

О единых методах статфизики и квантовой теории поля. Элементарное введение.

М.Ю. Налимов
Санкт-Петербургский государственный университет

И статистическая физика и квантовая теория поля описывают системы с большим (или бесконечным) числом степеней свободы. Это обуславливает единство методов, применяемых в этих науках. В данной работе на примере достаточно простой статистической модели вводятся понятия функционального интеграла и диаграммных разложений, которые лежат в основе современной квантовой теории поля.

1 Введение.

Не вызывает сомнения, что именно проблемы теоретической физики являются одним из стимулов развития математики. Достаточно вспомнить, что именно механика Ньютона в значительной степени определила привычные нам дифференциальное и интегральное исчисления. Эта связь наблюдается и в настоящее время: современная теоретическая физика ставит новые задачи перед математикой, а развитые математические подходы находят свое применение в различных областях физики. В данной работе будет обсуждаться основное понятие языка квантовой теории поля: функциональный интеграл; диаграммные разложения рассматриваются как метод обращения с этим объектом. Такая техника нашла себе не менее достойное применение и в статистической физике, что свидетельствует о единстве этих направлений. Более того, функциональный интеграл, первоначально предложенный для квантово-механического оператора эволюции, может быть даже более естественен для статистической физики. Поэтому неудивительно, что взаимообмен приемами между вышеупомянутыми науками происходит постоянно.

2 Функциональный интеграл, корреляционные функции и функции Грина.

Главная задача статфизики, как известно, – вычисление средних значений разнообразных величин, Для этого необходима функция распределения (плотность вероятности) ρ . Пусть, например, состояние системы задается набором импульсов и координат частиц системы $\{\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n\}$ (n нумерует частицы, и пробегает целые значения $1 \leq n \leq N$). Тогда функция распределения ρ – вероятность того, что в системе реализуется состояние $\{\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n\}$. Для произвольной величины $F(\{\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n\})$ среднее определяется формулой

$$\langle F \rangle \equiv \int F(\{\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n\}) \rho(\{\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n\}) d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_N d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N.$$

Определение функции распределения является нетривиальной задачей, в общем случае она решена лишь для состояния равновесия, где,

например для *канонического ансамбля*¹, имеем распределение Гиббса

$$\rho(\{\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n\}) = \frac{1}{Q} e^{-\frac{E(\{\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n\})}{kT}} \quad (1)$$

здесь E – энергия системы, T – температура, k – постоянная Больцмана, Q – нормировочный множитель, подбираемый так, чтобы сумма значений $\rho(\{\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n\})$ по всем возможным состояниям $(\{\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n\})$ была равной единице². Величина Q играет важную роль в статфизике и называется *статсумма*. В равновесии состояние системы $(\{\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n\})$ непрерывно меняется, но из формулы (1) видно, что чем больше энергия данного состояния, тем меньше шансов, что система окажется в нем. Частным случаем распределения Гиббса является хорошо известное распределение Максвелла для идеального газа.

Однако часто рассмотрение координат и импульсов всех входящих в систему частиц является излишней детализацией. Например, оно представляется явно избыточным для жидкостей, где естественнее оперировать такими понятиями, как локальные плотность и скорость маленьких, но все же макроскопических кусочков среды. При этом используются так называемое *сокращенное описание*. Функция распределения будет иметь тот же вид (1), но энергия системы E рассматривается как функция новых переменных. Хотя точный вид этой функции определить достаточно сложно, простые соображения немедленно предоставят нам реалистичную модель.

Например, рассмотрим локальную плотность жидкости или газа $n(\mathbf{x})$, которая, в общем случае несколько отличается от средней плотности системы $\langle n \rangle$. Изучая флуктуации плотности $\varphi(\mathbf{x}) = n(\mathbf{x}) - \langle n \rangle$, воспользуемся тем, что энергия системы минимальна при $\varphi = 0$. Значит, при малых $\varphi > 0$ локальная энергия системы квадратично зависит от величины флуктуации в данной точке, а полная энергия будет превышать минимальную на величину пропорциональную $\int d\mathbf{x} \varphi^2(\mathbf{x})$. При увеличении амплитуды флуктуаций станут существенными последующие степени величины φ , сначала член $\int d\mathbf{x} \varphi^3(\mathbf{x})$, а в случае если из-за каких-то

¹Каноническим ансамблем называется совокупность состояний физической системы с фиксированным числом частиц, которая находится в тепловом равновесии с термостатом (большим телом с заданной температурой). При этом система может обмениваться с термостатом энергией, так что в равновесном состоянии средняя энергия системы определяется температурой термостата.

