

Квантовые газы

Налимов М.Ю., Новожилова Т.Ю.

Настоящее пособие содержит материал 10 семинарских занятий по курсу "статистическая физика", проводимых для студентов IV курса физического факультета СПбГУ. Эти занятия объединены тем, что на них всесторонне рассматривается статистическое описание квантовых идеальных газов.

Пособие позволяет студентам контролировать понимание материала, изучаемого в курсе лекций "Статистическая физика".

Содержание

Введение	2
1 Термодинамический потенциал Гиббса идеального одноатомного ферми - бозе газа	2
2 Спецфункции Ферми - Дирака и обобщенная ζ - функция Римана	3
3 Классический предел в задаче квантового идеального газа	5
4 Низкотемпературное поведение ферми - газов	6
5 Бозе - газ при низких температурах. Явление бозе - конденсации	8
6 Заключение	10

Введение

Данное пособие посвящено выводу основных термодинамических соотношений для квантовых идеальных ферми - бозе газов, а также рассмотрению различных предельных ситуаций для этих систем. Обсуждается классический предел для квантовых газов, устанавливаются квантовые поправки к классическому описанию идеального газа. Кроме того рассматривается существенно квантовая область низких температур (высоких плотностей), обсуждается низкотемпературное поведение ферми-газов и идеально-газовое указание на процесс бозе - конденсации.

1 Термодинамический потенциал Гиббса идеального одноатомного ферми - бозе газа

Для простоты сперва рассмотрим модельный ферми - бозе газ в одноуровневой системе, т. е. в системе с единственным собственным значением одночастичного гамильтониана ε_α . Для описания квантовых газов более удобным является большой канонический ансамбль. В этом случае статистическая сумма идеального ферми - газа имеет вид

$$\Sigma_\alpha = 1 + e^{-(\varepsilon_\alpha - \mu)/(kT)}, \quad (1)$$

где k - постоянная Больцмана, T - температура, μ - химический потенциал. Учтено, что в ферми - газе на рассматриваемом уровне находится либо одна частица, либо ни одной.

В бозе - газе на фиксированном энергетическом уровне может находиться произвольное число частиц N , поэтому статсумма идеального бозе - газа для рассматриваемой модельной системы определяется в большом каноническом ансамбле соотношением

$$\Sigma_\alpha = \sum_{N=0}^{\infty} e^{-N(\varepsilon_\alpha - \mu)/(kT)} = \frac{1}{1 - e^{-(\varepsilon_\alpha - \mu)/(kT)}}, \quad (2)$$

при получении второго равенства была использована формула суммы геометрической прогрессии.

Большой термодинамический потенциал Гиббса $\Omega_\alpha = -kT \ln \Sigma_\alpha$ для рассматриваемых систем (1,2) может быть записан единой формулой

$$\Omega_\alpha = \mp kT \ln(1 \pm e^{-(\varepsilon_\alpha - \mu)/(kT)}),$$

где верхние знаки соответствуют случаю ферми - газа, а нижние - случаю бозе - газа. Среднее число частиц на уровне α (заселенность уровня) определяется соотношением

$$\langle N_\alpha \rangle = - \left(\frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial \mu} \right)_T = \frac{1}{e^{(\varepsilon_\alpha - \mu)/(kT)} \pm 1}. \quad (3)$$

Для многоуровневой системы естественным является использование чисел заполнения n_α в качестве квантовых чисел. При этом сумму по N в (2) следует заменить на суммирование

по всему набору $\{n_i\}$, т. е. на $\sum_{n_0} \sum_{n_1} \dots$, что приводит к статсумме вида $\Sigma = \prod_{\alpha} \Sigma_{\alpha}$, и, следовательно,

$$\Omega = \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} = \mp kT \sum_{\alpha} \ln(1 \pm e^{-(\varepsilon_{\alpha} - \mu)/(kT)}). \quad (4)$$

Рассмотрим теперь реальный массивный одноатомный идеальный ферми - бозе газ с одночастичным гамильтонианом $\varepsilon_p = \mathbf{p}^2/(2m)$ (\mathbf{p} - импульс частицы) в объеме V . Состояния частицы определяются ее импульсом \mathbf{p} и проекцией спина s_z , которые играют роль параметра α в данном случае. В отсутствие внешнего магнитного поля имеет место вырождение по спину. Сумма по реализациям s_z может быть заменена множителем $g = 2s + 1$.

