
  
$$j_y = 0, \quad j_z = 0.$$

где  $v_x = p_x/m_e$  — есть скорость электрона в мостике.

Далее определим ток  $I(p_x, n_y, n_z)$ , протекающий по всему поперечному сечению мостика. Напомним, что мы рассматриваем фиксированное квантовое состояние, характеризуемое квантовыми числами  $n_y, n_z$  и  $p_x$ . Для тока получаем:

$$I(p_x, n_y, n_z) = \int_{0}^{L_y} dy \int_{0}^{L_z} dz j_x(y, z) \,.$$

Подставляя выражения для плотности тока и для волновых функций, на-ходим:

$$I(p_x, n_y, n_z) = \frac{ev_x}{L_x} \int_0^{L_y} dy |\psi(y)|^2 \int_0^{L_z} dz |\psi(z)|^2 =$$
$$= \frac{ev_x}{L_x} \int_0^{L_y} dy \frac{2}{L_y} \sin^2(k_y y) \int_0^{L_z} dz \frac{2}{L_z} \sin^2(k_z z) = \frac{ev_x}{L_x}.$$

117

Заметим, что такое же выражение для тока мы получили бы, если бы забыли о поперечных размерах и считали бы мостик одномерным. Это и оправдывает использование термина "одномерный" при характеристике подзон.

Далее рассмотрим второй пункт. Для вычисления полного тока I, протекающего через мостик, необходимо использовать формулу суммирования по квантовым состояниям в квазиодномерном случае, (7.41), в которую вместо X подставим выражение для тока  $I(p_x, n_y, n_z)$ , переносимого одним квантовым состоянием. Дополнительно учтем, что электрон имеет спин, поэтому в каждом определенном нами состоянии может находится два электрона, например, один электрон со спином "вверх" и второй электрон со спином "вниз". В отсутствие магнитного поля направление оси, относительно которой определяется направление "вверх" и "вниз" не фиксировано. Отметим, что такое вырождение по спину заложено в уравнение Шредингера (7.3), в котором нет величин, зависящих от спина.

Итак, с учетом спина электрона (дополнительный множитель 2) полный ток есть:

$$I = \frac{2e}{h} \sum_{n_y=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \, v_x f(p_x, \mu(n_y)) \,. \tag{8.10}$$

Мы опустили суммирование по  $n_z$ , поскольку полагаем, что только одна (двумерная) подзона  $n_z = 1$  заполнена. Здесь  $v_x$ ,  $p_x$  — скорость и импульс продольного (вдоль оси "x") движения.

Поскольку мы рассматриваем случай, когда через образец течет ток и, следовательно, образец находится в неравновесном состоянии, то функция распределения  $f(p_x, \mu(n_y))$  не является функцией распределения Ферми. Определим эту функцию распределения. Аргументы её указывают на два важных обстоятельства. Во-первых, функция распределения зависит от величины и направления импульса  $p_x$ . Во-вторых, химпотенциал для различных подзон различен.

В баллистическом случае, когда нет рассеяния назад, всякий электрон с положительным импульсом прибыл из левого резервуара, а всякий электрон с отрицательным импульсом прибыл из правого резервуара ра (положительным считаем направление от левого резервуара к правому резервуару, на рис. 8.1 это направление указано стрелкой). Следовательно, для функции распределения электронов в мостике имеем:

$$f(p_x > 0) = f_{left}(p_x),$$
  

$$f(p_x < 0) = f_{right}(p_x).$$
(8.11)

Подставим уравнение (8.11) в уравнение (8.10) и перейдем от интегрирования по импульсу  $p_x$  к интегрированию по энергии  $E_x$ :

$$E_x = \frac{p_x^2}{2m_e}, \quad \Rightarrow \quad dE_x = v_x dp_x.$$

В результате получим:

$$I = \frac{2e}{h} \sum_{n_y=1}^{\infty} \int_{0}^{\infty} dE_x [f_{left}(p_x > 0, n_y) - f_{right}(p_x < 0), n_y].$$
(8.12)

Из этого выражения видно, что практически весь ток, переносимый направо, электронами, летящими из левого резервуара, компенсируется электронами, летящими в обратном направлении. В равновесии, когда потенциалы обеих берегов равны,  $\varphi_{right} = \varphi_{left} \Rightarrow f_{right} = f_{left}$ , эти, так называемые, флуктуационные токи компенсируются полностью друг друга, и ток отсутствует, I = 0.

Если потенциалы берегов различны,  $V \neq 0$ , то через образец течет ток  $I \neq 0$ . Обратим внимание на то, что этот "результирующий" постоянный ток переносится электронами, имеющими энергию близкую к энергии Ферми (в интервале энергий  $\mu \pm eV/2$ ). Вклады в ток электронов с энергией значительно отличающейся от энергии Ферми полностью скомпенсированы и их можно не учитывать при вычислении тока.

Чтобы вычислить  $f_{right(left)}$  учтем то, что при движении сохраняется полная энергия электрона. Рассмотрим электрон прибывший из левого

берега в некоторую выбранную точку мостика, ту точку, где мы вычисляем ток. В левом резервуаре энергия электрона была следующей:

$$E = \frac{p^2}{2m_e} + e\varphi_{left} \,,$$

где p — величина импульса электрона в левом берегу;  $\varphi_{left}$  — потенциал левого берега. В мостике энергия электрона будет:

$$E = \frac{p_x^2}{2m_e} + E(n_y) + e\varphi_0 \,,$$

где  $\varphi_0$  — электростатический потенциал в выбранной точке мостика. Приравниваем эти величины, получим:

$$\frac{p^2}{2m_e} + e\varphi_{left} = \frac{p_x^2}{2m_e} + E(n_y) + e\varphi_0.$$
(8.13)

Это равенство связывает импульс p, который имел электрон в левом береге с импульсом  $p_x$ , который имеет электрон в мостике в одномерной подзоне  $n_y$ . Далее учтем, что в резервуаре функция распределения есть функция распределения Ферми, которая зависит от кинетической энергии электрона  $p^2/(2m_e)$  следующим образом:

$$f_0(p) = \frac{1}{1 + e^{\frac{p^2/(2m_e) - \mu_{2D}}{k_B T}}}.$$
(8.14)

Функция распределения есть вероятность заполнения уровня. В мостике уровень с  $p_x > 0$  будет заполнен, если заполнен уровень с импульсом  $p = p(p_x)$  в левом резервуаре. Зависимость  $p(p_x)$  определяется уравнением (8.13). Тогда из уравнения (8.14) мы получим искомую функцию распределения в мостике для электронов, летящих из левого резервуара,  $p_x > 0$ :

$$f_{left}(p_x > 0, n_y) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_x + e(\varphi_0 - \varphi_{left}) - \mu(n_y)}{k_B T}\right)},$$

$$E_x = \frac{p_x^2}{2m_e},$$

$$\mu(n_y) = \mu_{2D} - E(n_y).$$
(8.15)

Подчеркнем, что мы не могли непосредственно воспользоваться функцией (8.14), поскольку выражение (8.10) содержит интегрирование по  $p_x$ , а не по p.

Аналогично получаем функцию распределения для электронов в мостике, движущихся из правого резервуара влево:

$$f_{right}(p_x < 0, n_y) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_x + e(\varphi_0 - \varphi_{right}) - \mu(n_y)}{k_B T}\right)}.$$
 (8.16)

Поскольку для вычисления проводимости G, (8.8), необходимо вычислить ток I при малом напряжения  $V = \varphi_{left} - \varphi_{right} \rightarrow 0$ , то мы можем считать, что разность потенциалов  $\varphi_{right(left)} - \varphi_0$  тоже мала. Разложим  $f_{right(left)}$  в ряд Тейлора по малой разности потенциалов:

$$f_{right(left)} = f(E_x, \mu(n_y)) + \frac{\partial f(E_x, \mu(n_y))}{\partial E_x} e\left(\varphi_0 - \varphi_{right(left)}\right).$$

Подставляя это разложение в уравнение (8.12), получим выражение для тока, протекающего по мостику, в следующем виде:

$$I = \frac{2e^2}{h} V \sum_{n_y=1}^{\infty} \int_0^\infty dE_x \left( -\frac{\partial f_0(E_x, \mu(n_y))}{\partial E_x} \right) .$$
(8.17)

При низких температурах,  $|\mu(n_y)| \gg k_B T$ , интеграл по энергии равен еди-

нице для проводящих подзон,  $\mu(n_y) > 0$ , и равен нулю для непроводящих подзон,  $\mu(n_y) < 0$ .

Уравнение (8.17) определяет зависимость тока от напряжения для квазиодномерного мостика с шириной  $L_y$ . Эта зависимость линейная, поэтому в рассматриваемом случае выполняется закон Ома и проводимость, G = I/V, не зависит от приложенного напряжения V.

При нулевой температуре, T = 0, зависимость проводимости G от ширины мостика  $L_y$  представляет собой ступенчатую функцию, аналогичную зависимости числа проводящих подзон от ширины мостика (смотри выражение (8.7) и рис. 8.4):

$$G = G_0 N_y = G_0 \left[ \frac{L_y}{\lambda_F/2} \right] \,. \tag{8.18}$$

Здесь  $G_0 = 2e^2/h$  — квант проводимости. Из полученного выражения видно, что проводимость баллистического (квазиодномерного) канала может принимать только значения кратные величине  $G_0$ . Выражение (8.18) имеют такой простой вид, потому что ток, протекающий в одномерном канале, (8.12), не зависит от энергетических характеристик электронной системы, таких как, например, энергия Ферми, которая различна для разных проводящих подзон. В результате этого, вклад различных подзон в полную электропроводность канала одинаков и составляет один квант проводимости  $G_0$  от каждой подзоны. Равенство вкладов обусловлено особенностью плотности состояний электронов в одномерном случае,  $dN/dE_x \sim 1/v_x$ . В результате этого, скорость электрона  $v_x$  сокращается в произведении  $I(p_x) dN/dE_x$  и не входит в окончательное выражение (8.17) для тока.

В 1988 году квантование проводимости (кондактанса) баллистического канала было открыто экспериментально [24, 25], что явилось одной из наиболее ярких демонстраций того, что квантование движения электронов оказывает существенное влияние на свойства мезоскопических систем.

Отметим, что при повышении температуры, когда температура сравнивается с расстоянием между соседними подзонами,  $k_BT \sim h^2/(8m_eL_y^2)$ , ступени на зависимости  $G(L_y)$  сглаживаются и ступенчатая зависимость превращается в линейную.

В заключение рассмотрим, каким образом полученное выражение для проводимости связано с электропроводностью образцов макроскопических размеров. Для этого сравним проводимости  $G_1$  и  $G_2$  двух мостиков, узкого и широкого. В последнем случае учтем, что для большого  $N_y \gg 1$  мы можем заменить целую часть числа  $[2L_y/\lambda_F]$  на само число  $2L_y/\lambda_F$ . Такая замена приводит к относительной погрешности результата порядка  $1/N_y$ , которая убывает с увеличением ширины мостика. При  $L_y \gg \lambda_F$  число проводящих подзон с высокой точностью равно,  $N_y = [2L_y/\lambda_F] \approx 2L_y/\lambda_F$ . Следовательно:

$$G_{1} = \frac{2e^{2}}{h}, \qquad \qquad \frac{\lambda_{F}}{2} < L_{y} < \lambda_{F},$$

$$G_{2} = \frac{2e^{2}}{h} \frac{2L_{y}}{\lambda_{F}} = \frac{4e^{2}}{h^{2}} L_{y} p_{F}, \qquad L_{y} \gg \lambda_{F}.$$

$$(8.19)$$

Мы видим, что проводимость  $G_1$  одномерного баллистического проводника определяется только мировыми постоянными, зарядом электрона e и постоянной Планка h. В то же время, проводимость  $G_2$  широкого мостика уже зависит как от геометрии, ширины образца  $L_y$ , так и от характеристик электронного спектра, импульса  $p_F$  электронов с энергией Ферми.

Далее предположим, что толщина  $L_z$  образца также возрастает. В этом случае будет также увеличиваться количество проводящих двумерных слоев. При  $L_z \gg \lambda_F$  запишем:

$$N_z = \left[\frac{L_z}{\lambda_F/2}\right] \approx \frac{2L_z}{\lambda_F}.$$

Проводимость в этом случае есть:

$$G = G_0 N_y N_z \,.$$

Таким образом, электропроводность достаточно большого мезоскопиче-

ского баллистического мостика определяется так:

$$G = \frac{2e^2}{h} \frac{2L_y}{\lambda_F} \frac{2L_z}{\lambda_F}$$
  
=  $\frac{8e^2}{h^3} Sp_F^2$ , (8.20)  
 $L_y, L_z \gg \lambda_F$ .

