Т.Л. Ким

Распространение и рассеяние электромагнитных волн в случайно-неоднородных средах.

Учебно-методическое пособие

Настоящее пособие основано на материале спецкурса «Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородной среде», включенного в программу для студентов кафедры статистической физики IV курса физического факультета СПбГУ. В нем обобщаются результаты, изложенные в учебном пособии «Рассеяние волн в случайно-неоднородных средах: модель скалярного поля». Модель скалярного поля – упрощенная модель, отражающая основные черты рассеяния как электромагнитных, так и звуковых волн в системах с флуктуациями. В настоящем пособии обсуждается специфика распространения и рассеяния электромагнитных волн, связанная с их векторной природой. Введена соответствующая диаграммная техника Фейнмана, уравнение Дайсона, получено выражение для коэффициента затухания волны за счет рассеяния (коэффициента экстинкции). Выведена формула для интенсивности рассеяния в борновском приближении, найдена её связь с коэффициентом экстинкции (оптическая теорема). Рассмотрены особенности распространения и рассеяния света в окрестности критических точек.

Система уравнений Максвелла во флуктуирующей среде.

Система уравнений Максвелла в среде имеет вид:

$$\begin{cases} rot\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \ , & (1) \\ rot\overrightarrow{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} & (2) \end{cases}$$

$$div\,\vec{D} = 4\pi\rho, \qquad div\,\vec{B} = 0 \ . \qquad (3)$$

Здесь $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей, $\vec{B}$ и $\vec{D}$ – векторы магнитной и электрической индукции, ρ и $\vec{j}$ – плотности свободных зарядов и соответствующего им тока. Второе равенство в (3) – условие отсутствия магнитных зарядов. Чтобы система уравнений (1) – (3) стала замкнутой, необходимо ввести материальные соотношения, связывающие $\vec{B}$ с $\vec{H}$ и $\vec{D}$ с $\vec{E}$. Запишем эти связи в виде

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{H}, \qquad \overrightarrow{D} = \hat{\varepsilon}\overrightarrow{E} \ , \qquad (4)$$

где $\hat{\varepsilon}$ – диэлектрическая проницаемость среды. Первое из этих равенств означает, что мы будем рассматривать немагнитную среду с магнитной проницаемостью $\mu = 1$, линейная связь напряженности электрического поля $\vec{E}$ с вектором электрической индукции $\vec{D}$ имеет вид (4) для изотропных систем, в анизотропном случае она записывается в виде $D_i = \hat{\varepsilon}_{ij}E_j$, где $\hat{\varepsilon}_{ij}$ – тензор диэлектрической проницаемости. Шляпка над $\hat{\varepsilon}$ показывает, что эта величина является случайной, она складывается из постоянной составляющей ε_0 (или ε_{0ij} для анизотропных систем) и флуктуационного вклада $\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r},t)$:

$$\hat{\varepsilon}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 + \delta\hat{\varepsilon}(\vec{r},t) \ . \qquad (5)$$

Среднее значение флуктуации равно, естественно, нулю:

$$\left\langle \delta\hat{\varepsilon}(\vec{r},t) \right\rangle = 0 \ . \qquad (6)$$

(1) – (5) является примером системы стохастических уравнений, т.к. в нее входит случайный параметр $\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r},t)$, случайными являются тем самым и решения $\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)$, $\hat{\vec{H}}(\vec{r},t)$ этой системы. Статистические свойства поля флуктуаций $\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r},t)$ предполагаются известными, интерес представляют усредненные

по всевозможным значениям флуктуаций решения, в частности, средние значения напряженностей полей, а также средняя интенсивность излучения.

Статистику поля флуктуаций $\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r},t)$ будем считать гауссовой, она полностью определяется равенством (6) и заданием парного коррелятора

$$\left\langle \delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_1,t_1)\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_2,t_2)\right\rangle = \mathrm{D}\left(\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|,t_1-t_2\right) \quad , \tag{7}$$

старшие корреляторы определяются теоремой Вика. Мы будем считать систему в среднем трансляционно-инвариантной и изотропной, поэтому функция D в правой части (7) зависит от модуля разности аргументов $\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right| \equiv \left|\vec{r}\right| = r$ и $t_1-t_2\equiv t$. В силу принципа ослабления корреляций эта функция обращается в ноль при больших значениях аргументов $r \gg r_c$ или $t \gg t_c$, где r_c и t_c – характерные микромасштабы (r_c– радиус корреляции, t_c – время корреляции). Характерные частоты микродвижений $\omega_c \sim t_c^{-1}$ на несколько порядков меньше световых частот, поэтому зависимостью флуктуаций $\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r},t)$ от времени во многих случаях можно пренебречь, однако учет такой зависимости приводит к интересным тонким эффектам и будет рассмотрен позднее.

Анализ стохастической задачи (1) – (3) во многом схож с рассмотренной в [1] задачей для скалярного поля, удовлетворяющего волновому уравнению. Первый шаг по наведению мостов с этой задачей – переход от системы уравнений первого порядка (1) – (2) к уравнению второго порядка для напряженности $\hat{\vec{E}}$ (или $\hat{\vec{H}}$). Исключим поле $\hat{\vec{H}}$ из уравнений (1) – (2), для этого подействуем операцией rot на (1) и $\dfrac{\partial}{\partial t}$ на (2), с учетом (4) получим

$$\begin{cases} rot\,rot\hat{\vec{E}} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\, rot\hat{\vec{H}}}{\partial t} \;, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} rot\,\hat{\vec{H}} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial^2 \hat{\varepsilon}\hat{\vec{E}}}{\partial t^2} + \dfrac{4\pi}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{j}\,, \end{cases}$$

откуда

$$rot\,rot\hat{\vec{E}} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{\varepsilon}\hat{\vec{E}} - \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}\,. \tag{8}$$

Запишем соотношение (8) в компонентах. Для этого вспомним, что $\left(rot\vec{E}\right)_i = \varepsilon_{ijl}\dfrac{\partial}{\partial r_j}E_l$, где ε_{ijl} – полностью антисимметричный тензор с $\varepsilon_{xyz}\equiv\varepsilon_{123}=1$, по повторяющимся значкам подразумевается суммирование по всем декартовым составляющим. Используя тождество

$$\varepsilon_{ijl}\varepsilon_{lmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \quad , \tag{9}$$

получаем

$$\left(rot\, rot\hat{\vec{E}}\right)_i = \varepsilon_{ijl}\frac{\partial}{\partial r_j}\varepsilon_{lmn}\frac{\partial}{\partial r_m}E_n = (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})\frac{\partial^2}{\partial r_j \partial r_m}E_n = \left(\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_n} - \delta_{in}\Delta\right)E_n .$$

Подставляя это выражение в (8), находим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r_i\, \partial r_n} - \delta_{in}\,\Delta\right)\hat{E}_n = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{\varepsilon}\hat{E}_i - \frac{4\pi}{c}\frac{\partial j_i}{\partial t} \quad . \tag{10}$$

При произвольной функции $\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r},t)$ решать уравнение (10) можно только итерациями, считая флуктуацию $\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r},t)$ малой величиной. Для построения соответствующей теории возмущений необходимо знать функцию Грина уравнения (10) в отсутствие флуктуаций. Мы начнем с более простого вопроса и напомним, как получаются решения этого уравнения в виде плоских волн. Будем считать, что свободные заряды отсутствуют, т.е. $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$, тогда из (3), (4) следует, что

$$div\,\vec{E} = \frac{\partial}{\partial r_n}E_n = 0 . \tag{11}$$

Учитывая это равенство и полагая в (10) $\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r},t) = 0$, получаем, что напряженность $\vec{E}$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta\, E_i = \frac{\varepsilon_0}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_i \quad . \tag{12}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде плоской волны

$$E_i(\vec{r},t) = E_{0i}\, e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} \quad . \tag{13}$$

Подставляя (13) в (11), (12), находим

$$k_i E_{io} = (\vec{k}\vec{E}_0) = 0, \qquad k^2 = \frac{\varepsilon_0 \omega^2}{c^2} \equiv k_0^2 . \tag{14}$$

Таким образом, плоские волны (13) являются поперечными, т.е. их поляризация $\vec{E}_0$ ортогональна направлению распространения $\breve{k} \equiv \vec{k}/k$, а частота ω связана с волновым вектором k дисперсионным соотношением (14).

Перейдем к нахождению функции Грина уравнения (10) в отсутствие флуктуаций. Рассмотрим случай, когда зависимостью диэлектрической проницаемости от времени можно пренебречь и будем считать последнее слагаемое в (10) заданным монохроматическим источником с частотой $\tilde{\omega}$ (т.е. пропорциональный $e^{-i\tilde{\omega}t}$), локализованным в начале координат и направленным вдоль l-ой декартовой составляющей. Будем считать, что этот источник «адиабатически включается в бесконечно далеком прошлом», добавив в правую часть множитель $e^{\sigma t}$, где σ - малая положительная величина, которая устремляется к нулю в окончательных выражениях.

