

Асимптотики высоких порядков квантово-полевых разложений и пересуммирование по Борелю асимптотических рядов.

Налимов М.Ю., Новожилова Т.Ю.

Настоящее пособие содержит материал, дополняющий содержание лекций по курсам "Диаграммные разложения в равновесной статистической физике", "Теория критического поведения", "Основы описания развитой турбулентности", "Функциональные методы в квантовой теории поля", "Применение методов квантовой теории поля к проблеме многих тел", читаемых для студентов IV, V, VI курсов физического факультета СПбГУ. Эти курсы объединены тем, что в них к задачам статистической физики применяются пертурбативные методы квантовой теории поля.

Учитывая сложность обсуждаемых проблем, в пособии изложены лишь основы подхода к исследованию характера асимптотических рядов теории возмущений и их обработке. Пособие позволяет студентам расширить свое понимание изучаемого в курсе вышеупомянутых лекций материала и может быть полезным для всех специалистов, использующих формализм функционального интеграла и диаграммных разложений квантовой теории поля и статистической физики.

Введение

Развитие мощного аппарата квантовой теории поля первоначально было обусловлено потребностями физики элементарных частиц. Вскоре было замечено, что сходные подходы могут с успехом применяться и при описании других физических систем, обычно с большим или бесконечным числом степеней свободы. Таковые, в частности, относятся к области исследования статистической физики. Например, квантово-полевые методы оказались наиболее адекватными для описания критического поведения (фазовых переходов второго рода), развитой турбулентности, разнообразных моделей случайных блужданий и скейлинговых явлений в полимерах.

Квантово-полевые методы в большинстве своем основаны на теории возмущений по различным параметрам, например, по постоянной тонкой структуры $\alpha \approx 1/137$ в квантовой электродинамике. Вычисленные к настоящему времени первые 10–15 порядков теории возмущений по α определяют физические наблюдаемые со все улучшающейся точностью. Однако вопрос о сходимости получаемых рядов представляется по крайней мере интересным с теоретической точки зрения. Установлено, что в

большинстве случаев ряды квантово-полевой теории возмущений носят асимптотический характер. Асимптотические ряды — вообще нередкое явление в теоретической физике, отсутствие сходимости ряда не мешает его практическому использованию при малом параметре разложения, с чем мы и сталкиваемся в квантовой электродинамике. Однако в статистической физике реальный параметр разложения часто оказывается порядка единицы (в качестве примера здесь можно вспомнить метод ренормализационной группы и ε -разложение [1, 3]). В этой ситуации последние члены разложений оказываются порядка или даже больше предыдущих, и необходима общая информация о поведении рассматриваемых рядов: сходятся они или расходятся, каков радиус сходимости.

Такая информация может быть получена путем исследования *асимптотики высоких порядков* (АВП). Пусть некоторая величина $f(g)$ задана степенным рядом $f(g) = \sum_N f^{(N)} g^N$, асимптотика коэффициентов $f^{(N)}$ при $N \rightarrow \infty$ и называется асимптотикой высоких порядков для функции f . Например, рассмотрим АВП сходящегося ряда с конечным радиусом сходимости для функции $f_\alpha(g) = 1/(g - g_0)^\alpha$. Разложением в ряд Тейлора нетрудно найти

$$f_\alpha(g) = \sum_N f_\alpha^{(N)} g^N, \quad f_\alpha^{(N)} = \frac{(-1)^\alpha}{(g_0)^{N+\alpha}} \frac{\Gamma(\alpha + N)}{\Gamma(\alpha) N!}. \quad (1)$$

АВП функции f_α определяется пределом

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_\alpha^{(N)} \sim \frac{N^{\alpha-1}}{g_0^N}. \quad (2)$$

Данный пример иллюстрирует, что АВП может дать информацию о положении и характере особенности исследуемых функций: и радиус сходимости (определяется g_0) и тип особенности (определяется числом α) однозначно задаются ее параметрами.

