

От термодинамики к статистической физике

Комарова М.В., Новожилова Т.Ю.

Настоящее пособие содержит дополнительный материал к семинарским занятиям "Статистическая физика и термодинамика", проводимым для студентов III курса физического факультета СПбГУ.

Пособие содержит задачи, которые могут использоваться преподавателями - семинаристами в качестве домашних заданий, контрольных работ. Материал также полезен студентам для самостоятельной, более глубокой подготовки к экзамену.

Все задачи снабжены ответами для контроля правильности решения. Каждый блок задач сопровождается коротким описанием теоретических методов, необходимых для решения, и отсылками к классической литературе. Отдельные задачи, решение которых вызывает наибольшие затруднения у экзаменуемых по курсу студентов, подробно решены; номера таких задач в общем списке помечены символом \boxed{N} .

Содержание

1	Задачи-тождества	3
1.1	Доказать справедливость тождества в формализме канонического ансамбля	3
1.2	Как доказывать термодинамические тождества	6
2	Энтропия в термодинамике и статистической физике	7
2.1	Задачи на вычисление энтропии	7
2.2	Как решать задачи с использованием понятия "энтропия"	12
2.3	Ответы для самоконтроля	15
3	Статсуммы и распределения в каноническом ансамбле	16
3.1	Задачи на вычисление функций распределения и статистических сумм в каноническом ансамбле	16
3.2	О вычислении функций распределения и связи между различными ансамблями в статфизике	18
3.3	Ответы для самоконтроля	19

1 Задачи-тождества

1.1 Доказать справедливость тождества в формализме канонического ансамбля

$$\mathbf{T1.} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S - \frac{T}{C_V} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_V = \frac{T}{C_p} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_S$$

$$\mathbf{T2.} \quad C_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = C_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S - T \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_V$$

$$\mathbf{T3.} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{C_V}{T} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left[\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S - \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V \right]$$

$$\mathbf{T4.} \quad C_V \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T - 1 \right] = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$\mathbf{T5.} \quad V K_T^{-1} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{C_p}{T} \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p, \text{ где } K_T = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T$$

$$\mathbf{T6.} \quad \frac{C_p}{V\alpha} = -C_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V - \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S \right],$$

$$\text{где } \alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$\mathbf{T7.} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{C_V}{T} \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \left[\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V \right]$$

$$\mathbf{T8.} \quad C_p \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_T = C_V \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S^2 \right]$$

$$\mathbf{T9.} \quad \frac{C_p}{T} \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p = - \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V$$

$$\mathbf{T10.} \quad \left[\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V - \frac{p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_U = -1$$

$$\mathbf{T11.} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_F = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V - \frac{S}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$$

$$\mathbf{T12.} \quad \frac{C_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_s}{1 - \frac{T}{C_V} \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_v \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_s}$$

$$\mathbf{T13.} \quad \frac{\frac{1}{T} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_v}{1 + \frac{C_V}{T} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_s} = -\frac{1}{C_V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

$$\mathbf{T14.} \quad \frac{T}{C_V} \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v \left[\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_v}{\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_s} - \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s}{\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_v} \right]$$

$$\mathbf{T15.} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p \left[\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s}{\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T} - 1 \right] = \frac{T}{C_V}$$

$$\mathbf{T16.} \quad \frac{C_p}{C_V} \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_p = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left[\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s}{\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_v} - \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_v}{\left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_s} \right]$$

$$\mathbf{T17.} \quad T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_T = C_V \left[\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_s^2 + \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_v}{\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s} \right]$$

$$\mathbf{T18.} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_p = \frac{C_V}{C_p} \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T \left[\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s}{\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_v} + \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_v^2 \right]$$

$$\mathbf{T19.} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_p = \frac{T}{C_p} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v$$

$$\mathbf{T20.} \quad -T \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_v + p \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_v = T \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_v$$

$$\mathbf{T21.} \quad \frac{T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p}{\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T - 1} = C_V \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V$$

$$\mathbf{T22.} \quad C_V \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = \frac{T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T}{\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_s^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_V}$$

$$\mathbf{T23.} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_T = -\frac{T}{C_p} \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_p$$

$$\mathbf{T24.} \quad \frac{p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_V - \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_U + \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = 0$$

$$\mathbf{T25.} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p - \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_s + \frac{\frac{T}{C_V} \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_V}{\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s} = 0$$

$$\mathbf{T26.} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_V - \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_s = -\frac{T}{C_V} \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

$$\mathbf{T27.} \quad TdS = \left(\frac{C_V}{2} + \frac{C_p}{2} \right) dT + \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dP \right]$$

T28. Универсальное задание.

Введем понятие "справочная термодинамическая величина": отнесем к "справочным" величинам давление, температуру, объем (p, T, V) , их частные производные:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p \dots$$

не содержащие энтропию; также справочными величинами назовем теплоемкости C_p, C_V и скорость звука.

Запишем произвольное выражение вида

$$\left(\frac{\partial A}{\partial B} \right)_C$$

где в качестве A, B, C фигурирует энтропия и любые две другие термодинамические величины из набора (p, T, V) . Требуется преобразовать это выражение к виду, содержащему лишь справочные величины. Более громоздким является задание, когда исходно записывается алгебраическое выражение, содержащее в качестве элементов несколько разных выражений упомянутого вида, например сумму или произведение. Следует стремиться выполнить преобразования наиболее компактным способом.

T29. То же, что **T28**, но в качестве C использовать термодинамические потенциалы F, W, Φ, U .

Комментарий к заданиям T28 и T29.

Непосредственным объектом измерения в экспериментах являются p, T, V , всевозможные теплоемкости, скажем, C_p, C_V , и скорость звука. При этом большой интерес представляет *уравнения состояния* материалов, в частности, в каноническом ансамбле – зависимость $p(V, T)$, а также всевозможные производные, которые могут быть найдены из уравнения состояния. Частные производные, содержащие энтропию, за исключением упомянутых, чаще всего неудобно непосредственно измерять в эксперименте.

Оказывается, любое термодинамическое выражение можно выразить через справочные величины. Отметим, что некоторые справочные величины можно выразить друг через друга, например, скорость звука или $C_p - C_V$.

1.2 Как доказывать термодинамические тождества

В каноническом ансамбле из четырех термодинамических величин p, T, V, S являются независимыми две. Поэтому осмысленна только такая производная, в которой **ровно одна переменная зафиксирована**. Например, запись $\partial p / \partial T$ бессмысленна, поскольку не содержит информации о том, какую функцию мы дифференцируем – $p(T, S)$ или $p(T, V)$.