Нас будет интересовать i-ая составляющая поля $\vec{E}$, вызванная этим источником, обозначим ее $G_{il}^{(0)}(\vec{r},t)$, из (10) получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial_i\,\partial_n}-\delta_{in}\,\Delta\right)G_{nl}^{(0)}+\frac{\varepsilon_0}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}G_{il}^{(0)}=e^{-i\tilde{\omega}t+\sigma t}\delta_{il}\delta(\vec{r}),\qquad \sigma\to+0\quad. \tag{15}$$

Ищем решение этого уравнения в виде $G_{il}^{(0)}(\vec{r},t)=e^{-i\tilde{\omega}t+\sigma t}G_{il}^{(0)}(\vec{r})$, для зависящей только от координат функции $G_{il}^{(0)}(\vec{r})$ из (15) получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial_i\,\partial_n}-\delta_{in}\,\Delta\right)G_{nl}^{(0)}(\vec{r})-\frac{\varepsilon_0\omega^2}{c^2}G_{il}^{(0)}(\vec{r})=\delta_{il}\,\delta(\vec{r}),\qquad \omega=\tilde{\omega}+i\sigma\quad. \tag{16}$$

Определим Фурье-преобразование соотношениями

$$\begin{cases} f(\vec{k})=\int d\vec{r}\,e^{-i\vec{k}\vec{r}}f(\vec{r}), \\ f(\vec{r})=\dfrac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\,e^{i\vec{k}\vec{r}}f(\vec{k}). \end{cases} \tag{17}$$

Для Фурье-компонент $G_{il}^{(0)}(\vec{k})$ из (16) находим

$$\left(k^2\delta_{in}-k_ik_n\right)G_{nl}^{(0)}(\vec{k})-k_0^2G_{il}^{(0)}(\vec{k})=\delta_{il}\quad. \tag{18}$$

Для дальнейшего существенно, что величина $k_0\equiv\dfrac{\sqrt{\varepsilon_0}\,\omega}{c}$ имеет, как и ω из (16), положительную мнимую часть.

Параметризуем функцию $G_{il}^{(0)}(\vec{k})$, т.е. будем искать решение в виде

$$G_{il}^{(0)}(\vec{k})=\breve{k}_i\,\breve{k}_lG_{\parallel}^{(0)}(k)+\left(\delta_{il}-\breve{k}_i\,\breve{k}_l\right)G_{\perp}^{(0)}(k),\qquad \breve{k}_i\equiv k_i/k\quad, \tag{19}$$

сведя задачу к нахождению двух скалярных функций $G_{\parallel}^{(0)}(k)$ и $G_{\perp}^{(0)}(k)$, зависящих только от модуля k, при независимых тензорных структурах $\breve{k}_i\,\breve{k}_l \equiv Q_{il}$ и $\left(\delta_{il} - \breve{k}_i\,\breve{k}_l\right) \equiv P_{il}$. Величина Q_{il} играет роль продольного проектора $\left(Q_{il}\,k_l = k_i\right)$, величина P_{il} – поперечного проектора $\left(P_{il}\,k_l = 0\right)$. Подставляя (19) в (18), получаем

$$\left(k^2 - k_0^2\right)\left(\delta_{il} - \breve{k}_i\,\breve{k}_l\right)G_{\perp}^{(0)}(k) - k_0^2\,\breve{k}_i\,\breve{k}_l\,G_{\parallel}^{(0)}(k) = \delta_{il}\ .$$

Приравняем в этом соотношении коэффициенты при независимых тензорных структурах δ_{il} и $\breve{k}_i\breve{k}_l$. Из первого равенства находим тогда, что

$$G_{\perp}^{(0)}(k) = \frac{1}{k^2 - k_0^2}\quad , \tag{20}$$

а из второго, с учетом (20), получаем

$$G_{\parallel}^{(0)} = -\frac{1}{k_0^2}\ . \tag{21}$$

Отметим, что величина $G_{\perp}^{(0)}(k)$ оказалась равной Фурье-образу функции Грина задачи для скалярного поля [1]. Подставляя (20), (21) в (19), находим

$$G_{il}^{(0)}(\vec{k}) = \frac{\delta_{il} - \breve{k}_i\breve{k}_l}{k^2 - k_0^2} - \frac{\breve{k}_i\breve{k}_l}{k_0^2} \tag{22}$$

или в другой форме записи

$$G_{il}^{(0)}(\vec{k}) = \frac{\delta_{il}k_0^2 - k_i k_l}{k_0^2\left(k^2 - k_0^2\right)}\ . \tag{23}$$

Для нахождения функции Грина в координатном представлении используем знание этой функции $G^{(0)}(r)$ для задачи со скалярным полем [1]:

$$G^{(0)}(r) = \frac{e^{i\,k_0 r}}{4\pi r}\ . \tag{24}$$

Совершая обратное Фурье-преобразование согласно (17) и используя (23), получаем

$$G_{il}^{(0)}(\vec r)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec k\, e^{i\vec k\vec r}G_{il}^{(0)}(\vec k)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec k\, e^{i\vec k\vec r}\,\frac{\delta_{il}k_0^2-k_ik_l}{k_0^2\left(k^2-k_0^2\right)}=$$
$$=\frac{1}{k_0^2}\left(k_0^2\delta_{il}+\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial r_l}\right)\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec k\,\frac{e^{i\vec k\vec r}}{\left(k^2-k_0^2\right)}=\frac{1}{k_0^2}\left(k_0^2\delta_{il}+\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial r_l}\right)G^{(0)}(r). \qquad (25)$$

Подставляя (24) в (25) и выполняя дифференцирование с учетом соотношений $\dfrac{\partial r}{\partial r_j}=\dfrac{r_j}{r}$, $\qquad \dfrac{\partial r_j}{\partial r_l}=\delta_{jl}$, имеем

$$G_{il}^{(0)}(\vec r)=\frac{e^{ik_0r}}{4\pi r}\left[\delta_{il}\left(1+\frac{i}{k_0r}-\frac{1}{(k_0r)^2}\right)-\breve r_i\breve r_l\left(1+\frac{3i}{k_0r}-\frac{3}{(k_0r)^2}\right)\right], \qquad (26)$$

где $\breve r\equiv\vec r/r$ – направление распространения волны в рассматриваемой точке. В дальнейшем для нас будет представлять интерес асимптотика функции Грина на больших расстояниях от источника $r\gg\lambda$, значительно превышающих длину волны $\lambda=\dfrac{2\pi}{k_0}$. Отбирая в (26) главные вклады при $k_0r\gg1$, получаем

$$G_{il}^{(0)}(\vec r)\cong\frac{e^{ik_0r}}{4\pi r}\left[\delta_{il}-\breve r_i\breve r_l\right], \qquad k_0r\gg1. \qquad (27)$$

Получили сферическую волну, вектор напряженности в которой ортогонален направлению распространения $\breve r$, поскольку, как видно из (27), $\breve r_iG_{il}^{(0)}(\vec r)=0$.

Поле точечного монохроматического источника с учетом флуктуаций.

Добавляя в уравнение (15), согласно (10), слагаемое, учитывающее независящие от времени флуктуации диэлектрической проницаемости, получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r_i\,\partial r_n}-\delta_{in}\,\Delta\right)\hat G_{nl}+\frac{\varepsilon_0+\delta\hat\varepsilon(\vec r)}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat G_{il}=\delta_{il}\,e^{-i\omega t}\delta(\vec r)\ . \qquad (28)$$

Как и в предыдущем случае, ищем решение этого уравнения в виде $\hat G_{il}(\vec r,t)=e^{-i\omega t}\hat G_{il}(\vec r)$. Для координатной функции $\hat G_{il}(\vec r)$ из (28) находим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r_i\,\partial r_n}-\delta_{in}\,\Delta\right)\hat G_{nl}(\vec r)-\frac{\omega^2\varepsilon_0}{c^2}\hat G_{il}(\vec r)=\delta_{il}\,\delta(\vec r)+\frac{\omega^2\delta\hat\varepsilon(\vec r)}{c^2}\hat G_{il}(\vec r)\ . \qquad (29)$$

Мы хотим построить решение этого уравнения в виде разложения по степеням флуктуаций $\delta\hat{\varepsilon}$, с этой целью удобнее перейти от уравнения в дифференциальной форме к интегральному уравнению. Перепишем (29) в виде

$$L_{in}\,\hat{G}_{nl}(\vec{r}) = \delta_{il}\,\delta(\vec{r}) + k_0^2\,\frac{\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r})}{\varepsilon_0}\hat{G}_{il}(\vec{r}) \ , \tag{30}$$

где мы ввели оператор

$$L_{in} = \frac{\partial^2}{\partial r_i\,\partial r_n} - \delta_{in}\,\Delta - k_0^2\delta_{in} \ . \tag{31}$$

В терминах этого оператора уравнении (16) записывается в виде

$$L_{in}G_{nl}^{(0)}(\vec{r}) = \delta_{il}\delta(\vec{r}) \ , \tag{32}$$

откуда видно, что функция Грина $G^{(0)}$ играет роль оператора L^{-1}, обратного L. Действуя обратным оператором на обе части уравнения (30), получим

$$\hat{G}_{il}(\vec{r}) = G_{il}^{(0)}(\vec{r}) + \frac{k_0^2}{\varepsilon_0}\int d\vec{r}_1 G_{in}^{(0)}(\vec{r}-\vec{r}_1)\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_1)\hat{G}_{nl}(\vec{r}_1) \ . \tag{33}$$

Искомое разложение получаем, решая уравнение (33) итерациями:

$$\begin{aligned}\hat{G}_{il}(\vec{r}) &= G_{il}^{(0)}(\vec{r}) + \frac{k_0^2}{\varepsilon_0}\int d\vec{r}_1 G_{in}^{(0)}(\vec{r}-\vec{r}_1)\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_1)G_{nl}^{(0)}(\vec{r}_1) + \\ &+ \frac{k_0^4}{\varepsilon_0^2}\int d\vec{r}_1 G_{in}^{(0)}(\vec{r}-\vec{r}_1)\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_1)\int d\vec{r}_2 G_{nm}^{(0)}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_2)G_{ml}^{(0)}(\vec{r}_2) + \dots \ .\end{aligned} \tag{34}$$