Для сходящихся степенных рядов знание АВП существенно дополняет информацию, которую мы можем получить из обычной теории возмущений. Пусть, например, для некоторой функции $f(g)$ нам известен некоторый отрезок ряда теории возмущений $\sum_{i=0}^K f^{(i)} g^i$, а также положение и характер особенности на границе круга сходимости (например, $1/(g - g_0)^\alpha$). Тогда можно утверждать, что представление функции в виде

$$f(g) = \frac{1}{(g - g_0)^\alpha} \sum_i \bar{f}^{(i)} g^i,$$

где коэффициенты $\bar{f}^{(i)}$ легко определяются по известным $f^{(i)}$, приводят к большему радиусу сходимости нового ряда $\sum_i \bar{f}^{(i)} g^i$ и позволяют точнее

восстановить величину $f(g)$. Оказывается, и в случае рядов асимптотических АВП может дать рецепт получения хорошего численного ответа.

Для определения АВП квантово-полевых разложений используется *инстантонный анализ* (см. [2, 3]), который сводится к исследованию асимптотики функционального интеграла методом перевала. Для асимптотических рядов развиты разнообразные схемы пересуммирования, в большинстве своем основанные на преобразовании Бореля. Оба этих подхода обсуждаются в данной работе на примере пертурбативного вычисления простого числового интеграла, теория возмущений для которого имеет основные черты квантово-полевых разложений. Простота рассматриваемого интеграла допускает контроль всех производимых преобразований. Также указаны сложности на пути применения рассматриваемых подходов в реальных задачах статистической физики и квантовой теории поля.

1 Основные черты инстантонного анализа при вычислении асимптотик высоких порядков

Базовой теорией, с которой связан несомненный успех квантово-полевых методов в теории критического поведения, является модель φ^4 , корреляционные функции которой выражаются через *функциональные интегралы* вида

$$\int D\varphi \varphi(\mathbf{x}_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_k) e^{-S(\varphi)},$$

$$S(\varphi) \equiv \int d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\tau}{2} \varphi^2(\mathbf{x}) + \frac{g}{4!} (\varphi^2(\mathbf{x}))^2 \right]. \quad (3)$$

Данная теория описывает разнообразные фазовые переходы второго рода: критическую точку в системе жидкость-пар, точку Кюри в магнетиках, точку расслаивания и т.д.

Функциональный интеграл по полю $\varphi(\mathbf{x})$ (3) вычисляется в форме *диаграммных разложений*. При этом член, пропорциональный g в действии S , рассматривается как малое возмущение, по которому строится ряд. Все образовавшиеся интегралы фактически сводятся к гауссовым (т.к. S при $g = 0$ — квадратичный функционал поля φ) и могут быть вычислены, однако упомянутые вычисления весьма трудоемки; их сложность лавинообразно растет с ростом порядка теории возмущений, так

что к настоящему моменту, несмотря на то, что развит мощный вычислительный формализм и используются современные компьютеры, найдено лишь 5–6 первых членов обсуждаемых разложений в теории φ^4 . Для получения достаточно точных числовых результатов в данном случае оказывается необходимой информация о АВП рядов теории возмущений, получаемая методом инстантонного анализа.

Рассмотрим основные черты применения инстантонного анализа на простейшем примере: вместо полевой теории (3) обсудим обыкновенный одномерный интеграл

$$I(g) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2/2 - gx^4/4!}, \quad (4)$$

точный ответ для которого может быть выражен через функцию параболического цилиндра или функцию Макдональда (см. [4]), но который также легко сосчитать в форме разложения по константе g . Данное разложение имеет все основные черты квантово-полевой теории возмущений.