Чтобы доказывать тождества, достаточно помнить связь термодинамических потенциалов друг с другом и выражения для их дифференциалов (см. табл. 1), а также освоить три технических приема.

Таблица 1.

Название	Потенциал:	Дифференциалы:
Внутр. энергия	U	$dU = TdS - pdV$
Своб. энергия	$F = U - TS$	$dF = -SdT - pdV$
Энтальпия	$W = U + pV$	$dW = TdS + Vdp$
Потенц. Гиббса	$\Phi = U + pV - TS$	$d\Phi = -SdT + Vdp$

Прием 1 – метод якобианов. Следует уметь выражать частные производные термодинамических величин через якобианы перехода от одних переменных к другим (подробно про метод якобианов изложено в параграфе "Термодинамика простых систем" в [1]):

$$\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_C = \frac{\partial(A, C)}{\partial(B, C)} = \frac{\partial(C, A)}{\partial(C, B)} = -\frac{\partial(C, A)}{\partial(B, C)} = -\frac{\partial(A, C)}{\partial(C, B)},$$

где использовано стандартное обозначение для якобиана перехода от переменных

$\{x, y\}$ к переменным $\{X, Y\}$; предполагается $X(x, y), Y(x, y)$,

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} \equiv \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_x \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_x \end{vmatrix}.$$

Такая запись якобиана формально похожа на дробь с "числителем" и "знаменателем", хотя *не является дробью* ни в коем случае. Тем не менее оказывается, что с якобианами формально можно обращаться как с обыкновенными дробями: сокращать одинаковые "числители" и "знаменатели", вставлять произвольный "единичный" якобиан (с одинаковым "числителем" и "знаменателем"), менять местами в произведении двух якобианов один "числитель" с другим, проделывать то же со "знаменателями". Подумайте, как такое удивительное свойство введенных обозначений связано с известной теоремой линейной алгебры о свойствах детерминанта произведения матриц: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Прием 2 – тождества Максвелла. В процессе доказательства следует уметь писать эти тождества, глядя в таблицу 1, и активно пользоваться ими,

$$d\Pi = AdB + CdD \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial A}{\partial D}\right)_B = \left(\frac{\partial C}{\partial B}\right)_D,$$

где Π – один из термодинамических потенциалов табл. 1, а величины A, B, C, D – соответствующие ему термодинамические переменные. Не забываем, что "перевернутое" тождество также справедливо,

$$\left(\frac{\partial A}{\partial D}\right)_B = \left(\frac{\partial C}{\partial B}\right)_D \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial D}{\partial A}\right)_B = \left(\frac{\partial B}{\partial C}\right)_D.$$

Прием 3 – "сложная функция". Довольно часто нам известна частная производная при одном фиксированном аргументе, а требуется – при другом, например, известна $(\partial p / \partial T)_V$, а требуется найти $(\partial p / \partial T)_S$. В первом выражении следует дифференцировать функцию $p(T, V)$, а во втором, соответственно, $p(T, S)$. Воспользуемся тем, что $p(T, S)$ можно получить из $p(T, V)$, если подставить вместо V зависимость $V(T, S)$. Дифференцируя $p(T, V(T, S))$ по T как сложную функцию, получим требуемое соотношение:

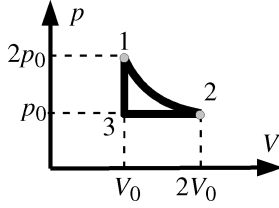
$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_S = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S.$$

Применение данных приемов по-отдельности и в совокупности великолепно проиллюстрировано в параграфе "Задачи" главы "Феноменологическая термодинамика" книги [1].

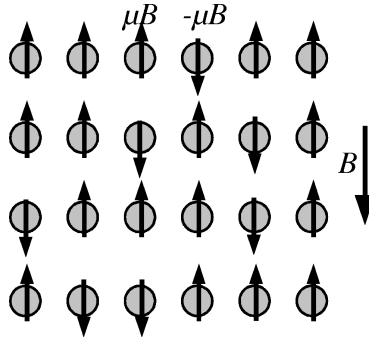
2 Энтропия в термодинамике и статистической физике

2.1 Задачи на вычисление энтропии

S1. Два одинаковых бруска имеют разные температуры: $0^\circ C$ и $100^\circ C$. Их поместили в термос в контакте друг с другом. На сколько изменится энтропия системы, когда бруски придут в термическое равновесие? Изменением объема брусков



К задаче S6



К задаче S12

пренебречь, теплоемкости брусков C известны и не зависят от температуры в интервале условий, оговоренных в задаче. Убедитесь, что процесс необратим.

S2. То же, что в задаче **S1**, но в интервале условий, оговоренных в задаче, теплоемкость бруска линейно зависит от их температуры $C = bT$; начальные температуры брусков $T_1 = 10^\circ K$ и $T_2 = 20^\circ K$, коэффициент b известен.

S3. На гуковскую пружинку жесткостью K подвесили груз массой m и отпустили. На сколько изменится энтропия системы после того, как колебания затухнут? Считать температуру пружинки и комнаты T практически неизменной, необходимые теплоемкости известны. Убедитесь, что процесс необратим.

S4. Ток 0,5 Ампер течет через сопротивление 2 ома в течение 100 секунд. Начальная температура системы $300^\circ K$, теплоемкость провода 0,24 Дж/К. Температура системы меняется значительно. На сколько изменится энтропия системы?

S5. Конденсатор емкостью C зарядили от батареи с напряжением U при температуре T . На сколько изменится энтропия системы в таком процессе? Необходимые теплоемкости известны.

S6. Рассмотрим два квазистатических процесса расширения ν молей идеального одноатомного газа из состояния 1 в состояние 2 на диаграмме $p(V)$, см. рис.: один процесс – изотермическое расширение 1-2, второй – последовательно происходящие изохорический и изобарические процессы 1-3-2. Обозначим через δQ теплоту, которую газ получает при некотором малом сдвиге состояния на графике $p(V)$.

Проинтегрировать вдоль кривых 1-2 и 1-3-2 величину $\delta Q/T$ и найти, чему равно ее изменение между точками 1 и 2 в обоих случаях.

S7. Вычислить изменение энтропии ν молей идеального газа при расширении в вакуум, пользуясь 1) вероятностным определением энтропии 2) термодинамическим определением энтропии. Считать, что в расширении участвует N молекул одноатомного газа, в ходе расширения объем газа увеличивается вдвое.