Следующий шаг – вычисление среднего значения $G_{il}(\vec{r}) = \left\langle \hat{G}_{il}(\vec{r}) \right\rangle$ по флуктуациям $\delta\hat{\varepsilon}$. Первое слагаемое в (34) не зависит от $\delta\hat{\varepsilon}$, второе дает ноль после усреднения в силу (6), для усреднения третьего слагаемого необходимо знать величину $\left\langle \delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_1)\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_2) \right\rangle \equiv D(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$, для которой в силу принципа ослабления корреляций при удалении точек $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ друг от друга среднее от произведения в (7) распадается на произведение средних и ввиду (6) обращается в ноль. Таким образом, $D(r) \to 0$ при $r \to \infty$. Диапазон расстояний, в котором $D(r)$ отлично от нуля, определяется величиной ***корреляционного радиуса*** r_c**.** Характерный вид функции $D(r)$ показан на Рис.1 :

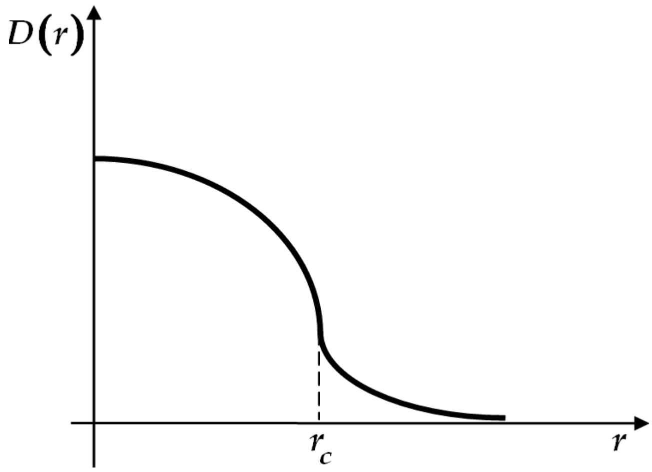


Рис.1

Учет последующих членов разложения требует знания средних значений произведений трех, четырех и т.д. флуктуаций $\delta\hat{\varepsilon}$. Для их нахождения необходимо знание функции распределения флуктуаций. Обычно делается простейшее предположение о гауссовом виде этой функции. Тогда среднее значение произведения нечетного количества $\delta\hat{\varepsilon}$ равно нулю, а среднее от произведения четного числа сомножителей определяется теоремой Вика. Приведем вначале пример применения теоремы Вика к среднему от произведения четырех флуктуаций:

$$\begin{gathered}\left\langle\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_1)\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_2)\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_3)\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_4)\right\rangle=\left\langle\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_1)\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_2)\right\rangle\left\langle\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_3)\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_4)\right\rangle+\\+\left\langle\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_1)\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_3)\right\rangle\left\langle\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_2)\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_4)\right\rangle+\left\langle\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_2)\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_3)\right\rangle\left\langle\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_1)\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_4)\right\rangle,\end{gathered}\tag{35}$$

таким образом, ответ выражен как сумма всевозможных произведений парных флуктуаций. В общем случае теорема Вика гласит, что среднее от произведения любого числа флуктуаций равно «сумме всевозможных спариваний», смысл этого утверждения ясен из приведенного выше примера.

Теория возмущений наглядно формулируется в терминах фейнмановских диаграмм. Введем элементы диаграммной техники:

 $\equiv D(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)\cdot\dfrac{k_0^4}{\varepsilon_0^2}$

$\vec{r}_1$

 $\equiv G_{jl}^{(0)}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$

$j,\ \vec{r}_1$ $\quad l,\vec{r}_2$

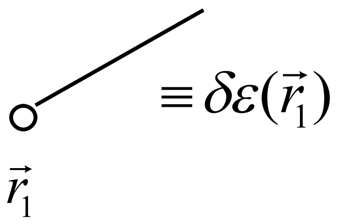


Рис.2

Каждой точке сопоставляется координата и поляризация. Если точки соединены сплошной линией, то ей сопоставляется множитель $D(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)\cdot\dfrac{k_0^4}{\varepsilon_0^2}$, если пунктирной – множитель $G_{jl}^{(0)}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$. Флуктуации $\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_1)$ сопоставляется «хвостик», исходящий из точки $\vec{r}_1$.

Ряд теории возмущений (34) на диаграммном языке записывается в виде:

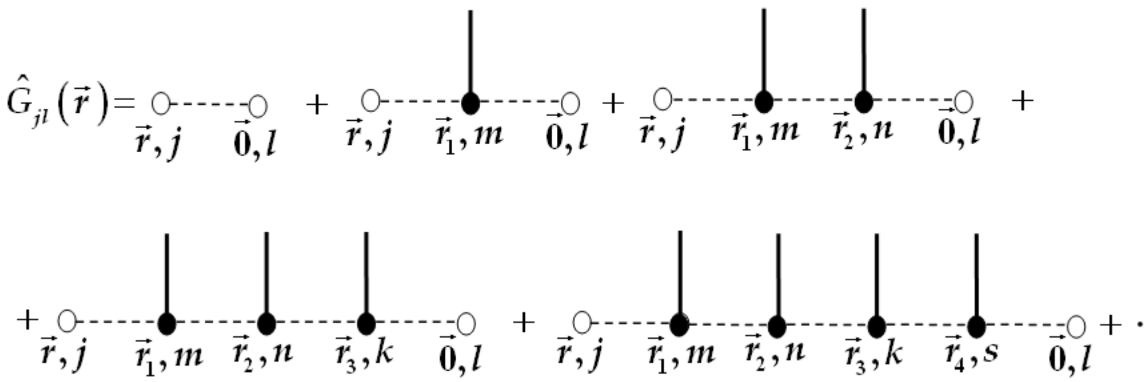


Рис.3

Здесь зачерненная точка подразумевает интегрирование по соответствующей координате и суммирование по поляризациям. Изображенный здесь ряд теории возмущений имеет простую физическую интерпретацию. Первое слагаемое описывает распространение сигнала из начала координат $\vec{0}$ в точку $\vec{r}$ в среде без флуктуаций. Во втором слагаемом сигнал распространяется из точки $\vec{0}$ в некоторую точку $\vec{r}_1$, в которой произошла флуктуация $\delta\hat{\varepsilon}$, и эта флуктуация является источником вторичной волны, которая уже достигает точки наблюдения $\vec{r}$ – произошел акт однократного рассеяния. Соответственно третье слагаемое описывает двукратное рассеяние и т.д.

Усреднение выражения из Рис.3 проводится согласно теореме Вика, средние с нечетным числом «хвостиков» равны нулю.

Итак, для усредненного значения $G_{il}(\vec{r})=\left\langle \hat{G}_{il}(\vec{r})\right\rangle$ получаем:

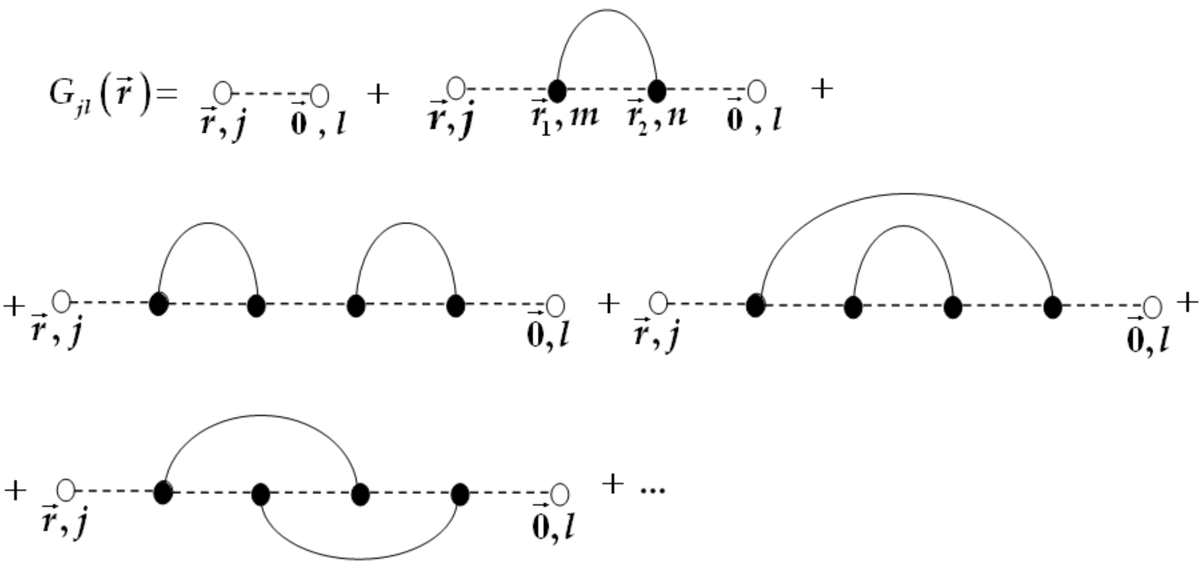


Рис.4

Расшифруем для примера в явном виде второе слагаемое:

$$\frac{k_0^4}{\varepsilon_0^2}\int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 G_{in}^{(0)}(\vec{r}-\vec{r}_1) G_{nm}^{(0)}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) D(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|) G_{ml}^{(0)}(\vec{r}_2) \equiv G_{il}^{(1)}(\vec{r}) \quad . \tag{36}$$

Это выражение, как и последующие члены теории возмущений, имеет вид ***сверток***. Анализ таких выражений значительно упрощается, если перейти к преобразованию Фурье и использовать следующую ***теорему о свертке***:
Пусть функция $\varphi(\vec{r})$ имеет вид свертки

$$\varphi(\vec{r}) = \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \dots \int d\vec{r}_n f_1(\vec{r}-\vec{r}_1) f_2(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \dots f_n(\vec{r}_n) \quad . \tag{37}$$

Тогда ее фурье-образ равен произведению фурье-образов сомножителей

$$\varphi(\vec{k}) = f_1(\vec{k}) f_2(\vec{k}) \dots f_n(\vec{k}) \quad . \tag{38}$$

Использование теоремы о свертке для величины $G_{il}^{(1)}(\vec{r})$ из (36) дает

$$G_{il}^{(1)}(\vec{k}) = G_{in}^{(0)}(\vec{k}) \Sigma_{nm}^{(1)}(\vec{k}) G_{ml}^{(0)}(\vec{k}), \tag{39}$$

где

$$\Sigma_{nm}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{k_0^4}{\varepsilon_0^2} G_{nm}^{(0)}(\vec{r}) D(\vec{r}), \tag{40}$$

а $\Sigma_{nm}^{(1)}(\vec{k})$ – соответствующий фурье-образ.