Действительно, несложно написать

$$I(g) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(-\frac{g}{4!} x^4 \right)^N = \sum_{N=0}^{\infty} A^{(N)} g^N,$$

где коэффициент при N -м члене разложения

$$A^{(N)} = (-1)^N \frac{\sqrt{2\pi}(4N-1)!}{(4!)^N N! 2^{2N-1} (2N-1)!}. \quad (5)$$

В квантовой теории поля (например, для модели (3)) аналогичный точный ответ в произвольном порядке написать невозможно, поэтому необходим альтернативный путь определения АВП — инстантонный анализ. Исходным его пунктом является представление N -го коэффициента разложения в виде

$$A^{(N)} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dg}{g^{N+1}} I(g), \quad (6)$$

интеграл берется по контуру, охватывающему ноль в комплексной плоскости. Последняя формула основана на теореме Коши комплексного анализа, связывающей интеграл мероморфной функции с ее вычетами, попадающими внутрь контура интегрирования. Заметим, что, хотя интеграл по x в (4) расходится при $\text{Re}(g) < 0$, функцию $I(g)$ можно понимать

в виде разложения (и даже просто достаточно большого отрезка ряда) по g , задающего аналитическую функцию $I(g)$, что нам и требуется для применения теоремы Коши в (6). Теперь с учетом (4) можно написать

$$A^{(N)} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dg}{g} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2/2 - gx^4/4! - N \ln g},$$

сделать растяжение переменных $x = \sqrt{N}y$, $g = u/N$ и образовавшийся двукратный интеграл

$$A^{(N)} = \frac{N^{N+1/2}}{2\pi i} \oint \frac{du}{u} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-N(y^2/2 + uy^4/4! + \ln u)} \quad (7)$$

оценить при больших N методом перевала.

Уравнения стационарности метода перевала имеют вид

$$y + \frac{u}{3!}y^3 = 0, \quad \frac{u}{4!}y^4 = -1, \quad (8)$$

откуда несложно получить две точки стационарности $\{y_c = -2, u_c = -3/2\}$ и $\{y_c = 2, u_c = -3/2\}$. Обе они дают одинаковый вклад в исследуемый интеграл, поэтому достаточно рассмотреть только вклад одной (например, первой) точки стационарности, умножив результат на два.

Сдвиг переменных интегрирования $y = y_c + \delta y$, $u = u_c + \delta u$ приводит (7) к виду

$$A^{(N)} = 2 \frac{(-2)^N N^{N+1/2}}{2\pi i (3e)^N} \oint \frac{d\delta u}{-3/2 + \delta u} \int_{-\infty}^{\infty} d\delta y e^{-N[-(\delta y)^2 - 4\delta y \delta u/3 - 2(\delta u)^2/9 + \dots]}, \quad (9)$$

где многоточием обозначены члены третьего, четвертого и т.д. порядков по отклонениям δy , δu от точки стационарности. Контур интегрирования по переменной δu теперь проходит через начало координат, причем направлен там противоположно направлению мнимой оси.

Очередная замена переменных — растяжение $\delta y = \delta x/\sqrt{N}$, $\delta u = \delta g/\sqrt{N}$ — позволяет выделить в (9) наиболее существенный в пределе $N \rightarrow \infty$ вклад

$$A^{(N)} = 2 \frac{(-2)^{N+1} N^{N-1/2}}{3(3e)^N} \frac{1}{2\pi i} \int d\delta g \int_{-\infty}^{\infty} d\delta x e^{(\delta x)^2 + 4\delta x \delta g/3 + 2(\delta g)^2/9} (1 + O(1/N)).$$

Все члены, отмеченные многоточием в (9), как и δu в знаменателе $-3/2 + \delta u$, дают вклад лишь в $O(1/N)$ слагаемое. Интеграл по δg ведется теперь по прямолинейному контуру в комплексной плоскости ($i\infty, -i\infty$) (в соответствии со стандартным преобразованием контура в методе перевала); при развороте контура интегрирования $\delta g \rightarrow i\delta g$ появляется множитель $(-i)$, так что результат оказывается вещественным. Гауссово интегрирование по δx , δg приводит к множителю $\sqrt{(9\pi^2)/2}$, и окончательный ответ имеет вид

$$A^{(N)} = \frac{(-2)^N \sqrt{2}}{(3e)^N} N^{N-1/2} (1 + O(1/N)),$$

Это, с учетом формулы Стирлинга, совпадает с асимптотикой $N \rightarrow \infty$ точного ответа (5).