В случае, когда число уровней энергии велико, удобно перейти от суммирования по α к интегрированию по энергии частицы. Для этого нужно ввести спектральную плотность состояний $\varrho(\varepsilon) = \sum_{\alpha} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\alpha})$, после чего для произвольной функции f справедливо

$$\sum_{\alpha} f(\varepsilon_{\alpha}) = \int d\varepsilon \varrho(\varepsilon) f(\varepsilon).$$

Сосчитаем плотность состояний для идеального ферми - бозе газа. Для непрерывного спектра справедливо соотношение

$$\sum_{\alpha} \dots = g \sum_{p_x, p_y, p_z} \dots = \frac{gV}{h^3} \int d\mathbf{p} \dots$$

Тогда

$$\varrho(\varepsilon) = \frac{2^{5/2} \pi V m^{3/2} \varepsilon^{1/2} g}{h}, \quad g = 2s + 1$$

(интеграл легко вычисляется после перехода к сферическим координатам). И в результате имеем для термодинамического потенциала ферми - бозе газа:

$$\Omega = \mp kT \int d\varepsilon \varrho(\varepsilon) \ln(1 \pm e^{(\mu - \varepsilon)/(kT)}),$$

напомним, что верхний знак соответствует случаю ферми - газа, а нижний - случаю бозе - газа. Интегрирование по частям позволяет переписать термодинамический потенциал в виде

$$\Omega = -AV \int \frac{d\varepsilon \varepsilon^{3/2}}{e^{(\varepsilon - \mu)/(kT)} \pm 1}, \quad A = \frac{2^{7/2} \pi m^{3/2} g}{3h^3}. \quad (5)$$

Заметим, что под знаком $\int d\varepsilon$ явно выделилось среднее число частиц на уровне ε (см. ф-лу (3)).

2 Спецфункции Ферми - Дирака и обобщенная ζ - функция Римана

Интеграл в (5) не вычисляется аналитически, а сводится к некоторым спецфункциям.

Для описания ферми - газов введем функцию Ферми - Дирака:

$$F_k(\eta) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_0^\infty \frac{dx x^k}{e^{x-\eta} + 1}.$$

Интегрируя по частям с очевидно нулевыми внеинтегральными членами, несложно доказать следующее свойство:

$$\partial_\eta F_k(\eta) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_0^\infty dx x^k \partial_\eta \frac{1}{e^{x-\eta} + 1} = -\frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_0^\infty dx x^k \partial_x \frac{1}{e^{x-\eta} + 1} = F_{k-1}(\eta). \quad (6)$$

Для описания бозе - газов понадобится обобщенная ζ - функция Римана:

$$\zeta_k(a) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n^k}, \quad (7)$$

обладающая свойством, аналогичным (6):

$$a \partial_a \zeta_k(a) = \zeta_{k-1}(a). \quad (8)$$

Интеграл по ε в (5) легко выразить через ζ - функция Римана:

$$\int_0^\infty \frac{dx x^{k-1}}{e^{x/a} - 1} = \int_0^\infty dx x^{k-1} e^{-x} \left(\sum_{n=1}^\infty a^n e^{-(n-1)x} \right) = \Gamma(k) \zeta_k(a), \quad a = \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right). \quad (9)$$

Интеграл в левой части (9) сходится лишь при $a \leq 1$ (при этом $a = 1$ - радиус сходимости ряда (7)), что сводится к требованию $\mu \leq 0$ для идеального бозе - газа. Это требование называется условием устойчивости, физически оно соответствует положительности заселенностей уровней. Действительно, в приближении непрерывного спектра для ϵ_α величина $\epsilon/(kT)$ в знаменателе выражения (3) может быть сколь угодно мала, и указанный знаменатель положителен при $0 \leq a \leq 1$.