Суммирование ряда теории возмущений. Уравнение Дайсона.

Чтобы понять, насколько полученный ряд теории возмущений может быть использован для приближенного нахождения усредненной функции Грина, обсудим величину параметра этого разложения. Из ряда *рис.4* видно, что в каждом последующем слагаемом ряда теории возмущений накапливается множитель k_0^4, который размерен (имеет размерность четвертой степени обратной длины) и сам по себе не может быть параметром разложения. Очевидно, этот множитель обезразмеривается стоящим при ним интегралом, который, в свою очередь, содержит три характерные длины: корреляционный радиус r_c, входящий в функцию $D(r)$, длину волны $\lambda = 2\pi/k_0$ в функции Грина G_0, и, наконец, сам аргумент r искомой усредненной функции Грина. В обычных условиях длина световой волны λ значительно превышает величину корреляционного радиуса, таким образом, безразмерный параметр $k_0 r_c = 2\pi r_c / \lambda \ll 1$ является малым. Что касается расстояния r от источника (аргумента усредненной функции Грина), то обычно интересуются так называемой «дальней зоной», т.е. расстояниями, намного превышающими длину волны ($r \gg \lambda$), тем самым безразмерный параметр $k_0 r = 2\pi r/\lambda$ может считаться большим. Как будет видно из дальнейшего, обезразмеривание множителя k_0^4 реализуется и первым, и вторым способом и, таким образом, в целом параметр разложения теории возмущений *рис.4* для функции G_{il} не может считаться малым, и для интересующих нас расстояний r он непригоден. Встает вопрос о перестройке ряда теории возмущений. Для этого обсудим вначале вопрос о том, какие из диаграмм дают максимальный вклад в данном порядке теории возмущений.

Диаграммы на *рис.4* включают в себя 1-неприводимые фрагменты (которые нельзя разделить на части, перерезав одну из линий), связанные между собой пунктирными линиями, т.е. функциями $G^{(0)}$. Интегрирование по относительным координатам неприводимых фрагментов выделяет из промежутка интегрирования область с характерными размерами r_c, что формирует определенную степень малого безразмерного параметра $k_0 r_c$. Последующее интегрирование по “координатам центра тяжести” 1-неприводимых фрагментов не содержит функций $D(r)$, так что здесь этот малый параметр появиться не может, более детальный анализ показывает, что обезразмеривание множителя k_0 осуществляется в этом случае расстоянием r, что приводит к появлению большого безразмерного параметра $k_0 r$. Таким образом, максимальный вклад в данном порядке теории возмущений дают диаграммы с максимальным числом 1-неприводимых фрагментов. Искомая же хорошая теория возмущений вообще не должна содержать 1-приводимых диаграмм.

Переход к такой теории возмущений осуществляется с помощью ***уравнения Дайсона.*** Чтобы пояснить идею перехода от ряда *рис.4* к уравнению

Дайсона, покажем, каким образом суммируется подпоследовательность диаграмм, имеющих вид первых трех слагаемых *рис.4* и соответствующих по виду диаграмм во всех старших порядках теории возмущений (т.е. “наиболее несвязных” диаграмм). Переходя к фурье-представлению и используя (40), получим

$$\begin{aligned} G_{il}(\vec{k}) &\approx G_{il}^{(0)}(\vec{k}) + G_{in}^{(0)}(\vec{k})\Sigma_{nm}^{(1)}(\vec{k})G_{ml}^{(0)} + \\ &+ G_{in}^{(0)}(\vec{k})\Sigma_{nm}^{(1)}(\vec{k})G_{ms}^{(0)}(\vec{k})\Sigma_{st}^{(1)}(\vec{k})G_{tl}^{(0)}(\vec{k}) + \ldots \end{aligned} \tag{41}$$

Используя теорему о свертке в последующих слагаемых рассматриваемой подпоследовательности диаграмм, видим, что каждый раз в них добавляется множитель $\Sigma^{(1)}(\vec{k})\,G^{(0)}(\vec{k})$ (оба сомножителя понимаются как матрицы), так что дело сводится к бесконечной геометрической прогрессии, которая легко суммируется:

$$\begin{aligned} &G(\vec{k}) \approx G^{(0)}(\vec{k}) + G^{(0)}(\vec{k})\Sigma^{(1)}(\vec{k})G^{(0)}(\vec{k}) + \\ &+ G^{(0)}(\vec{k})\Sigma^{(1)}(\vec{k})G^{(0)}(\vec{k})\Sigma^{(1)}(\vec{k})G^{(0)}(\vec{k}) + \ldots = \\ &= G^{(0)}(\vec{k})\left[I + \Sigma^{(1)}G^{(0)} + \Sigma^{(1)}G^{(0)}\Sigma^{(1)}G^{(0)} + \ldots\right] = \\ &G^{(0)}\left[I + \Sigma^{(1)}G^{(0)}(I + \Sigma^{(1)}G^{(0)} + \ldots)\right] = G^{(0)}(\vec{k})\left[I + \Sigma^{(1)}(\vec{k})G(\vec{k})\right], \end{aligned} \tag{42}$$

где $I-$ единичная матрица. Отсюда

$$G \approx G^{(0)} + G^{(0)}\Sigma^{(1)}G\ , \tag{43}$$

$$G(\vec{k}) \approx \left(I - G^{(0)}(\vec{k})\Sigma^{(1)}(\vec{k})\right)^{-1} G^{(0)}(\vec{k})\ . \tag{44}$$

Чтобы получить выражение для обратной матрицы $G^{-1}(\vec{k})$, умножим (44) слева на $(G^{(0)})^{-1}$, а справа на матрицу G^{-1}, откуда $(G^{(0)})^{-1} \approx G^{-1} + \Sigma^{(1)}$. В итоге получим соотношение

$$G^{-1}(\vec{k}) \approx (G^{(0)})^{-1}(\vec{k}) - \Sigma^{(1)}(\vec{k})\ , \tag{45}$$

представляющее собой приближенное выражение уравнения Дайсона. Его можно превратить в точное, заменив $\Sigma^{(1)}(\vec{k})$ на величину $\Sigma(\vec{k}) = \Sigma^{(1)}(\vec{k}) + \Sigma^{(2)}(\vec{k}) + \Sigma^{(3)}(\vec{k}) + \ldots$, представляющую собой сумму всех 1-неприводимых диаграмм:

$$G^{-1}(\vec{k}) = (G^{(0)}(\vec{k}))^{-1} - \Sigma(\vec{k})\ . \tag{46}$$

В частности, $\Sigma^{(2)}(\vec{k})$ определяется суммой двух диаграмм

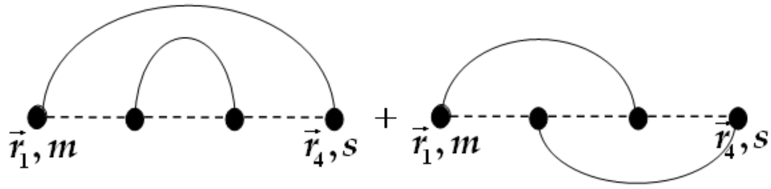
$\Sigma^{(2)}_{m,s}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_4\right) =$ 

Рис.5

Нетрудно убедиться, что замена в (42) $\Sigma^{(1)}$ на Σ правильно воспроизводит все диаграммы теории возмущений *рис.4*.

Ряд для $G^{-1}(\vec{k})$ из (46), в отличие от ряда для $G(\vec{k})$, сходится, поскольку из него исключены все 1-неприводимые диаграммы. Рассчитав матрицу $G^{-1}(\vec{k})$ в каком-то порядке теории возмущений, мы должны найти затем искомую матрицу $G(\vec{k})$ *без использования теории возмущений.*

Необходимое для конкретных расчетов обращение матриц осуществляется в нашем случае просто. Пусть необходимо обратить некоторую матрицу $A_{ij}(\vec{k})$. Учитывая изотропность системы, параметризуем ее аналогично (19):

$$A_{ij}(\vec{k}) = Q_{ij}(\vec{k})\, A_{\parallel}(k) + P_{ij}(\vec{k}) A_{\perp}(k) \quad . \tag{47}$$

Поперечный P и продольный Q проекторы в (47) удовлетворяют соотношениям:

$$P^2 = P, \qquad Q^2 = Q, \qquad PQ = QP = 0 \quad . \tag{48}$$

С учетом (48) для скалярных коэффициентов в (47) получаем

$$A_{\parallel}(k) = A_{ij}(\vec{k}) Q_{ji}(\vec{k}), \qquad A_{\perp}(k) = \frac{1}{2} A_{ij}(\vec{k}) P_{ji}(\vec{k}) . \tag{49}$$

С учетом (48) и очевидного равенства $Q + P = I$ обратная матрица будет иметь вид

$$(A^{-1})_{ij}(\vec{k}) = Q_{ij}(\vec{k})\, A^{-1}_{\parallel}(k) + P_{ij}(\vec{k}) A^{-1}_{\perp}(k) \quad . \tag{50}$$

Применим полученные соотношения к уравнению Дайсона (46). Параметризуем согласно (47) искомую функцию G_{ij} и величину Σ_{ij} (обычно называемую «массовым оператором» по аналогии с квантовой теорией поля):

$$G_{ij}(\vec{k}) = Q_{ij}(\vec{k}) G_{\parallel}(k) + P_{ij}(\vec{k}) G_{\perp}(k) \quad , \tag{51}$$

$$\Sigma_{ij}(\vec{k}) = Q_{ij}(\vec{k})\Sigma_{\|}(k) + P_{ij}(\vec{k})\Sigma_{\perp}(k)\,, \tag{52}$$