Для квантово-полевой модели (3) место переменной x в рассмотренном примере занимает полевая переменная φ , так что уравнения стационарности определяют теперь функцию φ_c , соответствующую экстремуму функционала $S(g, \varphi) + N \ln g$. Вариационные уравнения при $\tau = 0$ имеют вид (ср. с (8))

$$-\Delta\varphi(\mathbf{x}) + \frac{g}{3!}\varphi^3(\mathbf{x}) = 0, \quad \frac{g}{4!} \int d\mathbf{x} \varphi^4(\mathbf{x}) = -1.$$

Их решение для теории в четырехмерном пространстве было найдено в работе [2]

$$\varphi_c(\mathbf{x}) = \pm \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{y}{y^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}, \quad g_c = -16\pi^2; \quad (10)$$

здесь y , \mathbf{x}_0 — произвольные константы.¹⁾

В результате было установлено, что в большинстве квантово-полевых моделей, в которых удалось применить инстантонный подход, ряды теории возмущений — асимптотические с факториальным ростом коэффициентов:

$$A^{(N)} \sim (-1)^N N! a^N N^{b_0}, \quad (11)$$

как и в разобранным примере, где $a = 2/3$, $b_0 = -1$.

¹⁾ По сравнению с разобранным примером, в инстантонном анализе полевых моделей возникают дополнительные проблемы, такие как условие существования решений уравнений стационарности [5], грассмановы переменные, численный анализ решений в различных физических моделях [3], проблема вырождения инстантонного решения (то, что (10) содержит произвольные константы y , \mathbf{x}_0 , означает, что в модели (3) существует целое семейство инстантонов [2]) и вычисление функциональных детерминантов при расчете функциональных гауссовых интегралов. За дополнительной информацией мы отсылаем заинтересованного читателя к оригинальным работам (см. библиографию в книге [3]).

2 Борелевское суммирование расходящихся рядов

Известно, что частные суммы асимптотических рядов приближаются к значению вычисляемой величины до тех пор, пока члены ряда убывают. Однако, обсуждая задачи статистической физики, мы будем интересоваться ситуацией, когда параметр разложения порядка единицы. Вкупе с факториальным ростом коэффициентов это приводит к тому, что убывание членов ряда заканчивается на члене с очень небольшим, а иногда и первым, номером (для иллюстрации в таблице приведены коэффициенты $A^{(N)}$ рассматриваемого простого числового примера (4) для случая $g = 1$).

N	0	1	2	3	4	5	6
$A^{(N)}$	2.51	-0.31	0.23	-0.31	0.64	-1.72	5.76
Σ_N	2.51	2.19	2.42	2.11	2.75	1.03	6.79

Здесь $\Sigma_N = \sum_{i=0}^N A^{(i)} g^i$, точный ответ в этом случае составляет $I(1) = 2.304$; мы ограничились шестью членами разложения, т.к. именно столько порядков теории возмущений сосчитано для классической теории φ^4 . Определяемая этими членами точность вычисления физических величин оказывается недостаточной.

Для повышения точности получаемых результатов в этих случаях часто предлагается использовать *Борель* (или *Борель—Лерой*) *пересуммирование* расходящихся рядов, которое возможно осуществлять для рядов с факториальным ростом коэффициентов. Борель—Лерой пересуммирование заключается в преобразовании функции, задаваемой асимптотическим рядом, при помощи соотношения

$$\sum_N A^{(N)} g^N = \sum_N \Gamma(N + b + 1) B^{(N)} g^N = \sum_N \int_0^\infty dt t^b B^{(N)} (gt)^N e^{-t}, \quad (12)$$

здесь $B^{(N)} = A^{(N)} / \Gamma(N + b + 1)$ — новые коэффициенты разложения, которые уже не содержат факториального роста; при получении второго равенства использовано интегральное представление для гамма-функции. Собственно, преобразование Бореля является частным случаем (12), если положить $b = 0$; возможно также преобразование, когда вместо $\Gamma(N + b + 1)$ используется $\Gamma(N\beta + b + 1)$, что приводит к разложению по параметру gt^β вместо gt [6].