Введем функцию

$$\mathcal{G}_k(\mu/(kT)) \equiv \begin{cases} F_k\left(\frac{\mu}{kT}\right) & \text{для ферми - газа} \\ \zeta_{k+1}(e^{\mu/(kT)}) & \text{для бозе - газа} \end{cases}$$

Свойства (6,8) в совокупности с тождествами $\partial_\mu = \frac{1}{kT} a \partial_a$, $\partial_T = -\frac{\mu}{kT^2} a \partial_a$ позволяют компактно записывать термодинамические характеристики ферми - бозе газов. Термодинамический потенциал может быть записан в виде

$$\Omega = -\bar{A} V (kT)^{5/2} \mathcal{G}_{3/2}(\mu/(kT)), \quad \bar{A} = A \Gamma(5/2).$$

Теперь несложно получить два уравнения состояния

$$N = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T,V} = \bar{A} V (kT)^{3/2} \mathcal{G}_{1/2}(\mu/(kT)), \quad (10)$$

$$p = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{T, \mu} = \bar{A}(kT)^{5/2} \mathcal{G}_{3/2}(\mu/(kT)), \quad (11)$$

и выражение для энтропии

$$S(T, V, \mu) = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V, \mu} = \bar{A} V k^{5/2} \left\{ \frac{5}{2} T^{3/2} \mathcal{G}_{3/2}(\mu/(kT)) - \frac{\mu}{k} T^{1/2} \mathcal{G}_{1/2}(\mu/(kT)) \right\}. \quad (12)$$

Для теплоемкости можно написать

$$C_{V,N} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V, \mu} + T \left(\frac{\partial S}{\partial \mu} \right)_{V, T} \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{V, N}.$$

Чтобы определить $(\partial \mu / \partial T)_{V, N}$, заметим, что производная ∂_T от первого уравнения состояния (10) при фиксированных V и N обращается в ноль. Отсюда

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{V, N} = \frac{\mu}{T} - \frac{3}{2} k \frac{\mathcal{G}_{1/2}(\mu/(kT))}{\mathcal{G}_{-1/2}(\mu/(kT))}. \quad (13)$$

Учитывая (13), можно написать

$$C_{V,N} = \bar{A} V k^{5/2} T^{3/2} \left\{ \frac{15}{4} \mathcal{G}_{3/2}(\mu/(kT)) - \frac{9}{4} \frac{\mathcal{G}_{1/2}^2(\mu/(kT))}{\mathcal{G}_{-1/2}(\mu/(kT))} \right\}. \quad (14)$$

Конкретные термодинамические характеристики квантовых газов (10, 11, 12, 14), выраженные через спецфункции, могут быть вычислены численно при конкретных значениях T , N , V . Тем самым задача описания термодинамики идеальных ферми-бозе газов может быть признана решенной. Однако чистенное моделирование оставляет открытым вопрос об асимптотическом поведении исследуемых величин в предельных значениях переменных, которые и будет обсуждены ниже.

3 Классический предел в задаче квантового идеального газа

Пользуясь выражениями (10,11,12,14) можно оценить квантовые поправки к уравнению состояния и теплоемкости. Как известно, интересующий нас классический предел формально достигается при $\hbar \rightarrow 0$ (т.е. $A \rightarrow \infty$), а физически - при высоких температурах или малой плотности газа. Однако все эти величины (\hbar , T , плотность $n = N/V$) являются размерными; чтобы судить об их величине их необходимо как-то обезразмерить. Чтобы определить безразмерный параметр, ответственный за возможность применения классического описания, рассмотрим первое из уравнений состояния (10) в виде

$$\mathcal{G}_{1/2}(\mu/(kT)) = \frac{n}{\bar{A}(kT)^{3/2}}. \quad (15)$$

В левой части уравнения стоит функция безразмерного аргумента $\mu/(kT)$, следовательно безразмерна и правая часть. В интересующем нас пределе правая часть (15) стремится к нулю. Отметим, что функция $\mathcal{G}_{1/2}(\mu/(kT))$ представляет из себя интеграл от положительной функции (напомним, $a \in [0..1]$), поэтому единственным решением, соответствующим поведению $\mathcal{G}_{1/2}(\mu/(kT)) \rightarrow 0$ является $a = e^{\mu/(kT)} \rightarrow 0$, $\mu/(kT) \rightarrow -\infty$. Чтобы получить асимптотику введенных спецфункций при $\mu/(kT) \rightarrow -\infty$ перепишем исследуемый интеграл в виде

$$\mathcal{G}_{k-1}(\mu/(kT)) = \frac{a}{\Gamma(k)} \int_0^\infty \frac{dx}{e^x \pm a} \frac{x^{k-1}}{e^x \pm a} \approx a(1 \mp \frac{a}{2^k} + O(a^2))$$