S8. Стивен Хокинг (1974, 1976) рассмотрел неврещающуюся черную дыру массы M как термодинамический объект. При этом он пользовался формулами теории относительности, согласно которым черная дыра образуется, когда радиус R_s массивного тела становится настолько мал, что вторая космическая скорость на его поверхности – скорость убегания – сравнивается со скоростью света, вследствие чего даже свет не может покинуть такой космический объект: $R_s = 2GM/c^2$, здесь R_s – сфера Шварцшильда, G – гравитационная постоянная. Внутренняя энергия такого объекта вычислялась Хокингом по формуле $E = Mc^2$.

Хокинг вывел следующее выражение для энтропии черной дыры:

$$S = kc^3 A / (4G\hbar),$$

где A – площадь поверхности черной дыры, k , c и \hbar – постоянная Больцмана, скорость света и постоянная Планка. Пользуясь результатами Хокинга, найдите температуру черной дыры.

S9. Используем предположения Хокинга, сформулированные в условии к предыдущей задаче. Предположим, черная дыра, как любой нагретый до температуры T объект, излучает энергию (и массу) по закону Стефана-Больцмана. Напишите уравнение описывающее динамику массы черной дыры. Решите его. Можете ли вы предложить механизм, посредством которого осуществляется излучение Хокинга?

S10. По современным представлениям характерный возраст Вселенной $5 \cdot 10^{17}$ сек. Пользуясь предположениями Хокинга из задачи **S8**, найдите массу черной дыры, которая излучит себя целиком (испрится) как раз за время существования Вселенной.

S11. Пользуясь предположениями Хокинга из задачи **S8**, оцените характерное время, за которое испарится черная дыра массой 1000 тонн. Предположите, как этот процесс будет выглядеть для стороннего наблюдателя.

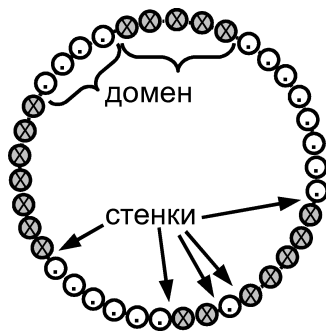
S12. Система состоит из N частиц с магнитным моментом μ , которые расположены в магнитном поле B и ориентируются в пространстве двумя способами – по полю либо против поля (см. рис.). Энергия частицы равна $\pm\mu B$ в зависимости от ориентации спина; будем считать для определенности, что частицам энергетически выгодно выстроиться по направлению поля. Обозначим через n число частиц в системе, имеющих положительную энергию. Найдите энтропию системы как функцию N , n . С ее помощью оцените, сколько частиц со спинами вдоль поля имеется при температуре T . Частицы считать не взаимодействующими друг с другом и не смещающимися из узлов кристаллической решетки. Число частиц с каждой пространственной ориентацией большое.

S13. Для системы спинов, описанных в задаче **S12**, найдите зависимость внутренней энергии системы от температуры.

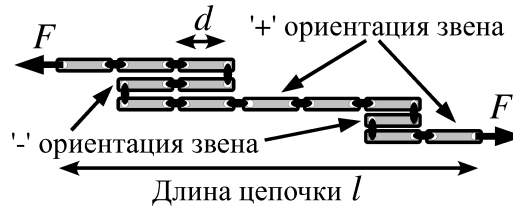
S14. Для системы спинов, описанных в задаче **S12**, найдите зависимость намагниченности системы от температуры.

S15. Рассмотрим модель одномерного парамагнетика в виде кольцеобразной длинной цепочки обладающих магнитным моментом частиц, каждая из которых может иметь одну из двух ориентаций (вверх или вниз, см. рис, вид сверху). Доменом назовем расположенные последовательно частицы, имеющие одинаковое направление магнитных моментов, а доменной стенкой – границы, отделяющие один домен от другого. Будем считать, что частицы взаимодействуют между собой так, что на образование нового домена (и, соответственно, двух доменных стенок) требуется фиксированная энергия; пусть также доменные стенки не взаимодействуют друг с другом. При увеличении температуры от $100^\circ K$ до $200^\circ K$ внутренняя энергия системы возрастает в α раз. Сколько энергии поглощает система при образовании одной доменной стенки?

S16. В процессе тепловых колебаний атом в кристаллической решетке может случайно покинуть свое место, вылетев из кристаллической решетки на поверхность кристалла или пройдя сквозь какую-либо границу внутри кристалла. При этом в решетке возникает точечный дефект – т.н. "дефект Шоттки". Этот дефект часто встречается в щелочно-галлоидных кристаллах. Наличие дефектов Шоттки



К задаче S15



К задаче S18

уменьшает плотность кристалла, поскольку атом, образовавший вакансию, диффундирует на его поверхность; дефект также влияет на прочность материалов.

Характерная энергия, необходимая на образование одного точечного дефекта равна примерно $\epsilon = 1$ eV. Оценить относительную концентрацию дефектов при комнатной температуре с помощью вычисления энтропии кристалла, содержащего N атомов и n не взаимодействующих дефектов описанного типа. Насколько оправданно считать, что при комнатной температуре дефекты не взаимодействуют друг с другом?

S17. Дефект Френкеля – точечный дефект, образующийся в кристалле, когда атом сдвигается в междоузлие, а на его месте образуется вакансия в кристаллической решетке. Вакансия и междоузельный атом легко перемещаются внутри решетки за счет тепловой энергии. Дефекты Френкеля легко образуются также в кристаллах со структурой алмаза и преобладают в кристаллах типа галоидов серебра. Эти дефекты не влияют на плотность кристалла. В общем случае в кристалле могут быть и дефекты Френкеля и дефекты Шоттки, причем преобладают те, для образования которых требуется меньшая энергия.

Пусть для образования одного дефекта Френкеля требуется энергия ϵ . Из N имеющихся атомов m случайных атомов в решетке сместились в междоузлие, число междоузлий также N . Оценить среднее относительное количество дефектов в кристалле при температуре T . Дефекты считать не взаимодействующими друг с другом.

S18. Рассмотрим простейшую математическую модель, в которой свойство механической упругости непосредственно связано с величиной энтропии. Имеется цепочка из N шарнирно связанных жестких легких звеньев длиной d . Длиной цепочки l называем расстояние по прямой от первого звена до последнего. Пусть каждое звено располагается вдоль заданной прямой, причем может иметь только две возможные ориентации: положительную, которая увеличивает расстояние от между первым и последним звеном, или отрицательную, которая уменьшает ее (см. рис.). Звенья могут менять ориентацию скачком. Обозначим число звеньев с положительной ориентацией n_+ , а с отрицательной ориентацией n_- .

Пусть цепочка находится в контакте с термостатом, роль которого выполняют хаотические щелчки по цепочке, случайным образом меняющие ориентацию некоторых звеньев; чем выше температура термостата, тем чаще и интенсивнее щелчки.

К концам цепочки приложили растягивающую силу. Записать выражение для

энтропии $S(N, n_+)$ и вычислить с его помощью зависимость жесткости такой цепочки от температуры. Считать $l \ll Nd$.

S19. Имеется пружина, сила упругой деформации которой $f = \kappa x$, где x – величина деформации, а жесткость κ слабо зависит от температуры в окрестности точки T_0 :

$$\kappa(T) = \alpha + \beta(T - T_0) + \gamma(T - T_0)^2.$$

Записать свободную энергию системы в виде функции следующих переменных: $F(T, x)$ и $F(T, f)$. Вычислить при температуре T_0 разность теплоемкости пружины при фиксированной силе натяжения, C_f , и теплоемкости при фиксированной длине, C_x .

Примечание: $dF = -SdT + \kappa x dx$.

S20. При каких температурах пружины в задаче **S19** при резком растяжении материал пружины будет нагреваться?

Примечание: пользуясь выражениями для свободной энергии и энтропии пружины, полученными в задаче **S19**, найдите, насколько энергия системы возрастает за счет упругого вклада при медленном изотермическом растяжении и насколько этот вклад отличается от $\kappa x^2/2$. Как от этого вклада зависит, поглощает или отдает тепло пружина при медленном изотермическом растяжении? Что меняется при резком растяжении?

S21. Система N частиц со спином $1/2$ при приближении к температуре T_0 демонстрирует сильную зависимость молярной теплоемкости от температуры, при этом вещество из парамагнитного состояния (при высоких температурах) переходит в ферромагнитное (при низких температурах). Соответствующие экспериментальные данные студенческой лаборатории были аппроксимированы прямой $C(T) = C_0(2T/T_0 - 1)$ на промежутке $T_0/2 < T < T_0$, при остальных температурах эксперимент лаборатории дал практически нулевую теплоемкость. Вычислите максимально возможное изменение энтропии системы, пользуясь сначала данными студенческой лаборатории, а затем путем непосредственного вычисления энтропии согласно статистическому определению $S = k \ln W$. Сравнивая полученные результаты, предскажите значение константы C_0 .

S22. При прохождении звуковой волны через упругую среду в ней возникает переменное избыточное давление, характеризующееся некоторой амплитудой Δp . При этом громкость звука, измеряемую в децибелах, вводят при помощи формулы $20 \lg(\Delta p/p_0)$, где $p_0 = 20$ мкПа – опорное давление, соответствующее порогу слышимости синусоидальной звуковой волны частотой 1 кГц. Рассмотрим таблицу связи громкости и звукового давления:

Децибелы	Δp , Н/м ²	Пример звука
80	0.2	Шумная улица
90	0.645	Фортиссимо большого симф. оркестра
100	2	Клепальная машина
110	6.45	Пневматический молот
120	20	Реактивный двигатель ближе 5 метров
130	64.5	Болевой предел

Выбрать один пример звука из таблицы и вычислить, насколько флуктуирует в соответствующей звуковой волне температура газа. Какими свойствами должен обладать измерительный прибор для того, чтобы зафиксировать эти флуктуации? Считайте атмосферу идеальным двухатомным газом.

Примечание: перед решением этой задачи мы предлагаем читателю вспомнить, как посредством лианеризации уравнения непрерывности и уравнения дви-

жения идеальной жидкости получить уравнение звуковой волны. Подробно об этом можно прочитать, например, в одной из задач главы "Феноменологическая термодинамика" книги [1].

2.2 Как решать задачи с использованием понятия "энтропия"

Практика показывает, что необходимость рассматривать давление, температуру и объем, а также их физический смысл очевидны даже начинающему изучать термодинамику вследствие того, что приборы, измеряющие эти величины, известны каждому. Однако энтропию, по сути равноправную с этими переменными, часто встречают с недоумением – ее нельзя непосредственно измерить и не так просто сформулировать ее физический смысл. Данный раздел иллюстрирует, когда же вычисление энтропии оказывается технически полезным.

Задачи **S1-S6** иллюстрируют необратимые процессы, в ходе которых энтропия всегда возрастает.

Задача **S6** достаточно проста в решении, мы оставляем ее для самостоятельного решения. Прокомментируем лишь важный идеологический момент. Идеальный газ прекрасно иллюстрирует тот факт, что внутренняя энергия U зависит только от расположения точки на диаграмме $p(V)$, но не от "траектории", по которой система пришла в эту точку. Соответственно, изменение внутренней энергии ΔU зависит только от конечной и начальной точки на диаграмме. Однако, работа, совершаемая идеальным газом (δA , численно равная площади под графиком кривой $p(V)$), а вместе с ней и переданная теплота δQ , зависят от формы кривой $p(V)$. На языке теории функций это означает, что малые приращения работы и теплоты δA и δQ не являются полными дифференциалами термодинамических переменных, а сами эти величины не являются функциями состояния системы (зависят не только от расположения точки на диаграмме). В отличие от внутренней энергии и других т.-д. потенциалов, для них нельзя записать дифференциальные равенства, аналогичные приведенным в табл. 1.

К счастью, если разбить кривую на бесконечно малые интервалы и на каждом вычислить $dS = \delta Q/T$, а затем проинтегрировать величины dS вдоль кривой, полученная величина ΔS снова *зависит только от расположения начальной и конечной точек* 1 и 2, а не от формы кривой. Иными словами, введение переменной S осмысленно при рассмотрении тепловых процессов, ибо переводит рассмотрение теплопередачи на язык *полных дифференциалов* и освобождает нас от необходимости следить за формой линий на PV -диаграмме. Фактически, при решении задачи вам предлагается проверить в частном случае известный факт о том, что энтропия – функция только состояния системы (в отличие от теплоты и от работы), а затем, в задаче **S7**, убедиться в эквивалентности термодинамического и статистического определений для энтропии.

Задача S8.

Воспользуемся соотношением $dU = TdS - pdV$ из табл. 1. Второе слагаемое здесь соответствует работе внешних сил, однако в описанной системе внешние силы отсутствуют, $\delta A = -pdV = 0$. Отсюда

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_A = \frac{(\partial U / \partial M)_A}{(\partial S / \partial M)_A}. \quad (1)$$

Выражая хокинговскую энтропию и внутреннюю энергию U через M ,

$$S = \frac{kc^3\pi}{G\hbar} \left(\frac{2GM}{c^2} \right)^2, \quad U = Mc^2$$

дифференцируя S и U по M и подставляя в (1), получим ответ: $T = \hbar c^3 / (8\pi GkM)$. Значит, чем легче черная дыра, тем она горячее.