²Действительно, с вероятностью, равной единице, система находится хоть в каком-нибудь состоянии!

присущих самой модели свойств он обращается в ноль, то член $\int d\mathbf{x}\varphi^4(\mathbf{x})$. Именно этот случай – модель φ^4 – рассмотрен в данной работе в качестве примера.

Резкие перепады плотности (т.е. отличные от нуля величины $\partial\varphi/\partial\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, 3$ – производные флуктуаций плотности по всевозможным компонентам координаты \mathbf{x}) также увеличивают энергию состояния, этому соответствует вклад в энергию, пропорциональный

$$\int d\mathbf{x} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}_i} \right)^2.$$

Учитывая вышесказанное, можно написать

$$S(\varphi) \equiv \frac{E}{kT} = \int d\mathbf{x} \left(\frac{\tau}{2} \varphi^2(\mathbf{x}) + \frac{c}{2} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}_i} \right]^2 + \frac{g\varphi^4(\mathbf{x})}{4} \right), \quad (2)$$

где τ , c , g , вообще говоря, аналитические функции температуры.

Написанная нами из предельно простых соображений модель (2), как оказалось, успешно описывает поведение жидкостей и газов, а в случае, если ее обобщить, считая параметр φ вектором, она прекрасно описывает магнетики.

Таким образом, состояние системы задается теперь величиной $\varphi(\mathbf{x})$, а плотность вероятности является ее функционалом

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{Q} e^{-S(\varphi)}. \quad (3)$$

Теперь произвольную величину $F(\varphi)$ мы должны усреднять, перебирая всевозможные конфигурации (функции) $\varphi(\mathbf{x})$ с весом $\rho(\varphi)$. Будем называть величину, различные конфигурации которой задают состояние системы *полем*. Перебор всех состояний создает принципиально новый объект – *функциональный* (или *континуальный*) интеграл. Средние определяются теперь формулой

$$\langle F \rangle = \frac{1}{Q} \int \mathcal{D}\varphi F(\varphi) e^{-S}, \quad (4)$$

где символ $\mathcal{D}\varphi$ и означает перебор всевозможных конфигураций³ поля φ .

³Заметьте – не значений поля в конкретной точке, а именно перебор всевозможных функций!

Чтобы определить новый объект более строго, рассмотрим для простоты одномерную систему на интервале $x \in [0, L]$. Разобьем интервал на M равных отрезков точками $x_s = s\Delta x$ (где $s = 0, 1, \dots, M$, $\Delta x = L/M$). Теперь произвольную функцию φ можно аппроксимировать набором ее значений $\{\varphi_s\}$ в точках x_s , причем точность аппроксимаций растет с ростом M . При фиксированном большом M усреднение величины F (перебор конфигураций) означает $M + 1$ кратное интегрирование

$$\left(\prod_{s=0}^M \int d\varphi_s \right) F(\{\varphi_s\}) \exp \left(\Delta x \sum_{s=0}^M \left[\frac{\tau \varphi_s^2}{2} + \frac{c(\varphi_{s+1} - \varphi_s)^2}{2(\Delta x)^2} + \frac{g\varphi_s^4}{4} \right] \right). \quad (5)$$

Предел этого выражения при $M \rightarrow \infty$ и обозначается символом $\mathcal{D}\varphi$, обобщение на случай многомерного x -пространства мы предоставляем проделать читателю самостоятельно.

Назовем k - точечной корреляционной функцией величину

$$\begin{aligned} G_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_k) &= \langle \varphi(\mathbf{x}_1), \varphi(\mathbf{x}_2) \dots \varphi(\mathbf{x}_k) \rangle = \\ &= \frac{1}{Q} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(\mathbf{x}_1), \varphi(\mathbf{x}_2) \dots \varphi(\mathbf{x}_k) e^{-S}. \end{aligned} \quad (6)$$

Объекты такого типа невероятно важны, так как описывают свойства исследуемых систем и могут быть непосредственно измерены, например, в экспериментах по рассеянию световых лучей на флуктуациях плотности среды (практически, каждый сам проводил этот эксперимент, наблюдая голубое небо, цвет которого определяется сильным рассеянием лучей голубого цвета на флуктуациях атмосферы).