(правая часть равенства получена разложением подынтегрального выражения в ряд по a). Используя это приближение в первом уравнении состояния, выразим a через N :

$$a(1 \mp \frac{a}{2^{3/2}}) \approx \frac{n}{A(kT)^{3/2}},$$

откуда итерациями при малом a получаем

$$e^{\mu/(kT)} = a \approx \frac{n}{A(kT)^{3/2}} \pm \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{n}{A(kT)^{3/2}} \right)^2. \quad (16)$$

Первое слагаемое в (16) - главный порядок в разложении по a при $a \rightarrow 0$ - эквивалентен классическому выражению для химического потенциала идеального газа ($g = 1$)

$$\mu = kT \ln \frac{Nh^3}{2^{3/2} \pi^{3/2} V m^{3/2} (kT)^{3/2}}.$$

Второе слагаемое (16) описывает квантовую поправку.

Подстановка главного члена асимптотического приближения во второе уравнение состояния и теплоемкость дает классические выражения $pV = NkT$, $C_{V,N} = 3kN/2$. Квантовые поправки к уравнению состояния и теплоемкости (с точностью до несущественных коэффициентов порядка единицы) определяются величиной

$$\frac{N}{A\Gamma(5/2)(kT)^{3/2}} = \frac{Nh^3}{2^{3/2} \pi^{3/2} V m^{3/2} (kT)^{3/2}},$$

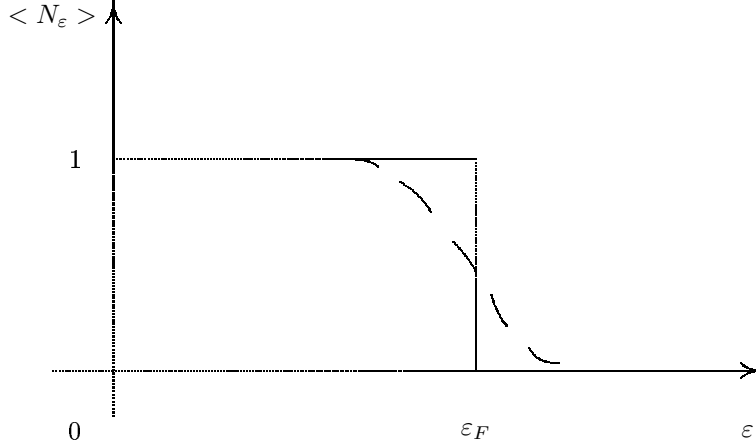
что при комнатной температуре ($T \approx 300K$) в воздухе ($m \approx 5 \cdot 10^{-26} \text{кг}$), при $k \approx 1.4 \cdot 10^{-23} \text{дж/К}$, $h \approx 6.6 \cdot 10^{-34} \text{дж.с}$, $V \approx 22.4 \text{м}^3$, $N \approx 6 \cdot 10^{26}$ оказывается порядка $1.6 \cdot 10^{-7}$.

4 Низкотемпературное поведение ферми - газов

Если, как было показано выше, при высоких температурах и низких плотностях и ферми-и бозе- квантовые газы ведут себя одинаково, как идеальный классический газ, то в противоположном пределе (при низких температурах) их поведение кардинально различно. Начнем исследование с описания ферми - газов.

При стремящейся к нулю температуре выражение $\exp((\varepsilon_\alpha - \mu)/(kT))$ теряет непрерывность: оно равно нулю при $\varepsilon_\alpha < \mu$ и бесконечности при $\varepsilon_\alpha > \mu$, поэтому график зависимости

среднего числа частиц на уровне α , определяемой выражением (3), как функция энергии приобретает вид, изображенный сплошной линией на рисунке:



Очевидно, скачок функции происходит при энергии Ферми ϵ_F , равной $\mu(T)|_{T=0}$. При низкой, но отличной от нуля температуре, происходит некоторое изменение графика в окрестности ϵ_F , изображенное на рисунке пунктирной линией. Эта физическая картина и лежит в основе низкотемпературного описания ферми - газов.