где

$$\Sigma_{\|}(k) = \Sigma_{ij}(\vec{k})Q_{ji}(\vec{k}), \qquad \Sigma_{\perp}(k) = \frac{1}{2}\Sigma_{ij}(\vec{k})P_{ji}(\vec{k})\,. \tag{53}$$

Для первого слагаемого в (46) имеем, согласно (20), (21)

$$(G^{(0)\,-1})_{ij}(\vec{k}) = -k_0^2\,Q_{ij}(\vec{k}) + (k^2 - k_0^2)P_{ij}(\vec{k}) \quad . \tag{54}$$

Подставляя (52), (54) в (46), находим

$$(G^{-1})_{ij}(\vec{k}) = (-k_0^2 - \Sigma_{\|})\,Q_{ij}(\vec{k}) + (k^2 - k_0^2 - \Sigma_{\perp})P_{ij}(\vec{k}) \quad , \tag{55}$$

откуда, используя формулу обращения матриц (50), получаем

$$G_{ij}(\vec{k}) = \frac{1}{(-k_0^2 - \Sigma_{\|})}\,Q_{ij}(\vec{k}) + \frac{1}{(k^2 - k_0^2 - \Sigma_{\perp})}P_{ij}(\vec{k}) \quad . \tag{56}$$

Перейдем в (56) к координатному представлению. Нас будет интересовать вопрос о том, как повлияет учет флуктуаций на вид расходящейся сферической волны (27). Вклад в такую волну дает только второе слагаемое в (56)

$$G_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\;\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k^2 - k_0^2 - \Sigma_{\perp}(k)}P_{ij}(\vec{k})\;. \tag{57}$$

Будем интересоваться асимптотикой этого выражения в дальней зоне (т.е. формально при $r \to \infty$). Из теории Фурье-преобразований известно, что такая асимптотика определяется минимальным корнем уравнения $k^2 - k_0^2 - \Sigma_{\perp}(k) = 0$ (приравняли нулю знаменатель в (57)). Считая $\Sigma_{\perp}(k)$ поправкой, можно это уравнение решать итерациями: в нулевом приближении $k = k_0$, в первом приближении

$$k = \sqrt{k_0^2 + \Sigma_{\perp}(k_0)} = k_0\sqrt{1 + \frac{\Sigma_{\perp}(k_0)}{k_0^2}} \approx k_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\Sigma_{\perp}(k_0)}{k_0^2}\right) \equiv k_{eff} = k_0 + \triangle k\;. \tag{58}$$

В приближении (58) интеграл (57) вычисляется аналогично (25), что для дальней зоны $k_0 r \gg 1$ приводит к прежнему соотношению (27) с заменой k_0 на $k_{eff.}$:

$$G_{il}(\vec{r}) = \frac{e^{i k_{eff.} r}}{4\pi r}\left[\delta_{il} - \breve{r}_i\breve{r}_l\right], \qquad k_0 r \gg 1\;. \tag{59}$$

Из этого выражения видно, почему при вычислении $G(r)$ нельзя использовать «лобовую» теорию возмущений: даже если поправка к k_0 в (58) относительно мала $\left(\frac{|\triangle k|}{k_0} \ll 1\right)$, раскладывать в ряд выражение (59) нельзя, т.к. эта поправка умножается на большой параметр r, так что величина $\triangle k \cdot r$ не мала. При вычислении же самой величины $\triangle k$ уже можно использовать теорию возмущений, т.е. последовательно учитывать в Σ вклад $\Sigma^{(1)}$, затем $\Sigma^{(2)}$ и т.д.

Изменение показателя экспоненты в (59) по сравнению со случаем распространения сигнала в среде без флуктуаций (27) сводится к относительно малому изменению длины волны (не очень интересный эффект) и к появлению экспоненциального затухания. Последнее имеет место благодаря тому, что величина $\Sigma_\perp(k)$ оказывается комплексной

$$\Sigma_\perp(k) = \Sigma'_\perp(k) + i\Sigma''_\perp(k), \tag{60}$$

так что выражение (60) соответствует экспоненциальному затуханию волны

$$G(r) \sim e^{-\frac{r}{l_{ext}}}, \tag{61}$$

где длина затухания (длина экстинкции) дается выражением

$$l_{ext} = \left(\frac{\Sigma''_\perp(k_0)}{2k_0}\right)^{-1}. \tag{62}$$

Подчеркнем, что в данном случае экспоненциальное затухание сигнала связано не с поглощением его веществом, а с рассеянием, т.е. превращением исходного сигнала в диффузный свет (поэтому ввели специальный термин «экстинкция», вместо того чтобы говорить о «длине затухания»).

Получим теперь выражение для длины затухания l_{ext} в первом порядке теории возмущения («однопетлевое приближение»), т.е. полагая приближенно $\Sigma \approx \Sigma^{(1)}$. Запишем выражение для Фурье-образа $\Sigma_{ij}(\vec{k})$ из (40) с использованием теоремы о свертке и формулы (22):

$$\begin{aligned}\Sigma_{ij}(\vec{k}) &\approx \frac{k_0^4}{(2\pi)^3 \varepsilon_0^2} \int d\vec{k}_1\, G_{ij}^{(0)}(\vec{k}_1) D(\vec{k} - \vec{k}_1) = \\ &= \frac{k_0^4}{(2\pi)^3 \varepsilon_0^2} \int d\vec{k}_1 \left(\frac{\delta_{ij} - \breve{k}_{1i}\breve{k}_{1j}}{k_1^2 - k_0^2} - \frac{\breve{k}_{1i}\breve{k}_{1j}}{k_0^2} \right) D(\vec{k} - \vec{k}_1).\end{aligned} \tag{63}$$

Как следует из (62), длина экстинкции определяется мнимой частью этого выражения, однако Фурье-образ $D(k)$ является вещественной величиной и создается впечатление, что у $\Sigma(\vec{k})$ из (63) отсутствует мнимая часть. Так и есть для второго слагаемого в (63). Первое же слагаемое содержит полюс при $k_1 = k_0$ в множителе $\dfrac{1}{k_1^2 - k_0^2} = \dfrac{1}{(k_1 - k_0)(k_1 + k_0)}$, правило обхода которого при интегрировании диктуется тем, что k_0 имеет малую мнимую добавку (см. формулы (16), (14)). Используем ***формулу Сохоцкого***:

$$\int dx \frac{f(x)}{x \mp i\sigma} = \pm\pi i \int dx \delta(x) f(x) + P\int dx \frac{f(x)}{x} = \pm\pi i f(0) + P\int dx \frac{f(x)}{x},$$
$$\sigma \to +0 \tag{64}$$

где P – символ интеграла в смысле главного значения. Роль σ в (64) играет $\mathrm{Im}(k_0)$, а роль x – разность $k_1 - \mathrm{Re}(k_0)$, $\mathrm{Re}(k_0) = k_0$ при $\sigma \to 0$, а функция f определяется выражением $\dfrac{\delta_{ij} - \breve{k}_{1i}\breve{k}_{1j}}{k_1 + k_0} D(\vec{k} - \vec{k}_1)$. Вклад в $\mathrm{Im}\,\Sigma$ дается первым слагаемым в правой части формулы Сохоцкого, поэтому из (63), (64) получаем:

$$\Sigma''_{ij}(k) = \frac{\pi k_0^4}{(2\pi)^3 \varepsilon_0^2} \int d\vec{k}_1 \frac{\delta(k_1 - k_0) D(\vec{k} - \vec{k}_1)}{k_1 + k_0} \left(\delta_{ij} - \breve{k}_{1i}\breve{k}_{1j}\right). \tag{65}$$

Чтобы получить отсюда величину $\Sigma_\perp(k)$ надо, согласно (53), умножить это выражение на $\frac{1}{2} P_{ji}(\vec{k}) = \frac{1}{2}\left(\delta_{ji} - \breve{k}_j \breve{k}_i\right)$ и свернуть по значкам i и j. Рассматривая значковую свертку отдельно, находим

$$\frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \breve{k}_{1i}\breve{k}_{1j}\right)\left(\delta_{ji} - \breve{k}_j \breve{k}_i\right) = \frac{1}{2}\left(3 - 1 - 1 + (\breve{k}_{1i}\breve{k}_i)^2\right) = \frac{1 + \cos^2\theta}{2} \quad , \tag{66}$$

где θ – угол между единичными векторами $\breve{k}$ и $\breve{k}_1$. Подставляя (65) в (53) и используя (66), получаем

$$\Sigma''_\perp(k) = \frac{\pi k_0^4}{(2\pi)^3 \varepsilon_0^2} \int d\vec{k}_1 \frac{\delta(k_1 - k_0) D(\vec{k} - \vec{k}_1)}{k_1 + k_0} \cdot \frac{1 + \cos^2\theta}{2}. \tag{67}$$

Отметим, что это выражение отличается от соответствующей величины $\Sigma''(k)$ для скалярной задачи лишь дополнительным множителем $\dfrac{1+\cos^2\theta}{2}$. Переходя в (67) к сферическим координатам $\int d\vec{k}_1 ... = \int\limits_0^\infty dk_1 k_1^2 \int d\breve{k}_1 ...$ и выполняя интегрирование по модулю k_1 с использованием δ-функции $\delta(k_1 - k_0)$, получаем

$$\Sigma''_\perp(k) = \frac{\pi k_0^4 \cdot k_0^2}{2k_0(2\pi)^3 \varepsilon_0^2} \int d\breve{k}_1\, D(\vec{k} - k_0\breve{k}_1) \cdot \frac{1+\cos^2\theta}{2} \,. \qquad (68)$$

Правая часть (68) не зависит от направления вектора $\vec{k}$, т.е. от $\breve{k}$. Модуль же этого вектора при вычислении длины экстинкции согласно (62) надо положить равным k_0, т.е. записать $\vec{k} = k_0\breve{k}$. С учетом этого из (62) находим

$$l_{ext}^{-1} = \frac{k_0^4}{64\pi^2\varepsilon_0^2} \int d\breve{k}_1 D\Big(k_0(\breve{k} - \breve{k}_1)\Big)\Big(1+\cos^2\theta\Big) \,.$$

Проводя интегрирование в полярной системе координат $\int d\breve{k}_1 ... = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \sin\theta ...$ и учитывая, что подынтегральное выражение не зависит от угла φ, получаем

$$l_{ext}^{-1} = \frac{k_0^4}{32\pi\,\varepsilon_0^2} \int\limits_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, D\big(q(\theta)\big)\Big(1+\cos^2\theta\Big), \qquad q(\theta) \equiv 2k_0 \sin(\theta/2), \quad (69)$$

где аргумент функции D в (69) преобразован с учетом равенства

$$k_0^2\left(\breve{k} - \breve{k}_1\right)^2 = k_0^2(2 - 2\cos\theta) = 4k_0^2 \sin^2(\theta/2) \,.$$

Формула (69) получена без детализации вида коррелятора D, в дальнейшем мы конкретизируем D применительно к расчету длины затухания в системах, близких к критической точке.