Задача S12.

Пусть для начала число n в системе неизменно (рассматриваем *микрoканонический* ансамбль, МКА).

Воспользуемся статистическим определением энтропии, $S = k \ln W$, где W – число микросостояний, которыми можно реализовать данное макросостояние. Микроскопически система однозначно задается ориентацией в пространстве каждой частицы, однако макроскопически мы сможем наблюдать только следствия того, что одни частицы имеют положительную, а другие – отрицательную энергии. Например, полная внутренняя энергия, обсуждаемая в задаче S14, также как и n будет являться макропараметром – одному и тому же значению соответствуют разные расположения частиц. Если ввести параметр $\epsilon = 2\mu B$ (разность энергий в состоянии с ориентацией частицы против поля и по полю), внутренняя энергия будет равна

$$U = n\epsilon/2 - (N - n)\epsilon/2 = n\epsilon - N\epsilon/2 \quad (2)$$

Число состояний с данной энергией (вырождение) можно легко вычислить, посчитав число способов, которым можно расставить n "положительных" частиц в системе,

$$W = \frac{N!}{n!(N - n)!}.$$

Все такие состояния имеют одинаковую энергию и, следовательно, эквивалентны с точки зрения макронаблюдателя. Также разумно воспользоваться формулой Стирлинга

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x! \sim \sqrt{2\pi x} \cdot (x/e)^x,$$

которая даже при значениях $x \sim 1$ работает с точностью уже 8%.

Получим

$$S = k \ln W = k(N \ln N - n \ln n - (N - n) \ln(N - n)). \quad (3)$$

Так же как и в задаче S8, внешние силы в системе отсутствуют, $\delta A = 0$, поэтому формально можно записать

$$dU = TdS \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_A = \frac{(\partial S / \partial n)_A}{(\partial U / \partial n)_A}.$$

Заметим, что параметр температуры не имеет смысла в рамках МКА, также как и изменение энергии dU , ведь энергия системы зафиксирована в этом ансамбле. Однако формально определенная температура МКА будет совпадать с температурой в каноническом ансамбле ввиду эквивалентности ансамблей. Поэтому последнее равенство можно использовать и в каноническом ансамбле, подразумевая, что система спинов находится уже в контакте с термостатом, а обмен энергии системы и термостата приводит к процессам переворачивания спинов, причем в среднем

число спинов каждой ориентации постоянно, так как имеет место динамическое равновесие.

Дифференцируя (2, 3) по n , найдем связь T и n :

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{\epsilon} \ln \frac{N-n}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{N}{1 + \exp(\epsilon/(kT))}.$$

Удивительно, но в качестве ответа мы получили знаменитую формулу распределения Ферми, которая будет играть важнейшую роль в описании ферми-частиц – частиц, для которых существует запрет Паули.

Задача S18.

Пусть сила натяжения равна F . Работа по растяжению такой "пружины" на dl равна Fdl .

В задаче описано два противоборствующих механизма. Наличие очень большого числа хаотических щелчков (предел высоких температур) привело бы к тому, что примерно половина имеющихся звеньев имела бы положительную, а половина – отрицательную ориентацию, при этом длина цепочки обратилась бы в ноль несмотря на растягивающую силу. В пределе же низких температур (отсутствие щелчков) сколь угодно слабая сила растянула бы цепочку до максимальной длины Nd .

Первый механизм характеризуется интенсивностью влияния термостата и хаотичностью цепочки (энтропией), он соответствует вкладу в энергию системы TdS . Второй механизм дает в энергию вклад за счет работы по растяжению цепочки Fdl . Описанные вклады равным образом влияют на состояние системы:

$$dE = TdS + Fdl.$$

Если цепочка в среднем неподвижно растянута действием некоторой силы, и в среднем не поглощает при этом теплоту извне, то $E = \text{const}$ и оба механизма "уравновешивают" друг друга. Отсюда можно определить силу, требующуюся, чтобы удерживать цепочку в равновесии:

$$F = -T \left(\frac{\partial S}{\partial l} \right)_E.$$

Найдем энтропию цепочки, воспользовавшись эквивалентностью МКА и КА и статистическим определением энтропии. В качестве макропараметра удобно рассмотреть, например, число звеньев с положительной ориентацией:

$$S = k \ln W, \quad W = \frac{N!}{n_+!(N-n_+)!}, \quad l = (n_+ - n_-)d = (2n_+ - N)d.$$

Тогда, после применения формулы Стирлинга, имеем

$$S = k(N \ln N - n \ln n - (N-n) \ln(N-n)),$$

поэтому

$$F = -T \left(\frac{\partial S}{\partial l} \right)_E = -T \frac{(\partial S / \partial n_+)_E}{(\partial l / \partial n_+)_E} = \frac{kT}{2d} \ln \frac{N-n_+}{n_+} = -\frac{kT}{2d} \ln \frac{Nd-l}{Nd+l}.$$

Если l/Nd мало, выражение под логарифмом может быть разложено в ряд, и $F \simeq kTl/(Nd^2)$ т.е. цепочка будет становиться более жесткой при нагревании. Величина $kT/(Nd^2)$ играет роль растущей с температурой жесткости системы.

При решении задачи использовалась связь экстремумов термодинамических потенциалов при поиске механического равновесия. С материалом можно ознакомиться подробнее в главе 3, §"Основы термодинамики диэлектриков и магнетиков" книги [6].

2.3 Ответы для самоконтроля

S1: $\Delta S = C \ln(323^2/(273 * 373)) \simeq 0.024 \cdot C > 0.$

S2: $\Delta S = b(2T_k - 30) \simeq 1,62b.$

Примечание. Конечная температура системы T_k не равна 15°K .

S3: $\delta S = m^2 g^2 / (2KT).$

S4: $0.127 \text{ Дж/К}.$

S5: $\Delta S = CU^2/(2T)$ **Примечание.** Батарея совершает работу qU .

S6: В обоих случаях ответ будет $\nu R \ln 2$, где R – универсальная газовая постоянная.

S7: Тот же ответ, что и в предыдущей задаче. Обратите внимание, что хотя, как и в процессе 1-3 задачи **S6**, внутренняя энергия газа не меняется, работа газа обращается в ноль и не равна площади под графиком изотермы: "правило о площади под графиком" верно лишь для квазистатических процессов.

Задача, о том, как расширяется в вакуум вещество с произвольным уравнением состояния, рассмотрена в [1].

S8: $T = \hbar c^3 / (8\pi G k M).$

S9: $M(t) = \sqrt[3]{M_0^3 - 3\alpha t}$, где M_0 – начальная масса черной дыры,

$$\alpha = \sigma \hbar^4 c^6 / (2^8 \pi^3 G^2 k^4) \simeq 4 \cdot 10^{15},$$

k и σ – постоянные Больцмана и Стефана-Больцмана. Вблизи горизонта событий черной дыры образуются пары типа частица-античастица, из которых одна, оказавшаяся чуть выше горизонта, улетает, унося энергию, а другая, обладающая отрицательной энергией, падает в черную дыру, уменьшая ее массу. Подробнее можно прочитать здесь:

<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0304042>

S10: Черная дыра массой $2 \cdot 10^{11}$.

S11: За 83 секунды. Как взрыв.

S12: $S = k(N \ln N - n \ln n - (N - n) \ln(N - n))$, $n = N/(1 + \exp(\epsilon/(kT)))$, где $\epsilon = 2\mu B$ – разность энергий частиц с разной пространственной ориентацией.

S13: $U = N\epsilon \tanh(\epsilon/kT)$, где \tanh – гиперболический тангенс.

S14: $M = N\mu \tanh(\epsilon/kT).$

S15: Поглощается $2kT \ln(\alpha/2 + \sqrt{\alpha^2 + 4(\alpha - 1)/2})$.

S16: Приближение идеального газа оправданно, так как относительная концентрация при ϵ порядка 1 эВ составит

$$\frac{n}{N} = \frac{1}{e^{\epsilon/kT} - 1} \simeq 10^{-17}.$$

Любопытно, что в качестве ответа получается распределение Бозе-Эйнштейна.

S17: $m/N = (\exp(\epsilon/2kT) + 1)^{-1}.$

S18: Жесткость $kT/(Nd^2)$, где k – постоянная Больцмана.

S19: $F(T, x) = F_0(T) + \kappa x^2/2$, $F(T, f) = F_0(T) + f^2/(2\kappa)$, где F_0 – некоторая функция только температуры; $C_f - C_x = T\beta^2 x^2/\alpha$. **Примечание:** вычислите при помощи F энтропию и воспользуйтесь определением теплоемкости.

S20: При $T > T_0 - \beta/(2\gamma)$ пружина будет отдавать тепло в окружающую среду в условиях медленного изотермического расширения. В этом же случае ее материал будет греться при резком растяжении.

S21: Сравнение результатов дает $C_0 = Nk \ln 2/(1 - \ln 2)$.

S22: Флуктуации температуры (в градусах Цельсия): $1.7 \cdot 10^{-4}$, $5.5 \cdot 10^{-4}$, $1.7 \cdot 10^{-3}$, $5.5 \cdot 10^{-3}$, $1.7 \cdot 10^{-2}$, $5.5 \cdot 10^{-2}$; флуктуации на уровне болевого предела способен зафиксировать даже термометрический датчик, при условии, что он обладает малыми размерами и очень низкой теплоемкостью.

3 Статсуммы и распределения в каноническом ансамбле

3.1 Задачи на вычисление функций распределения и статистических сумм в каноническом ансамбле

A1. Для классического идеального одноатомного газа найти средний модуль относительной скорости двух молекул $\langle |V_2 - V_1| \rangle$.

A2. Для классического идеального одноатомного газа найти среднее от модуля скалярного произведения скоростей двух молекул $\langle |V_2 \cdot V_1| \rangle$.

A3. Для классического идеального одноатомного газа найти функцию распределения по энергии одной молекулы.

A4. Для классического идеального одноатомного газа найти функцию распределения по сумме энергий двух молекул.

A5. Для классического идеального одноатомного газа найти функцию распределения по сумме энергий n молекул.

A6. Для классического идеального одноатомного газа найти функцию распределения по сумме импульсов двух молекул.

A7. Для классического идеального одноатомного газа найти функцию распределения по сумме импульсов трех молекул.

A8. Для классического идеального одноатомного газа получить функцию распределения по малым отклонениям ΔE энергии системы от среднего значения \bar{E} (функцию распределения по флуктуациям). Ограничиться вычислением главного нетривиального члена разложения по $\Delta E/\bar{E}$ и первой поправкой к нему.

A9. Найти средний импульс, передаваемый молекулой одноатомного максвелловского газа при ударе о поверхность сосуда, в котором находится газ. Столкновения считать абсолютно упругими.

A10. Рассмотрим классический идеальный одноатомный газ, вытекающий через маленькую дырочку из сосуда с температурой T . Найти функцию распределения молекул в струе по модулю скорости.

A11. Рассмотрим классический идеальный одноатомный газ, вытекающий через маленькую дырочку из сосуда с температурой T . Найти функцию распределения в струе по энергии вылетающих частиц.

A12. Рассмотрим классический идеальный одноатомный газ, вытекающий через маленькую дырочку из сосуда с температурой T . Найти среднее скалярное произведение скоростей двух молекул в струе вылетающих частиц, $\langle \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 \rangle$.

A13. Найти среднее значение угла $\langle \theta \rangle$ между направлением скорости молекул идеального газа, вылетающих через маленькую дырочку из сосуда в вакуум, и нормалью к стенке сосуда.

A14. Для слабо релятивистского газа найти поправку к статистической сумме идеального одноатомного газа.

A15. На сколько процентов изменятся теплоемкости C_p и C_V , если учесть, что идеальный одноатомный газ слабо релятивистский?

A16. На сколько процентов изменится внутренняя энергия и масса идеального одноатомного газа, если учесть, что он слабо релятивистский?

A17. На сколько процентов изменится скорость звука идеального одноатомного газа, если учесть, что он слабо релятивистский?

A18. Найти средний импульс, передаваемый ультрарелятивистским газом в единицу времени при ударе о единичную площадку поверхности сосуда, в котором находится газ. Столкновения считать абсолютно упругими. Температура газа T .

A19. Для ультрарелятивистского идеального газа найти среднюю энергию молекулы.

A20. Для одноатомного идеального газа в трубе высотой h , находящегося в однородном поле тяжести g , найти функцию распределения по полной энергии одной молекулы.

A21. Для одноатомного идеального газа, находящегося в однородном поле тяжести g , найти среднюю полную энергию молекулы.