Докажем вспомогательную формулу: рассмотрим при малом T поведение интеграла

$$I = \int_0^\infty \frac{d\epsilon\phi(\epsilon)}{e^{(\epsilon-\mu)/(kT)} + 1} = \left(\int_0^\mu - \int_0^\mu \right) d\epsilon\phi(\epsilon) + \left(\int_0^\mu + \int_\mu^\infty \right) \frac{d\epsilon\phi(\epsilon)}{e^{(\epsilon-\mu)/(kT)} + 1}$$

с произвольной функцией $\phi(\epsilon)$, растущей на бесконечности медленнее, чем экспонента, что обеспечивает сходимость всех четырех слагаемых. Сложив второе и третье слагаемое получим

$$I = \int_0^\mu d\epsilon\phi(\epsilon) - \int_0^\mu \frac{d\epsilon\phi(\epsilon)}{e^{(\mu-\epsilon)/(kT)} + 1} + \int_\mu^\infty \frac{d\epsilon\phi(\epsilon)}{e^{(\epsilon-\mu)/(kT)} + 1}.$$

Понятно, что при $T \rightarrow 0$ во втором и третьем интегралах главный вклад набирается от области $\epsilon \approx \mu$. После очевидных замен переменных выражение может быть представлено как

$$\int_0^\mu d\epsilon\phi(\epsilon) - kT \int_0^{\mu/(kT)} \frac{dx\phi(\mu - xkT)}{e^x + 1} + kT \int_0^\infty \frac{dx\phi(\mu + kTx)}{e^x + 1}.$$

Во втором интеграле верхний предел $\mu/(kT)$ может быть заменен на ∞ , погрешность при этом порядка $\exp(-\mu/(kT))$. Разлагая под знаками интегралов функции $\phi(\mu \pm xkT)$ в ряды Тейлора по xkT (сходимость интегралов обеспечивается экспоненциальным ростом знаменателя на бесконечности), получим требуемую асимптотику низких температур. Коэффициенты разложения при четных производных в двух последних интегралах сокращаются. Учет первой нетривиальной поправки дает окончательное выражение:

$$I = \int_0^\mu d\epsilon\phi(\epsilon) + (kT)^2 w \phi'(\mu) + O((kT)^4), \quad w = 2 \int_0^\infty \frac{x dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{6} \quad (17)$$

При помощи (17) уравнение состояния (10) может быть записано в виде

$$N = \frac{3}{2}AV \int_0^\infty \frac{d\varepsilon \varepsilon^{1/2}}{e^{(\varepsilon-\mu)/(kT)} + 1} \approx AV \left(\mu^{3/2} + \frac{3}{4} \alpha \frac{(kT)^2}{\sqrt{\mu}} \right),$$

итерациями последнего уравнения находим, что химический потенциал ферми - газа при низких температурах ведет себя как

$$\mu = \varepsilon_F \left[1 - \frac{1}{2} \alpha \frac{(kT)^2}{\varepsilon_F^2} + O\left(\frac{k^4 T^4}{\varepsilon_F^4}\right) \right], \quad \varepsilon_F = \left(\frac{n}{A}\right)^{2/3} \quad (18)$$

Видно, что безразмерным параметром разложения здесь является переменная

$$\frac{kT}{\varepsilon_F} = \frac{kTA^{2/3}}{n^{2/3}}.$$

Пользуясь формулой (17) и асимптотикой химического потенциала (18) можно написать для уравнения состояния (11) выражение

$$p \approx \varepsilon_F^{5/2} \left(\frac{2}{5} + 2\alpha \frac{(kT)^2}{\varepsilon_F^2} \right),$$