Интенсивность рассеяния в борновском приближении (однократное рассеяние).

Измеряемой в эксперименте величиной является обычно средняя плотность потока энергии (интенсивность), которая для плоской электромагнитной волны пропорциональна квадрату модуля поля $I(\vec{r},t) \sim \left\langle \left| \hat{\vec{E}}(\vec{r},t) \right|^2 \right\rangle$. Типичная установка по изучению рассеяния имеет следующий вид

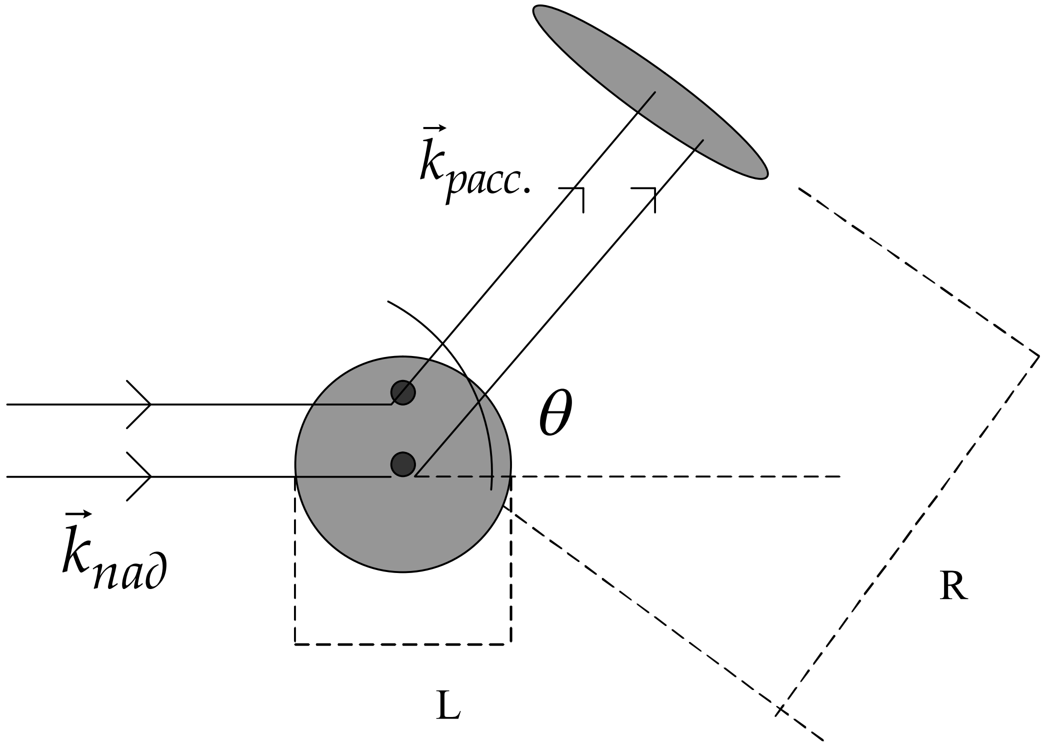


Рис.6. Схема однократного рассеяния

Предполагается, что далеко слева находится источник света, генерирующий плоскую монохроматическую поперечную волну $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \exp[i\vec{k}_{пад}\vec{r} - i\omega t]$ ($\left(\vec{E}_0\vec{k}_{пад}\right) = 0$), распространяющуюся в направлении $\breve{k} = \dfrac{\vec{k}_{пад}}{k_{пад}}$ по среде с постоянной диэлектрической проницаемостью ε_0, так что $\left|\vec{k}_{пад}\right| = k_0 \equiv \dfrac{\sqrt{\varepsilon_0}\,\omega}{c}$. В области, условно изображенной на рисунке кружком, диэлектрическая проницаемость испытывает флуктуации $\hat{\varepsilon}(\vec{r}) = \varepsilon_0 + \delta\hat{\varepsilon}(\vec{r})$, что приводит к эффекту рассеяния исходной волны. Мы будем считать для простоты, что постоянная составляющая ε_0 диэлектрической проницаемости в этой области совпадает со значением во всем остальном пространстве, чтобы исключить эффекты геометрической оптики (преломление и отражение света на границе двух сред) и рассматривать эффекты рассеяния «в чистом виде».

Буквой L на рисунке обозначен характерный размер рассеивающей системы, а буквой R – ее расстояние до измеряющего интенсивность прибора, условно обозначенного линзой. Будем рассматривать ситуацию, когда $R \gg L$. Величина L будет также полагаться малой по сравнению с длиной экстинкции l_{ext}, что позволяет пренебречь затуханием волны внутри рассеивающего объема. В то же время величина R намного превышает, естественно, длину волны падающего света $R \gg \lambda = \dfrac{2\pi}{k_0}$. Угол θ между направлениями падающей и рассеянной волны носит название *угла рассеяния*, он меняется в пределах от нуля ("рассеяние вперед") до π ("рассеяние назад").

В рассматриваемой задаче нас будет интересовать решение $\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)$ однородного уравнения (10) (при $\vec{j}=0$), обращающееся в плоскую волну $\vec{E}^{(0)}(\vec{r},t)=\vec{E}^{(0)}\exp[i\vec{k}_{пад}\vec{r}-i\omega t]$ вдали от рассеивающего объема. Записывая его в виде $\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)=\hat{\vec{E}}(\vec{r})\exp[-i\omega t]$, для зависящей только от координат функции $\hat{\vec{E}}(\vec{r})$ получим уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r_i\,\partial r_n}-\delta_{in}\,\Delta\right)\hat{E}_n(\vec{r})-k_0^2\left(1+\frac{\delta\,\hat{\varepsilon}(\vec{r})}{\varepsilon_0}\right)\hat{E}_i(\vec{r})=0\,. \qquad (70)$$

Используя функцию Грина G_0, перейдем к эквивалентному интегральному уравнению, имеющему вид, аналогичный (33)

$$\hat{E}_i(\vec{r})=E_i^{(0)}(\vec{r})+\frac{k_0^2}{\varepsilon_0}\int d\vec{r}_1 G_{in}^{(0)}(\vec{r}-\vec{r}_1)\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_1)\hat{E}_n(\vec{r}_1), \quad E_i^{(0)}(\vec{r})\equiv E_i^{(0)}\exp[i\vec{k}_{пад}\vec{r}], \qquad (71)$$

где интегрирование проводится по области, занимаемой рассеивающей системой. В отличие от (33), где неоднородный член уравнения был обусловлен локализованным в начале координат источником, неоднородное слагаемое в (71) обеспечивает требуемое обращение решения в плоскую волну вдали от рассеивающего объема (с учетом затухания функции Грина $G^{(0)}(\vec{r}-\vec{r}_1)$ при больших значениях аргумента, т.е. вдали от рассеивающего объема). Итерационное решение уравнения (71) имеет вид

$$\hat{E}_i(\vec{r})=E_i^{(0)}(\vec{r})+\frac{k_0^2}{\varepsilon_0}\int d\vec{r}_1 G_{in}^{(0)}(\vec{r}-\vec{r}_1)\delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_1)E_n^{(0)}(\vec{r}_1)+\dots\,. \qquad (72)$$

Для интенсивности $I = \left\langle \left| \hat{\vec{E}}(\vec{r},t) \right|^2 \right\rangle = \left\langle \left| \hat{\vec{E}}(\vec{r}) \right|^2 \right\rangle = \left\langle \hat{E}_i(\vec{r}) \hat{E}_i^*(\vec{r}) \right\rangle$ из (72) с учетом (6) находим

$$I = \left| \vec{E}^{(0)} \right|^2 + \frac{k_0^4}{\varepsilon_0^2} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 G_{in}^{(0)}(\vec{r}-\vec{r}_1) G_{im}^{(0)*}(\vec{r}-\vec{r}_2) E_n^{(0)}(\vec{r}_1) E_m^{(0)*}(\vec{r}_2) \left\langle \delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_1) \delta\hat{\varepsilon}(\vec{r}_2) \right\rangle + \dots . \tag{73}$$

Первое слагаемое в (73) представляет собой интенсивность падающей волны, второе – интенсивность рассеяния $I_{расс.}$ в низшем, борновском, приближении (интенсивность однократного рассеяния). Для небольших рассеивающих объемов, линейный размер которых намного меньше длины экстинкции, борновское приближение вполне оправдано. Поскольку мы интересуемся большими расстояниями от рассеивающего объема, то для функций Грина $G^{(0)}$ в (74) можно воспользоваться их асимптотикой в дальней зоне (27). Подставляя в (73) также $\vec{E}^{(0)}(\vec{r})$ из (71) и учитывая (7), получаем

$$\begin{gathered} I_{расс.} = \frac{k_0^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \frac{\exp[ik_0(\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right| - \left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|) + i\vec{k}_{пад}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right| \left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|} D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \\ \cdot (\delta_{in} - \breve{r}_i \breve{r}_n)(\delta_{im} - \breve{r}_i \breve{r}_m) E_n^{(0)} E_m^{(0)}, \end{gathered} \tag{74}$$