A22. Для одноатомного идеального газа, находящегося в однородном поле тяжести g , найти средний модуль относительной скорости двух молекул, $\langle |V_2 - V_1| \rangle$.

A23. Для одноатомного идеального газа, находящегося в однородном поле тяжести g , найти зависимость скорости звука от высоты. Атмосферу считать изотермической.

A24. На планете X от северного полюса к южному провертели дырку насквозь и заполнили ее одноатомным идеальным газом с массой молекул m . Найти статсумму этого идеального газа. Считать радиус планеты большим по сравнению с остальными параметрами задачи, имеющими размерность длины; в асимптотических вычислениях указать первую поправку. Температура газа T постоянна, ускорение свободного падения на поверхности равно g_0 .

A25. На планете X от северного полюса к южному провертели дырку насквозь и заполнили ее одноатомным идеальным газом массой m молярной массой μ . Найти теплоемкость этого газа, C_V . Считать радиус планеты большим по сравнению с остальными параметрами задачи, имеющими размерность длины; в асимптотических вычислениях указать первую поправку. Температура газа T постоянна, ускорение свободного падения на поверхности равно g_0 .

A26. Найти энтропию двумерного идеального газа, имеющего при температуре T энергию U .

A27. Найти статсумму системы, описанной в задаче **S12**.

A28. Статсумма неидеального газа имеет вид

$$Z = \left(\frac{V - N\beta}{N} \right)^N \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3N/2} e^{N^2\alpha^2/(VkT)}$$

где α и β - константы. Найти давление газа. Привести выражение для давления к формуле Ван-дер-Ваальса и отождествить параметры α и β с параметрами газа Ван-дер-Ваальса.

A29. Распределение по энергиям нейтронов из реактора исследуется при помощи детектора. Нейтрон пролетает в детекторе путь 10 метров, скорость нейтрона определяется по времени, которое требуется нейтрону, чтобы преодолеть

это расстояние. В таблице дано число нейтронов, которые пролетали детектор за заданное количество миллисекунд.

N	1.2	2.7	8.2	13.4	19.0	20.5	18.8	15.0	11.3	7.2	4.1	2.1
t	30	15	7.5	5	3.75	3	2.5	2.14	1.87	1.67	1.5	1.2

а) Постройте функцию распределения частиц по скоростям

б) Докажите, что распределение должно иметь вид $f(u) = Ku^3 e^{-mu^2/(2kT)}$, где T - температура реактора.

в) Найдите по графику температуру реактора

A30. Контакты конденсатора емкостью C и катушки индуктивности L соединены попарно. Система не подключена к источнику напряжения, однако, ввиду тепловых флуктуаций, в цепи возникает шумовое напряжение. Свяжите среднеквадратичное значение шумового напряжения с температурой системы. **Примечание:** убедитесь, что гамильтониан системы имеет собственные значения $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$, где $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

A31. Доказать, что средняя энергия системы в каноническом ансамбле связана со статсуммой Θ выражением

$$E_{cp} = -\frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial (kT)^{-1}}.$$

Получите аналогичную формулу для среднего квадрата энергии. Используя полученный результат, свяжите среднеквадратичное отклонение энергии со статсуммой. Выразите среднеквадратичное отклонение энергии через температуру и C_V .

A32. N частиц со спином $1/2$ выстроены вдоль одной прямой, спин каждой частицы направлен или вверх или вниз. Взаимодействуют лишь ближайшие друг к другу частицы, причем если спины у них сонаправлены, энергия взаимодействия равна J , а если спины антипараллельны – энергия равна $-J$. Температура системы T . Вычислить статсумму.

3.2 О вычислении функций распределения и связи между различными ансамблями в статфизике

Постановка задач статистической физики всегда дополнена граничными условиями, которые определяют статистический ансамбль, в котором следует проводить вычисления.

Решим задачу, технически похожую на **A5** и отличающуюся от нее лишь ансамблем: получим в МКА функцию распределения по энергии подсистемы, состоящей из n частиц. Можно представить себе, что из N имеющихся в ансамбле частиц мы "покрасили" n штук и намерены теперь изучать лишь статистику "окрашенных" частиц.

Функция распределения МКА жестко фиксирует полную энергию системы, так как флуктуации ее в данном ансамбле невозможны:

$$\rho_{мка} = \frac{1}{\Sigma} \delta \left(E - \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} \right),$$

здесь Σ – статсумма системы в МКА, играющая роль нормировочного множителя перед функцией распределения.

Информация о частицах с номерами от $n + 1$ до N нас не интересует. Сокрытие описания – усреднение функции распределения по этим переменным –

технически означает интегрирование по "неинтересным" переменным:

$$\rho_{\text{КА}} = \int d^3 p_{n+1} \dots d^3 p_N \rho_{\text{МКА}} = \frac{1}{\Sigma} \int d^3 p_{n+1} \dots d^3 p_N \delta \left(E - H - \sum_{i=n+1}^N \frac{p_i^2}{2m} \right), \quad (4)$$

где введено $H = \sum_{i=1}^n p_i^2 / (2m)$.

Мы интересуемся функцией распределения по H . Достаточно проводить все вычисления, опуская коэффициент пропорциональности, не зависящий от H , ведь полученный ответ $\rho(H)$ легко будет нормировать так, чтобы $\int_0^\infty \rho(H) dH = 1$.

В выражении (4) много интегралов, но только одна δ -функция; она позволит снять лишь один интеграл. Чтобы вычисления были рациональными, нужно постараться, чтобы оставшиеся интегралы не оказались слишком громоздкими. Для этого рассмотрим вектор \vec{Z} , составленный из декартовых составляющих всех векторов $\vec{p}_{n+1} \dots \vec{p}_N$. Вектор \vec{Z} имеет $3(N-n)$ составляющих. Заметим, что сумма под знаком δ -функции в (4) является просто $(\vec{Z})^2 / 2m$, а произведение интегралов – просто $3(N-n)$ -мерное интегрирование в Z -пространстве. Перейдем в $3(N-n)$ мерные сферические координаты:

$$\rho(H) = \frac{1}{\Sigma} \int d^{3(N-n)} \vec{Z} \delta \left(E - H - \frac{Z^2}{2m} \right) \sim \int_0^\infty dZ Z^{3(N-n)-1} \delta \left(E - H - \frac{Z^2}{2m} \right),$$

интегралы по многомерным угловым переменным дают лишь множитель, не зависящий от H , за которым мы договорились пока не следить; по той же причине опущен нормировочный множитель Σ . Замена переменной интегрирования $x = Z^2 / 2m$ и снятие интеграла δ -функцией приводит к $\rho(H) \sim (E-H)^{3(N-n)/2-1}$.