а выражение для энтропии (12) -

$$S \approx 3\alpha \frac{AV}{T} \varepsilon_F^{1/2} (kT)^2. \quad (19)$$

Отметим, что ведущий ($\sim T^0$) член в низкотемпературном разложении энтропии оказался равным нулю (в полном соответствии с третьим началом термодинамики $S \rightarrow 0$ при $T \rightarrow 0$), поэтому мы не стали выписывать поправки порядка T^3 к этому выражению. Для теплоемкости ферми - газа $C_{V,N} = T(\partial S/\partial T)_{N,V}$ с помощью (19) можно написать

$$C_{V,N} \approx 3\alpha AV \varepsilon_F^{1/2} k^2 T.$$

5 Бозе - газ при низких температурах. Явление бозе - конденсации

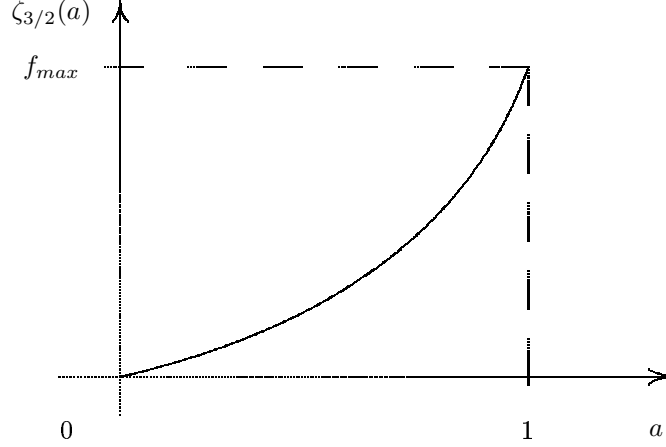
Как и в предыдущем разделе, мы говорим о низких температурах лишь условно; описываемые явления имеют место при определенных соотношениях температуры и плотности газа, в которые входит также масса и спин молекул (посредством величины A из (5)).

Посмотрим, что происходит с решением уравнения состояния (15) для бозе - газа

$$\zeta_{3/2}(e^{\mu/(kT)}) = \frac{n}{A(kT)^{3/2}} \equiv f(n, T) \quad (20)$$

при уменьшении температуры или росте плотности n , т.е. с ростом величины f . Напомним, что химический потенциал бозе - газа $\mu \in (-\infty, 0]$, при этом $a = \exp(\mu/(kT)) \in [0, 1]$. На

указанном интервале ряд $\zeta_k(a)$ - функции Римана (7) сходится. Все коэффициенты ряда положительны, поэтому можно утверждать, что мы имеем дело с монотонно растущей с ростом a функцией. Следовательно, при увеличении $f(n, T)$ в (20) растет и ее аргумент a . График функции $\zeta_{3/2}(a)$ может быть представлен в следующем виде:



Отметим, что при $a = 1$, функция $\zeta_{3/2}$ конечна и принимает значение $f_{max} = \zeta_{3/2} \approx 2.6$. Это значит, что если мы будем повышать плотность газа или понижать его температуру, т.е. увеличивать правую часть (20), то химический потенциал μ , будет монотонно стремиться к нулю ($a \rightarrow 1$) и достигнет нулевого значения при конечных значениях n_0, T_0 , связанных соотношением $f_{max} = n_0(kT_0)^{-3/2}/\bar{A}$, после чего левая часть уравнения (20) теряет смысл, т.к. ряд (7) начинает расходиться, и наше описание вообще говоря становится некорректным. Нулевой химический потенциал формально соответствует бесконечной заселенности уровня с нулевой энергией (см. (3) при $\epsilon_\alpha = \mu = 0, T = T_0$). Поэтому точка n_0, T_0 называется точкой бозе - конденсации. Отметим, что корректное описание бозе - конденсации невозможно в рамках приближения идеального газа, оно требует использования аппарата квантовой теории поля, поэтому в данной работе мы ограничились рассмотрением несконденсированного газа в окрестности точки n_0, T_0 .

Рассмотрим газ в состоянии $n = n_0 + \delta n, T = T_0 + \delta T$, считая δn , и δT малыми отклонениями. Уравнение состояния при этом примет вид

$$f(\mu, T) = \frac{n_0}{\bar{A}(kT_0)^{3/2}} + \frac{\delta n}{\bar{A}(kT_0)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{n_0}{\bar{A}(kT_0)^{3/2}} \frac{\delta T}{T_0}. \quad (21)$$

Поскольку $\mu = 0$ при $n = n_0, T = T_0$, химический потенциал следует считать малым в окрестности этой точки. Тем самым наша задача свелась к обсуждению асимптотики функции

$$\zeta_{3/2}(e^{\mu/(kT)}) = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^\infty \frac{dx x^{1/2}}{e^{x-\mu/(kT)} - 1}$$