где $\breve{r}$ – единичный вектор в направлении рассеяния. При записи значковых структур функций Грина в (74) мы пренебрегли в аргументах $\vec{r}-\vec{r}_1$ и $\vec{r}-\vec{r}_2$ этих функций величинами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, поскольку они не превосходят по модулю характерного размера области интегрирования L, который в свою очередь намного меньше расстояния до прибора $r \approx R$. Сворачивая в (74) значки, находим

$$\begin{gathered} (\delta_{in} - \breve{r}_i \breve{r}_n)(\delta_{im} - \breve{r}_i \breve{r}_m) E_n^{(0)} E_m^{(0)} = \left(E^{(0)}\right)^2 - \left(\breve{r}\,\vec{E}^{(0)}\right)^2 = \\ = \left(E^{(0)}\right)^2 \left(1 - \cos^2\theta'\right) = \left(E^{(0)}\right)^2 \sin^2\theta' , \end{gathered} \tag{75}$$

где θ' – угол между направлением вторичной волны и поляризацией падающей волны.

Выражение (74) допускает дальнейшие упрощения, обусловленные уже использованным нами неравенством $\frac{L}{R} \ll 1$. Благодаря этому неравенству для знаменателей в (74) можно с малой *относительной* погрешностью $\sim \frac{L}{R}$ положить $\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right| \left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|} \cong \frac{1}{R^2}$. В показателе экспоненты в (74) такой точности,

однако, недостаточно, поскольку здесь нужна малая *абсолютная* погрешность. При этом надо помнить, что расстояния в показателе экспоненты обезразмериваются длиной волны $\lambda = \dfrac{2\pi}{k_0}$, которая намного меньше прочих характерных размеров. Уточним расчет:
имеем $(\vec{r} - \vec{r}_1)^2 = r^2 - 2\vec{r}\,\vec{r}_1 + r_1^2 \simeq r^2 - 2\vec{r}\,\vec{r}_1$, откуда находим
$\left|\vec{r} - \vec{r}_1\right| \simeq \sqrt{r^2 - 2\vec{r}\,\vec{r}_1} = r\sqrt{1 - 2\vec{r}\,\vec{r}_1 / r^2} \simeq r(1 - \vec{r}\,\vec{r}_1 / r^2) = r - \vec{r}\,\vec{r}_1 / r$ и, аналогично, $\left|\vec{r} - \vec{r}_2\right| \simeq r - \vec{r}\,\vec{r}_2 / r$. Подставляя эти выражения в показатель экспоненты в (74), получаем для него приближенное выражение $i\left(\vec{k}_{пад} - k_0 \dfrac{\vec{r}}{r}\right)(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Здесь отношение $\dfrac{\vec{r}}{r} = \breve{r}$ представляет собой единичный вектор направления рассеянной волны, а его произведение на k_0 – не что иное, как волновой вектор рассеянной волны $\vec{k}_{расс} = k_0\breve{r}$. Таким образом, рассматриваемый показатель экспоненты можно записать в виде $-i\vec{q}\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$, где $\vec{q} \equiv \vec{k}_{расс} - \vec{k}_{пад}$ - так называемый ***переданный импульс***. Это название связано с тем, что величина $\hbar\vec{k}$ в квантовой механике является импульсом фотона, таким образом $\hbar\vec{k}_{пад}$ – импульс падающего фотона, $\hbar\vec{k}_{расс}$ – импульс рассеянного, а $\hbar\vec{q} = \hbar\vec{k}_{пад} - \hbar\vec{k}_{расс}$ – дополнительный импульс, который рассеивающая среда "передала" фотону.

Подставляя полученные результаты в (74), находим

$$I_{расс.} = \frac{\left(k_0^2 E^{(0)}\right)^2 \sin^2\theta'}{(4\pi\varepsilon_0 R)^2} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \exp[-i\vec{q}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] D(\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|) \quad . \tag{76}$$

Подынтегральное выражение в (76) зависит только от разности $\vec{r}\,' = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, которую естественно выбрать в качестве новой переменной интегрирования, в качестве второй переменной выберем $\vec{R}\,' = \dfrac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$. Учитывая, $d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 = d\vec{r}\,' d\vec{R}\,'$, из (76) имеем

$$I_{расс.} = \frac{\left(k_0^2 E^{(0)}\right)^2 \sin^2\theta'}{(4\pi\varepsilon_0 R)^2} \int d\vec{r}\,' \int d\vec{R}\,' \exp(-i\vec{q}\vec{r}\,') D(r'). \tag{77}$$

Интеграл по $d\vec{R}\,'$ дает объем системы V, а интеграл по $d\vec{r}\,'$ – Фурье-образ функции $D(r)$. Окончательно получаем

$$I_{pacc.} = \frac{\left(k_0^2 E^{(0)}\right)^2 \sin^2\theta' \, V \, D(q)}{(4\pi\varepsilon_0 R)^2} \quad . \tag{78}$$

Заметим, что формула (78) отличается лишь множителем $\sin^2\theta'$ от аналогичной формулы, полученной для скалярного поля [1]. Эта формула является основным результатом борновского приближения в рассеянии. Обсудим некоторые ее свойства.

1). Как видно из (78), интенсивность рассеяния пропорциональна четвертой степени k_0, т.е. обратно пропорциональна четвертой степени длины волны – закон Рэлея. Тем самым свет рассеивается тем сильнее, чем меньше его длина волны, этим объясняется голубой цвет неба.

2). Интенсивность рассеяния пропорциональна объему рассеивающей системы. Это естественное на первый взгляд свойство относится только к рассматриваемому однократному рассеянию.

3). Интенсивность $I_{pacc.}$ зависит от направления рассеяния $\breve{r}$ через множитель $\sin^2\theta'$ и величину переданного импульса $\vec{q}$. Функция $D(q)$ зависит только от модуля q, из определения получаем

$q^2 = k_{pacc}^2 + k_{na\partial}^2 - 2\vec{k}_{pacc}\vec{k}_{na\partial} = 2k_0^2(1-\cos\theta) = 4k_0^2\sin^2\theta/2$, где учтено, что $\left|\vec{k}_{pacc}\right| = \left|\vec{k}_{na\partial}\right| = k_0$. Таким образом

$$q = 2k_0 \sin\theta/2 \, , \tag{79}$$

откуда видно, что величина переданного импульса меняется от $q=0$ при $\theta=0$ до $q=2k_0$ при $\theta=\pi$. Функция $D(r)$ отлична от нуля в области порядка корреляционного радиуса r_c, поэтому максимальное значение показателя экспоненты в Фурье-образе $D(q) = \int d\vec{r}\,'\exp(-i\vec{q}\vec{r}\,')D(r')$ – порядка $2k_0 r_c = 4\pi r_c/\lambda \ll 1$ для случаев, когда длина волны значительно превышает величину радиуса корреляции. Тогда $D(q) \simeq D(q=0)$ и интенсивность рассеяния зависит от направления рассеяние только через множитель $\sin^2\theta'$, в аналогичной ситуации для рассеяния скалярного поля интенсивность рассеяния вовсе не зависела от угла.

Величина переданного импульса возрастает до такой степени, что появляется нетривиальная угловая зависимость рассеяния через функцию $D\big(q(\theta)\big)$ в двух случаях: либо если мы используем источник с более “жестким” излучением, чем видимый свет (с меньшей длиной волны, т.е. с большей частотой), либо при приближении к точкам фазового перехода II рода и критическим точкам, когда радиус корреляции аномально возрастает.

Соотношение (78) используют для экспериментального определения корреляционной функции $D(r)$: измеряя интенсивность рассеяния I_{pacc} для углов $0 \le \theta \le \pi$ и исключая из нее зависимость от угла θ' делением на

$\sin^2\theta'$, находят $D(q)$ в диапазоне $0 \le q \le 2k_0$, затем обратным преобразованием Фурье находят $D(r)$

$$D(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{q}\,\exp(i\vec{q}\,\vec{r})\,D(q) = \frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^\infty dq\,q\sin(qr)\,D(q)\ , \qquad (80)$$

В последнем интеграле эксперимент позволяет определить $D(q)$ лишь в диапазоне $0 \le q \le 2k_0$. Функция $D(q)$ при больших q убывает с характерным масштабом r_c^{-1}. Чтобы можно было с достаточной точностью отбросить вклад области $2k_0 < q < \infty$, необходимо выполнение неравенства $2k_0 r_c \gg 1$. Чтобы добиться этого, используют источники с “жестким ” излучением (рентген), т.е. с малой длиной волны λ и большим k_0. Видимый свет используется при исследованиях систем вблизи точек фазовых переходов II рода и критических точек, где радиус корреляции r_c аномально велик.