Теперь достаточно подобрать к $\rho(H)$ нормировочный множитель – и задача решена. Заметим, что с физической точки зрения интерес представляет случай, когда размер подсистемы удовлетворяет условию $1 \ll n \ll N$: в этом пределе из МКА должно получиться распределение Гиббса в КА. Проверим это:

$$\rho(H) \sim (E-H)^{3(N-n)/2-1} \sim (1-H/E)^{3N/2} \sim e^{(3N/2) \ln(1-H/E)}$$

Вдобавок, $E \gg H$, так как энергия подсистемы мала по сравнению с энергией системы, что позволяет разложить логарифм в ряд, отбросив все вклады, кроме одного: $\rho(H) \sim e^{-3NH/(2E)}$. Чтобы получилось распределение Гиббса, осталось лишь ввести определение температуры при помощи равенства $E = 3NkT/2$ (напомним, что в рамках МКА понятие температуры исходно отсутствовало: температура является характеристикой энергетического обмена системы с термостатом, однако в МКА система изолирована от внешних источников тепла).

3.3 Ответы для самоконтроля

A1. $4\sqrt{kT/(\pi m)}$.

A2. $4kT/(\pi m)$

A3.

$$\rho(\epsilon) = \frac{2}{(kT)^{3/2}} \sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}} e^{-\epsilon/kT}.$$

A4.

$$\rho(\epsilon) = \frac{1}{2! \epsilon} \left(\frac{\epsilon}{kT} \right)^3 e^{-\epsilon/kT}.$$

Примечание: Стартуем с двухчастичной функции распределения $\rho(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$. Зафиксируем значение суммы энергий двух молекул при помощи множителя $M \equiv \delta(\epsilon - p_1^2/2m - p_2^2/2m)$ и усредним функцию $M\rho(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ по "неинтересным" переменным p_1 и p_2 , оставив лишь зависимость от "интересной" переменной ϵ .

A5.

$$\rho(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon\Gamma(3n/2)} \left(\frac{\epsilon}{kT}\right)^{3n/2} e^{-\epsilon/kT}.$$

A6.

$$\rho(P) = (4\pi mkT)^{-3/2} e^{-P^2/4mkT}.$$

A7.

$$\rho(P) = \left(\frac{5}{24\pi mkT}\right)^{3/2} e^{-5P^2/24mkT}.$$

A8. С точностью до нормировки

$$\rho(\Delta E) \sim \left(1 + \frac{N(\Delta E)^3}{2E^3} + O\left(\frac{N(\Delta E)^4}{E^4}\right)\right) \exp\left(-\frac{3N(\Delta E)^2}{4E^2}\right).$$

Примечание. Аналогично задаче **A5** найти функцию распределения по сумме энергий всех частиц E , воспользоваться тем, что $E = \bar{E} + \Delta E$, где $\Delta E \ll \bar{E}$.

A9. $\sqrt{2\pi mkT}$.

A10.

$$\rho(V) = \frac{m^2 V^3}{2(kT)^2} e^{-mV^2/2kT}.$$

A11.

$$\rho(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2(kT)^2} e^{-\epsilon/kT}.$$

A12. $\langle \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 \rangle = \pi kT/(2m)$.

A13. $\pi/4$.

A14.

$$\Sigma_{\text{рел}} = \exp\left(-\frac{15NkT}{mc^2}\right) \cdot \Sigma_{\text{нерел}}.$$

A15. C_V уменьшится на $20kT/(mc^2) \cdot 100\%$, C_p – на $12kT/(mc^2) \cdot 100\%$, их разность $C_p - C_V$ не изменится. Здесь m – масса покоя молекулы.

A16. По сравнению с нерелятивистскими значениями полная энергия уменьшится на $10kT/(mc^2) \cdot 100\%$, масса увеличится на $3kT/(2mc^2) \cdot 100\%$, где m – масса покоя молекулы.

A17. Скорость звука увеличится на $13kT/(2mc^2) \cdot 100\%$ по сравнению с нерелятивистским значением.

A18. NkT .

A19. $3kT$.

A20.

$$\rho(\epsilon) = \frac{4e^{-\epsilon/(kT)}}{3kT\sqrt{\pi}[1 - e^{-mgH/(kT)}]} \left(\frac{\epsilon^{3/2} - (\epsilon - mgH)^{3/2}}{(kT)^{3/2}} \cdot \theta(\epsilon - mgH) + \frac{\epsilon^{3/2}}{(kT)^{3/2}} \cdot \theta(mgH - \epsilon) \right),$$

здесь θ – тета-функция Хевисайда.

A21. $5kT/2$.

A22. $4\sqrt{kT/(\pi m)}$.

A23. Скорость звука не зависит от высоты.

A24.

$$\Sigma \sim (kT)^{2N} \exp\left(-Ne^{-wR^2/2kT} \sqrt{\frac{2kT}{\pi wR^2}}\right),$$

где R – радиус планеты, $w \equiv mg_0/R$.

A25. $C_V = 2Nk - Nk\sqrt{2/\pi}f^3e^{-f^2}$, где $f \equiv \sqrt{mg_0R/(kT)}$.

A26. $S = U(\ln T + 1)/T + \text{const}$. **Примечание:** Обратите внимание, что при $T \rightarrow 0$ выражение $S(T)$ не идет в ноль ни при каком значении обезразмеривающей константы. Как же это согласуется с третьим началом термодинамики?

A27. $\Sigma = 2^N \text{ch}^N(\mu B/(kT))$.

A28. $a = \alpha^2 N_a^2$, $b = N_a \beta$, где N_a – постоянная Авогадро, a и b – параметры уравнения Ван-дер-Ваальса.

A29. Примерно 430°K .

A30.

$$\langle U^2 \rangle = \frac{\hbar\omega}{2C} \text{cth} \frac{\hbar\omega}{2kT}.$$

A31. $\langle (E - \bar{E})^2 \rangle = kT^2 C_V$.

A32.

$$2^N [ch(J/kT)]^{N-1}$$

Список литературы

- [1] А.С. Кондратьев, В.П. Романов "Задачи по статистической физике"
- [2] Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. "Статистическая физика".
- [3] Куни Ф.М. "Статистическая физика".
- [4] Roger Bowley, Mariana Sanchez "Introductory Statistical Mechanics"
- [5] Дж.Кронин, Д. Гринберг, В. Телегди "Теоретическая физика. Сборник задач с решениями"
- [6] А.Н. Васильев "Классическая электродинамика. Краткий курс лекций"