Здесь  $S = L_y \times L_z$  – площадь поперечного сечения мостика,  $p_F = h/\lambda_F$  – импульс электрона с энергией Ферми.

Рассмотрим макроскопический мостик, имеющий длину  $L_x$  и поперечное сечение с площадью *S*. Известно, что сопротивление такого образца есть:

$$R = \rho \, \frac{L_x}{S} \,,$$

где удельное сопротивление *р* зависит от длины свободного пробега электронов *l<sub>i</sub>*. Согласно формуле Друдэ-Лоренца [8] имеем:

$$\rho = \frac{p_F}{ne^2 l_i} \,.$$

Здесь n — плотность электронов, которая в трехмерном случае определяется следующим выражением (смотри (7.13)):

$$n = \frac{8\pi p_F^3}{3h^3} \,.$$

Таким образом, электропроводность  $\Sigma = 1/R$  макроскопического образца есть:

$$\Sigma = \frac{8e^2}{h^3} S \, p_F^2 \frac{l_i}{L_x} \frac{\pi}{3} \, .$$

Для того, чтобы сравнить G и  $\Sigma$  учтем, что в квантовой задаче мы

рассматривали баллистический мостик, то есть такой мостик, через который электрон пролетает без столкновения с примесями. Это соответствует случаю, когда длина пробега  $l_i$  больше или порядка длины мостика. Подставляя  $l_i/L_x \sim 1$  в приведенное выше выражение, получим:

$$\Sigma = \frac{8e^2}{h^3} S \, p_F^2 \frac{\pi}{3} \,. \tag{8.21}$$

Сравнивая выражения (8.20) и (8.21), видим, что для одного и того же образца квантовый и макроскопический расчеты электропроводности дают практически совпадающие результаты,  $\Sigma/G = \pi/3 \approx 1,05$ .

## Вопросы для самопроверки

1) Чем определяется количество проводящих подзон?

2) Как зависит проводимость квазиодномерного баллистического мостика от его толщины?

3) Вычислить ток, переносимый электроном в определенном квантовом состоянии.

4) Вычислить функцию распределения для электронов в мостике, принадлежащих определенной подзоне.

5) Вычислить ток, переносимый электронами, принадлежащих определенной подзоне.

6) Сравнить проводимость квантового и классического баллистического мостиков.

## 9. Электроны в одномерном кольце

Ранее мы рассмотрели, каким образом квантование спектра электронов в мезоскопических образцах влияет на электропроводность — физическую величину, характеризующую явление протекания тока через образец, под действием приложенного напряжения. Это явление присущее как макроскопическим проводникам, так и мезоскопическим проводникам. При уменьшении размеров проводника изменяется только величина электропроводности.

Сейчас же мы рассмотрим пример физического явления принципиально иного характера, а именно явления, которое существует в мезоскопических образцах, однако полностью пропадает в образцам с макроскопическими размерами. Говорят, что такие явления исчезает в макроскопическом пределе,  $L \to \infty$ , где L — размер образца. Эта категория явлений присуща только образцам с дискретным спектром и отсутствует в макроскопических образцах, имеющих непрерывный спектр.

В рассматриваемом ниже явлении играют существенную роль два эффекта одновременно. А именно, эффект Ааронова-Бома и квантование спектра. Совместно эти эффекты приводят к тому, что при низких температурах в нормальном, не сверхпроводящем кольце, которое пронизано магнитным потоком, рис. 9.1, существует незатухающий ток, величина которого периодически изменяется с изменением Ф:

$$I \sim \sin\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)$$
 (9.1)

Такой ток называют персистентным током.

Существование персистентных токов в двусвязных не сверхпроводящих образцах (кольцах) было предсказано Куликом в 1970 г. [26] для баллистических колец и Бьюттикером (Büttiker), Имри (Imry) и Ландауэром (Landauer) в 1983 г. [27] для колец, в которых присутствует рассея-



Рис. 9.1. При нуле температур в мезоскопическом не сверхпроводящем кольце, пронизанном постоянным во времени магнитным потоком  $\Phi$ , течет термодинамически равновесный незатухающий ток *I* 

ние электронов на примесях. Впервые экспериментально персистентные токи были измерены в 90-х годах 20-го столетия [28, 29, 30].

Для того, чтобы вычислить ток необходимо, во-первых, определить спектр электронов в кольце, во-вторых, вычислить ток, переносимый электроном, находящимся в определенном квантовом состоянии и, в-третьих, просуммировать вклады в ток от всех занятых электронами уровней, то есть уровней энергия которых меньше энергии Ферми  $\mu$ .

Вначале рассмотрим одномерное кольцо без магнитного потока,  $\Phi = 0$ , а затем обобщим полученные результаты на случай, когда кольцо пронизано магнитным потоком.

## 9.1. Кольцо без магнитного потока

### 9.1.1. Спектр электронов

Для нахождения разрешенных состояний электронов в кольце необходимо решить одномерное стационарное уравнение Шредингера для вол-



Рис. 9.2. Одномерное кольцо длиной *L*. Стрелка показывает направление оси "х". Пунктиром показано начало отсчета

новой функции электрона  $\psi(x)$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2}{dx^2}\psi = E\psi.$$
(9.2)

Ось "х" направлена вдоль кольца, рис. 9.2.

Данное уравнение следует дополнить соответствующим граничным условием. Когда мы рассматривали ограниченную область пространства с непроницаемыми стенками, то граничные условия получались из условия непроникновения частицы за пределы области. При этом волновая функция электрона на границе области обращается в нуль. Для электрона в кольце ситуация иная, поскольку вдоль оси "х" движение электрона ничем не ограничено. Однако, после полного оборота,  $x \to x + L$ , электрон возвращается в то же самое место, поэтому волновая функция, являясь функцией однозначной, должна быть периодической по координате x с периодом, равным длине кольца L:

$$\psi(x) = \psi(x+L). \tag{9.3}$$

Это уравнение и будет граничным условием в данном случае.

Волновая функция должна быть нормирована, в соответствие с тем, что одно квантовое состояние может занимать только один электрон. В

случае кольца условие нормировки следующее:

$$\int_{0}^{L} dx |\psi(x)|^{2} = 1.$$
(9.4)

Согласно квантовой механике, выражение  $|\psi(x)|^2 dx$  есть вероятность найти частицу, описываемую волновой функцией  $\psi(z)$ , в интервале dx вблизи точки с координатой x. Интеграл вдоль периметра кольца определяет вероятность найти частицу в кольце. Поскольку частица может находится только в кольце, то такая вероятность должна равняться единице.

Нормированное решение уравнения (9.2) есть:

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx} \,. \tag{9.5}$$

Отметим, что величина k, стоящая в показателе экспоненты, это проекция волнового вектора на положительное направление оси "х". Поэтому величина k может быть как положительной так и отрицательной. В баллистическом кольце нет примесей и/или границ, которые могли бы приводить к изменению направления движения электрона. Поэтому состояния с k > 0 и состояния с k < 0 не зависимы друг от друга и их можно рассматривать раздельно. Решения с определенным знаком волнового вектора k соответствуют фиксированному направлению движения электрона.

Граничное условие (9.3) накладывает следующие ограничения на допустимые значения волнового вектора  $k = p/\hbar$ :

$$\frac{1}{\sqrt{L}}e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{ik(x+L)} \quad \Rightarrow \quad e^{ikL} = 1.$$

Отсюда получаем, что волновой вектор k электрона в кольце должен удовлетворять следующему условию:  $\cos(kL) = 1$ . Это уравнение имеет дискретный набор решений:

$$k_n = \frac{2\pi}{L}n$$
,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$ . (9.6)

129

Следовательно, волновой вектор электрона в кольце может принимать только фиксированные дискретные значения,  $k = k_n$ . Другими словами, только значения  $k_n$  разрешены для волнового вектора электрона в кольце.

Разрешенные значения энергии  $E_n = \hbar^2 k_n^2 / (2m_e)$  следующие:

$$E_n = \frac{h^2 n^2}{2m_e L^2}.$$
 (9.7)

Следует отметить, что энергия уровня n не зависит от направления движения, то есть от знака n:

$$E_n = E_{-n} \,.$$
 (9.8)

В таком случае говорят, что уровень энергии (двукратно) вырожден. Это кинематическое вырождение вызвано эквивалентностью движения по часовой стрелке и движения против часовой стрелки. Если учесть спин электрона, то кинематическое вырождение должно быть дополнено двукратным вырождением по спину. Следовательно, уровни энергии электронов в баллистическом кольце четырехкратно вырождены. Мы не будем учитывать спин электрона, поэтому будем говорить только о кинематическом вырождении.

Отметим, что, если уровень энергии, соответствующий какому-либо n, занят электроном, то и уровень энергии, соответствующий противоположному направлению движения, то есть -n, тоже занят. Уже отсюда можно заключить, что полный ток в кольце будет равен нулю, поскольку ток, создаваемый электроном, движущимся по часовой стрелке, будет в точности скомпенсирован током, создаваемым другим электронов, движущимся против часовой стрелки.

Такая компенсация связана с тем, что оба состояния имеют одинаковую энергию. В результате этого, во-первых, оба состояния или заняты или свободны одновременно и, во-вторых, если эти состояния заняты, то они вносят одинаковый по абсолютной величине вклад в ток, поскольку ток пропорционален скорости, а скорости одинаковы, если одинаковы энергии. Подтвердим эти качественные рассуждения формальным вычислением.

#### 9.1.2. Ток единичного квантового состояния

Рассмотрим квантово-механическое выражение для тока:

$$I[\psi] = -\frac{e\hbar}{m_e} Im \left[\psi \frac{d\psi^*}{dx}\right] , \qquad (9.9)$$

и подставим сюда волновую функцию (9.5) с волновым вектором (9.6). В результате получим:

$$I_n = \frac{ehn}{m_e L^2} = \frac{ev_n}{L}, \qquad (9.10)$$

где

$$v_n = \frac{p_n}{m_e} = \frac{\hbar k_n}{m_e} = \frac{\hbar n}{m_e L}.$$
(9.11)

есть скорость электрона в состоянии с квантовым числом *n*.

#### 9.1.3. Полный ток в кольце

Для определения полного тока *I*, протекающего в кольце мы должны просуммировать по всем занятым состояниям:

$$I = \sum_{n = -\infty}^{\infty} I_n f_0(E_n) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} \frac{eh}{m_e L^2} n f_0(E_n).$$
(9.12)

Функция распределения Ферми  $f_0(E_n)$  показывает какова вероятность заполнения состояния с энергией  $E_n$ . Учтем, что  $E_n = E_{-n}$  и перепишем выражение для тока в следующем виде:

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{eh}{m_e L^2} f(E_n)(n + (-n)) \equiv 0.$$
(9.13)

131

Таким образом, полный ток в кольце без магнитного потока тождественно равен нулю.

Подчеркнем, что нулевое значение полного тока связано с компенсацией частичных токов, текущих в отдельных квантовых состояниях. Это не означает, что в кольце нет никакого движения. Движение есть, однако, в силу симметрии свойств электронной системы относительно инверсии направления движения, ток в кольце без магнитного потока отсутствует.

Исходя из такой картины можно ожидать, что если нарушить такую симметрию, то в кольце появится циркулирующий ток. И это в самом деле оказывается так.

# 9.2. Кольцо, пронизанное магнитным потоком

Один из простейших способов нарушить вращательную симметрию, это поместить кольцо в перпендикулярное плоскости кольца магнитное поле, рис. 9.3.

Нас будет интересовать влияние магнитного потока, созданного магнитным полем, на ток в кольце. Такое влияние, фактически, обусловлено эффектом Ааронова-Бома, возникающим вследствие того, что векторный потенциал вносит вклад в фазу волновой функции электрона. Отметим, что для строго одномерного кольца влияние магнитного поля сводится исключительно к эффекту Ааронова-Бома, если не учитывать спин электрона и, соответственно, расщепление Зеемана. Если же кольцо квазиодномерное, то есть имеет конечную ширину  $L_y \neq 0$ , то дополнительное влияние магнитного поля на кинематику электронов в кольце проявляется, в таких полях  $B_c$ , когда циклотронный радиус  $r_c$  (то есть, радиус классической орбиты электрона в магнитном поле) сравнивается с шириной кольца,  $r_c \sim L_y$ .