при $\mu \rightarrow 0, T \rightarrow T_0$. Вычтем из этого интеграла его значение при $\mu = 0$, равное f_{max} т.е. перепишем уравнение состояния (21) в виде

$$\frac{\delta n - 3n_0\delta T/(2T_0)}{\bar{A}(kT_0)^{3/2}} = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^\infty \frac{dx x^{1/2} (e^x - e^{x-\mu/(kT)})}{(e^{x-\mu/(kT)} - 1)(e^x - 1)}.$$

Если теперь разложить подынтегральное выражение в ряд по $\mu/(kT)$, то образующиеся интегралы при $\mu \rightarrow 0$ расходятся в точке $x = 0$. Поэтому напишем

$$\int_0^\infty \frac{dxx^{1/2}(e^x - e^{x-\mu/(kT)})}{(e^{x-\mu/(kT)} - 1)(e^x - 1)} \approx \frac{\mu}{kT} \int_0^\infty \frac{dxx^{1/2}e^x}{(e^x(1 - \mu/(kT)) - 1)(e^x - 1)}$$

и отметим, что образовавшийся в правой части равенства интеграл уже сам по себе расходится при $\mu = 0$. Это значит, что для исследования его асимптотики нам достаточно следить лишь за расходящимися (при $\mu \rightarrow 0$) вкладками. Теперь в тождественно равном ему выражении

$$\int_0^\infty \frac{dxx^{1/2}e^x}{(e^x(1 - \mu/(kT)) - 1)(e^x - 1)} + \left(- \int_0^\infty + \int_0^\infty \right) \frac{dxx^{1/2}}{(x - \mu/(kT))x}$$

разность первых двух интегралов конечна при $\mu = 0$ (сингулярность при $x = 0$ первого интеграла в точности сокращается вторым, сходимость при больших x обеспечена), поэтому вся сингулярность содержится в интеграле

$$\int_0^\infty \frac{dxx^{1/2}}{(x - \mu/(kT))x} = \sqrt{\frac{kT}{|\mu|}} \int_0^\infty \frac{dy}{(y+1)y^{1/2}} = 2\sqrt{\frac{kT}{|\mu|}} \int_0^\infty \frac{du}{u^2+1} = \pi\sqrt{\frac{kT}{|\mu|}}$$

(замены: $x = |\mu|y/(kT)$, $y = u^2$, напомним, что $\mu \leq 0$). Тем самым показано, что уравнение состояния имеет вид

$$\frac{\delta n - 3n_0\delta T/(2T_0)}{A(kT_0)^{3/2}} = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \frac{\pi\sqrt{|\mu|}}{kT_0} + O\left(\frac{\mu}{kT}\right)$$

и следовательно

$$\mu \approx \frac{\Gamma^2(3/2)}{\pi^2 A^2 (kT_0)^2} \left(\delta n - 3n_0 \frac{\delta T}{2T_0} \right)^2. \quad (22)$$

Аналогично разобранным примерам несложно определить поведение функций $\zeta_k(e^{\mu/(kT)})$ с другими k :

$$\zeta_{5/2}(e^{\mu/(kT)}) \approx \text{const} + O\left(\frac{\mu}{kT}\right), \quad \zeta_{1/2}(e^{\mu/(kT)}) \approx \text{const} \sqrt{\frac{kT}{|\mu|}} + O(1),$$

что с учетом (22) и позволяет определять поведение термодинамических характеристик (11, 12, 14) и других в окрестности точки бозе - конденсации.

6 Заключение

Рассмотренные в данном учебном пособии основы статистического описания квантовых идеальных одноатомных газов создают основу, необходимую для понимания физического описания более сложных и реалистичных систем, таких как многоатомные газы, фазовые переходы, приводящие к явлениям сверхтекучести и сверхпроводимости и т. п.

Литература

1. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. "Статистическая физика".
2. Куни Ф.М. "Статистическая физика".
3. Васильев А.Н. "Функциональные методы в квантовой теории поля и статистической физике".
4. Рыжик И.М., Градштейн И.С. "Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений".