FRACTALS

V. V. ZHIKOV

The article is devoted to the fractal geometry elements. Classical fractals are described together with calculation of their Hausdorff dimension. The notions of self-similarity and iterated systems are also discussed.

Статья посвящена началам фрактальной геометрии и содержит прежде всего описание классических фракталов и вычисление их хаусдорфовой размерности. Подробно обсуждается свойство самоподобия фракталов и дается представление о том, как могут быть построены новые фрактальные объекты.

ФРАКТАЛЫ

В. В. ЖИКОВ

Владимирский государственный педагогический университет им. П.Н. Лебедева-Полянского

ВВЕДЕНИЕ

Слово *фрактал* введено в 1975 году Б. Мандельбротом. Оно произведено от латинского *fractus*, от которого происходят английские термины *fraction*, *fractional* – дробь, дробный. С математической точки зрения фрактал – это прежде всего множество с *дробной размерностью*.

Мы хорошо представляем себе, что точка имеет размерность 0, отрезок и окружность – размерность 1, круг и сфера – размерность 2. С одномерными объектами мы связываем понятие длины, с двумерными – площади и т.д. Но как можно представить себе множество с размерностью 3/2? По-видимому, для этого требуется нечто промежуточное между длиной и площадью, и если длину условно назвать 1-мерой, а площадь – 2-мерой, то требуется (3/2)-мера.

В 1919 году Ф. Хаусдорф действительно определил такую α-меру для любого $\alpha \geq 0$ и на этой основе каждому множеству в евклидовом пространстве сопоставил число, названное им метрической размерностью. Он же привел первые примеры множеств с дробной размерностью. Оказалось, что дробную размерность имеют канторово множество, кривая Кох и другие экзотические объекты, до недавнего времени малоизвестные за пределами математики.

Идеи Хаусдорфа, не опубликовавшего больше ни одной работы в этом направлении, были развиты А.С. Безиковичем, который длительное время был автором или соавтором практически всех работ по данной тематике. В последующие годы размерность Хаусдорфа–Безиковича получила применение в некоторых разделах математики, но ничто не предвещало той популярности этого понятия за пределами математики, которая сейчас наблюдается. В частности, этому способствовала научная деятельность Б. Мандельброта, который в своих книгах привел яркие примеры применения фракталов к объяснению некоторых природных явлений. Мандельброт уделил большое внимание интересному свойству, которым обладают многие фракталы. Дело в том, что часто фрактал можно разбить на сколь угодно малые части так, что каждая часть окажется просто уменьшенной копией целого. Иначе говоря, если мы будем смотреть на фрактал в микроскоп, то с удивлением увидим ту же самую картину, что и без микроскопа.

Это свойство *самоподобия* резко отличает фракталы от объектов классической геометрии. Действительно, возьмем такой привычный объект, как график дифференцируемой функции. Если мы направим микроскоп в какую-то точку этого графика, то при увеличении изображения увидим прямую линию – касательную в данной точке. Другими словами, классические объекты упрощаются при увеличении изображения, "в малом" они линейны (прямая, плоскость и т.д.), в то время как фракталам присуща "внутренняя бесконечность".

Вот что писал Б. Мандельброт, сопоставляя классическую геометрию с новой – фрактальной геометрией: "Почему геометрию часто называют холодной и сухой? Одна из причин заключается в ее неспособности описать форму облака, горы, дерева или берега моря. Облака – это не сферы, линии берега – это не окружность, и кора не является гладкой, и молния не распространяется по прямой. Природа демонстрирует нам не просто более высокую степень, а совсем другой уровень сложности. Число различных масштабов длин в структурах всегда бесконечно. Существование этих структур бросает нам вызов в виде трудной задачи изучения тех форм, которые Евклид отбросил как бесформенные, – задачи исследования морфологии аморфного".

В статье описаны классические фракталы, вычислена их хаусдорфова размерность, а также дана математическая формулировка свойства самоподобия. Последняя позволяет строить новые фрактальные объекты.

Отметим, что вычисление размерности всегда требует некоторой изобретательности. Строгое определение хаусдорфовой размерности довольно громоздко, и его непросто применять для вычислений. Физики предпочитают вычислять размерность по некоторым более наглядным формулам, и мы в основном следуем этой традиции. Правда, иногда такого рода наглядные определения могут дать число, превышающее "истинную" хаусдорфову размерность. Такие случаи в статье не рассматриваются.

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О МНОЖЕСТВАХ

Будем рассматривать главным образом множества на числовой оси или на плоскости. Множества обозначаем большими буквами, их элементы – малыми, например: $A = [0, 1]$ – отрезок, число 1/2 – элемент этого множества, $1/2 \in A$.