Оценим величину магнитного поля  $B_{AB}$ , при котором проявляется эффект Ааронова-Бома, и поля  $B_c$ , при котором начинает сказываться динамическое, силовое влияние магнитного поля.

Как мы уже обсуждали, эффект Ааронова-Бома приводит к зависимости физических величин от магнитного потока с периодом  $\Phi_0 = h/e$ ,



Рис. 9.3. Магнитный поток  $\Phi$ , направленный перпендикулярно плоскости кольца, создает векторный потенциал  $A = \Phi/L$ , направленный вдоль периметра кольца. Направление магнитного потока  $\Phi$  и векторного потенциала A показано на рисунке соответствующими стрелками. Остальные обозначения те же, что и на рис. 9.2

поэтому характерное поле  $B_{AB}$  можно оценить следующим образом (возьмем радиус кольца  $R = 10^{-6}$  м):

$$BS \sim \Phi_0 \quad \Rightarrow \quad B_{AB} \sim \frac{4\pi h}{eL^2},$$
  
 $B_{AB} \sim \frac{4\pi 6.62 \times 10^{-34}}{1.6 \times 10^{-19} 4\pi^2 \times 10^{-12}} \, \text{Дж} \cdot \text{c}/(\text{Кл м}^2) \sim 10^{-3} \,\text{T} = 10 \, \Gamma c$ 

Здесь площадь кольца  $S = L^2/(4\pi)$ .

Оценим величину  $B_c$ , если ширина кольца равна,  $L_y = 0.1 R$ . Для электронов двумерного газа в гетероструктуре GaAs/ALGaAs эффективная масса  $m^* = 0.067 m_e$ , энергия Ферми  $\mu_{2D} \sim 10 \text{ мэB}$ , следовательно, фермиевский импульс равен ( $p_F = h/\lambda_F$ ,  $\lambda_F \sim 47 \times 10^{-9}$  м):

$$p_F = \sqrt{2m^* \mu_{2D}}$$

$$\sim \left(2 \times 0.067 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 10 \times 10^{-3} \times 1.6 \times 10^{-19}\right)^{\frac{1}{2}} (\text{KF} \cdot \text{KJ} \cdot \text{B})^{\frac{1}{2}}$$

$$\sim 10^{-26} \text{KF} \cdot \text{M/c}.$$

Циклотронный радиус для электрона с энергией Ферми (именно частицы с энергией вблизи энергии Ферми вносят основной вклад в персистентный ток) есть:

$$r_c = \frac{m^* v_F}{eB} \sim L_y \quad \Rightarrow \quad B_c \sim \frac{p_F}{eL_y},$$
  
 $B_c \sim \frac{10^{-26}}{1.6 \times 10^{-19} 0.1 \times 2\pi \times 10^{-6}}$  кг·м/(с·Кл·м)  $\sim 0.1 \text{ T} = 1000 \text{ Fc}.$ 

Мы видим, что  $B_c \gg B_{AB}$ . И это равенство выполняется тем лучше, чем уже кольцо, т.е., чем меньше отношение  $L_y/R$ .

Следовательно, в не очень сильном магнитном поле важен только эффект Ааронова-Бома и мы можем считать, что кольцо пронизано магнитным потоком, отвлекаясь от силового воздействия магнитного поля, создающего магнитный поток, на движение электронов в кольце.

#### 9.2.1. Спектр электронов

Пусть магнитный поток, пронизывающий кольцо, направлен вдоль оси кольца, рис. 9.3. Тогда вдоль периметра кольца существует векторный потенциал *А* такой, что:

$$\oint_L Adx = \Phi \,. \tag{9.14}$$

В качестве положительного мы выберем такое направление магнитного потока, при котором направление векторного потенциала противоположно положительному направлению оси "x" в кольце. Магнитный поток Ф соответствует такому векторному потенциалу:

$$A = \frac{\Phi}{L}, \qquad (9.15)$$

направленному вдоль периметра кольца.

Из квантовой механики известно [7], что в присутствии векторного потенциала оператор импульса  $\hat{p}_x$  для частиц с зарядом *е* имеет следую-щий вид:

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx} - eA. \qquad (9.16)$$

При этом стационарное одномерное уравнение Шредингера есть:

$$\frac{\hat{p}_x^2}{2m_e}\psi \equiv -\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{d}{dx} - 2\pi i\frac{\Phi}{\Phi_0}\frac{1}{L}\right)^2\psi = E\psi.$$
(9.17)

В приведенном уравнении мы учли, что заряд электрона отрицателен и равен -e < 0.

Волновая функция  $\psi$  должна удовлетворять условию периодичности (9.3),  $\psi(x) = \psi(x + L)$ , и условию нормировки (9.4),  $\int_0^L dx |\psi(x)|^2 = 1$ .

При решении уравнения (9.17) поступим также, как мы уже поступали, рассматривая электропроводность кольца с магнитным потоком. А именно, устраним векторный потенциал из уравнения Шредингера с помощью фазового преобразования для волновой функции. Другими словами, мы вводим новую функцию:

$$\varphi(x) = e^{-i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{x}{L}} \psi(x) \,. \tag{9.18}$$

которая удовлетворяет следующей граничной задаче:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2}{d^2x}\varphi = E\varphi\,,\tag{9.19}$$

$$\varphi(x+L) = e^{-i2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}}\varphi(x), \qquad (9.20)$$

135

$$\int_{0}^{L} dx |\varphi(x)|^{2} = 1.$$
(9.21)

Мы видим, что магнитный поток "переместился" из уравнения Шредингера в граничное условие. Это позволяет назвать эффект Ааронова-Бома топологическим эффектом, поскольку он обусловлен нетривиальными граничными условиями, возникающими при наличии двусвязной, то есть топологически нетривиальной, геометрии образца.

В чем разница и в чем сходство между исходной волновой функцией  $\psi$ , и новой функцией  $\varphi$ , (9.18)? Сразу подчеркнем, что истинной волновой функцией является  $\psi$ . В частности она удовлетворяет интуитивно понятному условию периодичности в кольце, (9.3).

Общие свойства для  $\psi(x)$  и  $\varphi(x)$ .

1) Квадрат по модулю определяет плотность вероятности, поэтому условия нормировки, (9.4) и (9.21), одинаковые.

2) Обе функции соответствуют одной и той же энергии E, что следует из уравнений (9.17) и (9.19).

Различия между  $\psi(x)$  и  $\varphi(x)$ .

1) Эти функции являются решениями для разных уравнений, смотри (9.17) и (9.19).

2) Функции  $\psi(x)$  и  $\varphi(x)$  удовлетворяют различным условиям периодичности в кольце. В то время как функция  $\psi(x)$  удовлетворяет нормальному условию периодичности, (9.3), функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет аномальному условию периодичности, (9.20), которое зависит от величины магнитного потока Ф. Так, например, если магнитный поток равен целому числу квантов, то функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет симметричному условию периодичности:

$$\Phi = n\Phi_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \varphi(x+L) \,.$$

Если же магнитный поток равен полуцелому числу квантов, то функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет антисимметричному условию периодичности:

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2} + n\Phi_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = -\varphi(x+L) \,.$$

Фактически, мы ввели функцию  $\varphi(x)$  из соображений удобства, поскольку уравнение Шредингера упрощается. Однако за это упрощение приходится платить усложнением граничных условий.

Итак, нормированное решение уравнения (9.19), удовлетворяющее условию периодичности (9.20), есть:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_n x} e^{-i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{x}{L}},$$

$$k_n = \frac{2\pi}{L} n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots,$$

$$E_n = \frac{h^2}{2m_e L^2} \left( n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2.$$
(9.22)

Приведем также исходную волновую функцию электрона:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_n x} \,. \tag{9.23}$$

Следует отметить, что величина  $k_n$  уже не является волновым вектором электрона, а есть просто формальный параметр. Волновой же вектор, (9.16), который определяет скорость электрона, есть:

$$K_n = \frac{p_n}{\hbar} = \frac{2\pi}{L} \left( n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)$$

Магнитный поток  $\Phi$  явно не входит в выражение для волновой функции  $\psi_n(x)$ . Однако энергия  $E_n$  состояния, которому соответствует волновая функция  $\psi_n(x)$ , зависит от магнитного потока,  $E_n = E_n(\Phi)$ .

Из уравнения (9.22) видно, что в присутствии магнитного потока уровни энергии оказываются не вырожденными, — симметрия относительно изменения направления вращения нарушена магнитным потоком:

$$E_n(\Phi) \neq E_{-n}(\Phi) \,. \tag{9.24}$$



Рис. 9.4. Зависимость энергии  $E_n$  (для n = -1, 0, +1) квантовых уровней в одномерном кольце от величины магнитного потока  $\Phi$ , пронизывающего плоскость кольца.  $\Phi_0 = h/e$  – квант магнитного потока

Таким образом, двукратно вырожденный уровень в присутствии магнитного потока расщепляется на два невырожденных уровня, рис. 9.4. При этом энергия уровня, соответствующего движению по часовой стрелке, n > 0, понижается, а энергия уровня, соответствующего движению против часовой стрелки, -n < 0, повышается:

$$E_{-n} - E_n = n \frac{4h^2}{2m_e L^2} \frac{\Phi}{\Phi_0}.$$

При изменении знака магнитного потока на противоположный, бо́льшую энергию будет иметь уровень с положительным *n*.

Такое расщепление уровней в присутствии магнитного потока приводит к тому, что в кольце появляется ток. Это термодинамически равновесный ток, не затухающий и бездиссипативный, то есть протекающий без выделения джоулева тепла.

Причина появления тока состоит в том, что квантовомеханические токи, соответствующие движению электронов в противоположных направлениях, не компенсируют друг друга. Равновесность тока состоит в том, что для поддержания тока не нужна электродвижущая сила.

#### 9.2.2. Ток единичного квантового состояния

Вычислим ток, переносимый электроном в квантовом состоянии с волновой функцией  $\psi(x)$ . В присутствии векторного потенциала  $A = \Phi/L$  выражение для тока имеет следующий вид:

$$I[\psi] = -\frac{e\hbar}{m_e} Im\left[\psi \frac{d\psi^*}{dx}\right] - \frac{e^2}{m_e} A|\psi|^2.$$
(9.25)

Подставим сюда волновую функцию  $\psi$ , выраженную через  $\varphi$ , (9.18),  $\psi(x) = e^{i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{x}{L}} \varphi(x)$ , и получим:

$$I[\varphi] = -\frac{e\hbar}{m_e} Im \left[\varphi \frac{d\varphi^*}{dx}\right] \,. \tag{9.26}$$

Обратим внимание, что также, как и уравнение Шредингера (9.19), выражение для тока, записанное через функцию  $\varphi(x)$  не содержит явно магнитный поток  $\Phi$ .

Подставляя  $\varphi(x)$ , (9.22), в уравнение (9.26), найдем ток:

$$I_n = \frac{eh}{m_e L^2} \left( n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \,. \tag{9.27}$$

Из полученного выражения видно, что, в отличие от кольца без магнитного потока, в рассматриваемом случае действительно  $I_n \neq I_{-n}$ , что и приводит к появлению персистентного тока.

Мы вычислили ток  $I_n$ , используя выражение для волновой функции. Однако, сравнивая выражение для тока  $I_n$ , (9.27), с выражением для энергии  $E_n$ , (9.22), мы видим, что ток может быть вычислен как взятая со знаком минус производная от энергии уровня по магнитному потоку:

$$I_n = -\frac{\partial E_n}{\partial \Phi}.$$
(9.28)

Или другими словами, для вычисления тока достаточно знать спектр и не обязательно вычислять волновые функции.

Мы получили соотношение (9.28) в частном случае невзаимодействующих электронов в баллистическом кольце. Однако выражение (9.28) остается справедливым и в общем случае, когда в кольце есть примеси, когда электроны взаимодействуют между собой и с другими квазичастицами в кольце. Полезность соотношения (9.28) состоит в том, что, как правило, вычислить спектр, а точнее его часть, зависящую от магнитного потока, оказывается намного проще, чем вычислить волновые функцию.

### 9.2.3. Полный ток в кольце

**1. Непосредственное вычисление.** Для определения полного тока I, протекающего в кольце, необходимо просуммировать  $I_n$  по всем занятым состояниям:

$$I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n f_0(E_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial E_n}{\partial \Phi}\right) f_0(E_n)$$

$$= \frac{eh}{m_e L^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) f_0(E_n(\Phi)).$$
(9.29)

Полученное выражение уже не равно тождественно нулю, как в случае с кольцом без магнитного потока. Чуть позже мы преобразуем полученное выражение, таким образом, чтобы периодическая зависимость от магнитного потока была очевидной. Сейчас же мы покажем, что полученный ток является, фактически, термодинамически равновесным откликом системы на магнитный поток.

**2. Термодинамическое рассмотрение.** Для вычисления указанного отклика вспомним из термодинамики следующее. Образец, помещенный во внешнее магнитное поле приобретает магнитный момент **M** величина которого определяется как взятая со знаком минус производная от термодинамического потенциала  $\Omega$  образца по магнитному полю **B**:

$$\mathbf{M} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{B}}\,,\tag{9.30}$$

В рассматриваемом нами случае, когда образец представляет собой одномерное кольцо, магнитный момент есть произведение тока на площадь кольца M = IS. Разделив левую и правую части уравнения (9.30) на площадь кольца S и учитывая, что произведение магнитного поля на площадь есть магнитный поток  $BS = \Phi$ , получим искомое соотношение для тока I, протекающего в кольце, пронизанном магнитным потоком  $\Phi$ :

$$I = -\frac{\partial \Omega(\Phi)}{\partial \Phi}.$$
(9.31)

Приведенное выражение является довольно общим и справедливо как для частиц, подчиняющихся классическим законам движения, так и для квантовых частиц. Все отличие сосредоточено в зависимости термодинамического потенциала от магнитного поля (магнитного потока). Так, заряженные квантовые частицы чувствительны к эффекту Ааронова-Бома, поэтому термодинамический потенциал для системы квантовых частиц, например, электронов, в одномерном кольце зависит от магнитного потока. И персистентный ток *I*, (9.31), отличен от нуля. В то же время классические частицы, например, броуновские частицы диффундирующие вдоль кольца, реагируют только на силовое воздействие магнитного поля, проникающего в кольцо, поэтому в слабых полях,  $B \ll B_c$ , термодинамический потенциал для таких частиц не зависит от магнитного поля и ток *I*, (9.31), переносимый такими частицами, равен нулю.

Покажем теперь, что для электронов в кольце уравнение (9.31) идентично уравнению (9.29). Для этого запишем выражение для термодинамического потенциала  $\Omega$  системы электронов с дискретным спектром  $E_n$ , в случае, когда есть обмен энергией и частицами с резервуаром, имеющим температуру T и химический потенциал  $\mu$ :

$$\Omega = -k_B T \sum_{n} \ln\left(1 + e^{\frac{\mu - E_n}{k_B T}}\right) \,. \tag{9.32}$$

Подставляя сюда спектр электронов  $E_n$ , (9.22), получим зависимость  $\Omega(\Phi)$ . Дифференцируя по магнитному потоку в соответствии с уравнением (9.31) мы получим в точности уравнение (9.29):

$$I(\Phi) = -\frac{\partial\Omega(\Phi)}{\partial\Phi} = k_B T \sum_n \frac{\partial}{\partial\Phi} \ln\left(1 + e^{\frac{\mu - E_n}{k_B T}}\right)$$
$$= k_B T \sum_n \left(-\frac{\partial E_n}{\partial\Phi}\right) \frac{1}{k_B T} \frac{e^{\frac{\mu - E_n}{k_B T}}}{1 + e^{\frac{k_B T}{k_B T}}}$$
$$= \sum_n \left(-\frac{\partial E_n}{\partial\Phi}\right) \frac{1}{1 + e^{\frac{E_n - \mu}{k_B T}}} = \sum_n \left(-\frac{\partial E_n}{\partial\Phi}\right) f(E_n) .$$

Подчеркнем, что выражение (9.31) связывает ток в кольце со спектром электронов. В то время как выражение (9.29), фактически, получено с использованием волновых функций.

Следует отметить, что несмотря на то, что формула (9.31) широко используется в литературе, фактически, она применима только в случае простых геометрий. Например, для единичного кольца. Однако уже в случае, когда два кольца соединены между собой в одной точке и магнитный поток пронизывает только одно из колец, ток, вычисленный по формуле (9.25), отличается от тока, вычисленного по формуле (9.28). Различие ответов обусловлено тем, что использование термодинамических соотношений (9.28), (9.30) и (9.31) дает правильный ответ для магнитного момента образца наблюдаемого с больших (макроскопических) расстояний. Однако, детальное распределение микроскопических токов, ответственных за магнитный момент, может быть получено только при последовательном квантово-механическом рассмотрении, основанном на знании волновых функций. Следовательно, в случае образцов со сложной геометрией для правильного вычисления персистентного тока необходимо находить волновые функции и вычислять квантово-механический ток согласно уравнению (9.25).

В заключение отметим, что еще Хунд в работе 1938 года [16] указывал на то, что свойства электронной системы должны осциллировать с магнитным потоком. Кроме того, Дингл в работе 1952 года [17] также писал, что равновесные свойства электронной системы должны зависеть от магнитного потока. Однако только в работе Ааронова и Бома (1959г)[10] были вскрыты физические причины таких осцилляций.

## Вопросы для самопроверки

1) Что такое персистентный ток?

2) Определить спектр электронов в баллистическом кольце без магнитного потока.

3) Вычислить ток в кольце без магнитного потока.

4) Определить спектр электронов в кольце с магнитным потоком.

5) В чем причина появления персистентного тока?

6) Вычислить ток переносимый электроном в определенном квантовом состоянии в кольце с магнитным потоком.

## 10. Персистентный ток

Из выражения (9.22) видно, что значение энергии  $E_n(\Phi)$  для уровня с фиксированным *n* монотонно изменяется при изменении величины магнитного потока  $\Phi$ . Однако, свойства всего образца (всей электронной системы образца), как мы ожидаем, должны быть периодичны по магнитному потоку с периодом  $\Phi_0$ .

Чтобы разрешить это кажущееся противоречие, рассмотрим полную энергию E электронов в образце при нулевой температуре, T = 0, как функцию магнитного потока Ф. Для вычисления энергии E необходимо просуммировать энергии всех электронов в кольце. При этом следует учесть, что электроны занимают только такие состояния, энергия которых меньше, чем химпотенциал  $\mu$ :

$$E(\Phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(\Phi)\theta[\mu - E_n(\Phi)].$$

Здесь  $\theta(x)$  — тэта-функция Хевисайда, равная единице при x > 0 и равная нулю при x < 0.

Можно непосредственно выполнить суммирование в приведенном выражении. Однако это мы сделаем позже, когда будем вычислять величину персистентного тока. Сейчас же мы ограничимся качественным анализом приведенного выше выражения и покажем, что, действительно, полная энергия *E* периодична по магнитному потоку.

На рис. 10.1 изображены одноэлектронные уровни энергии  $E_n$  в функции магнитного потока. Горизонтальной прямой на рисунке обозначен уровень химпотенциала  $\mu$ . Мы знаем, что при нулевой температуре все уровни, расположенные ниже уровня Ферми заполнены, а все уровни расположенные выше — свободны. Из рисунка 10.1 видно, что при изменении магнитного потока энергия некоторого уровня становится больше энергии Ферми. Электрон, который занимал такой уровень, перейдет из об-


Рис. 10.1. Толстой линией показано периодическое изменение энергии верхнего заполненного уровня при изменении величины магнитного потока  $\Phi$ . Эта периодичность является причиной того, почему полная энергия электронной системы в кольце изменяется периодически при изменении магнитного потока, несмотря на то, что энергия каждого отдельного уровня изменяется монотонно при изменении  $\Phi$ .  $\mu$  – энергия Ферми в резервуаре

разца в резервуар, а соответствующий уровень энергии в образце освободится. С другой стороны, есть уровень, энергия которого становится меньше, чем энергия Ферми. Такой уровень будет заполняться электроном, перешедшим из резервуара в образец. При этом, если отвлечься от абсолютного значения номеров заполненных и свободных уровней, то картина заполнения повторяется периодически при изменении магнитного потока на величину кванта  $\Phi_0$ . То есть, действительно, энергия всей системы, равная сумме энергий заполненных состояний, периодична по магнитному потоку с периодом  $\Phi_0$ .

Таким образом, полная энергия *E* системы является периодической функцией магнитного потока:

$$E(\Phi) = E(\Phi + \Phi_0),$$

в том случае, если в образце заполнены только те одноэлектронные уров-

ни энергии  $E_n$ , которые удовлетворяют следующему условию:

$$E_n(\Phi) < \mu \,. \tag{10.1}$$

Это условие является естественным для равновесного состояния. И именно это условие приводит к тому, что внутренняя энергия системы электронов в равновесии периодична по магнитному потоку, несмотря на то, что энергия каждого отдельно взятого одноэлектронного уровня монотонно изменяется при изменении магнитного потока.

Следует сказать, что всякий раз, когда при изменении магнитного потока  $\Phi$  уровень энергии пересекает уровень  $\Phi$ ерми, необходимо подождать некоторое время  $\tau$  для того, чтобы установилось равновесное заполнение уровней, определяемое условием (10.1). Для баллистического кольца, соединенного с резервуаром посредством точечного контакта, характеризуемого малой вероятностью туннелирования,  $T \ll 1$ , при выполнении условия  $E_n = \mu$  можно записать,  $\tau \sim L/(v_F T)$ . Для типичных значений величин  $L \sim 10^{-6}$  м,  $v_F \sim 10^5$  м/с и T = 0.01, получаем  $\tau \sim 10^{-9}$  с.

В то же время, при достаточно быстром изменении магнитного потока заполнение уровней может быть не равновесным и обсуждаемая периодичность будет нарушена.

### 10.1. Аналитическое вычисление

Итак, приступим к вычислению тока I, (9.29). Поскольку, как мы ожидаем, персистентный ток периодичен по магнитному потоку  $\Phi$  с периодом  $\Phi_0$ , то удобно такую зависимость представить в виде ряда  $\Phi$ урье. Ток должен обратиться в нуль при  $\Phi = 0$ . Кроме того, рассматриваемый ток должен изменить знак при изменении направления магнитного потока на противоположное, поскольку при изменении знака магнитного потока должен изменится знак магнитного момента. Из сказанного следует, что персистентный ток должен быть нечетной функцией магнитного потока, поэтому можно записать:

$$I(\Phi) = \sum_{q=1}^{\infty} i_q \sin\left(2\pi q \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \,. \tag{10.2}$$

Здесь *i<sub>q</sub>* – амплитуда соответствующей гармоники тока.

Для того, чтобы представить выражение (9.29) в виде ряда Фурье (10.2) мы используем формулу суммирования Пуассона:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) = \int_{-\infty}^{\infty} dn F(n) + 2Re \left( \sum_{q=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dn F(n) e^{i2\pi qn} \right) .$$
(10.3)

Здесь F(n) — произвольная функция от целого числа n. Особо подчеркнем, что в левой части n принимает только целочисленные значения (дискретно), тогда как в правой части n принимает любые вещественные значения (непрерывно).

В качестве F(n) мы будем использовать произведение  $I_n f(E_n)$  в выражении (9.29):

$$F(n) = I_n f(E_n) \equiv \frac{eh}{m_e L^2} \frac{n - \frac{\Phi}{\Phi_0}}{1 + \exp\left(\frac{E_n - \mu}{k_B T}\right)},$$

$$E_n = \frac{h^2}{2m_e L^2} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2.$$
(10.4)

При этом выражение для тока (9.29) принимает следующий вид:

$$I(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} dn F(n) + 2Re \left( \sum_{q=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dn F(n) e^{i2\pi qn} \right).$$
(10.5)

Прежде всего, давайте проанализируем два слагаемых в правой части выражения (10.5). Оба они являются функциями непрерывной переменной n, по которой производится интегрирование вдоль всей вещественной оси. Из выражения (10.4) для F(n) видно, что переменная n всегда входит в комбинации  $n - \Phi/\Phi_0$ , поэтому удобно сделать следующую замену переменных (сдвиг):

$$m = n - \frac{\Phi}{\Phi_0}.$$

После такой замены пределы интегрирования не изменятся, поскольку они равны бесконечности, а выражение F(m) уже не будет зависеть от магнитного потока  $\Phi$ :

$$F(m) = \frac{eh}{m_e L^2} \frac{m}{1 + \exp\left(\frac{E_m - \mu}{k_B T}\right)},$$

$$E_m = \frac{h^2 m^2}{2m_e L^2}.$$
(10.6)

Магнитный поток остается только во втором слагаемом правой части в экспоненциальном множителе:

$$I(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} dm F(m) + 2Re\left(\sum_{q=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dm F(m) e^{i2\pi qm} e^{i2\pi q\frac{\Phi}{\Phi_0}}\right).$$
 (10.7)

Поскольку F(m), (10.6), есть нечетная функция m, то первый интеграл обращается тождественно в нуль. Окончательно мы можем записать:

$$I(\Phi) = 2Re\left[\sum_{q=1}^{\infty} J(q)e^{i2\pi q\frac{\Phi}{\Phi_0}}\right],\qquad(10.8)$$

где величина J(q) не зависит от магнитного потока:

$$J(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dm F(m) e^{i2\pi qm}.$$
 (10.9)

Из выражения (10.8) видно, что, действительно, ток периодичен по магнитному потоку с периодом  $\Phi_0$ :

$$e^{i2\pi q(\Phi+\Phi_0)/\Phi_0} = e^{i2\pi q\Phi/\Phi_0}e^{i2\pi q} = e^{i2\pi q\Phi/\Phi_0} \times 1$$

Далее заметим, что J(q) является мнимой величиной. Чтобы убедиться в этом, учтем, что F(m), (10.6), есть нечетная функция переменной m, поэтому:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dm F(m) \cos 2\pi qm \equiv 0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dm F(m) \sin 2\pi qm \neq 0.$$

В результате выражение (10.8) для тока *I* преобразуется:

$$I(\Phi) = -2\sum_{q=1}^{\infty} Im[J(q)]\sin(2\pi q\Phi/\Phi_0).$$
 (10.10)

Итак, мы представили выражение для тока в виде ряда Фурье. Амплитуды гармоник тока есть:

$$i_q = -2Im[J(q)].$$

Мы видим, что ток действительно нечетная и периодическая с периодом  $\Phi_0$  функция магнитного потока  $\Phi$ , как мы и предполагали.

Далее необходимо вычислить величину J(q). Учтем, что только четная по m часть подинтегрального выражения вносит вклад в значение интеграла. При этом, значение интеграла по положительной полуоси переменной m равно значению интеграла по отрицательной полуоси, поэтому

получим:

$$J(q) = \frac{2eh}{m_e L^2} \int_0^\infty dm \frac{m e^{i2\pi qm}}{1 + \exp\left(\frac{E_m - \mu}{k_B T}\right)},$$

$$E_m = \frac{h^2 m^2}{2m_e L^2}.$$
(10.11)

Подинтегральное выражение содержит осциллирующую функцию переменной интегрирования. Поэтому, если остальные множители медленно изменяются при изменении m, то значение интеграла будет близко к нулю. Отсюда следует, что основной вклад в интеграл происходит от области интегрирования вблизи энергии Ферми,  $E_m \sim \mu$ , где функция распределения Ферми изменяется от единицы, при  $E_m < \mu$ , до нуля, при  $E_m > \mu$ . В этой области мы можем использовать следующее разложение:

$$E_m - \mu = \frac{h^2 m^2}{2m_e L^2} - \frac{h^2 m_F^2}{2m_e L^2}$$
$$= \frac{h^2}{2m_e L^2} (m + m_F)(m - m_F) = \Delta_F (m - m_F) ,$$

где мы полагаем, что  $m \approx m_F$  при  $E_m \sim \mu$ . Здесь  $\Delta_F$  расстояние между квантовыми уровнями вблизи энергии Ферми, а  $m_F$  — это величина m, соответствующая энергии Ферми,  $E_m = \mu$ :

$$\Delta_F = E_{m+1} - E_m = \frac{m_F h^2}{m_e L^2} = \frac{h v_F}{L},$$
$$m_F = \sqrt{\frac{2m_e L^2 \mu}{h^2}} = \frac{L}{\lambda_F}.$$

Введем новую переменную интегрирования,  $x = \Delta_F(m - m_F)/(k_BT)$ , в выражении (10.11) и запишем:

$$J(q) = \frac{2ehm_F}{m_e L^2} \frac{k_B T}{\Delta_F} e^{i2\pi q m_F} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{e^{i2\pi q x k_B T/\Delta_F}}{1+e^x} \left(1 + x \frac{k_B T}{\Delta_F} \frac{\lambda_F}{L}\right) \,. \quad (10.12)$$

150

В подинтегральном выражении мы подставили  $1/m_F = \lambda_F/L$ . Для не слишком маленького кольца,  $L \gg \lambda_F$ , можно положить выражение в круглых скобках равным единице. Используя значение интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{e^{i\alpha x}}{1+e^x} = (-1) \frac{i\pi}{\sinh(\alpha \pi)} \,,$$

и учитывая, что в нашем случае параметр  $\alpha$  есть:

$$\alpha = 2\pi k \frac{k_B T}{\Delta_F} \,.$$

получим, что выражение (10.12) принимает такой вид:

$$Im[J(q)] = -\frac{2\pi ehm_F}{m_e L^2} \frac{k_B T}{\Delta_F} \frac{\cos(2\pi qm_F)}{\sinh\left(2\pi^2 q\frac{T}{\Delta_F}\right)}.$$

Подставляя полученное выражения для Im[J(q)] в (10.10), найдем окончательное выражение для тока:

$$I(\Phi) = \sum_{q=1}^{\infty} i_q \sin\left(2\pi q \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) ,$$

$$i_q = I_0 \frac{2}{\pi} \frac{T}{T^*} \frac{\cos\left(2\pi q \frac{L}{\lambda_F}\right)}{\sinh\left(q \frac{T}{T^*}\right)} .$$
(10.13)

Здесь мы ввели обозначения для характерной величины персистентного тока:

$$I_0 = \frac{ev_F}{L} \,,$$

и для температуры кроссовера:

$$T^* = \frac{\Delta_F}{2\pi^2 k_B} \,,$$

выше которой ток экспоненциально мал.

#### 10.1.1. Макроскопический предел

Величина тока I убывает с увеличением размеров кольца L, поэтому персистентный ток полностью отсутствует в макроскопическом пределе,  $L \to \infty$ .

При нулевой температуре ток убывает как 1/L. Однако, при температурах отличных от нуля, убывание тока с увеличением размеров кольца происходит значительно быстрее. Это связано с тем, что при увеличении L уменьшается температура кроссовера,  $T^*(L) \sim 1/L$ . Следовательно, при фиксированной температуре T величина персистентного тока экспоненциально убывает с увеличением длины кольца, если  $L \gg L^*(T)$ :

$$I \sim e^{-\frac{T}{T^*}} \sim e^{-\frac{L}{L^*(T)}},$$

где критический размер есть:

$$L^*(T) = \frac{hv_F}{2\pi^2 k_B T}.$$

Ниже мы оценим значения величин, характеризующих персистентный ток.

### 10.2. Численные оценки

#### 10.2.1. Амплитуда тока

Оценим амплитуду тока:

$$I_0 = \frac{ev_F}{L} \,.$$

152



Рис. 10.2. Знаки "+" и "-" указывают направление токов, переносимых электронами на последовательных уровнях энергии в одномерном баллистическом кольце, пронизанном магнитным потоком  $\Phi/\Phi_0 \neq 2\pi n$ ,  $2\pi (n + 0.5)$ . Суммарный ток определяется током переносимым верхним занятым уровнем, поэтому при изменении энергии Ферми от  $\mu_1$  до  $\mu_2$  ток в кольце изменяет направление на противоположное

Для кольца с размером  $L \sim 10^{-6}$  м и для фермиевской скорости электронов в 2D газе,  $v_F \sim 10^4$  м/с, получим:

$$I_0 \sim 10^{-9} A$$
.

Из выражения для амплитуды тока  $I_0 = e v_F/L$  следует, что, фактически, персистентный ток создается одним электроном с фермиевской скоростью, движущимся вдоль кольца. Так происходит потому, что в присутствии магнитного потока уровни энергии, соответствующие движению электрона в кольце по и против часовой стрелки, чередуются, рис. 10.2. Кроме того, с увеличением энергии уровня вклад в ток от этого уровня увеличивается, поскольку, увеличивается скорость электрона. Поэтому, если мы рассмотрим вклад в ток от нескольких последовательных уровней, то обнаружим, что вклад каждого следующего уровня компенсирует вклад предыдущего уровня и прибавляет небольшую величину сверх того. В результате этого, во-первых, ток изменяет знак при изменении числа заполненных уровней, то есть, при изменении числа частиц в кольце. Это, так называемый эффект четности. И, во-вторых, величина полного тока, фактически, совпадает с величиной тока, создаваемого электроном на верхнем заполненном уровне.

Можно сказать, что персистентный ток создается электроном, движущимся по круговой орбите в искусственно созданном атоме (кольце). Давайте сравним величину этого тока с током, который бы создал электрон, движущийся по плоской круговой орбите в основном состоянии атома водорода. Следует, однако, сказать, что этот пример используется только для численных сравнений, поскольку, в атоме водорода электрон движется по сферической орбите и не создает орбитальный магнитный момент. Итак, для первой боровской орбиты имеем,  $R \sim 5 \times 10^{-11}$  м и  $v_1 \sim 5 \times 10^6$  м/с. В результате находим ток:

$$I_a \sim 10^{-3} A \, .$$

Таким образом, ток в кольце значительно меньше тока в атоме:

$$\frac{I_0}{I_a} \sim 10^{-6}$$

Однако, в эксперименте измерить ток электрона невозможно. Обычно измеряется магнитный момент, созданный током  $M \sim IS$ , где S – площадь, охватываемая током. Давайте сравним соответствующие магнитные моменты:

$$M \sim IS = \frac{ev}{L} \frac{L^2}{4\pi} = \frac{ev}{4\pi} L \,.$$

Мы видим, что значение M увеличивается с увеличением размера орбиты L, поэтому магнитный момент персистентного тока в искусственном атоме (кольце) оказывается больше, чем орбитальный магнитный момент электрона в обычном атоме:

$$\frac{M_0}{M_a} \sim \frac{I_0}{I_a} \left(\frac{L}{2\pi R}\right)^2 \sim 10$$

#### 10.2.2. Температура кроссовера

Оценим величину  $T^*$ , которая отделяет область низких температур,  $T \ll T^*$ , где персистентный ток не зависит от температуры, от области высоких температур,  $T \gg T^*$ , где персистентный ток экспоненциально подавлен. Учитывая, что

$$\Delta_F = \frac{hv_F}{L} \,,$$

для  $L \sim 10^{-6}$  м и  $v_F \sim 10^4$  м/с получим:

$$T^* = \frac{\Delta_F}{2\pi^2 k_B} \sim 25 \times 10^{-3} \, K \, .$$

Температура кроссовера достаточно низкая. Обратим внимание на то, что эта температура, фактически, на порядок ( $2\pi^2 \approx 20$ ) меньше, чем расстояние между уровнями энергии  $\Delta_F$ .

### 10.3. Зависимость тока от температуры

Проанализируем зависимость персистентного тока (10.13) от температуры. Мы будем полагать, что температура остается достаточно низкой для того, чтобы состояние электронов в кольце оставалось когерентным и, чтобы рассмотрение, основанное на решении уравнения Шредингера, оставалось справедливым. То есть, будем считать выполненным одно из основных условий характерных для мезоскопики, а именно, будем считать, что длина сбоя фазы  $L_{\varphi}(T)$  намного больше размеров кольца,  $L_{\varphi}(T) \gg L$ . Тем не менее, даже при выполнении этого условия, зависимость от температуры является существенной, рис. 10.3.



Рис. 10.3. Зависимость персистентного тока от температуры Т. Ниже температуры кроссовера,  $T < T^*$ , величина тока не зависит от температуры. Выше температуры кроссовера,  $T > T^*$ , величина тока убывает экспоненциально

### 10.3.1. Низкие температуры

При низких температурах:

 $T\ll T^*\,,$ 

мы можем положить в выражении для тока (10.13)

$$\sinh\left(q\frac{T}{T^*}\right) \approx q\frac{T}{T^*}.$$

Подставив это в (10.13), получим:

$$I(\Phi) = I_0 \frac{2}{\pi} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi q \frac{L}{\lambda_F}\right)}{q} \sin\left(2\pi q \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \,. \tag{10.14}$$

Таким образом, в пределе низких температур зависимость  $I(\Phi)$  содержит различные гармоники с периодами  $\Phi_0/q$ .

Величина персистентного тока не зависит от температуры, однако, наряду с рассматриваемой зависимостью от магнитного потока, оказывается зависящей также от энергии Ферми. Последняя зависимость содержится в множителе  $\cos(2\pi qL/\lambda_F)$ .