Рассмотрим эксперимент с рассеянием подробно (см. рисунок 1).

Мы наблюдаем интенсивность света, определяемую квадратом модуля амплитуды электромагнитного поля. На рисунке линиями со стрелками изображены лучи света (плоские волны), которые рассеиваются (превращаясь в сферические волны) на флуктуациях плотности в точках \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 исследуемого образца. В точке А можно наблюдать интерференцию рассеянных волн. Обычно достаточно ограничиться учетом однократного рассеяния света.

Разумно предположить, что амплитуда сферической волны пропорциональна флуктуации плотности в точке рассеяния. Интерференция волн, испущенных точками \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 , порождает в точке А интенсивность, пропорциональную $\varphi(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_2)$, которую следует усреднить, так как любой прибор измерения интенсивности света, как и человеческий глаз,

усредняет по времени результаты наблюдения. Полученный таким образом усредненный объект – не что иное как парная корреляционная функция $G_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, изображенная волнистой линией на рисунке. Осталось только проинтегрировать ее по всем допустимым координатам точек \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 , чтобы получить явное выражение для интенсивности рассеянного света. Итак, мы показали, что в опытах по рассеянию удобно оперировать введенным понятием корреляционных функций.

Если заменить в выражении (6) $-S$ на iS , а под S понимать действие⁴ квантово-полевой системы, полученные объекты также будут иметь важный смысл, описывая опыты по рассеянию элементарных частиц друг на друге. В квантовой теории поля их называют *функциями Грина без вакуумных петель*. Популярное изложение этого не может уместиться в рамки данной работы, поэтому мы отсылаем заинтересованного читателя к классической книге [1]. Скажем только, что в отличие от статистической физики, поля $\varphi(x)$ здесь рассматриваются в четырехмерном пространстве Минковского $x \in \{t, \mathbf{x}\}$, действие S из (2) вполне подойдет для описания скалярных частиц, если дополнить его интегрированием по времени, заменить τ на m^2 – квадрат массы описываемой частицы – и учесть вклад $(\partial\varphi/\partial t)^2$ в дополнение к вкладу производных φ по \mathbf{x}_i .

Тем самым установлено соответствие основных объектов статистической физики и квантовой теории поля, что неудивительно, ибо обе эти науки исследуют системы с бесконечным (или просто очень большим) числом степеней свободы, что и обуславливает переход к функциональному (бесконечномерному) интегрированию.

В последнее время появляются работы, посвященные численным вычислениям функциональных интегралов. Однако, несмотря на возрастающую мощь современных компьютеров, работы эти касаются лишь наиболее простых физических систем, а более-менее сложные системы исследуются сейчас в рамках *теории возмущений*, к краткому описанию которой мы и переходим.

⁴Действие в квантовой теории поля вводится аналогично действию в теоретической механике, $S = E_k - E_p$, где E_k – кинетическая энергия системы, E_p – ее потенциальная энергия.

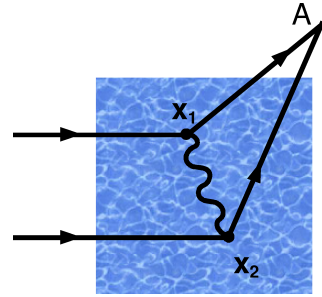


Рис. 1: Рассеяние электромагнитных волн на флуктуациях плотности в образце.

3 Теория возмущений, диаграмные разложения.

Современный аппарат математической физики прекрасно разработан для описания линейных систем. Принципиальных трудностей не вызывает решение как алгебраических и дифференциальных линейных уравнений, так и обращение с линейными операторами. В то же время наибольший физический интерес представляют нелинейные и сильно-нелинейные явления. Не исключено, что если в начале XX века для развития физики требовались принципиально новые теории, то теперь необходим новый математический аппарат, который и разрабатывается в настоящее время. Поэтому, сталкиваясь с нелинейными явлениями (а, как будет видно ниже, рассматриваемая модель (2) описывает именно их), сейчас принято в первую очередь использовать теорию возмущений.