Множества бывают конечными и бесконечными. Множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, ...\}$ бесконечно. Бесконечное множество A называется *счетным*, если его элементы можно пронумеровать натуральными числами, иначе говоря, элементы можно выстроить в бесконечную очередь: $A = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Приведем два примера несчетных множеств:

1) отрезок [0, 1] несчетен,

2) множество T всех бесконечных телеграмм несчетно.

Бесконечная телеграмма – это бесконечная последовательность из двух символов (точка и тире или 1 и –1). Вот пример такой телеграммы:

$$1, -1, 1, 1, ...$$

В общем виде бесконечная телеграмма имеет вид

$$\alpha = a_1, a_2, a_3, ..., \qquad \text{где} \quad a_i = \begin{cases} 1, \\ -1. \end{cases}$$

Докажем, что множество T несчетно. Допустим, что нам удалось составить полный список телеграмм; пусть это будут телеграммы

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= a_1^1, \quad a_2^1, \quad a_3^1, \ldots \\ \alpha^2 &= a_1^2, \quad a_2^2, \quad a_3^2, \ldots \\ \alpha^3 &= a_1^3, \quad a_2^3, \quad a_3^3, \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

где верхний индекс указывает номер телеграммы. Но, как легко понять, телеграмма

$$\alpha = -a_1^1, \; -a_2^2, \; -a_3^3, \; \ldots$$

никак не может быть в этом списке. Она не может совпадать с α^1 (у них на первой позиции стоят разные символы), с α^2 (у них на второй позиции стоят разные символы) и т.д. Полный список телеграмм составить невозможно, множество T несчетно.

Аналогичными рассуждениями доказывается, что отрезок [0, 1] несчетен; здесь нужно использовать представление числа $x \in [0, 1]$ в виде бесконечной десятичной дроби.

В дальнейшем будем использовать некоторые операции над множествами. Если каждый элемент множества A есть также элемент множества B, то пишем $A \subset B$ и говорим, что A – часть или *подмножество B*. Последовательность множеств $A_0, A_1, ...$ называется *убывающей*, если

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset ...$$

Совокупность элементов, принадлежащих всем множествам $A_0, A_1, ..., A_n, ...$, образует *пересечение* этих множеств:

$$A = \cap A_n = A_0 \cap A_1 \cap ...$$

Напомним также понятие замкнутого множества. Пусть A – множество на числовой прямой. Точка x называется предельной точкой множества A, если $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ для некоторой последовательности точек $x_n \in A$. Множество A *замкнуто*, если оно содержит все свои предельные точки. Отрезок [0, 1] замкнут, интервал (0, 1) нет. Пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто. Пустое множество $\varnothing$ считается замкнутым.

КАНТОРОВО МНОЖЕСТВО

Пусть множество K_0 – отрезок $[0, 1]$. Делим его на три равные части и, выбросив средний интервал $(1/3, 2/3)$, получим множество K_1, состоящее из двух отрезков $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$ (рис. 1). К каждому из этих двух отрезков применяем ту же операцию: выбрасываем средние интервалы $(1/9, 2/9)$ и $(7/9, 8/9)$. Останется множество K_2, состоящее из четырех отрезков длины $(1/3)^2$ каждый. Продолжая этот процесс, получим убывающую последовательность замкнутых множеств

$$K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots$$

Множество K_n состоит из 2^n отрезков длиной $(1/3)^n$ каждый, так что

$$\text{длина } K_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n. \qquad (1)$$

Множество K_n называется *предканторовым*, само *канторово* множество K определяется как пересечение предканторовых:

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Итак, канторово множество K получено из $[0, 1]$ выбрасыванием счетного числа интервалов. Дополнительное к нему множество есть объединение этих интервалов.

Из (1) следует, что длина K равна нулю. В этом можно убедиться и просуммировав геометрическую прогрессию длин выброшенных интервалов:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \ldots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Изучим структуру множества K более подробно. По построению, ему принадлежат точки

Рис. 1. Построение канторова множества.

$$0, \quad 1, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{2}{9}, \quad \frac{7}{9}, \quad \frac{8}{9}, \quad \ldots$$

– концы выбрасываемых интервалов. Легко видеть, что таких концов будет бесконечное, но счетное множество. Однако множество K не исчерпывается этими точками, так как оно не счетно. Чтобы доказать несчетность, удобно прибегнуть к троичной системе счисления, в которой все числа записываются с помощью всего лишь трех цифр: 0, 1 и 2. В этой системе число “семь” записывается в виде 21 (так как $7 = 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$), а дробь 1/4 – как 0,020202... Как и в случае десятичных дробей, некоторые числа (числа вида $a/3^k$, a целое) допускают двоякую запись, например

$$\frac{1}{3} = 0{,}100\ldots = 0{,}0222\ldots$$

Посмотрим, как выглядят в троичной системе точки, которые были удалены из отрезка $[0, 1]$. На первом шаге мы выбросили интервал $(1/3, 2/3)$. Троичное разложение точки x из этого интервала обязательно содержит цифру 1 на первой позиции, $x = 0{,}1\ldots$, а точки из отрезков $[1, 1/3]$, $[2/3, 1]$ могут быть записаны как 0,0... и 0,2...

Аналогично на втором шаге мы выбросили два интервала $(1/9, 2/9)$ и $(7/9, 8/9)$. Троичное разложение чисел из этих интервалов обязательно содержит цифру 1 на второй позиции, а для оставшихся чисел возможно разложение с цифрами 0 или 2 на этой позиции. Продолжая этот процесс до бесконечности, приходим к выводу: число x принадлежит канторову множеству в том и только том случае, когда его можно представить троичной дробью, используя лишь цифры 0 и 2. Получается, что канторово множество совпадает с множеством T бесконечных телеграмм, в которых точками и тире служат 0 и 2.

РАЗМЕРНОСТЬ ПО ХАУСДОРФУ

Рассмотрим евклидову плоскость с декартовой системой координат. С помощью прямых, параллельных координатным осям, разобьем всю плоскость на малые квадраты (клетки) со стороной $\varepsilon > 0$.

Пусть дано ограниченное множество A на плоскости. Определим $N(\varepsilon)$ как минимальное число клеток, совокупность которых покрывает A. Если A – обычная фигура, скажем круг, то

$$\text{площадь } A = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 N(\varepsilon).$$

Можно сказать, что при $\varepsilon \longrightarrow 0$ число занятых клеток $N(\varepsilon)$ растет как (площадь $A)/\varepsilon^2$. Знаменатель этой дроби указывает на размерность – она равна 2, а числитель – на величину площади, условно говоря, 2-меры.

В общем случае скажем, что *множество A имеет размерность* $d = \dim A$, $0 \le d \le 2$, если при $\varepsilon \longrightarrow 0$

число клеток $N(\varepsilon)$ растет как C/ε^d, где C – некоторая положительная константа, называемая d-мерой множества A. Это означает, что

$$C = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^d N(\varepsilon).$$

Заметим, что размерность d может быть найдена по формуле

$$d = \dim A = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}, \qquad (2)$$

поскольку

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \frac{C}{\varepsilon^d}}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln C}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = d.$$

Формула (2) удобна тем, что не содержит величины d-меры.

Для множеств на числовой оси вместо покрытий квадратными клетками со стороной ε мы говорим о покрытии отрезками длины ε. Размерность определяется по формуле (2), в которой $N(\varepsilon)$ – минимальное число таких отрезков.

В качестве примера найдем размерность канторова множества K. Замечаем, что предканторово множество K_n служит покрытием множества K отрезками длины $\varepsilon = 3^{-n}$, а число таких отрезков $N(\varepsilon) = 2^n$. Поэтому

$$d = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0{,}630929...$$

Мы получили первый фрактал – множество с дробной размерностью.

Канторово множество обладает еще и свойством самоподобия. Действительно, по бокам первого выброшенного интервала находятся две его части, подобные целому канторову множеству с коэффициентом подобия 1/3. Аналогичным свойством обладает каждая из этих частей в отдельности.

Найдем теперь размерность *обобщенного* канторова множества, которое определяется следующим образом. Дано число r, $0 < r < 1/2$. Из отрезка $K_0 = [0, 1]$ выбросим интервал длины $1 - 2r$ с центром в точке 1/2. Получаем замкнутое множество K_1, состоящее из двух отрезков с длиной r. К каждому из них применяем ту же процедуру: выбрасываем средний интервал с длиной $r(1 - 2r)$. На n-м шаге получаем множество K_n, состоящее из 2^n отрезков с длиной r^n у каждого. Само обобщенное канторово множество определяется как пересечение всех K_n. Тогда по формуле (2)

$$\dim K = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln \frac{1}{r^n}} = \frac{\ln 2}{\ln \frac{1}{r}}.$$

Для классического канторова множества $r = 1/3$. Из полученного равенства видно, что на отрезке существуют фракталы с наперед заданной размерностью $d \in (0, 1)$. Вычислим размерность других классических фракталов.

САЛФЕТКА И КОВЕР СЕРПИНСКОГО

Правильный треугольник делим средними линиями на четыре равных треугольника и внутренность центрального выбрасываем. С тремя оставшимися треугольниками делаем то же самое и так (рис. 2) до бесконечности. После счетного числа выбрасываний остается множество S, называемое *салфеткой Серпинского.*

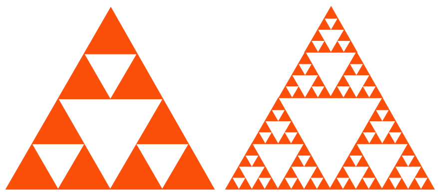

Рис. 2. Салфетка Серпинского.

В чем необычность полученной салфетки? Во-первых, она содержит бесконечную сетку – каркас, образованный сторонами всех участвовавших в построении треугольников. Однако кроме этого видимого каркаса салфетка S содержит несчетное множество других точек аналогично тому, как канторово множество K не исчерпывается концами выбрасываемых интервалов. Во-вторых, салфетка самоподобна – она состоит из трех кусков, каждый из которых подобен целому с коэффициентом подобия 1/2. “Выколем” точки, в которых эти куски соединяются, – середины сторон исходного треугольника. Тогда салфетка распадется на три салфетки меньшего размера. С ними проделаем то же самое. Что станет с салфеткой, если этот процесс продолжить до бесконечности, выколов всего лишь счетное множество точек? Салфетка полностью рассыпется!

Чтобы лучше понять эти и другие свойства салфетки, рассмотрим процесс ее построения более подробно. Пусть S_0 – исходный правильный треугольник со стороной 1. Средние линии делят его на четыре равных треугольника, после выбрасывания внутренности центрального из них получим множество S_1, состоящее из трех треугольников со стороной 1/2. На следующем шаге ту же операцию осуществим для каждого из этих трех треугольников и т.д. В результате возникает убывающая последовательность замкнутых множеств S_n, и салфетка S есть их пересечение. Множество S_n состоит из 3^n правильных треугольников, стороны которых имеют длину $1/2^n$ и принадлежат S по построению (они образуют часть каркаса). Легко видеть, что при $n \longrightarrow \infty$ сумма периметров треугольников, входящих в S_n, стремится к бесконечности, а сумма их площадей – к нулю. Поэтому общая длина каркаса бесконечна, площадь же салфетки равна нулю.

Для вычисления размерности S будем делить плоскость не на квадратные клетки, а на ячейки в форме правильных треугольников со стороной ε. Тогда множество S_n будет покрытием S и при этом $\varepsilon = (1/2)^n$, $N(\varepsilon) = 3^n$. Поэтому

$$\dim S = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Ковер Серпинского строится аналогично. Пусть F_0 – единичный квадрат; разобьем его на девять одинаковых квадратов со стороной 1/3 и выбросим внутренность центрального квадрата. Через F_1 обозначим оставшиеся восемь квадратов. Затем повторяем эту операцию с квадратами из F_1 (рис. 3). На

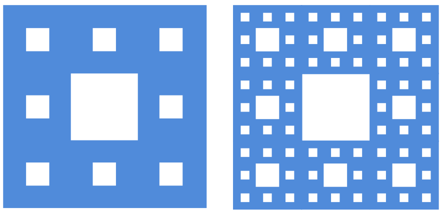

Рис. 3. Ковер Серпинского.

n-м шаге получаем множество F_n, составленное из 8^n квадратов со стороной 3^{-n}, $F_n \subset F_{n-1}$, так что площадь $F_n = (8/9)^n$. *Ковер Серпинского* F есть пересечение множеств F_n, $F = \cap F_n$. Очевидно, F_n есть покрытие ковра F квадратиками числом $N(\varepsilon) = 8^n$ и со сторонами $\varepsilon = 3^{-n}$. Отсюда

$$\dim F = \frac{\ln 8}{\ln 3}.$$

Ковер обладает свойством самоподобия. Действительно, его можно разбить на восемь частей, которые получаются из F сжатием в три раза и сдвигом.

ФРАКТАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

Известно, как приближенно найти длину кривой на плоскости. Для этого надо взять ломаную с вершинами на кривой и с одинаковыми звеньями длины ε, положив

$$L(\varepsilon) = \varepsilon N(\varepsilon),$$

где $N(\varepsilon)$ – число звеньев. При этом говорят, что кривая измерена циркулем с раствором ε. Если кривая имеет *конечную* длину L, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} L(\varepsilon) = L$$

и число звеньев $N(\varepsilon)$ растет как L/ε при $\varepsilon \longrightarrow 0$. При этом

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \frac{L}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = 1 = \text{размерность кривой.}$$

Для кривой *бесконечной* длины число звеньев $N(\varepsilon)$ растет, очевидно, быстрее ε^{-1} при $\varepsilon \longrightarrow 0$. Поэтому *хаусдорфова размерность*, определяемая как предел

$$d = \lim_{a \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}},$$

может оказаться больше единицы: $d > 1$. В этом случае кривая называется *фрактальной*.

Примером фрактальной кривой в природе служит линия морского берега. Береговая линия обычно сильно изломана, и картографам давно известен эффект существенного увеличения длины морского берега при его измерении в более точном масштабе. Например, по данным измерений, береговая линия Англии имеет хаусдорфову размерность $d = 1{,}3$.

Природные объекты, конечно, не являются фракталами в точном смысле слова. Однако для ассоциированных с ними фракталов можно осуществить точные расчеты, представляющие интерес для практики.

КРИВАЯ КОХ

Процесс построения начинается с единичного отрезка S_0 на плоскости. Разделим его на три равные части и заменим средний интервал двумя связанными отрезками длины 1/3, как это показано на рис. 4. В результате образуется ломаная S_1, состоящая из четырех звеньев длины 1/3. На следующем шаге та же операция применяется к каждому из этих четырех звеньев в отдельности. Получаются ломаные S_0, S_1, ..., S_n, ..., причем вершины каждой остаются вершинами последующей (в этом смысле каждая ломаная вписана в последующую). Предельная кривая S, в которую вписаны все эти ломаные, была открыта Гельге фон Кох в 1904 году.

Хотя кривая Кох и ограничена, она имеет бесконечную длину. Действительно, ломаная S_n состоит из 4^n отрезков длины $1/3^n$ и ее периметр равен $(4/3)^n$. Отсюда ясно, что длина самой кривой Кох бесконечна, а хаусдорфова размерность

$$d = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} > 1.$$

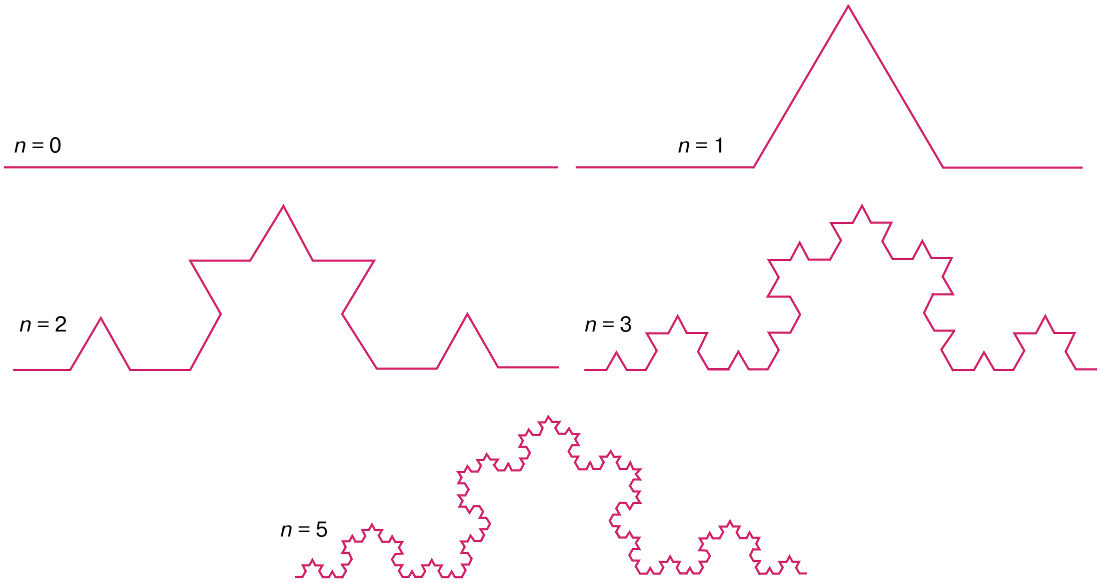

Рис. 4. Кривая Кох.

Кроме того, кривая Кох состоит из четырех равных (конгруэнтных) частей, каждая из которых подобна всей кривой с коэффициентом подобия 1/3. Поэтому длина любого "кусочка" кривой также бесконечна.

Три копии кривой Кох, расположенные на сторонах правильного треугольника, образуют замкнутую кривую, которую часто называют *снежинкой Кох*.

Итальянский математик Э. Чезаро, удивленный внутренней бесконечностью и самоподобием снежинки Кох, писал в 1905 году: "Если бы она была одарена жизнью, то можно было бы лишить ее жизни, только уничтожив кривую в целом. В противном случае она бы возрождалась снова и снова из глубины своих треугольников, как это делает жизнь во Вселенной".

Теперь дадим другое построение кривой Кох (рис. 5). Начинаем с замкнутого равнобедренного треугольника F_0 с углами 30°, 120°, 30°. Этот треугольник разбиваем на три треугольника: один правильный, а два других подобны исходному F_0. Множество F_1 получаем удалением из F_0 внутренности правильного треугольника. Далее процесс повторяется. В результате возникают убывающая последовательность замкнутых множеств и кривая Кох – их пересечение.

Рис. 5. Другое построение кривой Кох.

СВОЙСТВО САМОПОДОБИЯ

Формально самоподобие канторова множества K можно выразить так :

$$K = f_1(K) \cup f_2(K), \qquad (3)$$

где

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x \quad \text{и} \quad f_2(x) = \frac{1}{3}(x-1)+1$$

– гомотетии числовой оси с центрами в точках 0 и 1 соответственно.

Равенства, аналогичные (3), легко написать и для других фракталов. Так, для салфетки требуются три гомотетии с коэффициентом 1/2 и центрами в вершинах исходного треугольника, а для кривой Кох гомотетии нужно сочетать с поворотами. Иначе говоря, самоподобие конкретного фрактала выражается с помощью определенного набора преобразований подобия плоскости.

Будем теперь рассуждать иначе. Возьмем произвольный набор преобразований подобия плоскости

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad f_3(x),\quad \ldots,\quad f_m(x) \qquad (4)$$

с коэффициентами подобия

$$k_1,\quad k_2,\quad \ldots,\quad k_m,$$

где $k_i < 1$ для любого $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда справедлива следующая

Теорема 1 (см. [4]). *Существует единственное непустое ограниченное замкнутое (другими словами, компактное) множество F, для которого*

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(F).$$

Множество F называется *инвариантным множеством*, или *аттрактором*, системы преобразований (4).

Теорема 1 позволяет строить новые фрактальные объекты. Укажем способ построения аттрактора с помощью последовательных приближений. С этой целью для любого множества A определим множество $\Phi(A)$ как

$$\Phi(A) = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(A).$$

Для аттрактора мы имеем равенство $F = \Phi(F)$.

В качестве нулевого приближения выберем компактное множество F_0 такое, что

$$\Phi(F_0) \subset F_0, \tag{5}$$

и положим

$$F_1 = \Phi(F_0), \qquad F_2 = \Phi(F_1), \; \ldots \tag{6}$$

Тогда последовательность $F_0, F_1, \ldots, F_n, \ldots$ будет убывающей: $F_0 \supset F_1 \supset F_2 \ldots$ и пересечение $F = \cap F_n$ есть искомый аттрактор.

В конкретных примерах нулевое приближение F_0 легко найти. Так, для канторова множества $F_0 = [0, 1]$, для ковра Серпинского F_0 – исходный квадрат.

Если же нулевое приближение F_0 со свойством (5) найти затруднительно, то ничего страшного. В качестве нулевого приближения берем *любое* непустое множество F_0 (например, точку или отрезок) и снова определяем множества F_1, F_2, ... по правилу (6). Теперь эта последовательность множеств необязательно убывающая, но в определенном смысле она сходится к аттрактору F, так что мы знаем аттрактор с наперед заданной точностью, если известно множество F_n для достаточно большого n. Возьмем для примера кривую Кох. Если F_0 – это исходный отрезок S_0, то последовательные приближения F_n – это как раз ломаные S_n, с помощью которых кривая Кох была построена.

Итак, с набором преобразований подобия (4) можно единственным образом связать компактное множество F – аттрактор этой системы**.** Мы знаем, что в некоторых случаях аттрактор является фракталом. Всегда ли это так? Кроме того, как обстоит дело с размерностью аттрактора? Можно ли определить размерность заранее, зная только набор коэффициентов подобия $k_1, k_2, \ldots, k_n$?

РАЗМЕРНОСТЬ ПОДОБИЯ

Определим число $s \geq 0$ как решение уравнения

$$k_1^s + k_2^s + \ldots + k_m^s = 1. \tag{7}$$

Лемма. *Уравнение* (7) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(t) = k_1^t + \ldots + k_m^t$$

на полуоси $[0, \infty)$. Тогда $g(t)$ непрерывна, $g(0) = m \geq 1$, $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 0$ и ее производная

$$g'(t) = k_1^t \ln k_1 + \ldots + k_m^t \ln k_m$$

отрицательна, так как $k_i < 1$ по условию. Следовательно, $g(t)$ строго убывает и поэтому принимает значение 1 в единственной точке $t = s$. Лемма доказана.

Единственное решение s уравнения (7) называется *размерностью подобия* аттрактора F: $s = s(F)$.

Для классических фракталов вычислить число s не представляет труда, и при этом мы всегда получаем равенство $s(F) = \dim F$. Однако в общем случае это равенство не выполняется. Приведем соответствующий пример.

Пример. Рассмотрим два преобразования числовой оси

$$f_1(x) = \frac{2}{3}x, \quad f_2(x) = \frac{2}{3}(x-1) + 1.$$

Для $F = [0, 1]$ имеем

$$F = f_1(F) \cup f_2(F), \quad \dim F = 1, \quad s(F) = \frac{\ln 2}{\ln \frac{3}{2}} > 1.$$

Мы видим, что аттрактор не всегда фрактал, а его размерность необязательно равна размерности подобия. Приведем одно достаточное условие, обеспечивающее совпадение хаусдорфовой размерности и размерности подобия.

Скажем, что выполнено *условие Морана*, если существует непустое открытое множество V такое, что

$$\bigcup_{i=1}^{m} f_i(V) \subset V, \quad f_i(V) \cap f_j(V) = \varnothing, \quad i \neq j.$$

Напомним, что множество на плоскости называется *открытым*, если каждая точка принадлежит ему вместе с некоторым кругом с центром в этой точке. Внутренность квадрата, треугольника и т.п. – примеры открытых множеств.

Теорема 2 (см.[4]). *Если выполнено условие Морана, то размерность подобия аттрактора совпадает с его хаусдорфовой размерностью, то есть* $s(F) = \dim F$.

Для классических фракталов условие Морана легко проверяется. Так, для салфетки Серпинского множество V – это внутренность исходного правильного треугольника, для ковра это внутренность исходного квадрата.

Часто аттрактор является не фракталом, а множеством размерности два с фрактальной границей. В последние годы таким объектам (fractiles) уделяется много внимания. В статье они не рассматриваются. В качестве простой иллюстрации теорем 1 и 2 рассмотрим один фрактал, называемый канторовой пылью на квадрате.

КАНТОРОВА ПЫЛЬ НА КВАДРАТЕ

Рассмотрим систему из четырех преобразований подобия плоскости:

$$f(x) = r(x - a_i) + a_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 – вершины единичного квадрата F_0, $0 < r < 1/2$.

Нулевое приближение F_0 удовлетворяет условию (5). Первое приближение F_1 состоит из четырех квадратов со стороной r и получается из исходного квадрата путем удаления “креста” (рис. 6). Далее процесс повторяется уже с четырьмя квадратами. Множество F_n есть объединение 4^n непересекающихся замкнутых квадратов со сторонами r^n. Поэтому хаусдорфова размерность “пыли” $F = \cap F_n$

$$d = \dim F = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 4^n}{\ln \frac{1}{r^n}} = \frac{\ln 4}{\ln \frac{1}{r}} \qquad (8)$$

и в зависимости от параметра r может принимать любое значение из интервала (0, 2). Уравнение (7) для размерности подобия принимает вид $4r^s = 1$. Мы получаем равенство $s = d$, что неудивительно, так как условие Морана выполнено.

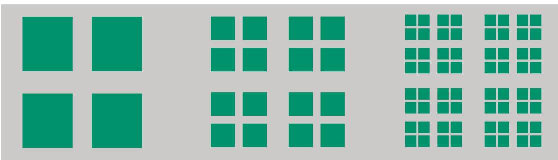

Рис. 6. Построение канторовой пыли на квадрате.

Как известно, замкнутое множество называется *связным* (цельным, как говорят физики), если его нельзя разбить на две непересекающиеся замкнутые части. Канторова пыль, конечно, не является связным множеством. Более того, это множество *вполне несвязно*. Последнее означает, что его можно разбить на непересекающиеся части сколь угодно малого диаметра. Канторово множество на отрезке также вполне несвязно. Все остальные классические фракталы связны.

В заключение рассмотрим две задачи, в которых участвуют фракталы.

ФРАКТАЛЬНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

Рассмотрим прямоугольник с шириной 1. Сначала представим себе, что он целиком состоит из проводящего материала, а затем разделим его на две части диэлектрической перегородкой. Перегородка строится так. На среднем горизонтальном сечении (рис. 7) возьмем предканторово множество K_n. Дополнительное к нему множество состоит из 2^{n-1} интервалов с общей длиной $1 - (2/3)^n$. На каждом из этих интервалов, как на диагонали, строим квадратик. Все квадратики заполняем непроводящим материалом (диэлектриком), что и дает предканторову перегородку.

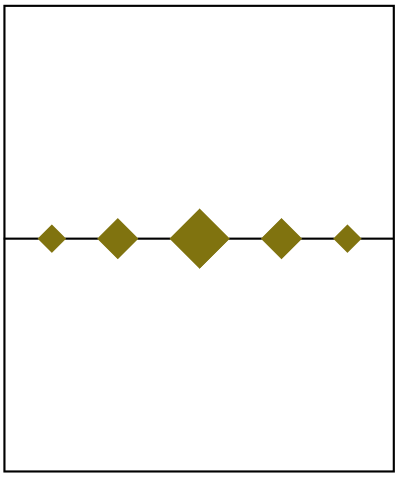

Рис. 7. Канторова перегородка.

Введем специальную величину J_n, характеризующую *среднюю* (или, как говорят, *эффективную*) проводимость нашего прямоугольника в вертикальном направлении. Для этого зададим электрическое поле, потенциал которого равен единице на верхнем основании и нулю на нижнем, и положим

$$J_n = \int j^2(x)dx,$$

где $j^2(x)$ – квадрат длины вектора плотности тока $j(x)$, а интегрирование ведется по проводящей части нашего прямоугольника. Ясно, что с ростом n прохождение тока становится более затруднительным, так как множество прохода K_n уменьшается. Величина J_n убывает с ростом n, и вопрос состоит в том, будет ли предельная величина

$$J = \lim_{n\to\infty} J_n$$

отлична от нуля. Очевидно, при $n \longrightarrow \infty$ мы получаем канторову диэлектрическую перегородку, которая разрезает наш проводник на две части, соприкасающиеся по канторову множеству.

Тем не менее предельная величина J оказывается положительной, то есть верхняя часть проводника передает ток нижней части. Канторова перегородка проницаема для тока! Для сравнения заметим, что если два проводника соприкасаются только в одной точке, то электрический ток отсутствует. В случае канторовой перегородки мы имеем соприкосновение в каждой точке из K. Оказывается, что этого уже достаточно для проводимости.

ДИФФУЗИЯ ЧЕРЕЗ ФРАКТАЛЬНУЮ ЩЕЛЬ

Пусть в единичном кубе имеется газ или другое вещество, подчиненное закону диффузии. Стенки куба считаются непроницаемыми. Поэтому в процессе диффузии общая масса вещества остается постоянной, скажем равной 1. Но вещество перераспределяется по кубу с течением времени, концентрация выравнивается во всех точках куба, и при $t \longrightarrow \infty$ распределение вещества становится равномерным по кубу, каким бы ни было его первоначальное распределение.

Для наглядности сформулируем свойство диффузии следующим образом.

Существует некоторое вполне определенное время $T_0 > 0$, *по истечении которого не менее четверти всего вещества окажется в верхней половине куба, каким бы ни было распределение вещества в момент времени* $t = 0$ (*например, при* $t = 0$ *все вещество находилось в нижней половине*).

Теперь возьмем среднее горизонтальное сечение куба и рассмотрим на нем предканторову пыль F_n. Дополнительное к F_n (объединение белых крестов, см. рис. 6) множество будем считать стенкой, не проницаемой ни снизу, ни сверху. В таком случае верхняя и нижняя половинки куба остаются связанными через множество F_n и общие свойства диффузии сохраняются.

При $n \longrightarrow \infty$ половинки кубов соприкасаются только по канторовой пыли. Может показаться, что диффузия из нижней половинки в верхнюю должна сильно замедлиться, например время T_0 должно стремиться к ∞ при $n \longrightarrow \infty$. Это, однако, не совсем так. Все определяется размерностью множества F, которая вычисляется по формуле (8) и зависит от параметра r.

Если $\dim F > 1$ (это будет при $r > 1/4$), то время T_0, необходимое для переноса четверти массы из нижней половины в верхнюю, можно выбрать не зависящим от номера n. В этом случае соприкосновения только по канторовой пыли достаточно для нормального хода диффузии. Если же $r \leq 1/4$, то с ростом n перенос из нижней половины в верхнюю замедляется и при $n \longrightarrow \infty$ половинки куба становятся полностью изолированными друг от друга.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mandelbrot B.* The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman, 1992.

2. *Пайтген Х.О.*, *Рихтер П.Х.* Красота фракталов. М.: Мир, 1993.

3. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991.

4. *Gerald A. E.* Measure, Topology and Fractal Geometry. N.Y.: Springer-Verlag, 1990.

5. *Турбин А.Ф.*, *Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. Киев: Наук. думка, 1992.

* * *

Василий Васильевич Жиков, профессор Владимирского государственного педагогического университета. Область научных интересов: почти-периодические функции и дифференциальные уравнения, усреднение дифференциальных операторов, вариационные задачи. Автор трех монографий и около 100 научных работ.