Рассмотрим в заключение *полную интенсивность рассеяния* $I_{полн}$, т.е. суммарное рассеяние по всем направлениям $\breve{r}$ рассеянной волны

$$I_{полн} = \int d\breve{r}\, I_{расс}(\breve{r}). \qquad (81)$$

Выберем в качестве оси z декартовой системы координат направление распространения падающей волны $\breve{k}_{пад}$, а в качестве оси x – вектор поляризации этой волны $\breve{\xi} \equiv \vec{E}^{(0)} / E^{(0)}$, а затем введем полярную систему координат, показанную на рисунке

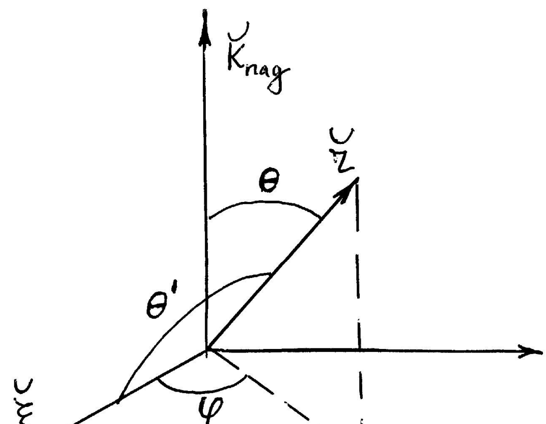


Рис. 7

В такой системе интегрирование по направлениям вектора $\breve{r}$ дается выражением $\int d\breve{r}... = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta...$, а скалярное произведение $\left(\breve{r}\,\breve{\xi}\right) = \cos\theta'$ определяется формулой $\left(\breve{r}\breve{\xi}\right) = \left(\breve{r}_\perp\breve{\xi}\right) = \sin\theta\,\cos\varphi$, поскольку $\left|\breve{r}_\perp\right| = \sin\theta$. С учетом (79) видно, что интенсивность рассеяния $I_{расс}$ из (78) зависит от угла φ только через множитель $\sin^2\theta' = 1-\cos^2\theta' = 1-\sin^2\theta\cos^2\varphi$. Интегрирование по φ легко выполняется:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\,\sin^2\theta' = \int_0^{2\pi} d\varphi\left(1-\sin^2\theta\cos^2\varphi\right) = 2\pi\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right) = \pi\left(1+\cos^2\theta\right). \qquad (82)$$

Подставляя (78) и (82) в (81), находим

$$I_{полн} = \frac{k_0^4 E^{(0)2} V}{16\pi\varepsilon_0^2 R^2}\int_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta\, D\big(q(\theta)\big)\left(1+\cos^2\theta\right). \qquad (83)$$

Сравнивая это выражение с формулой (69) для длины экстинкции, получаем

$$2l_{ext}^{-1} = \frac{I_{полн} R^2}{V\left(E^{(0)}\right)^2}. \qquad (84)$$

Соотношение (84), связывающее длину затухания с полной интенсивностью рассеяния является частным случаем так называемой *оптической теоремы.* Его физический смысл состоит в том, что потеря энергии исходной волны и, как следствие, ее экспоненциальное затухание, равна суммарной энергии рассеяния единицей объема по всем направлениям. Множитель 2 в левой части (59) связан с тем, что показатель экспоненты, определяющей затухание интенсивности I, в два раза больше соответствующего показателя для поля $\vec{E}$.

Рассеяние вблизи критических точек.

Корреляционная функция $D(r)$ в окрестности критической точки приобретает две характерные особенности:

1) как уже отмечалось, в этой области аномально возрастает радиус корреляции, изменяющийся при приближении к критической точке по закону $r_c = r_0\tau^{-\nu}$, где r_0 – некоторый микромасштаб (порядка значения r_c вдали от точки), $\tau = \dfrac{T-T_c}{T_c}$ - безразмерное отклонение температуры T от критической T_c, ν - так называемый критический индекс радиуса корреляции, численно $\nu \simeq 0.63$;
2) в области $r \gg r_0$ функция $D(r)$ приобретает универсальный вид, не зависящий от конкретного вещества и с хорошей точностью описывается формулой Орнштейна-Цернике

$$D(r) = Ar_0 \frac{\exp(-r/r_c)}{r}, \qquad r \gg r_0 \ , \tag{85}$$

где различные вещества отличаются лишь значениями двух параметров – микромасштаба r_0 и амплитуды A.

В области $r \le r_0$ функция $D(r)$ по-прежнему остается не универсальной, но многие интегральные характеристики в окрестности критической точки целиком определяются областью $r \gg r_0$ и поэтому также приобретают универсальное поведение. К их числу относится обратная длина затухания (47), неограниченно возрастающая при $T \to T_c$. Вскоре мы убедимся в этом прямым расчетом. Поскольку основной вклад в интегральные характеристики с функцией (85) определяются областью больших расстояний (вследствие медленного затухания этой функции), ее можно для простоты использовать во всем диапазоне $0 \le r < \infty$.

Нам потребуется Фурье-образ функции (85), его легко найти, если учесть, что функция (85) отличается от сферической волны (24), имеющей Фурье-образ $\frac{1}{k^2 - k_0^2}$, лишь амплитудой и заменой $k_0 \to i/r_c$. Из этого следует, что

$$D(k) = \frac{4\pi A r_0}{k^2 + r_c^{-2}} \ . \tag{86}$$

Подставляя эту формулу в (78) и учитывая (79), для интенсивности рассеяния получаем

$$I_{расс.} = \frac{\left(k_0^2 E^{(0)}\right)^2 \sin^2\theta' \, V A r_0}{4\pi(\varepsilon_0 R)^2} \cdot \frac{1}{4k_0^2 \sin^2(\theta/2) + r_c^{-2}} \, . \tag{87}$$

Из этого соотношения видно, что в окрестности критической точки индикатриса рассеяния “вытянута вперед”, т.е. максимальна при $\theta = 0$, в самой критической точке, когда $r_c^{-1} = 0$, этот максимум превращается в сингулярность $\sim \theta^{-2}$.

Перейдем к вычислению длины затухания. Подставляя (86) в (69), получаем

$$l_{ext}^{-1} = \frac{k_0^4 A r_0}{8\varepsilon_0^2} \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \frac{1}{4k_0^2 \sin^2(\theta/2) + r_c^{-2}} \left(1 + \cos^2\theta\right) \ . \tag{88}$$

Делая в (88) замену переменной $\cos\theta = x$ и учитывая равенство $4\sin^2(\theta/2) = 2(1-\cos\theta) = 2(1-x)$, имеем

$$l_{ext}^{-1} = \frac{Ar_0 k_0^4}{8\varepsilon_0^2} \int_{-1}^{1} dx \frac{1+x^2}{2k_0^2 + r_c^{-2} - 2k_0^2 x} = \frac{Ar_0 k_0^2}{16\varepsilon_0^2} \cdot \varphi \ , \tag{89}$$

где

$$\varphi \equiv \int_{-1}^{1} dx \frac{1+x^2}{b-x}, \qquad b \equiv 1 + \frac{1}{2(k_0 r_c)^2}. \tag{90}$$

Интеграл φ из (90) легко вычисляется:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_{-1}^{1} dx \frac{1+x^2}{b-x} = \int_{-1}^{1} dx \frac{1+x^2-b^2+b^2}{b-x} = \int_{-1}^{1} dx \left(\frac{1+b^2}{b-x} - b - x \right) = \\ &= \left[-(1+b^2)\ln(b-x) - bx - x^2/2 \right]\Big|_{x=-1}^{x=1} = (1+b^2)\ln\left(\frac{b+1}{b-1}\right) - 2b \end{aligned} \quad . \tag{91}$$

Подставляя в это выражение величину b из (90), находим

$$\varphi = \left[2 + \frac{1}{(k_0 r_c)^2} + \frac{1}{4(k_0 r_c)^4} \right] \ln\left[4(k_0 r_c)^2 + 1 \right] - 2\left[1 + \frac{1}{2(k_0 r_c)^2} \right]. \tag{92}$$

В близкой окрестности критической точки, когда радиус корреляции возрастает настолько, что становится $k_0 r_c \gg 1$ (т.е. $r_c \gg \lambda$), формула (92) приобретает вид

$$\varphi \simeq 4\ln(k_0 r_c), \tag{93}$$

откуда с учетом (89) заключаем, что обратная длина затухания логарифмически возрастает при приближении к критической точке, и в самой точке обращается в бесконечность:

$$l_{ext}^{-1} \simeq \frac{Ar_0 k_0^4}{4\varepsilon_0^2} \ln(k_0 r_c) \ . \tag{94}$$

Длина затухания обращается, следовательно, в ноль, т.е. луч мгновенно затухает, войдя в такую среду. Этот не физичный факт является следствием того, что сильное затухание является следствием сильного рассеяния, поэтому уже нельзя ограничиваться первым слагаемым в Σ, как это сделано при выводе формулы (69).

Сильное затухание в критической точке приводит к смене самого закона затухания на “сверхэкспоненциальный”, т.е. на более быстрый, чем экспонента вида (61) (см., например, [1]).

В заключение этого раздела отметим, что обращение обратной длины затухания l_{ext}^{-1} в бесконечность в критической точке можно было увидеть, не производя явных вычислений. Полагая в (88) $r_c^{-1} = 0$, имеем

$$l_{ext}^{-1} = \frac{k_0^4 A r_0}{8\varepsilon_0^2} \int_0^{\pi} d\theta \; \frac{\sin\theta\left(1+\cos^2\theta\right)}{4k_0^2 \sin^2(\theta/2)} \;, \qquad T = T_c \,. \tag{95}$$

При $\theta \to 0$ подынтегральное выражение в (95) ведет себя как $\frac{1}{\theta}$, т.е. содержит неинтегрируемую особенность за счет аномально сильного рассеяния на нулевой угол.

Литература

1. Т.Л. Ким. Рассеяние волн в случайно-неоднородных средах: модель скалярного поля. СПбГУ, 2010, 32 с.
2. А. Исимару. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т.1, Т.2. М. Мир, 1981.
3. С.М. Рытов, Ю.А. Кравцов, В.И. Татарский. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. М. Наука, 1978.
4. И.Л. Фабелинский. Молекулярное рассеяние света. М. Наука, 1965.
5. V.L. Kuz'min, V.P. Romanov, L.A. Zubkov. Propagation and scattering of light in fluctuating media. Physics Reports. V. 248. N 2-5. p.71-368. 1994.

С о д е р ж а н и е