Проиллюстрируем это на примере дифференциального уравнения

$$-c\Delta\varphi(\mathbf{x}) + \tau\varphi(\mathbf{x}) + g\varphi^3(x) = f(\mathbf{x}), \quad (7)$$

которое, кстати, при $f \equiv 0$ является условием минимальности величины S из (2). Это уравнение обладает интересными свойствами⁵.

Решение линеаризованного (при $g = 0$) уравнения (7) хорошо известно: для любой заданной функции $f(\mathbf{x})$ оно имеет вид свертки $\varphi(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}')$, где функция G – решение уравнения, похожего на (7), но с заменой правой части на δ -функцию:

$$-c\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \tau G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (8)$$

В математической физике функцию G , которая решает уравнение с дельтаобразной правой частью называют функцией Грина. В безграничном трехмерном пространстве с условием затухания на бесконечности решением уравнения (8) является функция

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|c} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{\sqrt{c\tau}}\right).$$

⁵При $g = 0$ оно превращается в хорошо известное уравнение, описывающее стационарную диффузию или теплопроводность с затуханием (величина f играет роль источника тепла). Если еще и $\tau = 0$, то это не менее известное уравнение Пуассона, определяющее электростатический потенциал $\varphi(\mathbf{x})$ по известной плотности зарядов $4\pi\epsilon_0 f(\mathbf{x})$, а при замене оператора Лапласа на оператор Даламбера $\partial_t^2 - \Delta$ оно становится уравнением Клейна-Гордона для свободного скалярного поля.

Имея эту информацию⁶, несложно построить и решение нелинейного уравнения (7) в виде ряда по параметру g , или, как говорят, построить теорию возмущений по константе взаимодействия g . Нулевой порядок разложения мы уже определили. Перенесем нелинейный член уравнения в правую часть уравнения и, чтобы получить поправку первого порядка по g , подставим в этот член известное в нулевом порядке решение. Иными словами, мы решаем уравнение (7) итерациями, получая

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \left(f(\mathbf{x}') - g \left[\int d\mathbf{x}'' G(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') f(\mathbf{x}'') \right]^3 + \dots \right), \quad (9)$$

где многоточием обозначены члены старших порядков по g , соответствующие продолжению итерационной процедуры: на каждом этапе мы подставляем решение, полученное на предыдущем этапе в нелинейный член $g\varphi^3(\mathbf{x})$, превращая тем самым его в добавку к f и разрешая затем полученное приближенное уравнение с помощью известной функции Грина G .

Выписать дальнейшие члены ряда не представляет труда, но как мы видим уже по первому порядку, полученные выражения будут достаточно громоздкими. Учитывая, что все члены (9) образованы из функций G и f с помощью интегрирований, для облегчения записи вводят графические обозначения, которые представляют собой простейший пример *диаграммной техники*. Обозначим функцию $G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ линией, концам которой соответствуют координаты $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, а функцию $f(\mathbf{x}_0)$ – крестиком с соответствующей координатой \mathbf{x}_0 . Тогда формула (9) примет вид, изображенный на рисунке 2, где предполагается интегрирование по координатам функций f (крестиков) в точках, где они соединяются с линиями, а также в точках, где линии соединяются. Эти немые переменные интегрирования мы не будем в дальнейшем указывать на диаграммах. Построенное решение справедливо и в задачах статистической физики и в квантовой теории поля (правда, в каждой науке со своей функцией Грина, см примечание 5).

⁶В книгах, посвященных теории возмущений, часто также рассматривается преобразование Фурье от функции $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, которое имеет вид $G^F(\mathbf{k}) = (\mathbf{k}^2 + \tau)^{-1}$, или $G^F(\mathbf{k}) = (\mathbf{k}^2 - m^2)^{-1}$ если рассматривать теорию поля в четырехмерном пространстве Минковского. Переход к преобразованию Фурье часто называют также переходом к *импульсному представлению*.