Последующая операция не является корректной с математической точки зрения, но именно она и позволяет перейти от расходящегося ряда

к сходящемуся. Поменяем в (12) местами интегрирование и суммирование:

$$\int_0^\infty dt \sum_N t^b B^{(N)}(gt)^N e^{-t} = \int_0^\infty dt t^b e^{-t} \tilde{I}(gt), \quad \tilde{I}(gt) \equiv \sum_N B^{(N)}(gt)^N \quad (13)$$

(в качестве оправдания этому действию заметим, что при получении разложения функции (4) с коэффициентами (5) мы также некорректно меняли местами интегрирование и суммирование). В (13) образовался ряд \tilde{I} , коэффициенты которого имеют АВП

$$B^{(N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} C a^N N^{b_0 - b} (1 + O(1/N)).$$

Сравнивая его с разложением функции $f_\alpha(1,2)$ при $\alpha = b_0 - b + 1$, $g_0 = -1/a$, можно заключить, что разложение функции $\tilde{I}(gt)$ имеет конечный радиус сходимости $1/a$, и, вообще говоря, возможно его аналитически продолжить за границу этого круга. Для рассмотренного в предыдущем разделе примера обнаруженная особенность функции \tilde{I} лежит в точке $-1/a = -3/2$, т.е. находится на отрицательной полуоси, в то время как интегрирование в (13) ведется по положительной вещественной полуоси. Выбор параметра b позволяет изменять тип сингулярности и скорость сходимости ряда.

Для рассматриваемого нами модельного примера (4) при $b = 0$ (преобразование Бореля) коэффициенты $B^{(N)}$ имеют вид

$$B^{(N)} = (-1)^N \frac{\sqrt{2\pi}(4N-1)!}{(4!)^N (N!)^2 2^{2N-1} (2N-1)!}, \quad (14)$$

соответствующий ряд для функции $\tilde{I}(gt)$ может быть просуммирован точно

$$\tilde{I}(gt) = \sum_N B^{(N)}(gt)^N = \sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{1}{8} gt F([1, 5/4, 7/4], [2, 2], -2/3gt) \right), \quad (15)$$

где $F([i, k, l], [m, n], x)$ — обобщенная гипергеометрическая функция [4]. Она имеет единственную сингулярность, уже обнаруженную нами в точке $-3/2$, и легко продолжается аналитически на комплексную плоскость с выколотой точкой или разрезом. Численное интегрирование показывает, что равенство

$$I = \int dx e^{-x^2/2 - gx^4/4!} = \int dt \sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{1}{8} gt F([1, 5/4, 7/4], [2, 2], -2/3gt) \right)$$

выполняется с любой заданной компьютерной точностью при любых положительных значениях g .

3 Отображение комплексной плоскости переменных

Не имея аналитического продолжения функции \tilde{I} на вещественную положительную полуось, мы не можем проводить интегрирование по t в (13), т.к. в процессе интегрирования по промежутку $t \in (0, \infty)$ контур интегрирования пересекает границу круга сходимости (Рис. 1) в точке $(1/a, 0)$. Заметим, что радиус сходимости ряда для $\tilde{I}(gt)$ определяется положением ближайшей к нулю особенности, расположенной, как мы видели из анализа АВП, на отрицательной части вещественной полуоси (в точке $(-1/a, 0)$).

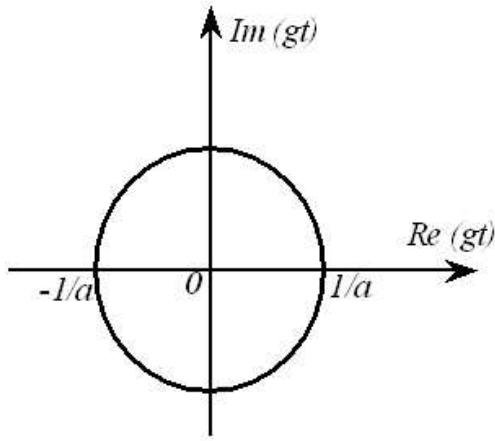


Рис. 1

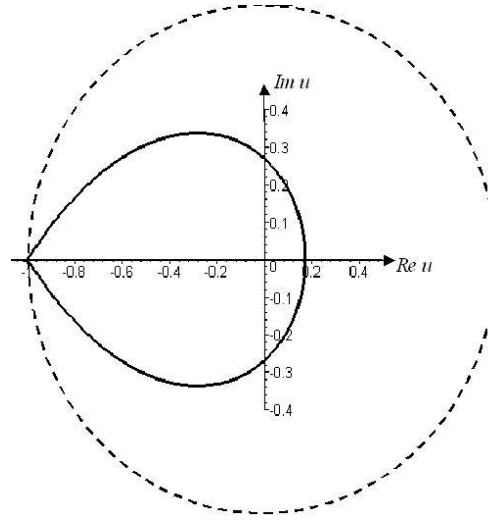


Рис. 2

Формула (15), фактически представляющая собой аналитическое продолжение за границу круга сходимости функции $\tilde{I}(gt)$, была получена с учетом общего вида коэффициента $B^{(N)}$ (14). Однако, обычно он нам неизвестен, поэтому проблема аналитического продолжения функции $\tilde{I}(gt)$ не решается столь просто. Заметим, что для конечного отрезка ряда $\sum_{N=0}^K A^{(N)} g^N$ преобразование к виду (13) является математически корректным, почленное интегрирование по t просто восстанавливает исходную частную сумму, поэтому без подходящего аналитического продолжения пересуммирование асимптотического ряда невозможно.

Один из методов преодолеть эту проблему—использовать отображение комплексной плоскости. Рассмотрим, например, отображение

$$u(gt) = \frac{(1 + agt)^{1/2} - 1}{(1 + agt)^{1/2} + 1} \quad \Leftrightarrow \quad gt(u) = \frac{4u}{a(u - 1)^2}, \quad (16)$$

напомним, что $a > 0$. Контур интегрирования—вещественная полуось—отображается при этом на отрезок $[0, 1)$; граница круга сходимости перейдет в кривую, изображенную на Рис. 2 сплошной линией. Сингулярность $(-1/a, 0)$ окажется после такого преобразования в точке с координатами $(-1, 0)$, бесконечная точка—в точке $(1, 0)$, так что в новых переменных функция $\tilde{I}(u)$ имеет особенности в точках с координатами $(1, 0)$ и $(-1, 0)$. Радиус сходимости теперь равен единице и *контур интегрирования лежит внутри круга сходимости* (изображенного на Рис. 2 пунктирной линией). Малым gt в рассмотренном отображении соответствуют малые u , поэтому мы можем переразложить ряд для \tilde{I} (для которого нам обычно известны лишь K членов разложения по теории возмущений) по переменной u

$$\tilde{I} = \sum_{N=0}^K B^{(N)} [gt(u)]^N = \sum_{N=0}^K U^{(N)} u^N (gt) + O(u^{K+1}),$$

находя коэффициенты $U^{(N)}$

$$U^{(0)} = B^{(0)}, \quad U^{(1)} = \frac{4}{a} B^{(1)}, \quad U^{(2)} = 8 \frac{B^{(1)}}{a} + 16 \frac{B^{(2)}}{a^2}, \quad \dots$$

Заметим, что кроме точки сингулярности $(-1/a, 0)$, определяющей радиус сходимости в исходных переменных, функция $\tilde{I}(gt)$ может иметь другие особенности, и, вообще говоря, мы не гарантированы от того, что при отображении (16) какая-нибудь из них не попадет в единичный круг. Поэтому в общем случае можно только верить, что в новых переменных сингулярность в точке $(-1, 0)$ по-прежнему останется ближайшей к началу координат, и ряд $\sum_N U^{(N)} u^N$ окажется сходящимся. Вопрос об устойчивости полученных численных результатов относительно вида используемого преобразования комплексной плоскости также остается открытым.

В результате, зная K первых членов теории возмущений и то, что коэффициенты ряда факториально растут, можно написать *пересуммированное* выражение

$$I_K = \int_0^\infty dt t^b e^{-t} \sum_N^K U^{(N)} u^N (gt) \quad (17)$$

и использовать его для вычисления величины $I(g)$.

По сути, параметр b в (17) является подгоночным, имеются некоторые соображения (см. [6]), позволяющие утверждать, что следует использовать $b \geq b_0 + 1$. Ниже приведены результаты расчетов, показывающих

сходимость первых коэффициентов выражения (17) к точному ответу для модельного примера (4) при $g = 0.1$, $g = 1$, $g = 10$ ($b=0$):

$I(g) _{g=0.1} = 2.4773$							
K	0	1	2	3	4	5	6
I_K	2.5066	2.4772	2.4773	2.4773	2.4773	2.4773	2.4773

$I(g) _{g=1} = 2.3034$							
K	0	1	2	3	4	5	6
I_K	2.5066	2.2986	2.3053	2.3033	2.3034	2.3034	2.3034

$I(g) _{g=10} = 1.7990$							
K	0	1	2	3	4	5	6
I_K	2.5066	1.7782	1.8417	1.7960	1.8062	1.7985	1.8008

Как мы видим, наблюдается хорошая сходимость полученных результатов.

4 Заключение

Мы рассмотрели простой пример, в котором асимптотические ряды действительно можно пересуммировать по Борелю. К сожалению, для реальных физических моделей (например, (3)) вопрос о применимости и точности описанной процедуры остается открытым, несмотря на многочисленные работы, в которых эти методы привели к результатам с великолепным совпадением с экспериментом (например, [7, 8, 9, 10]). Проблема, как мы видели, в частности заключается в доказательстве сходимости ряда разложения (17) или, другими словами, в недостатке наших знаний о прочих (за исключением ведущей для исходного разложения) сингулярностях исследуемых функций. Гарантированная точность полученных в результате суммирования имеющихся 5-6 членов разложения при наличии подгоночных параметров схемы пересуммирования также представляется открытым вопросом. Предложенный в основополагающей работе [6] метод определения точности по разбросу результатов при разных значениях этих параметров не применяется на практике.

Мы ограничились рассмотрением одного единственного подхода к проблеме получения результатов из расходящихся рядов, а именно конформным преобразованием Борель-плоскости. В настоящее время развиты и другие методы пересуммирования, такие как преобразование Паде—Бореля [3], вариационная теория возмущений [8, 9, 10] и т.д.. Все они в той или иной мере основаны на преобразовании Бореля, поэтому суммирование по Борелю асимптотических рядов следует признать мощным

инструментом исследования рядов квантовой теории поля и статистической физики.

Список литературы

- [1] Васильев А.Н. Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. С.-Пб.: изд-во ПИЯФ, 1998.
- [2] Липатов Л.Н. ЖЭТФ, 1977, **72**, 411.
- [3] J. Zinn-Justin. Quantum Field Theory and Critical Phenomena, 3rd edition, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [4] Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1951.
- [5] V.G.Makhankov. Phys.Lett.A, 1977, **61**, 431.
- [6] J.C.Le Guillou, J.Zinn-Justin. Phys.Rev.B, 1980, **21**, 3976.
- [7] S. A. Antonenko and A. I. Sokolov. Phys. Rev.E, 1995, **51**, 1894.
- [8] А.Н.Сисакян, И.Л.Соловцов. ФЭЧиАЯ, 1994,**25**, (в.5) , 1127.
- [9] H.Kleinert. Phys.Rev.D, 1998, **57**, 2264.
- [10] V. I. Yukalov, S. Gluzman. Phys. Rev.E, 1998, **58**, 1359.

Содержание

Введение	3
1 Основные черты инстантонного анализа при вычислении асимптотик высоких порядков	5
2 Борелевское суммирование расходящихся рядов	9
3 Отображение комплексной плоскости переменных	11
4 Заключение	13
Литература	15