

Фазовые переходы в квантовых системах: сверхтекучесть и сверхпроводимость

Комарова М.В., Налимов М.Ю., Новожилова Т.Ю.

Настоящее пособие содержит материал заключительных 8 лекций по курсу "Диаграммные разложения в равновесной статистической физике", читаемых студентам IV курса физического факультета СПбГУ. Эти лекции посвящены фазовым переходам в квантовых системах. Для их описания используются методы квантовой теории поля, такие как температурные функции Грина, функциональные преобразования Лежандра, уравнение Дайсона.

Пособие позволяет студентам применить на практике методы квантовой теории поля, изученные в курсах лекций "Диаграммные разложения в равновесной статистической физике", "Теория критического поведения", "Функциональные методы в квантовой теории поля", "Применение методов квантовой теории поля к проблеме многих тел", читаемых студентам IV, V, VI курсов физического факультета СПбГУ, и может быть полезным для всех специалистов, применяющих методы квантовой теории поля в задачах статистической физики.

Введение

Данная работа посвящена полемому описанию фазовых переходов второго рода в квантовых системах. Наиболее известными примерами таких явлений являются переход в сверхтекучее состояние жидкого гелия He^4 и появление сверхпроводимости в металлах при низких температурах. Для описания этих процессов, и, особенно, состояния систем ниже точки фазового перехода, приближение идеальных квантовых газов оказывается недостаточным, необходим учет взаимодействия квантовых частиц. Адекватным языком здесь выступает формализм температурных функций Грина, основы которого мы напоминаем читателю. Данный формализм достаточно подробно описан в классической книге [1] на языке квантовых операторов поля. В настоящее время более удобным признается эквивалентный формализм, использующий функциональное интегрирование, в котором функции Грина выражены через функциональные средние классических полей. Следуя [2], в пособии используется формализм функциональных интегралов и мощный аппарат функциональных преобразований Лежандра.

Учет межчастичного взаимодействия приводит нас к необходимости использовать квантово-полевою теорию возмущений. Конечно, объем методического пособия не допускает последовательного изложения данной техники, предполагается, что читатель знаком с ее основами из упомянутых выше лекций или из учебников [1, 2, 3]. Заметим также, что последовательный учет поправок по взаимодействию в окрестности точки фазового перехода требует использования аппарата квантово-полевой ренормализационной группы, изложению которой посвящены книги [4, 5]. Эти вопросы также опущены в настоящем пособии. Мы ограничились рассмотрением ведущего по числу петель¹⁾ приближения, которое, несмотря на свою относительную простоту, прекрасно иллюстрирует применимость полевого формализма, демонстрирует использование уравнения Дайсона, и приводит читателя к приближению теории фазовых переходов Ландау.

Пособие ориентировано на читателей, интересующихся проблемами статистической физики, и доступно при минимальном уровне знакомства с методами квантовой теории поля. Более искушенный читатель, изучая подстрочные примечания, легко установит связь обсуждаемых объектов с привычными ему в квантовой теории поля.

1 Температурные функции Грина, пропагатор системы без взаимодействия

Переходы в сверхтекучее и сверхпроводящее состояния, в отличие, например, от фазового перехода второго рода в системе жидкость - пар, существенно связаны с квантовыми эффектами. При этом описание систем существенно усложняется. Квантовые статистические системы описываются температурными

¹⁾Теория возмущений по числу петель — термин, часто применяемый в квантовой теории поля. Имеется в виду число петель в соответствующих диаграммах квантово-полевой теории возмущений.

функциями Грина (см. [1, 2]), используемыми, в частности, для вычисления статистических сумм. Статсумма квантовой системы, равная по определению следу статистического оператора, может быть записана в виде функционального интеграла вида

$$\Sigma = C \int D\psi^+ D\psi e^{-S_\beta(\psi^+, \psi)}. \quad (1)$$

Здесь интегрирование ведется по комплексно - сопряженным полям $\psi^+(\mathbf{x}, \mathbf{t})$, $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ (поля могут иметь дополнительные значки, например, спинорные), которые представляют из себя классические полевые переменные, коммутирующие в бозонном случае и антикоммутирующие (грассмановые) в фермионном. Функционал упомянутых полей — действие "температурной" теории $S_\beta(\psi^+, \psi)$ — содержит интегрирования по координате \mathbf{x} (в заданном объеме или, как это обычно и делается, во всем пространстве) и времени t по интервалу²⁾ $t \in [0, \beta = 1/kT]$. Чтобы выражение (1) соответствовало следу статистического оператора, оказывается необходимым наложить условие периодичности на поле: $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t} = \mathbf{0}) = \mp \psi(\mathbf{x}, \mathbf{t} = \beta)$, верхний знак соответствует фермионам, нижний — бозонам. В выражении (1) нормировочный множитель C определен так, чтобы при отсутствии взаимодействия между частицами в действии S_β результат (1) совпадал со статсуммой идеального ферми-бозе газа, вычисленного в [6, 7]³⁾.

Для системы невзаимодействующих частиц (свободной теории) температурное действие имеет вид

$$S_\beta = \int_0^\beta dt \int d\mathbf{x} \psi^+(\mathbf{x}, t) \left(\partial_t + \hat{H}_1 \right) \psi(\mathbf{x}, t), \quad \partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t} \quad (2)$$

где \hat{H}_1 — одночастичный квантовомеханический гамильтониан, соответствующий энергии идеального газа в расчете на одну частицу. Отметим независимость \hat{H}_1 от времени. Для частиц с массой m в большом каноническом ансамбле с химическим потенциалом μ он равен

$$\hat{H}_1 = -\frac{\Delta}{2m} - \mu \rightarrow \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu \quad (3)$$

(используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$). Поля ψ и $i\psi^+$ могут рассматриваться как канонические координата и импульс системы, при этом член $\psi^+ \partial_t \psi$ в действии (2) соответствует обычному вкладу $p \partial_t q$ классического действия, а $\psi^+ \hat{H}_1 \psi$ описывает плотность энергии системы; напомним, $\psi^+(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t)$ соответствует локальной плотности числа частиц в системе. Выражения (1, 2) являются результатом представления следа статистического оператора через функциональный интеграл, как это делается, например, для описания матричных элементов в квантовой механике или функций Грина в квантовой теории поля [9, 2].

Рассмотрим термодинамический потенциал Гиббса

$$\Omega = -kT \ln \Sigma = -kT \ln C - kT \ln \int D\psi^+ D\psi e^{-S_\beta(\psi^+, \psi)}. \quad (4)$$

Забыв на время о нормировочной константе C , выразим с помощью Ω среднюю плотность числа частиц в случае ансамбля *невзаимодействующих* массивных частиц (т. е. используем действие (2, 3)). Термодинамическое соотношение

$$\rho = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T, V} = \frac{kT \int D\psi^+ D\psi \int d\mathbf{x} dt \psi^+(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) e^{-S_0}}{\int D\psi^+ D\psi e^{-S_\beta}} \equiv \frac{kT}{V} \int d\mathbf{x} dt \langle \psi^+(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (5)$$

²⁾ В квантовой механике при исследовании оператора эволюции $\exp(-iH\tau/\hbar)$ (τ — промежуток времени, на котором рассматривается квантовая система) с использованием формализма функционального интеграла полученное действие сохранило τ в качестве верхнего предела интегрирования по времени. Несложно видеть, что рассматриваемая нами здесь задача получается формальной заменой $i\tau \rightarrow (kT)^{-1}$, откуда и следует упомянутый промежуток интегрирования по времени.

³⁾ Введенный нормировочный множитель C на самом деле определен нестрого. Это связано с тем, что как показано ниже, свободной теории соответствует дифференциальный оператор по времени первого порядка в ядре квадратичной формы. Гауссов интеграл с такой квадратичной формой в показателе экспоненты строго говоря не существует (как и детерминант соответствующего оператора) и требует регуляризации (доопределения). Этот вопрос детально обсужден в [2]. Можно показать, что при некоторых доопределениях неопределенностей, возникающих в теории возмущений, можно считать константу C независимой от спектра энергии, температуры, и химического потенциала константой. Ниже мы приводим простые соображения, приводящие к аналогичному результату

подтверждаем тот факт, что локальная плотность частиц равна корреляционной функцией $\langle \psi^+ \psi \rangle$ при совпадающих аргументах. Аналогичная ситуация наблюдается и для других физических величин — вместо вычисления статсуммы достаточно найти корреляционные функции модели. Для вычисления $\langle \psi^+ \psi \rangle$ нужно найти пропагатор G (или, иначе, *температурную функцию Грина* свободной теории), вычислив $(-\partial_t + \hat{H}_1)^{-1}$ — обратное ядро квадратичной формы на пространстве с условием периодичности, наложенным на поле ψ :

$$(-\partial_t + \hat{H}_1)G(t, t', \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(t - t')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad G(t, t', \mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \langle \psi^+(\mathbf{x}, t)\psi(\mathbf{x}', t') \rangle. \quad (6)$$

Пусть ε_α — спектр одночастичного гамильтониана, Φ_α — соответствующие нормированные собственные функции $\hat{H}_1 \Phi_\alpha(\mathbf{x}) = \varepsilon_\alpha \Phi_\alpha(\mathbf{x})$. Тогда легко построить решение уравнения (6) для пропагатора в виде

$$G(t, t', \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}^*(\mathbf{x})\Phi_{\alpha}(\mathbf{x}')e^{\varepsilon_{\alpha}(t-t')}[\Theta(t' - t) \mp n(\varepsilon_{\alpha})], \quad (7)$$

где $n(\varepsilon_\alpha) = 1/(e^{\beta\varepsilon_\alpha} \pm 1)$ — известное [6, 7] выражение для среднего числа заполнения энергетического уровня α , появившееся в (7) вследствие граничных условий. Однако, чтобы использовать выражение (7) в (5), требуется доопределить его при совпадающих t, t' аргументах.

Обсудим, почему мы столкнулись с неопределенным выражением, и как его доопределять. На самом деле нормировочный множитель C , отброшенный нами в (5), зависит от β, μ и, следовательно, вносит вклад в плотность (5). С другой стороны, оказывается, он включает в себя детерминант линейного оператора квадратичной формы в выражении (2). Мы имеем дело с линейным дифференциальным оператором первого порядка по t , детерминант которого, вообще говоря, строго не определен. Таким образом, оба слагаемых в (4) требуют согласованного доопределения. Можно показать, что при использовании доопределения $G(t = t', \mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv G(t = t' + 0, \mathbf{x}, \mathbf{x})$ (т. е. доопределения тета-функции в нуле нулем) и соответствующем доопределении функционального детерминанта, вклад константы C в выражение для плотности (5) автоматически уничтожается. Действительно, при этом плотность числа частиц в системе определяется выражением

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \mp \langle \psi^+(\mathbf{x}, t)\psi(\mathbf{x}, t') \rangle |_{t'=t-0} = \mp G(t, t' = t - 0, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{\alpha} |\Phi_{\alpha}(\mathbf{x})|^2 n(\varepsilon_{\alpha}). \quad (8)$$

Величина $|\Phi_{\alpha}(\mathbf{x})|^2$ имеет смысл плотности вероятности нахождения частицы с энергией ε_{α} в точке \mathbf{x} , так что (8), очевидно, совпадает с плотностью числа частиц идеального бозе-ферми газа. Указанное доопределение позволит нам обходить вычисление функциональных детерминантов (множителя C) и в случае системы с взаимодействием⁴⁾. Итак, интересуясь уравнением состояния, задающим плотность числа частиц, и плотностью внутренней энергии u :

$$\rho = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T, V}, \quad u = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \ln \Sigma}{\partial \beta} \right)_{\mu, V}, \quad (9)$$

а также аналогичными формулами, мы будем всегда опускать нормировочный множитель в функциональном интеграле для статсуммы, подразумевая вышеупомянутое доопределение всех объектов при совпадающих временах.

Для обобщения всех формул на случай взаимодействующих частиц в энергию $(\psi^+ \hat{H}_1 \psi)$ и, следовательно, к действию (2) следует добавить взаимодействие, например, типа плотность - плотность, т. е. член

$$\int dt \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \psi^+(\mathbf{x}, t)\psi(\mathbf{x}, t)V(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\psi^+(\mathbf{x}', t)\psi(\mathbf{x}', t), \quad (10)$$

здесь V — не зависящие от t, t' потенциал взаимодействия (релятивистскими эффектами запаздывания пренебрегаем).

⁴⁾Проблема доопределения неопределенностей возникает и в старших порядках теории возмущений. Она оказывается связанной с неоднозначностью квантово-механического представления, соответствующего классической теории. На операторном языке данное доопределение соответствует использованию N-формы взаимодействия. Подробнее этот вопрос обсуждается в [2].

2 Фазовый переход в сверхтекучее состояние

Известно, что при описании идеального бозе-газа, мы сталкиваемся с трудностями в области низких температур (высоких давлений). Уравнение состояния $N = -(\partial\Omega/\partial\mu)_{V,T}$ (см. 1-е выражение (9)), которое служит для определения химического потенциала при заданных температуре и плотности системы, дает $\mu = 0$ при конечных значениях ρ_0, T_0 [6, 7, 8]; иначе говоря, в этой точке (называемой *критической*) химический потенциал меняет знак. Так как идеальный равновесный бозе-газ устойчив лишь если $\mu \leq 0$, при дальнейшем увеличении плотности или уменьшении температуры перестает работать идеально-газовое описание системы. Поэтому для описания явления сверхтекучести требуется учесть взаимодействие квантовых частиц, т.е. добавить член (10) в действие (2). Согласно гипотезе Ландау для описания фазового перехода потенциал взаимодействия достаточно взять в простейшем виде $V(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \lambda\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/2$, с $\lambda > 0$, что моделирует отталкивание частиц на близких расстояниях (бозонная система только с притяжением не имеет равновесного состояния т. к. частицы слипаются). Заметим, что мы рассматриваем систему при достаточно низкой температуре, при этом можно полагать, что система достаточно плотная, и притяжением частиц можно пренебречь.

Статсумма такой системы имеет вид⁵⁾ $\Sigma = \mathcal{G}(A, A^+)|_{A, A^+=0}$, где

$$\mathcal{G}(A, A^+) = C \int D\psi^+ D\psi \exp \left\{ \psi^+ \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2m} + \mu \right) \psi - \frac{\lambda}{2} (\psi^+ \psi)^2 + \psi^+ A + A^+ \psi \right\}, \quad (11)$$

$\psi(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}, \beta)$, аргументы \mathbf{x}, t всех полей опущены для краткости, интегрирование по этим аргументам в действии подразумевается; для общности мы ввели внешние поля $A(\mathbf{x}, t)$ и $A^+(\mathbf{x}, t)$, физической системе соответствует $A = A^+ = 0$.

Критерий устойчивости идеального бозе-газа ($\mu < 0$) на языке функционала (11) означает, что при $\lambda = 0$ квадратичная часть действия (точнее, ее вещественная часть) положительно определена, что необходимо для существования гауссового функционального интеграла (11). Введение взаимодействия изменяет ситуацию. Теперь расходимость при больших значениях полей обрезается в первую очередь членом действия $\lambda(\psi^+ \psi)^2/2$, поэтому критерием устойчивости является $\lambda > 0$ при произвольном μ .

Рассмотрим функционал⁶⁾ $W(A, A^+) = \ln \mathcal{G}$, очевидным образом связанный с термодинамическим потенциалом Гиббса для большого канонического ансамбля: $W(A, A^+)|_{A, A^+=0} = -\beta\Omega$. Выполним функциональное преобразование Лежандра [2]

$$\Gamma(\alpha^+, \alpha) \equiv W(A, A^+) - \int dt d\mathbf{x} \left[A^+(t, \mathbf{x})\alpha(t, \mathbf{x}) + \alpha^+(t, \mathbf{x})A(t, \mathbf{x}) \right], \quad \begin{aligned} \alpha(t, \mathbf{x}) &= \delta W / \delta A^+(t, \mathbf{x}), \\ \alpha^+(t, \mathbf{x}) &= \delta W / \delta A(t, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (12)$$

чтобы ввести новый функционал⁷⁾ $\Gamma(\alpha^+, \alpha)$. Новые переменные α, α^+ , от которых зависит Γ , задаются вторым и третьим равенствами (12), которые также служат для выражения A^+, A через α, α^+ . Аналогом такого преобразования в термодинамике является числовое преобразование Лежандра при переходе от энергии $E(S, V)$ к, например, свободной энергии $F(T, V) = E - S(\partial E / \partial S)_V = E - TS$ с другими естественными переменными. Итак, мы ввели новый термодинамический потенциал $\Gamma(\alpha^+, \alpha)$ для которого естественными полевыми переменными являются α, α^+ , а не A, A^+ . Физический смысл новых переменных будет определен ниже. Условие обращения в ноль величин A, A^+ , предполагающееся в выражении для статсуммы Σ , может быть легко записано в терминах функционала Γ (проверяется дифференцированием первого равенства (12) по α, α^+):

$$\begin{aligned} A(t, \mathbf{x}) &= -\delta\Gamma / \delta\alpha^+(t, \mathbf{x}) = 0, \\ A^+(t, \mathbf{x}) &= -\delta\Gamma / \delta\alpha(t, \mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Это дает нам дополнительные уравнения состояния, позволяющие определить $\alpha(\mathbf{x}, t), \alpha^+(\mathbf{x}, t)$.

⁵⁾ $\mathcal{G}(A, A^+)$ – производящий функционал полных функций Грина

⁶⁾ $W(A, A^+)$ – производящий функционал связанных корреляционных функций [2]

⁷⁾ $\Gamma(\alpha^+, \alpha)$ – производящий функционал 1-частично неприводимых функций Грина [2].

Нетрудно доказать для функционалов⁸⁾, связанных преобразованием Лежандра, соотношение на матрицы вторых производных

$$W_2 \Gamma_2 \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial A \partial A} & \frac{\partial^2 W}{\partial A \partial A^+} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial A^+ \partial A} & \frac{\partial^2 W}{\partial A^+ \partial A^+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \alpha^+ \partial \alpha^+} & \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \alpha^+ \partial \alpha} \\ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \alpha \partial \alpha^+} & \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \alpha \partial \alpha} \end{pmatrix} = -1 \quad (14)$$

Кроме того производная исходной функции $W(A, A^+)$ по любой переменной, кроме A, A^+, α, α^+ , и производная преобразованной функции $\Gamma(\alpha, \alpha^+)$ по этой же переменной совпадают [2]. Это позволяет записать уравнения состояния (9) в терминах введенного функционала Γ :

$$\rho = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \mu} \right)_{\beta=Const, A, A^+=0} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial \mu} \right)_{\beta=Const, A, A^+=0}, \quad u = - \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \beta} \right)_{\mu=Const, A, A^+=0} = - \left(\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial \beta} \right)_{\mu=Const, A, A^+=0}, \quad (15)$$

здесь $\bar{W} = W/V, \bar{\Gamma} = \Gamma/V$ - удельные термодинамические потенциалы.

Хорошо известно [2], что функционал Γ можно найти с помощью теории возмущений по числу петель, при этом ведущий вклад (т. н. "древесное", или беспетлевое приближение) определяется действием теории с заменой ψ^+, ψ на α^+, α . В модели (11) имеем:

$$-\Gamma(\alpha^+, \alpha) = -\Gamma_0 - \alpha^+ \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2m} + \mu \right) \alpha + \frac{\lambda}{2} (\alpha^+ \alpha)^2 + \dots \quad (16)$$

здесь Γ_0 — связанный с константой C (1) вклад независимых от α^+, α членов, многоточием обозначен вклад петлевых диаграмм⁹⁾. Мы не останавливаемся на технике вычисления функционала Γ , отсылая читателя к [2] или соответствующим курсам лекций.

Для функционала (16) в отсутствие внешнего поля уравнения стационарности (13) имеют вид

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \alpha^+} = \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2m} + \mu \right) \alpha - \lambda (\alpha^+ \alpha) \alpha = 0, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2m} + \mu \right) \alpha^+ - \lambda (\alpha^+ \alpha) \alpha^+ = 0.$$

Рассматривая систему в термодинамическом предельном переходе (т.е. при объеме $V \rightarrow \infty$), разумно предположить трансляционную инвариантность (неизменность при сдвиге в пространстве) искомого решения, а вспоминая о том, что мы рассматриваем систему в состоянии равновесия, потребуем также независимости α^+, α от параметра t . Тогда мы получаем систему обычных алгебраических уравнений $\mu \alpha - \lambda (\alpha^+ \alpha) \alpha = 0, \mu \alpha^+ - \lambda (\alpha^+ \alpha) \alpha^+ = 0$, которые имеют два решения:

$$\text{A) } \alpha = \alpha^+ = 0, \quad \text{B) } \alpha^+ \alpha = |\alpha|^2 = \mu/\lambda. \quad (17)$$

Систему двух полей α^+, α (как и сопряженные к ним относительно преобразования Лежандра поля ψ^+, ψ) рассматривают как обычную и комплексно-сопряженную компоненты одного комплексного поля, поэтому второе решение существует лишь при $\mu > 0$. Используемое беспетлевое приближение, собственно, и привело нас к основным соотношениям теории среднего поля Ландау (17).

Чтобы ответить на вопрос в каком случае реализуются полученные решения, надо вспомнить об экстремальных свойствах термодинамических потенциалов (условиях термодинамической устойчивости). Можно показать, что следствием этого является условие выпуклости функционала $\Gamma^{10)}$, т. е. положительность матрицы вторых производных $-\Gamma$ на пространстве независимых от времени вариаций. Функционал Γ , суженный на пространство переменных α, α^+ , не зависящих от координаты и времени, зависит только от $|\alpha|$. Следствием этого является критерий классической теории среднего поля Ландау:

$$0 \leq - \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial |\alpha|^2} = -\mu + 3\lambda |\alpha|^2 = \begin{cases} -\mu, & \alpha = 0, & \text{случай A} \\ 2\mu, & |\alpha|^2 = \mu/\lambda, & \text{случай B} \end{cases}$$

⁸⁾ Напомним, мы рассматриваем эти функционалы на пространстве периодических по t функций.

⁹⁾ Петлевое разложение здесь справедливо с учетом $\lambda \ll 1$ и соотношения $|\alpha|^2 \sim O(1/\lambda)$, обоснованного ниже.

¹⁰⁾ Выпуклость для независимых от времени потенциалов статсуммы, ее логарифма и функционала Γ относительно своих переменных является фундаментальным фактом, детально обсужденным в [2]

Следовательно тривиальное решение А) устойчиво при $\mu < 0$, а нетривиальное В) – при $\mu > 0$ ¹¹⁾, соответствующий график функционала $(-\Gamma)$ имеет вид, изображенный на рисунке¹²⁾.

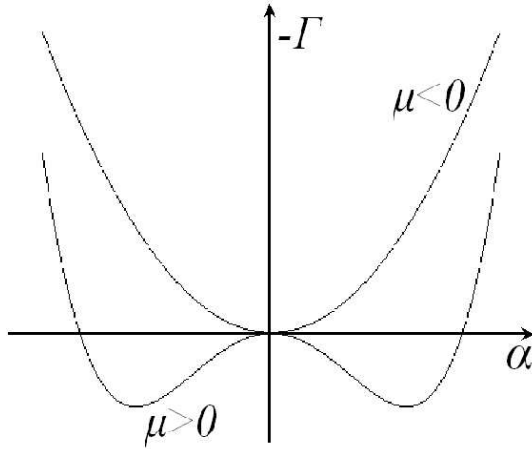


Рис. 1

Вернемся теперь к уравнению состояния из (15). Оно примет вид

$$\rho = \frac{1}{V\beta} \left(\frac{\partial W}{\partial \mu} \right)_T = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \bar{\Gamma}_0}{\partial \mu} \right)_T + |\alpha|^2. \quad (18)$$

Заметим, что величина $(\partial W / \partial \mu)_T$ может быть вычислена только в надконденсатном состоянии (при $\mu < 0$). В нулевом порядке теории возмущений по взаимодействию (приближении идеального газа) для этого можно воспользоваться известным выражением для статсуммы [6, 7], получаемым суммированием по спектру, или выражением для закороченного пропагатора теории (см. ф-лы (7-9)). Поправки по λ к W строятся в рамках обычной квантово-полевой теории возмущений [1, 2].

Как нулевое приближение, так и диаграммы теории возмущений существуют для данного объекта лишь при $\mu \leq 0$ (положительность одночастичной энергии). Преимуществом языка функционального преобразования Лежандра является то, что правая часть уравнения (18) может быть вычислена и при $\mu > 0$.

В рамках феноменологического описания [1, 6] ниже точки фазового перехода система рассматривается как совокупность нормальной и сверхтекучей компонент жидкости. Это подтверждается выражением (18). Первое слагаемое правой части (18) носит название нормального вклада в плотность, оно, по аналогии с изложенным в первом параграфе, может быть определено путем вычисления пропагатора при совпадающих $t' = t - 0$ аргументах (пропагатор теории ниже точки фазового перехода, т. е. при $\mu > 0$, обсуждается в следующем разделе). Существенно, что при $\mu = 0$ ($|\alpha| = 0$) этот пропагатор совпадает с (7) (конечно, в ведущем порядке по λ), следовательно нормальная плотность – непрерывная функция в точке фазового перехода и равна $\rho_0 + O(\lambda)$ при $\mu = 0$ (ρ_0 – значение плотности в приближении идеального газа в точке фазового перехода). Однако кроме нормальной плотности мы получили в (18) еще аномальную добавку $|\alpha|^2$, которая принципиально не может быть получена в отсутствие взаимодействия. Можно сказать, что частицы, которые мы добавляем в систему при фиксированном объеме, после того как плотность превысила ρ_0 , все оказываются *сконденсированными* на нулевом уровне энергии, об $|\alpha|^2$ говорят как о *плотности конденсата*. Так как величина $|\alpha|^2$ оказалась константой, она является собственной функцией оператора энергии с нулевым собственным значением. Вклад конденсата во внутреннюю энергию и теплоемкость можно легко получить, подставляя (16) во второе уравнение (15) с учетом (17).

Тем самым мы в ведущем приближении (теория Ландау) описали бозе-конденсацию.

3 Сверхтекучесть

Теперь посмотрим, почему образование конденсата приводит к сверхтекучести жидкости, которая наблюдается при протекании жидкого гелия по капиллярам при низких температурах.

¹¹⁾ В этом случае, очевидно, $\lambda|\alpha|^2 = \mu$, откуда $|\alpha|^2 \sim O(1/\lambda)$

¹²⁾ Отметим интересный факт. Мы обнаружили фазовый переход в точке $\mu = 0$. Физическими переменными данной системы являются температура и плотность (а не химический потенциал), поэтому мы имеем пример фазового перехода второго рода, происходящего на целой линии в пространстве термодинамических переменных. Это отличает рассматриваемый фазовый переход от привычных нам переходов в классических системах, где переход второго рода имеет место лишь в одной точке, обычно при критической температуре.

Сосчитаем в беспетлевом приближении (16) матрицу вторых производных функционала Γ в частотно-импульсном представлении¹³⁾:

$$\Gamma_2 \equiv \begin{pmatrix} \lambda\alpha^2 & i\omega + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu + 2\lambda|\alpha|^2 \\ -i\omega + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu + 2\lambda|\alpha|^2 & \lambda(\alpha^+)^2 \end{pmatrix}.$$

Используя соотношение (14) и вспоминая, что W — производящий функционал связанных корреляционных функций получаем матрицу

$$(-\Gamma_2)^{-1} = \frac{1}{\det(\Gamma_2)} \begin{pmatrix} -\lambda\alpha^{+2} & i\omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu - 2\lambda|\alpha|^2 \\ -i\omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu - 2\lambda|\alpha|^2 & -\lambda\alpha^2 \end{pmatrix} = W_2,$$

$$\det(\Gamma_2) = \lambda^2|\alpha|^4 - \left(i\omega + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu + 2\lambda|\alpha|^2\right) \left(-i\omega + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu + 2\lambda|\alpha|^2\right)$$

которая, как известно, определяет пропагаторы данной модели¹⁴⁾. Имеется общее утверждение (см. [1, 2]), что полюса по частотам пропагатора определяют спектр возбуждений внутренних степеней свободы системы. В рассматриваемом случае полюс пропагатора соответствует нулю детерминанта $\det(-\Gamma_2)$, что до фазового перехода ($\alpha = 0$) дает оптический спектр, а после перехода ($\alpha = \mu/\lambda$) — акустический

$$\varepsilon(|p|) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu, \quad \text{фаза } A$$

$$\varepsilon(|\mathbf{p}|) = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^4}{4m^2} + \frac{\mu\mathbf{p}^2}{m}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{m}}|\mathbf{p}|, \quad \text{фаза } B.$$

Рассмотрим с макроскопической точки зрения некоторый объем жидкости, протекающей в капилляре со скоростью V . Торможение вязкой жидкости обусловлено взаимодействием со стенками, в результате чего скорость некоторого макроскопического фрагмента жидкости уменьшается и становится равной $V - v$, а в жидкости рождаются квазичастицы с определенным выше спектром возбуждений. При малых скоростях изменение кинетической энергии выделенного объема жидкости составляет $MV^2/2 - M(V - v)^2/2 \simeq MVv + O(v^2) \simeq pV$, где $p = Mv$ — импульс фрагмента жидкости. Изменение внутренней энергии жидкости ΔU происходит за счет уменьшения кинетической энергии фрагмента, т. е. $\Delta U \leq pV$. За нулевой уровень энергии возбуждения квазичастиц в фазе А следует выбрать тот, который соответствует квазичастице с нулевым импульсом, т.е. рассматривать вклад в энергию $\varepsilon(|p|) - \varepsilon(0)$ (слагаемое μ соответствует энергии на внесение квазичастицы в систему и, очевидно, не имеет отношения к силе трения).

Для жидкости до фазового перехода (с оптическим спектром) условие $\Delta U \leq pV$ соответствует области спектра $[0, p_M(V)]$ (см. рис.2), на которой возбуждение соответствующих мод в жидкости энергетически выгодно. После фазового перехода картина существенно меняется (см. рис. 3). Теперь при $V \leq V_{KP}$ (скорость течения жидкости не велика) возбуждение внутренних степеней свободы в жидкости энергетически невыгодно, поэтому жидкость протекает в трубе без трения. Мы ограничились древесным приближением к функционалу Лежандра, поэтому сумели описать лишь фоновый характер спектра возбуждений при малых волновых числах (линейный участок спектра на рис.3). Для вычисления V_{KP} необходим учет петлевых поправок, подробности можно посмотреть в [1], результат схематически приведен на рис. 3 (*ротонная* часть спектра).

¹³⁾ Конечно, мы рассматриваем систему на конечном интервале времен $[0, \beta]$, поэтому спектр частот ω дискретен. Соответствующие частоты носят название *мацубаровских*. Однако приведенное ниже обсуждение спектра возбуждений требует перехода к непрерывному спектру, т.е. исследованию низкотемпературного предела $\beta \rightarrow \infty$.

¹⁴⁾ Здесь речь идет о беспетлевом приближении для *полных* (или, иначе говорят, *одетых*) пропагаторов, которые определяются матрицей W_2 . Напомним, полные пропагаторы совпадают со свободными (голыми), обсуждаемыми в §1, если отбросить вклад взаимодействия.

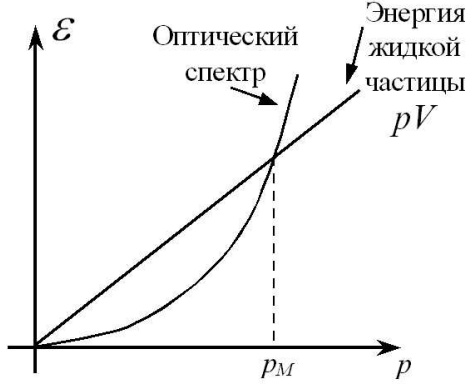


Рис. 2

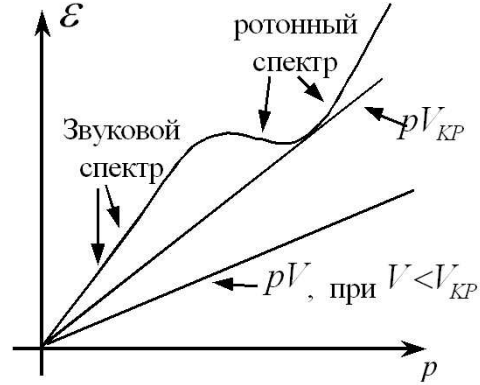


Рис. 3

4 Сверхпроводимость

Электрическое сопротивление металлов обусловлено рассеянием движущихся электронов проводимости на колебаниях кристаллической решетки. Известно, что при низких температурах в металлах имеет место явление сверхпроводимости. Феноменологические теории [1] утверждают, что для появления сверхпроводимости необходима сила притяжения между электронами. Чтобы объяснить, как взаимодействие с колебаниями решетки может привести к притяжению одноименно заряженных частиц — электронов — нам придется произвести квантование возмущений в кристаллах.

Обозначим через $\vec{\varphi}_j$ вектор отклонения j -го атома решетки от положения равновесия¹⁵⁾; иными словами $\vec{\varphi}_j$ — поле деформации решетки. Уравнения движения решетки имеют вид $m\partial_t^2 \vec{\varphi}_j = -\sum_{\mathbf{k}} V_{j,\mathbf{k}} \vec{\varphi}_{\mathbf{k}}$. Мы ограничились гауссовым приближением, считая колебания решетки малыми; каждый элемент матрицы $V_{j,\mathbf{k}}$ (определяющий взаимодействие j -го атома с \mathbf{k} -тым) подразумевается матрицей 3×3 , свернутой с трехмерным вектором $\vec{\varphi}_{\mathbf{k}}$. Очевидным свойством системы является трансляционная инвариантность: во-первых, действующая между атомами сила зависит лишь от расстояния между ними, т. е. $V_{j,\mathbf{k}} = V_{\mathbf{k},j} = \tilde{V}_{j-\mathbf{k}}$, а во-вторых, уравнение движения не меняется при сдвиге $\vec{\varphi}_{\mathbf{k}} \rightarrow \vec{\varphi}_{\mathbf{k}} + a\vec{n}$ (a — постоянная решетки, $\vec{n} = \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ — один из трех единичных ортов, образующих решетку), поэтому $\sum_{\mathbf{k}} V_{j,\mathbf{k}} \vec{n} = 0$. И уравнение движения, и упомянутые свойства коэффициентов V можно записать в частотно-импульсном представлении, совершив преобразование Фурье по времени и узлам решетки¹⁶⁾:

$$m\omega^2 \vec{\varphi}(\mathbf{p}) = \tilde{V}(\mathbf{p}) \vec{\varphi}(\mathbf{p}) \quad \tilde{V}(\mathbf{p}) \vec{n} |_{\mathbf{p}=0} = \sum_{\mathbf{j}} V_{j,\mathbf{k}} \vec{n} = 0, \quad (19)$$

подразумевается, что $\tilde{V}(\mathbf{p})$, как и $V_{j,\mathbf{k}}$, является матрицей 3×3 . При этом уравнение движения разрешимо, если $m\omega^2(\mathbf{p})$ — собственные числа матрицы $\tilde{V}(\mathbf{p})$. При $\mathbf{p} = 0$ все собственные вектора этой матрицы (орты решетки, как это видно из второго уравнения (19)) соответствуют нулевым собственным значениям, поэтому $\omega|_{\mathbf{p}=0} = 0$. Итак, в области малых \mathbf{p} спектр системы описывается тремя фоновыми модами $\omega_{\alpha}(\mathbf{p}) = u_{\alpha}|\mathbf{p}|$, где $\alpha = x, y, z$; три параметра u_{α} — скорости звука¹⁷⁾, определяемые из уравнения $\det(m\omega_{\alpha}^2 I - \tilde{V}(\mathbf{p})) = 0$ (I — единичная матрица).

Описанную систему гармонических осцилляторов традиционно квантуют, вводя оператор поля импульса $\hat{\pi}$, канонически сопряженный к оператору поля деформации $\hat{\varphi}$. Посредством этих полей гамильтониан

¹⁵⁾ При низких температурах наиболее важными являются акустические ветви возбуждения кристаллической решетки. Поэтому мы упростили изложение, ограничившись рассмотрением простейшей кубической решетки. Для более сложных типов решеток под узлом решетки следует понимать положение элементарной ячейки, при этом в спектре возбуждений появляются оптические моды.

¹⁶⁾ При этом спектр импульсов ограничен размерами первой зоны Брюллиена обратной решетки.

¹⁷⁾ Использование звукового приближения для спектра возбуждения решетки справедливо при импульсах не превышающих импульс Дебая p_D (об интерполяционной формуле Дебая см., например, [7])

системы может быть записан в виде

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{j}} \frac{\hat{\pi}_{\mathbf{j}}^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k}} \hat{\phi}_{\mathbf{j}} V_{\mathbf{j}, \mathbf{k}} \hat{\phi}_{\mathbf{k}},$$

а соответствующее действие для статистики деформаций —

$$S_{\varphi} = \int_0^{\beta} dt \sum_{\mathbf{j}} \left(i \vec{\pi}_{\mathbf{j}}(t) \partial_t \vec{\varphi}_{\mathbf{j}}(t) + \frac{\vec{\pi}_{\mathbf{j}}^2(t)}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \vec{\varphi}_{\mathbf{j}}(t) V_{\mathbf{j}, \mathbf{k}} \vec{\varphi}_{\mathbf{k}}(t) \right).$$

После гауссового интегрирования по полю $\vec{\pi}$ в выражении $\int D\vec{\pi} D\vec{\varphi} \exp(-S_{\varphi})$, описывающем статсумму соответствующей статистической системы, действие преобразуется к виду

$$S_{\varphi} = \int_0^{\beta} dt \sum_{\mathbf{j}} \left(\frac{1}{2} m \partial_t \vec{\varphi}_{\mathbf{j}}(t) \partial_t \vec{\varphi}_{\mathbf{j}}(t) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \vec{\varphi}_{\mathbf{j}}(t) V_{\mathbf{j}, \mathbf{k}} \vec{\varphi}_{\mathbf{k}}(t) \right). \quad (20)$$

Колебания решетки действуют на электроны, вызывая в системе колебания плотности связанных зарядов¹⁸⁾. Вспоминая классическую электродинамику, можно написать для поляризации $\vec{P}(\mathbf{p}) = \rho_p \vec{\varphi}(\mathbf{p})$ (ρ_p - плотность заряда решетки), тогда плотность связанного заряда определяется т. н. *фононным полем* $\vec{\phi}_{\mathbf{i}} = -\text{div} \vec{P}_{\mathbf{i}} = -\rho_p \text{div} \vec{\varphi}_{\mathbf{i}}$, или, в импульсном представлении, $\phi(\mathbf{p}) = i(\mathbf{p} \vec{\varphi}(\mathbf{p})) \sqrt{m}$ (в последнем равенстве мы переопределили фононное поле, растянув его на константу \sqrt{m}/ρ_p , для удобства в последующих формулах). Перепиывая действие (20) в импульсном представлении и выражая поле деформации через фононное поле, с учетом вспомогательной формулы $\sum_{\mathbf{j}} \vec{\varphi}_{\mathbf{j}}^2 = \int d\mathbf{p}/(2\pi)^3 \vec{\varphi}(\mathbf{p}) \vec{\varphi}(-\mathbf{p})$, получим

$$S_{\phi} = \int_0^{\beta} dt \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \left(\frac{1}{2} \partial_t \vec{\phi}(\mathbf{p}, t) \partial_t \vec{\phi}(-\mathbf{p}, t) + \frac{1}{2m} \vec{\phi}(\mathbf{p}, t) V(\mathbf{p}) \vec{\phi}(-\mathbf{p}, t) \right). \quad (21)$$

Найдем фононный пропагатор \mathcal{G} модели с данным действием в частотно-импульсном представлении:

$$\frac{1}{\mathbf{p}^2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\tilde{V}(\mathbf{p})}{m} \right) \mathcal{G}(\mathbf{p}, t, t') = \delta(t - t') \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G}(\mathbf{p}, \omega) = \frac{\mathbf{p}^2}{u^2 \mathbf{p}^2 + \omega^2}. \quad (22)$$

Поскольку электрон является фермионом, ансамблю таких частиц соответствует функциональный интеграл по грассмановым (антикоммутирующим) переменным ψ_l^{\dagger}, ψ_l , индекс l нумерует проекцию спина. Электрон-фононное взаимодействие может быть описано взаимодействием плотность-плотность¹⁹⁾, т. е. добавкой к энергии члена $\int dx dy \psi_l^{\dagger}(\mathbf{x}) \psi_l(\mathbf{x}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y})$, где K - потенциал взаимодействия электронов с полем связанных зарядов. Так как система электрически нейтральна, в качестве этого потенциала следует взять не кулоновское взаимодействие, а короткодействующий потенциал Дебая-Хюккеля (см. [7]). В данной работе мы воспользуемся еще более простым приближением локального взаимодействия, соответствующим нулевому радиусу взаимодействия Дебая-Хюккеля, т. е. напомним $K = g\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

Итак действие, учитывающее электрон-фононное взаимодействие, включает члены, соответствующие свободным электронам и фононам, а также взаимодействию между ними, т. е. имеет вид

$$S_{\beta} = \psi_l^{\dagger} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\Delta}{2m} - \mu \right) \psi_l + S_{\phi}(\phi) + g \psi_l^{\dagger} \psi_l \phi,$$

где $S_{\phi}(\phi)$ приведено в (21). Выполнив в статсумме гауссово интегрирование по полю ϕ , получим для системы электронов действие в виде

$$S = \psi_l^{\dagger} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\Delta}{2m} - \mu \right) \psi_l - \lambda \psi_l^{\dagger} \psi_l \mathcal{G} \psi_l^{\dagger} \psi_l, \quad (23)$$

¹⁸⁾ Поле связанных зарядов состоит из поля атомной решетки и равномерно "размазанного" отрицательного заряда, такого, что суммарный заряд системы равен нулю

¹⁹⁾ Напомним, величина $\psi_l^{\dagger}(\mathbf{x}, t) \psi_l(\mathbf{x}, t)$ имеет смысл плотности распределения электронов; в свою очередь, фононное поле характеризует плотность связанного заряда

здесь \mathcal{G} – описанный выше пропагатор фононов, $\lambda = g^2$.

Сверхпроводимость имеет место при низких температурах (к высокотемпературной сверхпроводимости наше описание неприменимо), когда проводимость определяется электронами вблизи поверхности Ферми с энергией E_F и импульсом p_F . Поэтому при рассеянии таких электронов друг на друге посредством обмена фононом (что и описывается членом взаимодействия $\psi^+ \psi \mathcal{G} \psi^+ \psi$) практически не происходит передачи энергии, хотя импульс электрона может значительно изменить свое направление, так что вектор изменения импульса $\delta \mathbf{p}$ соединяет две произвольные точки на сфере Ферми и, следовательно, удовлетворяет соотношению $0 < |\delta \mathbf{p}| \leq 2p_F$. В связи с этим в пропагаторе фононного поля \mathcal{G} (22) можно считать, что вклад переданного импульса $u|\delta \mathbf{p}|$ много больше вклада переданной энергии $i\omega \equiv \delta E$. Отсюда следует, что $\mathcal{G} \approx 1/u^2$ – положительная константа, что соответствует притяжению электронов. Заметим, что притяжение частиц в данном случае не противоречит существованию статистически равновесной системы, поскольку запрет Паули позволяет "слипаться" лишь двум электронам с противоположно направленными спинами; взаимодействие между электронами с одинаковыми спинами ($l = l'$) отсутствует вследствие антикоммутации переменных. Полученные попарно притягивающиеся электроны называются куперовскими парами, их связанное состояние – уже бозонная частица, так что с некоторой степенью точности можно сказать, что сверхпроводимость – это сверхтекучесть куперовских пар.

Опишем этот процесс более детально. Описать явно фазовый переход в переменных ψ^+ , ψ тем же способом, что и при исследовании сверхтекучести не удастся, потому что вводимые в функциональном преобразовании Лежандра поля α , α^+ обращаются в данном случае в ноль: $\alpha_\psi = \langle \psi \rangle = \alpha_{\psi^+} = \langle \psi^+ \rangle = 0$ (дело в том, что это грасмановы величины, средние от них не могут быть выражены через обычные коммутирующие величины m , μ , g присутствующие в действии; грасмановы же переменные – источники A^+ , A – следует положить равными нулю). Поэтому вместо функционального преобразования Лежандра воспользуемся уравнением Дайсона (см. [2]). В однопетлевом приближении справедливо соотношение

$$G^{-1} + \lambda \text{loop} = G_0^{-1} \quad (24)$$

где G_0 – свободный пропагатор, определяемый квадратичной частью действия (23), G – "одетый" пропагатор теории, петлевая диаграмма в (24) обозначает пропагатор при совпадающих аргументах $G(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}, t)$. Свободный пропагатор теории определяется матрицей вторых производных свободной части действия²⁰⁾ (23):

$$G_0 = \begin{pmatrix} \langle \psi^+ \psi^+ \rangle & \langle \psi^+ \psi \rangle \\ \langle \psi \psi^+ \rangle & \langle \psi \psi \rangle \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \langle \psi^+ \psi \rangle &= \delta_{i,l'} (i\omega + \mathbf{p}^2/(2m) - \mu) \\ \langle \psi \psi^+ \rangle &= \delta_{i,l'} (i\omega - \mathbf{p}^2/(2m) + \mu) \\ \langle \psi^+ \psi^+ \rangle &= \langle \psi \psi \rangle = 0 \end{aligned}$$

Оказывается, можно построить два решения уравнения Дайсона. Первое – "нормальное" решение – когда полный пропагатор имеет нули на диагоналях, а внедиагональные элементы отличаются от соответствующих элементов G_0 некоторыми поправками по параметру λ , находимых в рамках теории возмущений. Второе, аномальное решение, когда полный пропагатор приобретает также ненулевые диагональные элементы $\langle \psi_i^+ \psi_{l'}^+ \rangle$ и $\langle \psi_l \psi_{l'} \rangle$. Исследуем этот режим. Так как уравнение (24) мы будем решать с точностью до первого порядка по константе взаимодействия λ , в недиагональных элементах обратного пропагатора достаточно ограничиться нулевым приближением (константой по λ), а в диагональных – первым порядком по λ . Таким образом, будем искать одетый пропагатор в виде²¹⁾

$$G = \begin{pmatrix} \epsilon_{i,l'} \lambda b & \delta_{i,l'} \left(i\omega + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu \right) \\ \delta_{i,l'} \left(i\omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu \right) & -\epsilon_{i,l'} \lambda b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} -\epsilon_{i,l'} \lambda b & -\delta_{i,l'} \left(i\omega + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu \right) \\ \delta_{i,l'} \left(i\omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu \right) & \epsilon_{i,l'} \lambda b \end{pmatrix}, \quad (25)$$

²⁰⁾ Напомним, спектр частот ω здесь дискретен – частоты мадубаровские.

²¹⁾ калибровочная инвариантность теории позволяет синхронно менять фазы полей ψ^+ , ψ и, следовательно, искать вещественную константу b .

$$\text{здесь } \delta_{l,l'} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{l,l'} = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \omega^2 + \left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)^2 + (\lambda b)^2.$$

Каждый элемент матрицы G сам является матрицей по спиновым значкам электронов l, l' , что отражено в (25) множителями $\delta_{l,l'}$, $\epsilon_{l,l'}$, подобранными с учетом антисимметрии рассматриваемого пропагатора.

Для понимания явления сверхпроводимости, как и в предыдущем разделе, существенным является спектр возбуждений, определяемый полюсами пропагатора (25). Обычный свободный пропагатор определяет нам в окрестности сферы Ферми (где $\mu \simeq E_F = p_F^2/(2m)$) спектр электронов: $E = i\omega = \mathbf{p}^2/(2m) - p_F^2/(2m) \approx p_F(|\mathbf{p}| - p_F)/m$, спектр "дырок" отличается от него знаком. Изображенный на рис. 4, данный спектр качественно характеризует систему в "нормальном" режиме. Полный пропагатор (25) определяет нам спектр системы в аномальном режиме

$$E = \sqrt{\Lambda^2 + (p^2/(2m) - E_F)^2}, \quad (26)$$

изображенный на рис. 4 сплошной линией. Параметр $\Lambda \equiv \lambda b$ носит название "параметра щели". Появление в спектре системы щели и обеспечивает возможность протекания тока без сопротивления, т. е. явление сверхпроводимости. Аналогично тому, как это было описано в предыдущем разделе, если электронная ферми-жидкость течет не слишком быстро (электрический ток не слишком велик) возбуждение внутренних степеней свободы энергетически невыгодно, поэтому ток течет без сопротивления.

Чтобы вычислить значение параметра Λ и узнать, при каких условиях возможно аномальное решение, необходимо разрешить уравнение (24), подставив в него анзац (25). Отметим, что уравнение Дайсона имеет в данном случае матричный вид; для наших целей достаточно рассмотреть левый верхний угол этой матрицы

$$(G^{-1})_{\psi+\psi+} + \lambda \text{ (петля) } = (G_0^{-1})_{\psi+\psi+},$$

где, в соответствии с стандартными правилами диаграммной техники, в петлевую диаграмму должен быть подставлен элемент пропагатора $G_{\psi\psi}$ при совпадающих координатах и временах²²⁾. При вычислении этой диаграммы (см. [1]) проще всего разложить $G_{\psi\psi}$ на простейшие дроби

$$\frac{\epsilon_{l,l'}\Lambda}{2iE} \left(\frac{1}{\omega - iE} - \frac{1}{\omega + iE} \right)$$

(E определено в (26)) и выполнить обратное преобразование Фурье по ω , воспользовавшись тем, что преобразование Фурье для каждой дроби совпадает с известным ответом (7) с доопределением (8) при совпадающих аргументах t, t' . Вычисление петлевой диаграммы в импульсном представлении означает, что получившееся выражение для пропагатора должно быть проинтегрировано по импульсу \mathbf{p} . Окончательно получается интегральное уравнение

$$1 = \frac{\lambda}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\sqrt{\Lambda^2 + (\mathbf{p}^2/(2m) - \mu)^2}} \text{th} \frac{\beta\sqrt{\Lambda^2 + (\mathbf{p}^2/(2m) - \mu)^2}}{2}. \quad (27)$$

Здесь интегрирование ведется по тонкому слою порядка $|\mathbf{p} - \mathbf{p}_F| \lesssim m_e\omega_D/p_F$ (ω_D — частота Дебая, m_e — масса электрона) в окрестности сферы Ферми в импульсном пространстве. Использование фононного пропагатора \mathcal{G} (22) на данном интервале интегрирования является обоснованным.

Уравнение (27) решается численно. При разных температурах графики зависимости правой части уравнения (27) от параметра щели Λ изображены на рис. 5. По графику видно, что при $T > T_c$ уравнение (27) не имеет решения (уравнение Дайсона имеет только нормальное решение), T_c — температура, при которой появляется аномальное решение уравнения Дайсона и обнаруживается сверхпроводимость, которая имеет место и для $T < T_c$. В первом приближении для параметра щели вблизи T_c можно получить [1]

$$\Lambda \approx 3.06T_c\sqrt{1 - T/T_c}, \quad T_c = T_c(m, \lambda, \mu).$$

²²⁾Заметим, что пропагатор $G_{\psi\psi}$ при совпадающих временах не требует доопределения.

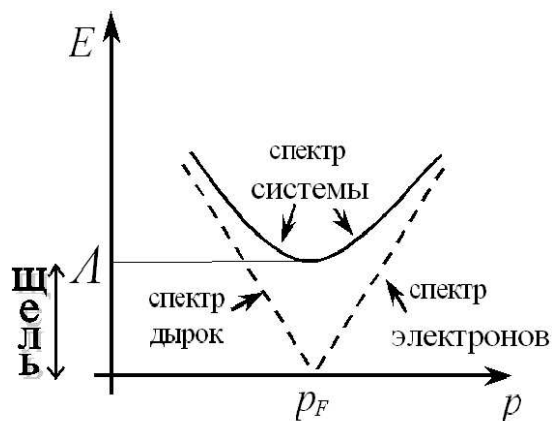


Рис. 4

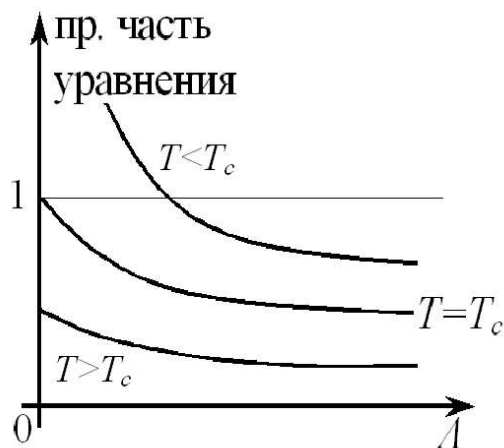


Рис. 5

5 Заключение

В данном учебном пособии рассмотрены основы статистического описания фазовых переходов в квантовых системах: явления сверхтекучести и низкотемпературной сверхпроводимости. Материал может оказаться полезным как студентам и аспирантам физического факультета, специализирующимся в применении методов квантовой теории поля в задачах статистической физики, так и специалистам в данной области. Обсуждаемые вопросы демонстрируют взаимосвязанность различных областей теоретической физики, служат примером применимости методов квантовой теории поля в задачах статистической физики и могут быть также полезными специалистам в области квантовой теории поля при поиске новых областей приложения своих методов.

Литература

- [1] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский Методы квантовой теории поля в статистической физике. М. 1998
- [2] Васильев А. Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистической физике. Л. 1976
- [3] П. Рамон Теория поля: современный вводный курс 1992
- [4] Васильев А. Н. Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике С.Пб., издательство ПИЯФ, 1998.
- [5] J. Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena, 3rd edition (Clarendon Press, Oxford, 1996).
- [6] Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц Статистическая физика М. 1976
- [7] Куни Ф. М. Статистическая физика и термодинамика М. 1981
- [8] Методичка про ферми-бозе газ.
- [9] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев Введение в квантовую теорию калибровочных полей М. 1978

Содержание

Введение	1
1 Температурные функции Грина, пропагатор системы без взаимодействия	1
2 Фазовый переход в сверхтекучее состояние	4
3 Сверхтекучесть	6
4 Сверхпроводимость	8
5 Заключение	12
Литература	12