

Большой канонический ансамбль

Комарова М.В., Новожилова Т.Ю.

Настоящее пособие содержит дополнительный материал к семинарским занятиям "Статистическая физика и термодинамика", проводимым для студентов IV курса физического факультета СПбГУ.

Пособие содержит задачи, которые могут использоваться преподавателями - семинаристами для иллюстрации теоретического материала физическими примерами. Материал также полезен студентам для самостоятельной, более глубокой подготовки к экзамену.

Задачи снабжены кратким описанием теоретических методов, необходимых для решения, и ответами для контроля правильности решения. Отдельные вопросы, вызывающие наибольшие затруднения у экзаменуемых по курсу студентов, подробно обсуждены.

Содержание

1 Классическая статистическая физика систем с переменным числом частиц	2
1.1 Основные особенности формализма большого канонического ансамбля . . .	2
1.2 Ответы для самоконтроля	6
2 Квантовые газы: примеры вырожденных Ферми-систем	7
2.1 Разбавленный "раствор" изотопа гелия-3	8
2.2 Электроны в металле	8
2.3 Электроны в звездах	9
2.4 Электроны в белых карликах, предел Чандрасекара	10
2.5 Кварк-глюонная плазма	12
2.6 Дополнительные задачи	13
3 Квантовые газы: примеры Бозе-газов	13
3.1 Взаимодействие света и вещества: черное излучение.	14
3.2 Спиновые волны	16
3.3 Изотопы гелия-4: связь бозе-конденсации и сверхтекучести	16

1 Классическая статистическая физика систем с переменным числом частиц

1.1 Основные особенности формализма большого канонического ансамбля

В отличие от канонического ансамбля, чтобы задать микросостояние большого канонического ансамбля (далее БКА), необходимо указать, сколько частиц N присутствует в системе, и задать состояние n всех этих частиц (например, для классических частиц, импульсы и координаты, $n \equiv \{q_i, p_i\}_{i=1}^N$, и, тем самым, энергию системы в данном микросостоянии, $E_{N,n}$).

Вероятность реализации данного микросостояния равна

$$\rho_{N,n} = \frac{1}{\Theta} \frac{1}{N!} \exp\left(\frac{\mu N - E_{N,n}}{kT}\right).$$

Здесь величина $E_{N,n}$ обозначает энергию системы в состоянии, когда в системе присутствует N частиц в состоянии n ; коэффициент пропорциональности Θ называется статсуммой БКА и определяется из условия нормировки вероятности на единицу, $\sum_{n,N} \rho_{N,n} = 1$. Множитель $1/N!$ введен, чтобы учесть неразличимость частиц в классических системах; в квантовомеханическом формализме, где эта неразличимость учитывается иным способом, его следует опускать.

Простым примером классической системы в БКА является воздух внутри открытого сосуда, находящийся в равновесии с атмосферным воздухом.

Теоретические основы формализма БКА можно найти в классической книге [1]. Отдельные задачи по этой тематике подробно разобраны в [2].

Большинство задач и вопросов, посвященных классическим системам в рамках БКА, достаточно просто позволяют получить физически значимые результаты. Проиллюстрируем это примерами.

Задача К1. Сосчитайте статсумму Θ и большой термодинамический потенциал Ω идеального одноатомного газа в большом каноническом ансамбле. Выразите ответ через одночастичную статсумму. Выразите ответ для Ω через давление и объем газа; через его среднюю энергию.

Решение:

Начнем с одночастичной статсуммы Θ_1 , в которой учитываются всевозможные состояния одной частицы идеального классического газа,

$$\Theta_1 = \int \frac{d^3p d^3q}{h^3} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) = \frac{(2\pi mkT)^{3/2} V}{h^3},$$

с помощью которой легко выразить статсумму БКА:

$$\Theta = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\Theta_1^N}{N!} \exp\frac{\mu N}{kT} = \exp(e^{\mu/kT} \Theta_1). \quad (1)$$

Как и свободная энергия в каноническом ансамбле, большой термодинамический потенциал $\Omega = -kT \ln \Theta$ содержит информацию о всей равновесной термодинамике системы,

$$d\Omega = -SdT - PdV - Nd\mu.$$

Вычисляя отсюда давление $P = -(\partial\Omega/\partial V)_{T,\mu}$, можно убедиться, что

$$\Omega = -PV = -2E/3.$$

Обратите внимание, что формула (1) справедлива для классического идеального газа, составленного из частиц с произвольными одночастичными статсуммами, в том числе для ультрарелятивистских некантовых частиц, классических осцилляторов, многоатомных газов, традиционно обсуждаемых в каноническом ансамбле.

Задача К2. Выразите через статсумму большого канонического ансамбля среднюю энергию произвольной системы.

Решение:

$$\langle E \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_n E_{N,n} \rho_{N,n} = \frac{1}{\Theta} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_n \frac{E_{N,n} e^{\beta(\mu N - E_n)}}{N!}, \quad \text{где } \beta \equiv 1/(kT). \quad (2)$$

Заметим, что числитель данного выражения отличается от статсуммы лишь дополнительным множителем $E_{N,n}$. Так как выражение для статсуммы содержит $\exp(\beta(\mu N - E_n))$, если продифференцировать его по β при фиксированном μ , легко превратить Θ в такой числитель:

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{\Theta} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \beta} \right)_{\mu/kT} = - \left(\frac{\partial \ln \Theta}{\partial \beta} \right)_{\mu/kT},$$

Иными словами, статсумма обладает производящими свойствами.

Используя разобранные примеры, решите самостоятельно следующие несколько задач.

Задача К3. Оцените вероятность того, что все молекулы воздуха покинут один кубометр пространства вокруг вашей головы.

Примечание: Искомую вероятность легко выразить через статсумму, пользуясь определением для $\rho_{N,n}$. Численное значение последней проще всего оценить, учитывая ее связь с потенциалом Ω , который, в свою очередь, пропорционален давлению и объему газа (см. задачу К1).

Задача К4. Пользуясь результатами задачи К1 и вычисляя для идеального газа давление $P(T, V, \mu)$ и среднее число частиц $N(T, V, \mu)$, убедитесь, что идеальный газ в большом каноническом ансамбле подчиняется уравнению Клапейрона - Менделеева.

Задача К5. Чему равен химический потенциал идеального газа с известной одночастичной статсуммой? Задана температура газа, концентрация и объем.

Задача К6. Чему равно значение химпотенциала для идеального одноатомного газа массы m при комнатной температуре? Проверьте размерность Вашего ответа.

Практика показывает, что корректное использование понятия "химпотенциал" вызывает затруднения у обучающихся в связи с заблуждениями, разобранными в следующей задаче.

Задача К7. Почему в ответ для химического потенциала идеального газа из задачи К6 входит постоянная Планка, ведь мы рассматриваем классическую систему? Как объяснить асимптотику $\hbar \rightarrow 0$ для химического потенциала идеального газа?

В литературе часто можно встретить утверждение о том, что химпотенциал численно равен "работе, которую необходимо затратить, чтобы добавить в систему одну частицу". Однако, если частицы газа не взаимодействуют друг с другом, добавление частицы в систему не требует усилий. Чем же объяснить, что химпотенциал идеального газа ненулевой?

Решение:

Постоянная Планка входит в выражение для Θ_1 , чтобы обеспечить верную размерность и совпадение результатов квантовой теории в пределе $\hbar \rightarrow 0$ с

классикой. Строго говоря, при этом химический потенциал идеального газа обращается в $-\infty$, однако, это никак не влияет на физический результат классической теории, а лишь сдвигает все вычисляемые энергии на одну и ту же, пусть и бесконечную, величину. Напомним, что физический смысл в классической механике имеет лишь разность энергий. Физически же корректное рассмотрение слабонеидеальных либо квантовых газов исправляет описанную ситуацию.

Определение химпотенциала как работы по вносу частицы в систему не верно, если не оговорить *способ* внесения. Действительно,

$$dE = TdS - PdV + \mu dN \quad \Rightarrow \quad \mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S,N} \approx \frac{\Delta E}{\Delta N}.$$

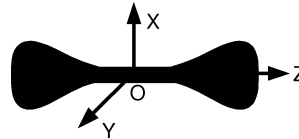
При $\Delta N = 1$ величина ΔE имеет смысл изменения энергии системы (работы по вносу частицы), но условие $S = \text{const}$ означает, что вносить частицы следует *не изменяя* энтропию системы. Вдобавок, рассмотренное равенство имеет смысл лишь в термодинамическом равновесии. Поэтому можно сказать, что химпотенциал - работа по вносу частицы в систему и ее *термостатированию*.

Внос же неподвижной частицы в максвелловский газ (способ, не требующий затрат работы) повлечет (в ходе последующего термостатирования) передачу внесенной частице энергии от других частиц, что будет сопровождаться изменением энтропии системы.

Следующая задача обычно вызывает затруднения, так как требует умения проквантовать вращение твердого тела.

Задача К8.

Вычислите в БКА статсумму идеального газа, молекулы которого состоят из двух одинаковых атомов. Считать, что момент инерции молекулы, вращающейся вокруг оси Ox и Oy , показанных на рисунке, известен и равен I ; вращение вокруг Oz обладает пренебрежимо малым моментом. Рассмотрите предел $\hbar^2/(2I) \ll kT$.



К задаче К8

Решение:.

Очевидно, основная сложность – вычислить одночастичную статсумму такого газа,

$$\Theta_1 = \frac{V(\sqrt{2\pi mkT})^3}{h^3} \cdot \sum_{K=0}^{\infty} (2K+1) \exp\left(-\frac{\hbar^2 K(K+1)}{2IkT}\right),$$

второй множитель – вращательная статсумма; энергия вращения $\hbar^2 K(K+1)/(2I)$ определяется квантовым числом K , $(2K+1)$ – вырождение по направлениям момента вращения. При $kT \gg \hbar^2/(2I) \equiv kT_{BP}$ сумму по K можно приблизить интегралом,

$$2 \int dK K \exp(-\hbar^2 K^2/(2IkT)) = T/T_{BP}.$$

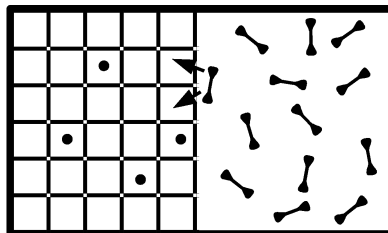
Дополнительно учтем неразличимость двух атомов в молекуле, разделив ответ для Θ_1 на два. Окончательно

$$\Theta = \exp\left(e^{\mu/kT} \frac{(\sqrt{2\pi mkT})^3}{h^3} \frac{T}{2T_{BP}} \right), \quad T_{BP} \equiv \frac{\hbar^2}{2Ik}.$$

Задача К9. Работая в рамках большого канонического ансамбля, вычислите молярную теплоемкость C_V двухатомного газа.

Примечание. Обратите внимание, что вычислять можно два разных объекта, $C_{V,\mu}$ и $C_{V,N}$. Какой из них соответствует молярной теплоемкости? В каком пределе получается известный ответ $5R/2$?

Рассмотрим теперь металлическую кристаллическую решетку, которая находится в термодинамическом равновесии с молекулярным водородом. Система теплоизолирована. Известно, что подлетая к поверхности металла, молекулярный водород оказывается в сильноградиентных электромагнитных полях, которые разрывают его. Образовавшиеся атомы водорода проникают внутрь кристаллической решетки металла, образуя в ее междоузлиях газ квантовых осцилляторов. Если атомарного водорода в металле слишком много, избыток выделяется обратно в газовую фазу с последующим превращением атомов в молекулярный водород. Этот процесс играет важную роль в металлургии, учитывается в термоядерных реакторах, при разработке современных аккумуляторов, тепловых насосов и различных преобразователей энергии.



К задаче К10

Задача К10.

Пользуясь принципом максимума энтропии в равновесных системах, свяжите значения химпотенциала водорода в металле и водорода в газовой фазе. Считайте, что атомарный водород в металле образует идеальный квантовый газ, а водород в газовой фазе – идеальный двухатомный газ. При расчетах можно пренебречь деформацией металлической кристаллической решетки, возникающей при появлении в междоузлии водорода.

Решение.

Пусть N_1 и N_2 – число молекул водорода и число атомов в металле соответственно (символ '1' помечает физические величины в газе, '2' – атомарный водород в металле). Тогда условие сохранения атомов водорода в системе имеет вид $2N_1 + N_2 = \text{const}$. По условию полная энергия системы неизменна, также как и ее объем.

Принцип максимума энтропии означает, например, равенство нулю производной

$$\left(\frac{\partial(S_1 + S_2)}{\partial N_1} \right)_{E,V} = \left(\frac{\partial S_1}{\partial N_1} \right)_{E,V} + \left(\frac{\partial S_2}{\partial N_1} \right)_{E,V},$$

причем во втором слагаемом легко перейти от производной по N_1 к производной по N_2 , ведь $N_1 = \text{const} - N_2/2$

Теперь воспользуемся тождеством $dE = TdS - PdV + \mu dN$, откуда

$$(\partial S / \partial N)_{E,V} = \mu / T;$$

затем учтем равенство температур T_1 и T_2 в равновесном состоянии. В результате $\mu_1 = 2\mu_2$. Иными словами, с точностью до множителя "2", отражающего разницу в атомарной структуре водорода в рассмотренных фазах, химпотенциалы систем выравниваются.

Задача К11. Найдите одночастичную статсумму атомарного водорода, растворенного в металле. Какие параметры кристаллической решетки металла входят в ответ?

Используя формализм одночастичных статсумм и пользуясь приближениями задачи К10, решите следующую задачу.

Задача К12. Найдите концентрацию водорода в металле, если металл контактирует с молекулярным водородом концентрации n при температуре T .

А вот еще один пример классической статсуммы в БКА.

Рассмотрим колебания однородной струны массы M с натяжением F , концы которой закреплены на расстоянии L друг от друга. Форму струны в момент времени t зададим функцией

$$y(x, t) = \sum_n A_n(t) \sin(n\pi x/L),$$

ось Ox направлена вдоль недеформированной струны, Oy – поперек, см. рис. Число мод колебаний, возбужденных в струне, (и, следовательно, слагаемых в сумме по n) может быть произвольным.

Энергия колеблющейся упругой струны, очевидно, имеет вид

$$E[y(x, t)] = \frac{1}{2} \int_0^L dx \left(\frac{M}{L} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right),$$

здесь первое слагаемое представляет собой кинетическую энергию, а второе – энергию упругой деформации струны.

Легко показать, что энергия колеблющейся струны в обобщенных координатах $\{A_n(t), \dot{A}_n(t)\}$ (точка символизирует производную по времени) равна в заданном состоянии:

$$E_{N,n} = \sum_n (\gamma n^2 A_n^2 + \tau \dot{A}_n^2),$$

где $\gamma = \pi^2 F / (4L)$, $\tau = M/4$. Для простоты будем рассматривать колебания струны лишь в одной плоскости, хотя результаты легко обобщаются на обычные колебания в двух плоскостях.

Задача К13.

Считая, что различные моды колебаний струны находятся друг с другом в термодинамическом равновесии, найдите статсумму системы, если температура, характеризующая термодинамическое равновесие колебательных мод, равна T .

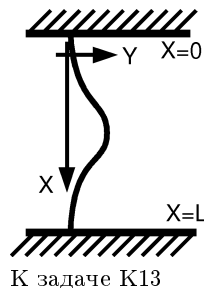
Примечание: переменные, соответствующие различным модам, не являются тождественными.

В отличие от аналогичной системы, рассматриваемой в курсе механики, здесь предполагается, что различные моды колебаний могут обмениваться энергиями.

Задача К14. Вычислите химпотенциал в предыдущей задаче, если известно, что в среднем в струне возбуждено N колебательных мод, а характерная температура, соответствующая колебаниям, равна kT .

Задача К15. В условиях задачи **К13** запишите среднее $\langle y(x, t)^2 \rangle$ в переменных $\{A_n(t), \dot{A}_n(t)\}$. Определите среднее квадрата отклонения для точки посередине струны (при $x = L/2$).

Примечание. Решая задачу, полезно вычислить среднее по ансамблю $\langle A_n A_k \rangle$



1.2 Ответы для самоконтроля

Задача К3. $\rho = 1/\Theta = e^{-P_{atm}V/(kT)}$, где $V = 1 \text{ м}^3$, P_{atm} – атмосферное давление, $T = 300 \text{ }^\circ\text{К}$.

Задача К4. Чтобы убедиться в том, что идеальный газ по-прежнему подчиняется уравнению Клапейрона-Менделеева, необходимо исключить химпотенциал μ из системы уравнений $N = N(T, V, \mu)$, $P = P(T, V, \mu)$. Проще всего это сделать, разделив одно из этих уравнений на второе.

Задача К5. Воспользуемся результатом (1), откуда легко найти среднее число частиц в системе, $N = -(\partial\Omega/\partial\mu)_{V,T}$. Теперь легко найти $\mu = kT \ln(N/\Theta_1)$.

Заметьте, что так как одночастичная статсумма обычно пропорциональна V , $\Theta_1 = Vf(T)$, химпотенциал определяется концентрацией n и температурой:

$$\mu = kT \ln(n/f(T)).$$

Задача К6. $\mu = kT \ln(nh^3(2\pi mkT)^{-3/2})$

Задача К9. Молярная теплоемкость подразумевает, что число частиц, имеющих в системе, заданно (и совпадает с числом Авогадро). Поэтому требуется вычислять $C_{V,N}$.

Воспользуемся одночастичной статсуммой, вычисленной в задаче К8, связью (1) одночастичной статсуммы с потенциалом Ω и результатом задачи К2. Требуемый ответ $5R/2$ получится, если считать, что $T \gg T_{BR}$.

Задача К11. В металле атомарный водород – трехмерный гармонический осциллятор. Его энергия $E_0 + \hbar\omega(n_x + 1/2) + \hbar\omega(n_y + 1/2) + \hbar\omega(n_z + 1/2)$. Здесь ω – угловые частоты колебаний в междоузлиях, N_0 – число ячеек, где может колебаться атом водорода, $N_0 \sim V_{металла}/V_{ячейки}$. Искомая статсумма:

$$\Theta_1^{\text{металл}} = N_0 e^{E_0/kT} \left(\frac{1}{2\text{sh}(\hbar\omega/2kT)} \right)^3.$$

Задача К12. Концентрация водорода в металле равна $\Theta_1^{\text{металл}} \sqrt{n/\Theta_1^{\text{газ}}}$, где одночастичная статсумма двухатомного газа $\Theta_1^{\text{газ}}$ и одночастичная статсумма осцилляторов в металле $\Theta_1^{\text{металл}}$ вычислены в задачах К8 и К11.

Задача К13.

$$\Theta = \sum_{N=0}^{\infty} \int \left(\prod_n dA_n d\dot{A}_n \right) \exp((\mu N - E_{N,n})/kT) = \exp(e^{\mu/kT} \pi kT (\gamma\tau)^{-1/2}).$$

Задача К14. $\mu = kT \ln(N\sqrt{\gamma\tau}/(\pi kT))$.

Задача К15.

$$\sum_{\text{нечетные } n} \langle A_n^2 \rangle = \sqrt{\frac{\pi(kT)^3}{4\gamma^3\tau^3}} \times \sum_{\text{нечетные } n} 1/n^3.$$

Сумма обратных кубов нечетных чисел, присутствующая в ответе, может быть выражена через *zeta*-функцию и равна $(7/8\zeta(3) - 1)$.

2 Квантовые газы: примеры вырожденных Ферми-систем

Основные свойства идеальных квантовых Ферми-Бозе газов обсуждаются подробно в [3, 4]. Остановимся на типичных физическим примерах, иллюстрирующих многообразие результатов БКА.

2.1 Разбавленный "раствор" изотопа гелия-3

Рассмотрим изотоп ${}^3\text{He}$ в низкотемпературном (как мы увидим позже, сверхтекучем) ${}^4\text{He}$. При этом ${}^4\text{He}$ выступает как инертный фон для фермионов ${}^3\text{He}$, ослабляющий их взаимодействие настолько, что возможно использовать приближение идеального газа.

Дисперсионное соотношение в гелии-3 имеет следующий вид:

$$\epsilon(p) = \epsilon_0 + \frac{\hbar^2 p^2}{2m_*} \left(1 - \frac{p^2}{p_0^2} + O(p^4) \right).$$

Величина m_* играет роль эффективной массы. При малых p , как видим, дисперсионное соотношение аналогично массивным Бозе-газам, поэтому результаты [4] для квантовых массивных Бозе-газов остаются справедливыми. По мере увеличения p возможно вычислять поправки к этим результатам.

Экспериментально можно менять концентрацию ${}^3\text{He}$ в ${}^4\text{He}$ и измерять теплоемкость и осмотическое давление в системе, проверяя основные результаты, предсказываемые статистической теорией для квантовых бозе газов.

2.2 Электроны в металле

Характерная концентрация электронов в металле $n \sim 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Покажем, что это вырожденная нерелятивистская Ферми - система. Используем, что масса электрона $m_e = 9.1 * 10^{-31} \text{ кг}$, $\hbar = 6.6 * 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$.

Ферми - система вырождена, если энергия Ферми ϵ_F и энергия kT – величины одного порядка. Напомним, что если справедливо неравенство $\epsilon_F \ll kT$, отличие поведения Ферми-газа от классического становится несущественным. Вырожденность же означает, что система демонстрирует низкотемпературные свойства, которые принципиально отличны от свойств классического газа.

Импульс Ферми p_F определяется интегрированием плотности состояний: число частиц на уровнях с импульсами $p_\alpha \leq p_F$ должно равняться числу частиц в системе – тогда при $T \rightarrow 0$ Ферми-частицы займут все нижние уровни энергии, и вплоть до $\epsilon_F = p_F^2/(2m)$ для числа частиц N_α на уровне α будет справедливо $N_\alpha = 1$. От суммирования по дискретным уровням энергии легко перейти к интегрированию по импульсу частицы:

$$N = \sum_{p_\alpha \leq p_F} N_\alpha = \frac{gV}{h^3} \int_{p_\alpha \leq p_F} d^3p = \frac{4\pi gV}{h^3} \int_0^{p_F} dp p^2 = \frac{4\pi gV p_F^3}{3(2\pi\hbar)^3},$$

откуда $p_F = \hbar(3\pi^2 n)^{1/3}$, здесь мы использовали $g = 2$ – коэффициент вырождения электронных уровней, $n = N/V$ – концентрация газа. Итак, импульс Ферми зависит лишь от концентрации Ферми частиц в идеальном квантовом газе.

Заметим, что вывод и ответ для p_F остается таким же и в случае безмассового (ультрарелятивистского) газа, меняется лишь связь этого импульса с энергией Ферми (дисперсионное соотношение).

Вычисляя импульс Ферми электронного газа в типичных металлах, получим $E_F = p_F^2/2m$ порядка электронвольта, что соответствует температуре $\epsilon_F/k \sim 500000 \text{ }^\circ\text{К}$. Понятно, что это гораздо больше температуры плавления металла,

поэтому электронный газ в металлах *никогда* не ведет себя подобно идеальному максвелловскому газу и всегда демонстрирует вырожденность.

Не менее легко оценить и скорость электрона $v_F = p_F/m \sim 1000$ км/сек, что, будучи, конечно, впечатляющим результатом, тем не менее много меньше скорости света. Итак, мы доказали, что электроны в металлах еще и *нерелятивистская* Ферми система.

2.3 Электроны в звездах

Типичная масса звезды $M = 3 * 10^{30}$ кг, радиус $R = 3 * 10^7$ м, температура $T = 10^7$ °К. Предполагаем, что звезда в основном состоит из диссоциированного водорода. Покажем, что это вырожденная *релятивистская* Ферми-система (но не ультрарелятивистская!).

Ферми-газ в данной модели состоит из двух компонент - тяжелых протонов и легких электронов. Концентрации компонент одинаковы, поэтому и импульс Ферми у них одинаков. Большая же масса протонов и дисперсионное соотношение $E_F = p_F^2/2m$ приводят к тому, что энергия Ферми, соответствующая электронной компоненте, гораздо больше энергии Ферми протонов.

Убедимся, что температура в характерных звездах низка по отношению к электронной энергии Ферми.

Число электронов в звезде

$$N = \frac{M}{\text{молярная масса водорода}} = 1.8 * 10^{57},$$

а концентрация $n = N/(4\pi R^3/3) \sim 1.6 * 10^{34}$. Вычисляя импульс Ферми как и в случае с электронным газом в металле, получим $p_F = \hbar(3\pi^2 n)^{1/3} \sim 8 * 10^{11}$ м⁻¹, $v_F = \hbar p_F/m \sim 10^8$ м/сек, что сравнимо со скоростью света.

Тем не менее, система не является ультрарелятивистской. Напомним, что строгая связь энергии и импульса релятивистской частицы

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} \quad (3)$$

может быть разложена в ряд в предположении, что первое слагаемое под корнем гораздо больше второго; это дает нерелятивистский предел $E = \text{Const} + p^2/(2m)$. Можно использовать и другое приближение – в предположении, что второе слагаемое под корнем гораздо больше первого, т.е. частица движется, имея такой большой импульс, что вклад энергии покоя mc^2 в дисперсионное соотношение становится несущественным. Легко увидеть, что характерные импульсы электронов в рассматриваемых звездах недостаточно велики, чтобы пользоваться ультрарелятивистским пределом.

Энергию Ферми можно найти, используя (3), не забыв, что в задаче не рассматриваются эффекты аннигиляции, т.е. за ноль энергии электрона принимается величина mc^2 : $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} - mc^2$. Впрочем, можно просто учесть первую релятивистскую поправку к классическому дисперсионному соотношению (сделайте это!). Численное значение энергии Ферми в данной задаче соответствует температуре $T \sim 3 * 10^8$ °К. Это гораздо больше характерной температуры выбранного класса звезд. Соответственно, электроны в звездах являются

вырожденным релятивистским газом, демонстрирующим свойства, характерные для низкотемпературных Ферми - газов.

Интересно, что основной вклад в давление при этом снова дает электронная составляющая квантового газа в звездах. Действительно, по размерности давление – произведение концентрации газа на некоторую характерную энергию частицы. В случае классического газа роль характерной энергии играет kT , и давление оказывается $p \sim nkT$. В случае вырожденной Ферми - системы роль характерной энергии играет ϵ_F , и давление $p \sim n\epsilon_F$ (коэффициент пропорциональности, $2/5$, выведен для массивного газа, например, в [4]). В случае же низкотемпературной Бозе - системы характерная энергия частиц стремится к нулю вместе с давлением. Итак, наибольшей характерной средней энергией, определяющей давление в звездах, обладает наилегчайшая Ферми - составляющая, электроны.

2.4 Электроны в белых карликах, предел Чандрасекара

Упрощенно говоря, белый карлик образуется, когда водород в звезде выгорает в гелий и заканчивается, после чего под действием гравитации гелий сжимается, пока в ядре не начинается ядерная реакция нового типа. При этом гелий столь локализован (сжат), что по принципу неопределенности скорости его частиц очень высоки. При таких кинетических энергиях все электроны обобществляются. Поэтому белый карлик состоит в основном из альфа - частиц и обобществленных электронов.

Обозначим массу белого карлика M , а радиус R . Предположим сначала, что электроны в белом карлике нерелятивистские.

Задача Рассмотреть условие стабильности звезды под действием гравитационного сжатия и давлением электронного Ферми - газа. Найти зависимость радиуса звезды от ее массы M . Убедиться что с ростом массы звезды ее радиус R должен убывать.

Решение:

Пусть n - концентрация электронов, N - число электронов в звезде, $V = 4\pi R^3/3$ - объем звезды, m_α - масса альфа-частицы, P - давление электронного Ферми - газа.

Характерное давление, обеспечивающееся гравитацией, легко определить по размерности, GM^2/R^4 .

Приравняем характерное давление Ферми - газа и характерное гравитационное давление звезды, используя связь давления Ферми - газа и энергии Ферми:

$$P = 2n\epsilon_F/5 = GM^2/R^4.$$

Определим концентрацию электронов

$$n = N/V, \quad N = 2M/m_\alpha, \quad \Rightarrow \quad n = \frac{3M}{2m_\alpha\pi R^3},$$

где мы учли, что каждый атом гелия порождает 2 электрона.

Для оценки энергии Ферми снова найдем импульс Ферми

$$p_F = \hbar(3\pi^2n)^{1/3}, \quad \epsilon_F = p_F^2/2m.$$

Окончательно баланс давлений в звезде можно переписать в виде $M^{1/3}R = \text{const}$, т.е. радиус звезды действительно должен убывать с ростом ее массы по степенному закону.

Будем теперь рассматривать все более тяжелые белые карлики. Так как их радиус будет все меньше и меньше, наступит момент, когда электронная плотность вырастет настолько, что электроны станут релятивистскими (благодаря принципу неопределенности), а затем и ультрарелятивистскими с дисперсией $\epsilon = cp$.

Задача

Рассмотреть условие стабильности очень тяжелого белого карлика. Когда такое равновесие возможно?

Решение

данной задачи полностью аналогично предыдущей. Обратите внимание, что давление ультрарелятивистского Ферми-газа по-прежнему определяется концентрацией газа и его энергией Ферми, $P \sim n\epsilon_F$ (найдите коэффициент пропорциональности, $1/4$). По-прежнему вычисляется и импульс Ферми, лишь связь ϵ_F и p_F становится линейной.

Подстановка в $P = n\epsilon_F/4 = GM^2/R^4$ концентрации электронов и энергии Ферми $\epsilon_F = cp_F$ дает

$$\frac{(3\pi^2)^{1/3}\hbar c}{4}n^{4/3} = \frac{GM^2}{R^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{GM^2}{R^4} = \frac{(3\pi^2)^{1/3}\hbar c}{4} \left(\frac{3M}{2m_\alpha\pi R^3} \right)^{4/3}.$$

Упрощая, получаем, что

$$\frac{GM^2}{R^4} = \frac{(3\pi^2)^{1/3}\hbar c}{4} \left(\frac{3}{2m_\alpha\pi R^3} \right)^{4/3} \frac{M^{4/3}}{R^4},$$

отсюда

$$M^{2/3} = \frac{(3\pi^2)^{1/3}\hbar c}{4G} \left(\frac{3}{2m_\alpha\pi R^3} \right)^{4/3}.$$

Иными словами, равновесие звезды, в которой электроны стали ультрарелятивистскими, возможно только при некой фиксированной массе.

Эта величина называется *масса Чандрасекара*; если звезда имеет массу меньше M_0 гравитационное сжатие уравновешивается давлением Ферми за счет решения, рассмотренного в предыдущей задаче, т.е за счет отличия поведения газа от безмассового, ведь к ультрарелятивистскому приближению реального газа имеются поправки. Если же масса звезды больше массы Чандрасекара, звезда будет необратимо сжиматься, пока электроны не среагируют с протонами (бета-распад наоборот) с образованием нейтронной звезды.

Итак, исследования электронного Ферми газа показывают, что белый карлик может образоваться только из звезды, масса которой не превышает предел Чандрасекара, из более же массивных звезд образуются нейтронные звезды. Это теоретическое предсказание блестяще подтвердилось и является хорошим примером простоты и мощи формализма квантовых газов.

Анализ стабильности нейтронных звезд аналогичен, ведь нейтроны также являются Ферми-частицами. При малых плотностях нейтронов и нерелятивистском дисперсионном соотношении можно предположить, что радиус звезды убывает с ростом ее массы $M^{1/3}R = const$. Однако, анализ тяжелых нейтронных звезд с релятивистскими нейтронами затрудняется не только неидеальностью нейтронного газа, но и необходимостью применять ОТО. Соответствующие эффекты изучаются в теории черных дыр.

2.5 Кварк-глюонная плазма

Еще один интересный пример – квантовые газы, состоящие их кварков, которые, как известно, также являются Ферми-частицами.

При нагреве ядерной материи, состоящей преимущественно из барионов, при характерных температурах порядка $T_c \sim 150$ МэВ она превращается в адронный газ. Напомним, барионы представляют собой Ферми – частицы и состоят из 3х кварков, адронный газ же газ в основном состоит из мезонов, которые являются бозе-частицами и состоят из 2х кварков.

Однако, дальнейшее нагревание вещества приводит к образованию так называемой кварк - глюонной плазмы. Плотность барионов в атомных ядрах $\rho_0 = 0.15$ барион/ферми³ (напомним, ферми – единица измерения, соответствующая 10^{-15} метра), для образования же кварк-глюонной плазмы требуется в 5-10 раз большая плотность вещества. При очень высоких сжатиях частицы вещества оказываются так сильно сближены, что кварки, которые первоначально входили в состав различных частиц, сильно сближаются; вся система при этом образует гигантский адрон или, как говорят, кварковый мешок. При этом константа, характеризующая сильное взаимодействие кварков, становится мала, так как она пропорциональна $1/\ln(q)$, где $q \sim kT/c$ – характерный передаваемый в актах взаимодействия импульс, величина которого оказывается большой. Этот спад константы взаимодействия, т.н. асимптотическая свобода сближенных кварков, приводит к тому, что взаимодействие кварков друг с другом на малых расстояниях оказывается слабым, что позволяет, в некотором смысле, рассматривать кварк-глюонную плазму как Ферми - газ.

Кварк-глюонная плазма образуется при плотностях вещества, реализовавшихся примерно на 10^{-5} сек. жизни Вселенной при температурах $T \sim 10^{12}$ °К.

Таким образом, можно рассматривать кварковую составляющую кварк-глюонной плазмы как ультрарелятивистский вырожденный Ферми - газ. Проверьте вырожденность этой системы, основываясь на приведенных выше данных. Учтите, что коэффициент вырождения кварков $2 \cdot 3 \cdot 2$; множитель '2' показывает число типов кварков (как и в предыдущих примерах следует рассматривать только легкие, u-, d-кварки, т.е. вклад наилегчайшей Ферми - компоненты, имеющей наибольшую энергию Ферми), множитель '3' – число ароматов кварков, множитель '2' – вырождение, связанное с ориентацией спинов Ферми - частиц.

Бозонная составляющая этой системы – глюоны – аналогично другим вырожденным системам дает малый вклад в давление системы. У глюонов (бозонов) коэффициент вырождения оказывается равным $8 \cdot 2$, что соответствует восьми типам глюонов и двум независимым ориентациям их спинов.

2.6 Дополнительные задачи

В заключение этого раздела предлагаем Вам решить самостоятельно несколько задач, связанных с особенностями поведения Ферми-систем.

Задача F1

Движение адсорбированных на поверхность электронов в некоторых случаях удается описать, считая, что они образуют идеальный двумерный нерелятивистский Ферми-газ. Вычислите среднюю энергию в расчете на единицу поверхности при $T = 0$. Концентрация электронов \varkappa на поверхности известна. Что является аналогом давления в таких системах?

Задача F2

Вычислите адиабатический модуль всестороннего сжатия Ферми - газа:

$$B = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S$$

при $T = 0$. Вычислите модули, соответствующие электронной плотности калия цезия и меди (см. таблицу)

Металл	Плотность, м^{-3}	E_F эВ	B , Паскаль
Калий	$1.3 * 10^{28}$	0.9	$2.81 * 10^9$
Цезий	$0.9 * 10^{28}$	0.7	$1.43 * 10^9$
Медь	$8.5 * 10^{28}$	7	$134.3 * 10^9$

Почему вычисленные B сильно отличаются от экспериментальных значений адиабатических модулей всестороннего сжатия металлов (см. последнюю колонку таблицы)?

Задача F3

На ранних этапах существования вселенной можно с хорошей точностью считать частицы ультрарелятивистскими и пренебречь их химпотенциалом по сравнению с kT . Считая известной температуру системы, найдите плотность числа невзаимодействующих фермионов, а также плотность энергии в описанной ситуации.

Ответы для самоконтроля

F1: $\langle E \rangle = \varkappa \epsilon_F / 2$, где $\epsilon_F = \pi \hbar^2 / m$.

F2: $B = 2n\epsilon_F / 3$. Отличаются, т. к. учли вклад только электронов и не учли вклад кристаллической решетки.

F3:

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\hbar cp/kT} + 1} = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x + 1}.$$

$$\frac{E}{V} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\hbar cp^3 dp}{e^{\hbar cp/kT} + 1} = \frac{kT}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x + 1}.$$

3 Квантовые газы: примеры Бозе-газов

Основы теории квантовых Бозе - газов подробно разобраны в [1], наиболее типичные, массивные Бозе - газы подробно рассмотрены в [4].

В этом разделе мы рассмотрим несколько физических систем, образующихся из частиц с различными дисперсионными соотношениями, и научимся применять к ним методы, характерные для БКА.

Прежде чем приступить к решению задач, обсудим важный вопрос: почему при обсуждении безмассовых Бозе - газов, например, фотонов или фононов, химический потенциал системы всегда полагают равным нулю.

Физическое значение химпотенциала, также температура и давление в системе, определяется граничными условиями, наложенными на систему, иными словами – стенками. Химпотенциал безмассовых Бозе - газов равен нулю именно потому, что практически всегда именно таковы границы.

Действительно, рассмотрим равновесное фотонное (черное) излучение в полости объема V . Стенки полости состоят из атомов, которые, в ходе своего колебательного движения с характерной температурой T , могут поглотить фотон из полости или испустить фотон обратно. Процесс испускания низкоэнергетических фотонов (с малым импульсом p) требует, соответственно, малых энергетических затрат, pc . Соответственно, количество таких фотонов при $p \rightarrow 0$ становится в полости очень большим. С другой стороны, как это подробно обсуждается, например в [1], рост числа Бозе - частиц в полости вызывает рост химпотенциала системы. Значения химпотенциала Бозе - газа ограничено сверху точкой фазового перехода в Бозе - сконденсированное состояние. Для идеальных Бозе - газов эта граница имеет место при $\mu = 0$. Соответственно, в результате практически беспрепятственного излучения низкоэнергетических фотонов стенками, химпотенциал вынужденно достигает максимально возможного значения $\mu = 0$, а состояние фотонного газа в полости соответствует точке Бозе - конденсации фотонного Бозе - газа.

Тем не менее, принципиально возможны и системы с иными граничными условиями.

Проиллюстрируем теперь теорию квантовых Бозе-газова простыми физическими примерами.

3.1 Взаимодействие света и вещества: черное излучение.

Задача:

Считая Вселенную полостью радиуса $R = 10^{26}$ м с температурой 2.7 °К (что примерно соответствует современной температуре реликтового излучения), оцените число фотонов реликтового излучения во Вселенной и энергию, соответствующую этим фотонам.

Решение:

В рамках данной задачи фотонный газ реликтового излучения находится в термодинамическом равновесии с веществом во Вселенной. Это приводит к обсужденному выше равенству нулю химпотенциала.

Число частиц в системе проще всего найти, просуммировав количества частиц на каждом уровне энергии; напомним, что последние задаются распределением Бозе - Эйнштейна. От суммирования по дискретным уровням энергии легко перейти к интегрированию по импульсу (аналогично тому, как это было сделано при вычислении энергии Ферми

в задаче об электронах в металле):

$$N = \sum_{\alpha} N_{\alpha} = \frac{gV}{h^3} \int d^3p N_{\alpha} = \frac{V}{h^3 \pi^2} \int_0^{\infty} \frac{p^2 dp}{\exp(cp/kT) - 1},$$

в последнем равенстве мы перешли к сферическим координатам в импульсном пространстве. Обезразмеривая подынтегральное выражение, получим

$$N = \frac{4R^3}{3\pi} \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\exp(x) - 1}.$$

Интеграл по x можно либо свести к обобщенной ζ - функции Римана, аналогично тому, как это делается при рассмотрении массивных Бозе - газов в [4] (что приводит к ответу $\Gamma(3)\zeta_3(1)$), либо оценить эти выражения численно, разложив знаменатель под интегралом в ряд с учетом $\exp(x) \geq 1$ и последующим почленным интегрированием ряда (что приводит к эквивалентной форме записи интеграла $2(1 + 1/2^3 + 1/3^3 + \dots) \approx 2.45$).

Таким образом, полное число фотонов во Вселенной порядка $N = 2.3 \cdot 10^{87}$.

Аналогично вычисляется и энергия фотонов:

$$U = \frac{V}{\pi^2 h^3} \int_0^{\infty} \frac{cp^3 dp}{\exp(cp/kT) - 1} = \frac{4R^3 kT}{3\pi} \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1}$$

Интеграл по x также либо сводится к табулированной ζ функции, а именно к $\Gamma(4)\zeta_4(1)$, либо преобразуется к числовому ряду $6(1 + 1/2^4 + 1/3^4 + \dots)$. Поэтому суммарная энергия реликтового излучения $2.6 \cdot 10^{65}$ Дж.

Задача:

Вселенная полна черного излучения при температуре 2.7 °К. Предположим, радиус вселенной меняется линейно $R = Ht$ (H – постоянная Хаббла), t - возраст вселенной. Предположим, полная энергия излучения во вселенной постоянна. Вычислите, как энтропия излучения меняется со временем.

Решение:

Воспользуемся результатом предыдущей задачи, $U \sim VT^4/(hc)^3$. Постоянство полной энергии означает $VT^4 = \text{Const}$.

Величина Ω по размерности такая же как U , значит $\Omega \sim VT^4/(hc)^3$ (убедитесь в этом прямым расчетом Ω на основании ее определения в БКА!). Отсюда энтропия $S \sim VT^3 \sim \text{Const}/T \sim t^{3/4}$.

С появлением так называемых "атомных лазеров" Бозе - сконденсированной системе иногда ставят в аналогию состояние индуцированного излучения фотонов в резонаторах лазера. Напомним, что за счет подвода энергии в систему

атомы возбуждаются, после чего излучают когерентные фотоны. При этом в резонаторах лазеров формируется стоячая волна, представляющая собой совокупность фотонов в одинаковом состоянии, подобно тому, как в Бозе - конденсате все Бозе - частицы занимают одни и те же энергетические уровни.

С увеличением энергии волны растет и вероятность излучения фотонов именно в когерентное состояние, соответствующее данной волне. В идеальном резонаторе это сопровождается ростом фотонов. Заметим, что фотоны в резонаторах лазера демонстрируют как сходство, так и различие с Бозе-сконденсированными системами.

3.2 Спиновые волны

Задача:

Для спиновых волн дисперсионное соотношение может иметь вид $\omega = \alpha k^2$, здесь ω - частота, k - волновое число. Найти, как в трехмерных системах возбужденных спиновых волн внутренняя энергия зависит от температуры?

Решение:

Рассмотрим квазичастицы с импульсом $p = \hbar k$ и энергией $\epsilon = \hbar\omega = \alpha p^2/\hbar$, соответствующие описанным волнам.

Подчиняясь статистике Бозе и имея дисперсионное соотношение параболического типа, такие квазичастицы образуют квантовый газ, свойства которого аналогичны обычному массивному Бозе - газу, подробно разобранным в [1] и [4].

Однако, в отличие от обычных массивных Бозе - газов, в данной системе следует положить химпотенциал равным нулю. Действительно, в полной аналогии с рассмотренным в начале раздела фотонным газом, в состоянии термодинамического равновесия с веществом, излучающим спиновые волны, число квазичастиц с малым импульсом будет увеличиваться вплоть до наступления Бозе - конденсации.

При этом внутренняя энергия

$$U = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \frac{(\alpha p^4/\hbar) dp}{\exp(\alpha p^2/\hbar kT) - 1} = \frac{\hbar\alpha V}{2\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar\alpha}\right)^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{\exp(x^2) - 1}.$$

3.3 Изотопы гелия-4: связь бозе-конденсации и сверхтекучести

Элементарные возбуждения в сверхтекучем жидком гелии можно рассматривать как квазичастицы со сложным дисперсионным соотношением, представленном на рисунке. Для малых импульсов (меньше $\hbar \cdot 0.8 \cdot 10^{10}$) дисперсионное соотношение практически линейно: $\epsilon(p) = sp$, соответствующие квазичастицы называются фононами; для импульсов порядка $p \simeq p_0 = \hbar \cdot 2 \cdot 10^{10}$ дисперсионное соотношение имеет вид

$$\epsilon(k) = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2M_*},$$

это параболическая яма, дно которой соответствует основному состоянию квази-частиц, называемых ротонами. Ротонная энергия Δ соответствует 8.65 °К, M_* – эффективная масса ротона.

Подобное дисперсионное соотношение можно получить экспериментально, изучая рассеяние нейтронов в жидком гелии; возможно также рассчитать его теоретически, используя методы квантовой теории поля.

Задача: Свободная энергия газа возбуждений в гелии имеет фононную (продольный звук) и ротонную составляющие. Найдите эти составляющие.

Решение.

Для свободной энергии справедливо:

$$F = \frac{kTV}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty dp p^2 \ln \left(1 - \exp \left[-\frac{\epsilon(p)}{kT} \right] \right),$$

химпотенциал системы снова тождественно равен нулю благодаря специфике физических граничных условий.

Интеграл по p разделим на интервал малых p и интеграл в окрестности ротонного минимума p_0 . Первый дает

$$\begin{aligned} F_{phonon} &= \frac{kTV}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^{p_{max}} dp p^2 \ln \left(1 - \exp \left[-\frac{sp}{kT} \right] \right) = \\ &= \frac{kTV}{2\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar s} \right)^3 \int_0^\infty dx x^2 \ln \left(1 - e^{-x} \right), \end{aligned}$$

второй приводит к

$$F_{roton} = \frac{kTV}{2\pi^2\hbar^3} \int_{-\infty}^\infty dz (p_0 + z)^2 \ln \left(1 - \exp \left[-\frac{\Delta}{kT} - \frac{z^2}{2M_*kT} \right] \right).$$

При низких температурах раскладываем $\ln(1 - \dots)$ в ряд, что немедленно приводит к ответу:

$$\begin{aligned} F_{phonon} &= -\frac{\pi^2 k^4 T^4 V}{90 \hbar^3 s^3}, \\ F_{roton} &= -\frac{(kT)^{3/2} V p_0^2}{2^{1/2} \pi^{3/2} M_*^{1/2} \hbar^3} \exp \left[-\frac{\Delta}{kT} \right]. \end{aligned}$$

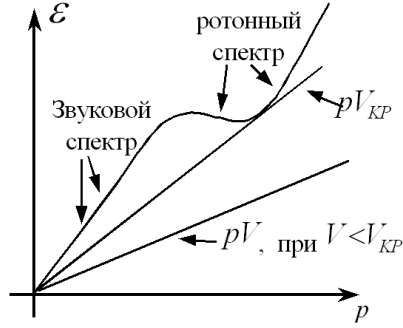
Изучим свойства дисперсионного соотношения, представленного в предыдущей задаче.

Рассмотрим течение гелия массы M по трубе со скоростью V . Пусть для простоты температура гелия сначала равна нулю.

Предположим, что в результате трения о стенки скорость гелия изменилась на u . Для этого, очевидно, стенки должны передать жидкости импульс $p = Mu$ и энергию $\Delta E = MVu = pV$. При этом в жидкости должна возбудиться квази-частица с импульсом p и энергией $\epsilon(p)$.

В этих процессах должны выполняться законы сохранения энергии и импульса. Однако, если $\epsilon(p)$ имеет вид зависимости, который обсуждался в задаче про фононы и ротоны, это может оказаться невозможным.

Действительно, неравенство $\epsilon(p) < \Delta E$ – условие энергетической выгодности возбуждения квазичастицы. Если же наклонная прямая $\Delta E(p) = pV$ лежит всегда ниже графика $\epsilon(p)$ (отсутствуют точки пересечения, см. рис.), при любом заданном p мы не сможем возбудить квазичастицы не нарушив законы сохранения энергии или импульса. Заметим, что свойство пропадает, если коэффициент наклона прямой $\Delta E(p) = pV$, численно равный V достигает значения, когда графики $\Delta E(p)$ и $\epsilon(p)$ начинают пересекаться.



Физически описанная ситуация соответствует проявлению сверхтекучести – исчезновению вязкого трения при тчении жидкого гелия со скоростью, не превосходящей некоторой V_{KP} . Обсужденное свойство сверхтекучести отражает коллективистский характер движения частиц жидкого гелия – трению приходится затормозить коллективное движение идентичных бозонов, и для этого нужно много энергии. Единственный источник такой энергии – энергия кинетическая, поэтому с ее ростом сверхтекучесть пропадает.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $T \neq 0$, хотя и является низкой. Мы по-прежнему не можем возбудить квазичастицы в гелии, но они уже есть в системе, и фононы и ротоны. Концентрация их определяется бозе-распределением (в случае ротонов оно, как мы видели, превращается в бальцмановское).

Если газ квазичастиц движется как единое целое со скоростью V , энергия квазичастицы равна $\epsilon(p)$ в системе отсчета центра масс. В движущейся с-ме энергия становится равной

$$\epsilon(p - mV) = \epsilon(p) - (\partial_p \epsilon) mV + \dots, \quad (\partial_p \epsilon) = p/V,$$

так что энергия одной частицы будет $\epsilon - p\vec{V}$. Импульс такого движущегося газа равен

$$\vec{P} = \frac{gV}{h^3} \int d^3 p \vec{p} n(\epsilon - p\vec{V}).$$

Разлагая n в ряд в окрестности ϵ , получим, что главный порядок разложения сокращается из значковой симметрии, а следующий равен

$$\vec{P} = -\frac{gV}{h^3} \int d^3 p \vec{p} (\vec{p} \cdot \vec{V}) \frac{\partial n}{\partial \epsilon}.$$

С учетом того, что $n(\epsilon)$ – убывающая функция, получаем, что $\vec{P} = \bar{M}\vec{V}$, где $\bar{M} > 0$ – масса, которую переносит описанный бозе-газ.

Получившаяся масса – несверхтекучая компонента жидкости; она исчезает при $T = 0$, величина ее легко считается с учетом явного вида спектра квазичастиц. При этом в несверхтекучую компоненту дают вклад как фононы так и ротоны.

Задача: Посчитать фононную и ротонную составляющие несверхтекучей плотности.

Ответ:

$$\rho_{ph} = \frac{2\pi^2(kT)^4}{45s^2\hbar^3} \quad \rho_{rot} = \frac{2\sqrt{M_*}p_0^4}{3(2\pi)^{3/2}(kT)^{1/2}\hbar^3} \exp(-\Delta/kT).$$

Все остальное в жидком гелии-4, т.е. плотность $\rho - \rho_{ph} - \rho_{rot}$, представляет собой сверхтекучую компоненту.

Задача

Рассмотрим идеальный бозе газ из N атомов массы m и нулевым спином. Движение частиц ограничено двумерной поверхностью площадью A .

а) Напишите выражение для $\mu(N, A, T)$.

б) Покажите, что интеграл для μ расходится при $\mu \rightarrow 0-$. Всегда ли существует отрицательное μ , удовлетворяющее этому уравнению?

в) Есть ли Бозе - конденсация в двухмерном случае?

Ответ: $\mu = kT \ln(1 - \exp(-\pi\hbar N/AmkT))$.

Список литературы

- [1] Куни Ф.М. "Статистическая физика".
- [2] А.С. Кондратьев, В.П. Романов "Задачи по статистической физике"
- [3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц Статистическая физика, М. 1976
- [4] М.Ю. Налимов, Т.Ю. Новожилова "Квантовые газы"
- [5] Roger Bowley, Mariana Sanchez "Introductory Statistical Mechanics"
- [6] А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский "Методы квантовой теории поля в статистической физике"