В общем случае при низких температурах зависимость  $I(\Phi)$  имеет пилообразную форму с периодом  $\Phi_0$  (см. ниже, рис. 10.4 и рис. 10.5). Скачкообразное изменение тока связано с тем, что при изменении магнитного потока какой-либо из уровней энергии  $E_n(\Phi)$  в кольце пересекает уровень Ферми, рис. 10.1. При каждом таком пересечении, как мы уже разбирали ранее, число электронов в кольце изменяется на единицу. При этом изменяется направление движения электрона на верхнем заполненном уровне, что изменяет знак персистентного тока на противоположный и проявляется в виде скачка на зависимости тока от магнитного потока.

В то же время, при некоторых выделенных значениях химпотенциала  $\mu$ , число частиц в кольце не изменяется при изменении магнитного потока. Именно такой случай изображен на рис. 10.1. Для нахождения этих значений необходимо рассмотреть положение химпотенциала относительно уровней энергии в нулевом магнитном поле. Если энергия Ферми совпадает с одним из уровней энергии или расположена точно посередине между соседними двукратно вырожденными уровнями, то при изменении магнитного потока уровень химпотенциала будут пересекать одновременно два уровня энергии: один из них будет освобождаться, а второй будет заполняться электроном. При этом, полное число частиц в кольце остается неизменным.

Однако, поскольку токи, переносимые электронами на пересекающихся уровнях, различны, то направление тока в кольце будет изменяться на противоположное. В таком случае выражение для тока принимает наиболее простой вид. Здесь возможны два случая.

**1. Четное число частиц в кольце:** Если при  $\Phi = 0$  химпотенциал  $\mu$  совпадает с одним из двукратно вырожденных уровней энергии  $E_{n_0}$  в кольце, то полное число электронов  $N_e$  в кольце четно и не изменяется при изменении магнитного потока:

$$N_e = 2n_0.$$

В этом случае длина кольца кратна фермиевской длине волны:

$$L = n_0 \lambda_F$$
.

Множитель в выражении (10.14), содержащий отношение  $L/\lambda_F$ , одина-ков для всех гармоник q:

$$\cos\left(2\pi q \frac{L}{\lambda_F}\right) = \cos(2\pi n_0 q) = 1$$

Выражение для тока (10.14) принимает следующий вид:

$$I_{2N}(\Phi) = I_0 \frac{2}{\pi} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \sin\left(2\pi q \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \,.$$

Применяя к этому выражению обратное преобразование Фурье, то есть, суммируя ряд по q, находим:

$$I_{2N}(\Phi) = -I_0 \left( 2\frac{\Phi}{\Phi_0} - 1 \right) , \quad 0 < \Phi < \Phi_0 ,$$
  

$$I_{2N}(\Phi) = I_{2N}(\Phi + \Phi_0) .$$
(10.15)

График данной зависимости приведен на рис. 10.4, сплошная кривая.

**2. Нечетное число частиц в кольце:** Если при  $\Phi = 0$  химпотенциал  $\mu$  находится точно посередине между двукратно вырожденными уровнями энергии  $E_{n_0}$  и  $E_{n_0+1}$ , то полное число электронов  $N_e$  в кольце нечетно и не изменяется при изменении магнитного потока:

$$N_e = 2n_0 + 1$$
.

Отметим, что уровень, соответствующий n = 0, является не вырожденным и содержит один электрон, а остальные уровни двукратно вырождены. При этом, при нулевой температуре, — случай, который мы рас-



Рис. 10.4. Зависимость персистентного тока I от магнитного потока  $\Phi$  для кольца с четным числом электронов  $N_e = 2k$  показана при нулевой температуре: T = 0 (сплошная линия) и при температуре выше чем температура кроссовера:  $T > T^*$  (пунктирная линия).  $I_0 = ev_F/L -$ амплитуда тока;  $\Phi_0 = h/e -$ квант магнитного потока

сматриваем, — уровни с  $n \leq n_0$  содержат по два электрона, а уровни с  $n > n_0$  не заполнены.

В этом случае отношение длины кольца к фермиевской длине волны есть:

$$\frac{L}{\lambda_F} = n_0 + \frac{1}{2}.$$

При этом множитель в выражении (10.14), содержащий это отношение, есть:

$$\cos\left(2\pi q \frac{L}{\lambda_F}\right) = \cos[2\pi (n_0 + 0.5)q] = \cos(\pi q) = (-1)^q.$$

Выражение для тока (10.14) принимает следующий вид:

$$I_{2N+1}(\Phi) = I_0 \frac{2}{\pi} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q} \sin\left(2\pi q \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \,.$$

159



Рис. 10.5. Зависимость персистентного тока I от магнитного потока  $\Phi$  для кольца с нечетным числом электронов  $N_e = 2k + 1$ . Обозначения такие же как и на рис. 10.4

Обратное преобразование Фурье приводит к следующему:

$$I_{2N+1}(\Phi) = -2I_0 \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad -\frac{\Phi_0}{2} < \Phi < \frac{\Phi_0}{2},$$
  

$$I_{2N+1}(\Phi) = I_{2N+1}(\Phi + \Phi_0).$$
(10.16)

График данной зависимости приведен на рис. 10.5.

Следует обратить внимание на то, что зависимость (10.16) может быть получена из зависимости (10.15) с помощью сдвига на половину периода:

$$I_{2N}(\Phi) = I_{2N+1}(\Phi + \Phi_0/2)$$
.

Это можно трактовать следующим образом. Каждый электрон привносит с собой в кольцо эффективный магнитный поток, равный половине кванта  $\Phi_0/2$ , который следует добавить к внешнему магнитному потоку. Два электрона вносят общий вклад, равный одному кванту потока, который, в силу периодичности, можно не учитывать.

### 10.3.2. Высокие температуры

Теперь рассмотрим высокие температуры:

$$T \gg T^*$$

Знаменатель в выражении для амплитуды гармоник тока, (10.13), становится большим и возрастает с увеличением номера гармоники *q*:

$$\sinh\left(q\frac{T}{T^*}\right) \sim \frac{1}{2}e^{q\frac{T}{T^*}} \gg 1.$$

Поэтому, амплитуда первой гармоники тока *i*<sub>1</sub> оказывается преобладающей. Следовательно, величина тока при увеличении температуры экспоненциально уменьшается, а форма зависимости тока от магнитного потока становится синусоидальной:

$$I \approx I_0 \frac{4}{\pi} \frac{T}{T^*} e^{-T/T^*} \cos\left(2\pi \frac{L}{\lambda_F}\right) \sin\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \,. \tag{10.17}$$

Экспоненциальная зависимость от температуры и плавная зависимость от магнитного потока являются следствием температурного размытия края функции распределения Ферми. При высоких температурах изменение магнитного потока не приводит к изменению числа частиц в кольце, поэтому нет резких изломов на зависимости тока от магнитного потока. Компенсация же вкладов от частично заполненных уровней приводит к экспоненциальному уменьшению величины тока с ростом температуры.

## 10.4. Эффект четности

Из уравнений (10.15) и (10.16) видно, что характер зависимости персистентного тока от магнитного потока сильно зависит от количества частиц в кольце. Если число частиц в кольце нечетно, то отклик электронной системы в нулевом поле диамагнитный: индуцированный магнитный момент кольца противоположен по знаку приложенному магнитному потоку. Величина диамагнитного момента пропорциональна магнитному потоку и, потому, мала при  $\Phi \to 0$ . Отклик же кольца с четным числом частиц парамагнитный: индуцированный магнитный момент кольца совпадает по знаку с приложенным магнитным потоком. В отличие от диамагнитного момента, величина парамагнитного момента велика при  $\Phi \to 0$ .

Этот эффект получил название эффекта четности. Эффект четности, то есть, значительное, и притом периодическое, изменение свойств образца, при изменении числа частиц в нем встречается довольно часто в мезоскопике. Персистентный ток проявляет эффект четности, потому что соседние уровни энергии переносят ток противоположного направления. Следует отметить, что это справедливо только для простых геометрий. В образцах с более сложной формой, например в кольце с присоединенным к нему проводником с конечным размером, целые группы последовательных квантовых уровней переносят ток одного направления. В этом случае эффект четности модифицируется.

Кроме того, мы не учитывали спин электрона. Если же учесть наличие у электрона спина, то каждый энергетический уровень будет дополнительно двукратно вырожденным. В этом случае для персистентного тока оказывается существенным число электронов в кольце по модулю 4. Только при изменении числа электронов в кольце на четыре, зависимость  $I(\Phi)$  остается неизменной.

# Вопросы для самопроверки

1) Почему энергия электронной системы в кольце периодична по магнитному потоку и с каким периодом?

2) Как амплитуда персистентного тока изменяется с температурой?

3) Как изменяется персистентный ток с увеличением размеров кольца?

4) В чем состоит эффект четности для персистентного тока?

5) Что такое температура кроссовера для персистентного тока и от чего она зависит?

6) Зависимость персистентного тока от магнитного потока при низких температурах. Как в этом случае проявляется эффект четности?

7) В чем особенность персистентного тока при высоких температурах? Проявляется ли в этом случае эффект четности?

# 11. Эффект кулоновской блокады

На примере персистентного тока мы убедились, что движение единичного электрона может определять вполне измеримый эффект в мезоскопических образцах. В связи с этим, естественно предположить, что дискретность электрического заряда, также является существенной для мезоскопики. Действительно, существуют условия при которых дискретность заряда оказывает существенное влияние на свойства мезоскопических образцов [31, 32, 33].

Следует сказать, что вопрос о влиянии дискретности заряда на свойства твердых тел имеет долгую историю. Собственно само измерение заряда электрона стало возможно благодаря тому, что такое влияние существенно и может быть экспериментально изучено. Так, еще в 1911 году Милликен измерил заряд электрона, наблюдая за движением взвеси из микроскопических капель масла. Далее, влияние туннелирования единичного электрона на свойства гранулированных пленок исследовалось экспериментально в работах Гиавьера и Зеллера (Giaever and Zeller, 1968г.) [34], Лэмба и Йаклевика (Lambe and Jaklevic, 1969г.) [35] и другими. Следует подчеркнуть, что в отличие от перечисленных работ, в которых исследовались, фактически, совокупность мелких гранул, мезоскопический этап развития связан с возможностью изучать отдельно взятый образец, единичную гранулу.

### 11.1. Квантование заряда в образцах малых размеров

Для того, чтобы влияние заряда одного электрона было заметным, необходимо, во-первых, чтобы энергетический масштаб, связанный с заряжением образца зарядом 1*e*, был сравнимым с другими, характерными для рассматриваемого образца, масштабами энергий, например, с температурой. И, во-вторых, необходимо, чтобы образец сохранял свой заряд достаточно долго. Для этого образец должен быть хорошо изолирован от



Рис. 11.1. Переход одного электрона из резервуара на гранулу изменяет ее заряд на 1e, что сопровождается изменением энергии всей системы на  $E_c = e^2/2C$ . Здесь C – электрическая емкость гранулы

окружающей среды. В частности, электрические контакты должны быть подсоединены к такому образцу посредством туннельных контактов с малой прозрачностью.

Оценим масштаб энергии, связанной с изменением заряда образца на 1e, рис. 11.1. Эта энергия не что иное, как электростатическая энергия  $E_c$ , обусловленная собственной емкостью образца C:

$$E_c = \frac{e^2}{2C}.\tag{11.1}$$

Емкость сферического образца с радиусом R равна,  $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R$ , а для образца в форме диска,  $C = 8\epsilon_0\epsilon R$ . Здесь  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды. Константа  $\epsilon_0$  равна,  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \,\text{K} \,\text{л}^2/(\text{H} \,\text{m}^2)$ . Для характерных величин  $R \sim 10^{-6}$  м и  $\epsilon \sim 10$ , получаем,  $C \sim 10^{-15} \,\Phi$ . Соответствующая электростатическая энергия есть:

$$E_c = \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{2 \times 10^{-15} 1.38 \times 10^{-23}}$$
 Кл<sup>2</sup>/(ФДж/К) ~ 1 К.

Это означает, что когда температура окружающей среды будет меньше, чем 1 К, то заряд Q такого образца не будет флуктуировать, а будет фиксированным. Если приложить напряжение к грануле, то ток течь не бу-



Рис. 11.2. Изменение энергии системы на  $E_c$  при переходе электрона из резервуара на гранулу приводит к тому, что ток в системе появляется,  $I \neq 0$ , только при  $V > V^*$ . Величина порогового напряжения  $|eV^*| \sim E_c$ 

дет, поскольку для протекания тока необходимо, чтобы электроны переходили на гранулу. Однако, такой переход невозможен, поскольку он привел бы к изменению заряда гранулы. Только, если приложить достаточно большое напряжение

$$V > \frac{E_c}{|e|} \sim 0.8 \times 10^{-3} \,\mathrm{B}$$
,

то ток потечет через гранулу, поскольку источник сможет выполнить работу против электростатических сил, препятствующих переходу электрона на гранулу, рис. 11.2. В этом собственно и состоит эффект кулоновской блокады. А именно, при низких температурах гранула становится проводящей только начиная с некоторого порогового напряжения  $|eV^*| \sim E_c$ .

Далее, проанализируем требование, чтобы заряд на грануле сохранялся постоянным достаточно долго. Для чего это нужно? Выше мы анализировали возможность перехода электрона на гранулу, рассматривая электрон в качестве классической, не квантовой частицы. Однако, с точки зрения квантовой механики, электрон может протуннелировать на гранулу, находится там некоторое время  $\delta t$  и покинуть гранулу. Электрон может либо вернуться в тот берег откуда он первоначально туннелировал на гранулу, либо перейти на другой берег и тем самым принять участие в переносе тока через гранулу. Это так называемые квантовые флуктуации заряда на грануле. Для таких виртуальных процессов нет необходимости преодолевать электростатический барьер, поскольку закон сохранения энергии должен выполняться только для энергий в начальном и конечном состояниях, когда заряд на грануле отсутствует и, соответственно, отсутствует электростатическая энергия, обусловленная этим зарядом. Для промежуточных, виртуальных состояний, существующих короткое время  $\delta t$ , когда электрон находится на грануле и, как следствие, появляется электростатическая энергия, закон сохранения энергии не должен выполняться. Точнее говоря закон сохранения энергии выполняется с точностью до величины порядка  $\delta E$ . Эта величина связана с  $\delta t$  соотношением неопределенности Гейзенберга для энергии-времени:

$$\delta E \,\delta t \ge h \,, \tag{11.2}$$

где h — постоянная Планка. Если неопределенность энергии  $\delta E$  меньше, чем электростатическая энергия  $E_c$ , связанная с появлением заряда электрона на грануле,

$$\delta E \sim \frac{h}{\delta t} < E_c \,, \tag{11.3}$$

то процесс туннелирование электрона через гранулу, другими словами, процесс туннелирование через виртуальный электростатический потенциальный барьер, оказывается не возможен. Если же  $\delta E \gg E_c$ , то туннелирование возможно.

Для того, чтобы возникла кулоновская блокада необходимо, чтобы неопределенность энергии  $\delta E$  была малой по сравнению с  $E_c$ . Для этого необходимо, чтобы время  $\delta t$ , в течение которого электрон находится на грануле, было большим. Это время по порядку величины равно времени заряжения (или разряжения) гранулы. Последнее определяется электротехническими характеристиками — емкостью C и сопротивлением туннельного барьера  $R_t$  между контактом (проводником) и гранулой:

$$\delta t \sim R_t C$$
.

Подставляя эту оценку в выражение (11.3), получим ограничение на сопротивление туннельного контакта, отделяющего гранулу от окружения, при котором туннелирование невозможно (то есть, при котором  $\delta E \ll E_c$ ):

$$R_t > \frac{h}{e^2} \approx 25.8 \times 10^3 \,\Omega \,.$$
 (11.4)

Таким образом, для того, чтобы эффекты, связанные с дискретностью заряда электрона, проявились в проводимости гранулы необходимы, во-первых, низкие температуры  $T \ll E_c$ , чтобы избежать классических (тепловых) надбарьерных перескоков и, во-вторых, достаточно большие сопротивления туннельных контактов, чтобы избежать перескоков, обусловленных квантовым туннелированием,  $\delta E \ll E_c$ .

Ниже мы будем полагать оба эти условия выполненными, что позволит провести качественный, полуклассический анализ влияния дискретности заряда на электропроводность гранулы.

## 11.2. Кулоновская блокада электронного транспорта.

Рассмотрим гранулу, соединенную туннельными барьерами с левым и правым берегами. Проводимость гранулы пропорциональна вероятности прохождения электрона с левого берега на правый. В рассматриваемом случае это есть вероятность туннелирования через двойной потенциальный барьер. Один потенциальный барьер отделяет гранулу от левого берега и второй потенциальный барьер отделяет гранулу от правого берега. Будем считать гранулу настолько малой, что необходимо учитывать квантование уровней энергии электрона в грануле. При этом температуру будем полагать равной нулю.

### 11.2.1. Проводимость при резонансном туннелировании

Вначале рассмотрим проводимость такой гранулы без учета влияния электростатической энергии  $E_c$ . Напомним, что проводимость, определяемая как отношение тока к приложенному напряжению при  $V \rightarrow 0$ , обусловлена прохождением через образец электронов с энергией Ферми. Для таких электронов вероятность туннелирования будет максимальной в том случае, когда уровень Ферми будет совпадать с одним из квантовых уровней электронов в грануле. Это соответствует условию резонансного туннелирования. В случае одинаковых левого и правого туннельных барьеров, вероятность туннелирования  $\mathcal{T}$  вблизи резонанса можно представить следующей формулой Брейта-Вигнера [7]:

$$\mathcal{T} = \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (\mu - E_0)^2} \,. \tag{11.5}$$

Здесь полуширина резонанса  $\Gamma$  пропорциональна вероятности туннелирования через единичный потенциальный барьер,  $E_0$  есть величина ближайшего к химпотенциалу уровня энергии в грануле.

Из выражения (11.5) видно, что туннельная прозрачность  $\mathcal{T}$ , а вместе с ней и проводимость гранулы,  $G = G_0 \mathcal{T}$ , зависит от разности  $\mu - E_0$ . В общем случае эта разность может быть произвольной и изменяться от образца к образцу. Однако, современная техника эксперимента позволяет не только подвести контакты к отдельной грануле микронных размеров, но и изменять параметры гранулы. В частности, используя дополнительный металлический контакт, образующий с гранулой конденсатор, можно изменять потенциал гранулы  $V_g$  относительно берегов. В этом случае энергия каждого уровня в грануле будет сдвинута на величину  $eV_g$ , поэтому проводимость гранулы будет зависеть от  $V_g$ :

$$G(V_g) = G_0 \sum_n \frac{\Gamma_n^2}{\Gamma_n^2 + (\mu - E_n - eV_g)^2}.$$
 (11.6)

Здесь суммирование производится по всем квантовым уровням в грануле. Для каждого уровня мы записали свое  $\Gamma_n$ , поскольку, вообще говоря, вероятность туннелирования зависит от энергии и может быть различной для разных уровней энергии.

Рассмотрим зависимость  $G(V_g)$ . Эта зависимость будет иметь вид набора пиков, расположенных при таких напряжениях:

$$eV_{g,n} = \mu - E_n \,.$$
 (11.7)



Рис. 11.3. Без учета эффекта кулоновской блокады зависимость проводимости G образца с дискретным спектром от потенциала образца  $V_g$  при нулевой температуре имеет резонансный характер. Расстояние между пиками определяется расстоянием между уровнями энергии в образце

Расстояние между пиками проводимости будет определяться расстоянием между уровнями энергии в грануле, рис. 11.3.

Таким образом, изучая проводимость, можно определить энергии квантовых уровней в грануле, то есть, осуществить спектроскопию квантовых уровней. При этом, разность между напряжениями на затворе  $V_g$ , соответствующими пикам зависимости  $G(V_g)$ , равна расстоянию между квантовыми уровнями в грануле:

$$-(eV_{g,n+1} - eV_{g,n}) = E_{n+1} - E_n \equiv \Delta E_n.$$
(11.8)

Следует также сказать, что для использования этого метода необходимо, чтобы температура и напряжение между берегами были значительно меньше расстояния между пиками  $\Delta E_n$ :

$$\Delta E_n \gg k_B T, |eV|.$$

Мы описали картину резонансного туннелирования без учета конечности заряда электрона. Сейчас мы рассмотрим как эффект кулоновской блокады модифицирует зависимость  $G(V_g)$ .

### 11.2.2. Проводимость при наличии эффекта кулоновской блокады

Когда мы учитываем энергию, связанному с зарядом гранулы, мы, фактически, учитываем энергию обусловленную кулоновским взаимодействием электронов между собой и с другими заряженными частицами. Точный учет этих взаимодействий требует рассмотрения многочастичного уравнения Шредингера и, вообще говоря, является весьма сложной задачей. По крайней мере можно утверждать, что в этом случае одночастичные уровни энергии  $E_n$ , вычисленные в модели невзаимодействующих электронов, которыми мы пользовались до сих пор, являются плохим приближением к реальной ситуации.

Однако, существует весьма хорошо зарекомендовавшее себя приближение, состоящее в том, что влияние электростатического взаимодействия учитывается введением дополнительной энергии, зависящей от полного числа электронов в грануле. В этой модели энергии одночастичных уровней зависят от числа электронов  $N_e$  в грануле. Эта зависимость определяется следующим образом. Пусть  $E_n(N_e)$  есть одночастичные уровни энергии в грануле с  $N_e$  избыточными электронами. Избыточными являются такие электроны, заряд которых не скомпенсирован зарядом ионов гранулы. Тогда уровни энергии в грануле с  $N_e + 1$  электроном будут определяться следующим выражением:

$$E_n(N_e+1) = E_n(N_e) + E_c(N_e+1) - E_c(N_e).$$
(11.9)

Здесь электростатическая энергия  $E_c$  системы, зависит от заряда гранулы, то есть, от числа электронов  $N_e$  в грануле, и от потенциала  $V_g$  гранулы, наводимого металлическим затвором:

$$E_c(N_e) = \frac{(eN_e)^2}{2C} + eN_eV_g.$$
(11.10)

Подставляя это выражение в выражение (11.9), получим:

$$E_n(N_e+1) = E_n(N_e) + \frac{e^2}{C}(N_e+1/2) + eV_g.$$
(11.11)

Рассмотрим, каким образом наличие электростатической энергии изменяет условия резонансного прохождения электронов через гранулу. Пусть напряжение на затворе  $V_g$  соответствует условию резонанса, (11.7), без учета электростатической энергии,  $eV_{g,n} = \mu - E_n$ . Что при этом произойдет? Вроде бы электрон должен перейти на гранулу и заполнить уровень  $E_n$ . Однако этого не происходит. Почему? Потому что, когда электрон перейдет на гранулу, то появится электростатическая энергия,  $E_c \sim e^2/(2C)$ , которая сдвинет положение уровней энергии в грануле относительно химпотенциала и, тем самым, нарушит условие резонанса. Отсюда следует, что правильное условие резонанса должно учитывать изменение электростатической энергии системы при изменении числа электронов на грануле. С учетом сказанного, условием резонансного туннелирования при наличии эффекта кулоновской блокады является следующее условие:

$$E_n(N_e + 1) = \mu \,. \tag{11.12}$$

Используя выражения (11.9) и (11.11), получим:

$$E_n(N_e) + \frac{e^2}{C}(N_e + 1/2) + eV_{g,n} = \mu.$$
(11.13)

Таким образом, значение напряжения на затворе, при котором проводимость гранулы имеет резонансный пик, будет таким:

$$-eV_{g,n} = E_n(N_e) - \mu + \frac{e^2}{C}(N_e + 1/2).$$
(11.14)

Следующий резонанс наступит, если напряжения на затворе есть:

$$-eV_{g,n+1} = E_{n+1}(N_e + 1) - \mu + \frac{e^2}{C}(N_e + 3/2).$$
(11.15)

171

Заметим, что число электронов в грануле изменилось после предыдущего резонанса и равно  $N_e + 1$ . Расстояние между резонансными пиками на зависимости  $G(V_q)$  будет таким:

$$-(eV_{g,n+1} - eV_{g,n}) = E_{n+1}(N_e + 1) - E_n(N_e) + \frac{e^2}{C}.$$
 (11.16)

Сравнивая выражение (11.16) с выражением (11.8) мы видим, что учет электростатической энергии изменяет расстояние между пиками. Если электрическая емкость C достаточно мала и, соответственно, электростатической энергии  $e^2/C$  достаточно велика, то расстояние между пиками проводимости не зависит от расположения уровней энергии  $E_n$  электронов в грануле и определяется только величиной электростатической энергии  $E_c$ , рис. 11.4.

Таким образом, в зависимости от соотношения между  $\Delta E_n$  и  $E_c = e^2/C$  изучение резонансного туннелирования позволяет либо исследовать квантовые уровни энергии электронов в грануле, либо же измерять электрическую емкость гранулы:

$$-(eV_{g,n+1} - eV_{g,n}) = \begin{cases} E_{n+1} - E_n, & C \to \infty, \\ \\ \frac{e^2}{C}, & C \to 0. \end{cases}$$
(11.17)

Сравним  $\Delta E_n$  (при  $E_n \sim \mu$ ) и  $E_c$  для двумерной гранулы в форме диска с диаметром *L*:

$$\Delta E_n = \frac{h^2}{4\pi m^* L^2},$$
$$E_c = \frac{e^2}{C} = \frac{e^2}{4\epsilon\epsilon_0 L}.$$

Мы видим, что при уменьшении размеров гранулы расстояние между квантовыми уровнями  $\Delta E_n$  возрастает быстрее, чем электростатическая энер-



Рис. 11.4. Для образцов, имеющих малый размер и, соответственно, малую электрическую емкость  $C \rightarrow 0$ , изменение электростатической энергии,  $E_c \sim e^2/C$ , связанное с изменением заряда образца при туннелировании единичного электрона, становится существенным и, фактически, заменяет энергию, обусловленную пространственным квантованием. Для таких образцов эффект кулоновской блокады приводит к тому, что расстояние между положениями резонансов на зависимости  $G(V_g)$  определяется энергией  $E_c$ 

гия  $E_c$ . Энергии  $\Delta E_n$  и  $E_c$  становятся одного порядка для такой длины:

$$L_c \sim rac{h^2\epsilon\epsilon_0}{\pi m^*e^2} = 7.9 imes 10^{-9}\,\mathrm{M}\,,$$

где мы положили  $\epsilon = 10, m^* = 0.067 m_e$ .

В достаточно малых гранулах, для которых  $L < L_c$ , электростатическую энергию  $E_c$  можно не учитывать. Заметим, что величина  $L_c$  все еще больше атомных размеров,  $\sim 10^{-10}$  м, при которых рассматриваемое приближение теряет всякий смысл.

В гранулах бо́льших размеров, для которых  $L > L_c$ , электростатическая энергии превышает энергию пространственного квантования и, поэтому именно величина  $E_c$  определяет измеряемую в эксперименте зависимость проводимости G от напряжения на затворе  $V_g$ . Однако, и в этом случае положение квантовых уровней  $E_n$  может быть извлечено из экспериментальных данных. Для этого, как следует из выражения (11.16), необходимо изучить нарушение эквидистантности в положении пиков на зависимости проводимости от потенциала образца.

# Вопросы для самопроверки

1) Что такое эффект кулоновской блокады?

2) Как изменяется величина электростатический энергии при уменьшении размеров образца?

3) Какие условия необходимы для существования эффекта кулоновской блокады?

4) Описать механизм протекания тока через образец с малой электрической емкостью.

5) В чем отличие протекания тока при резонансном туннелировании и в условиях существования эффекта кулоновской блокады?

# Рекомендуемая литература

- Imry Y. Physics of mesoscopic systems/ Y. Imry. In: Directions in Condensed Matter Physics, G. Grinstein and G. Mazenco (Eds.).– Singapore: World Scientific, 1986.– P. 101–163. 7, 37, 60
- 2. Imry Y. Introduction to Mesoscopic Physics / Y. Imry.– New York Oxford: Oxford University Press, 2002. 7
- 3. van Kampen N. G. In: Statistical Physics, Proceedings of the IUPAP International Conference, L. Pel and Szepflanszy (Eds.).– Amsterdam: North-Holland, 1976. 11
- 4. Янсон И. К. Атлас микроконтактных спектров электрон-фононного взаимодействия в металлах / И. К. Янсон, А. В. Хоткевич. К.: Наукова думка, 1986. 144 с. 19
- 5. Омельянчук А. Н. К теории нелинейных эффектов в электропроводности металлических мостиков / А. Н. Омельянчук, И. О. Кулик, Р. И. Шехтер // Письма в ЖЭТФ.– 1977.– Т. 25, N 10.– С. 465–469. 19
- 6. Ландау Л. Д. Статистическая физика. Часть 1 / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, ГРФМЛ, 1976. 583 с. 34, 37
- 7. Ландау Л. Д. Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: ГИФМЛ, 1963. 702 с. 77, 92, 135, 168
- 8. Абрикосов А. А. Основы теории металлов / А. А. Абрикосов. М.: Наука, ГРФМЛ, 1987. 520 с. 41, 47, 124
- 9. Landauer R. Electrical resistance of disordered one-dimensionaled lattices / R. Landauer // Phil. Mag. 1970. V. 21. P. 863. 49
- Aharonov Y. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory / Y. Aharonov, D. Bohm // Phys. Rev. – 1959. – V.115. – P. 485– 491. 61, 142
- Chambers R. G. Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux / R.G. Chambers // Phys.Rev.Lett. – 1960. – V. 5. – P. 3– 5. 64

- 12. Little W. A. Observation of quantum periodicity in the transition temperature of a superconducting cylinder / W. A. Little, R. D. Parks // Phys. Rev. Lett. – 1962. – V. 9. – P. 9–12. 68
- London F. Superfluids. Volume 1 / F. London. N.Y.: John Wiley and Sons, 1950. 68
- 14. Альтшулер Б. Л. Эффект Ааронова–Бома в неупорядоченных проводниках / Б. Л. Альтшулер, А. Г. Аронов, Б. З. Спивак // Письма в ЖЭТФ.– 1981.– Т. 33, N 2.– С. 101–103. 68
- 15. Шарвин Д. Ю. Квантование магнитного потока в цилиндрической пленке из нормального металла / Д. Ю. Шарвин, Ю. В. Шарвин // Письма в ЖЭТФ.- 1981.- Т. 34, N 5.- С. 285-288. 68
- 16. Hund F. Rechnungen über das magnetische Verhalten von kleinen Metallstücken bei tiefen Temperaturen / F. Hund // Annalen der Physik (Leipzig).- 1938.- V. 424, N 1-2.- P. 102-114. 68, 142
- Dingle R. B. Some Magnetic Properties of Metals. IV. Properties of Small Systems of Electrons / R. B. Dingle // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences.— 1952.— V. 212, N 1108.— P. 47. 68, 142
- Büttiker M. Quantum oscillations in one-dimensional normal-metal rings / M. Büttiker, Y. Imry, M. Ya. Azbel // Phys. Rev. A. – 1984. – V. 30. – P. 1982–1989. 69
- Webb R. A. Observation of h/e Aharonov-Bohm Oscillations in Normal-Metal Rings / R. A. Webb, S. Washburn, C. P. Umbach, R. B. Laibowitz // Phys. Rev. Lett. - 1985. - V. 54, N 25. - P. 2696-2699. 69
- Chandrasekhar V. Observation of Aharonov–Bohm Electron Interference Effects with Periods h/e and h/2e in Individual Micron-Size, Normal-Metal Rings / V. Chandrasekhar, M. J. Rook, S. Wind, D. E. Prober // Phys. Rev. Lett.– 1985.– V. 55, N 15.– P. 1610–1613. 69
- 21. Griffith S. // Trans. Faraday. Soc. 1953. V. 49. P. 650. 78
- 22. Ford C. J. B. Gated asymmetric rings as tunable electron interferometers / C. J. B. Ford, A. B. Fowler, J. M. Hong, C. M. Knoedler, S. I. Laux, J. J. Wainer, S. Washburn // Surf. Science. 1990. V. 229. P. 307 –

317. <mark>84</mark>

- 23. Büttiker M. Generalized many-channel conductance formula with application to small rings / M. Büttiker, Y. Imry, R. Landauer, S. Pinhas // Phys. Rev. B.– 1985.– V. 31, N 10.– P. 6207–6215. 110
- Wharam D. A. One-dimensional transport and the quantization of the ballistic resistance / D. A. Wharam, T. J. Thornton, R. Newbury, M. Pepper, H. Ahmed, J. E. F. Frost, D. G. Hasko, D. C. Peacock, D. A. Ritchie, G. A. C. Jones // J. Phys. C.: Solid State Phys. – 1988.– V. 21, N 8.– P. L209–L214. 122
- 25. van Wees B. J. Quantized Conductance of Point Contacts in a Two-Dimensional Electron Gas / B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, C. T. Foxon // Phys. Rev. Lett. – 1988. – V. 60, N 9. – P. 848– 850. 122
- 26. Кулик И. О. Квантование потока в нормальном металле / И. О. Кулик // Письма в ЖЭТФ.- 1970.- Т. 11, N 8.- С. 407-410. 126
- 27. Büttiker M. Josephson behavior in small normal one-dimensional ring / M. Büttiker, Y. Imry, R. Landauer // Phys. Lett. A. – 1983. – V. 96, N 7. – P. 365–367. 126
- 28. Levy L. P. Magnetization of mesoscopic cooper rings: evidence for persistent currents / L. P. Levy, G. Dolan, J. Dunsmuir, H. Bouchiat // Phys. Rev. Lett. – 1990. – V. 64, N 17. – P. 2074–2077. 127
- 29. Chandrasekhar V. Magnetic response of a single, isolated gold loop / V. Chandrasekhar, R. A. Webb, M. J. Brady, M. B. Ketchen, W. J. Gallagher, A. Kleinsasser // Phys. Rev. Lett. – 1991. – V. 67, N 25. – P. 3578–3581. 127
- 30. Mailly D. Experimental observation of persistent currents in a GaAs– AlGaAs single loop / D. Mailly, C. Chapelier, A. Benoit // Phys. Rev. Lett.-1993.- V. 70, N 13.- P. 2020-2023. 127
- 31. Кулик И. О. Кинетические явления и эффекты дискретности заряда в гранулированной среде / И. О. Кулик, Р. И. Шехтер // ЖЭТФ.– 1975.– Т. 68, N 2.– С. 623–640. 163
- 32. Averin D. V. Single electronics: a correlated transfer of single electrons and Cooper pairs in system of small tunnel junctions / D. V. Averin,

K. K. Likharev // in Mesoscopic Phenomena in Solids, B. Altshuler, P. A. Lee, and R. A. Webb (Eds.), Elsevier, Amsterdam. – 1991. – P. 173–272. 163

- 33. Kastner M. A. The single-electron transistor / M. A. Kastner // Rev. Mod. Phys. – 1992. – V. 64, N 3. – P. 849–858. 163
- 34. Giaever I. Superconductivity of Small Tin Particles Measured by Tunneling / I. Giaever, H. R. Zeller // Phys. Rev. Lett. – 1968. – V. 20, N 26. – P. 1504–1507. 163
- 35. Lambe J. Charge-Quantization Studies Using a Tunnel Capacitor / J. Lambe, R. C. Jaclevic // Phys. Rev. Lett. – 1969. – V. 22, N 25. – P. 1371–1375. 163

# Предметный указатель

Ааронова-Бома		
интерферометр 64		
эффект63		
вероятность		
отражения75		
прохождения75		
граничное условие Гриффиса78		
интерференционный вклад 44		
интерференция 22		
деструктивная44		
конструктивная44		
квазидвумерный106		
квазиодномерный101		
квант		
магнитного потока		
проводимости 9, 56, 122		
квантовое состояние		
заполнение		
спектр 94, 104, 107		
когерентность		
фазовая 24, 42		
длина4 <u>6</u>		
мезоскопический 14		
образец		
мезоскопика		
предмет 14		
персистентный ток126		
зависимость от		
магнитного потока 146		

	температуры155
ŀ	энергии Ферми 157
3	нечетное число частиц 158
	четное число частиц 157
5	подзона
5	двумерная105
3	одномерная 100
ŀ	химпотенциал
2	энергия дна 100
ŀ	полуширина резонанса 168
ŀ	резервуар 25
5	средний квадрат флуктуаций 33
L	суммирование по спектру
	квазидвумерный106
ŀ	квазиодномерный 103
2	конечные температуры <mark>10</mark> 8
	трехмерный
5	температура кроссовера 151
7	туннелирование 166
	резонансное168
2	и кулоновская блокада171
5	формула
ŀ	Брейта-Вигнера168
3	суммирования Пуассона147
L	функция
ŀ	волновая
5	граничные условия 40, 92
	нормировка
5	периодичность128

распределения	
неравновесная	
фермиевская	
эффект четности	154,161