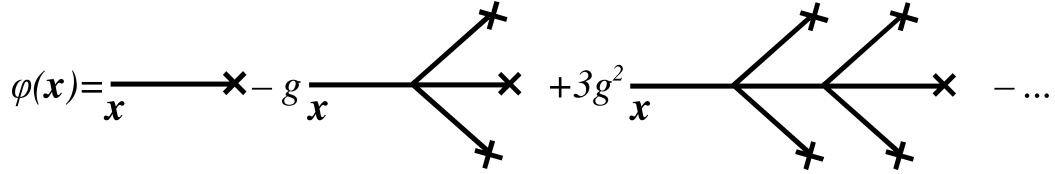


Рис. 2: Диаграммы, изображающие итерационное решение нелинейного дифференциального уравнения (7)

4 Диаграммная техника для вычисления функциональных интегралов.

В теоретической физике хорошо известна связь между функционалами и дифференциальными уравнениями, определяющими их экстремумы⁷. Решение уравнения (7) минимизирует показатель экспоненты S в выражении для статистического веса (3), что наводит на мысль, что и функциональный интеграл также может вычисляться в виде разложения по константе взаимодействия g .

Действительно, при слабых флуктуациях можно ограничиться лишь квадратичными по φ членами в (2). Этому соответствует хорошо известное гауссово приближение в статистической физике. Оно так названо, ибо при этом корреляционные функции определяются гауссовыми интегралами. Оказывается, формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-\frac{Kx^2}{2}} = -2 \frac{dI}{dK} \quad \text{где} \quad I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{Kx^2}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi}{K}} \quad (10)$$

легко обобщается на случай, когда величина x является вектором произвольной размерности, а K – матрицей по значкам вектора \mathbf{x} :

$$\int d\mathbf{x} x_\alpha x_\beta \exp\left(-\sum_{sl} x_s K_{sl} x_l / 2\right) = \sqrt{\det 2\pi K^{-1}} K_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Из формулы (5) видно, что квадратичным по φ вкладом в S (первым

⁷Вспомним, например, принцип Ферма, или вообще принцип минимальности функционала действия, когда из которых непосредственно следует форма траектории частицы или луча.

двум слагаемым в выражении (2)) соответствует вклад

$$\sum_{s=0}^M \left[\frac{\tau \varphi_s^2}{2} + \frac{c(\varphi_{s+1} - \varphi_s)^2}{2(\Delta x)^2} \right],$$

который можно представить как $\sum_{sl=0}^M \varphi_s K_{sl} \varphi_l / 2$ для $(M + 1)$ - мерных векторов φ_s свернутых с матрицей K размером $(M + 1) \times (M + 1)$. В пределе $M \rightarrow \infty$ это выражение стремится к

$$S_0 = \int d\mathbf{x} \left(\frac{\tau}{2} \varphi^2(\mathbf{x}) + \frac{c}{2} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i} \right]^2 \right).$$

Перебрасывая одну из производных во втором слагаемом интегрировании по частям, получим, что роль бесконечномерной матрицы K в функциональном интеграле играет дифференциальный оператор $-c\Delta + \tau$. В результате

$$\int \mathcal{D}\varphi \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2) e^{-S_0} = \sqrt{\det 2\pi K^{-1}} K^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),$$

а для нормировочного множителя в (3)

$$Q = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S_0} = \sqrt{\det 2\pi K^{-1}}.$$

Значит, если мы будем считать парную корреляционную функцию на действии S_0 , получим

$$\langle \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2) \rangle_0 = K^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),$$

символом $_0$ обозначено усреднение при $g = 0$. Обратный оператор K^{-1} как раз совпадает с решением G уравнения (8), так как (8) можно записать в виде

$$(-c\Delta + \tau)G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad \Leftrightarrow \quad KG = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Такой ответ для парной корреляционной функции в статистической физике носит название *приближения Орнштейна-Цернике*. Указанное приближение часто является достаточным для практических задач. Учет

отличия S от S_0 требуется, если флуктуации в системе велики, то есть, когда φ^3 оказывается сравнимым с $\Delta\varphi$ и $\tau\varphi$ членами. Яркий пример такой системы – поведение физических систем в окрестности точки фазового перехода второго рода: магнетиков вблизи точки Кюри, системы 'жидкость-пар' в окрестности критической точки.

Несложно сосчитать и произвольную корреляционную функцию

$$\langle \varphi(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_2)\dots\varphi(\mathbf{x}_n) \rangle_0 \quad \text{при } g = 0.$$

Наращивая количество производных по K в (10) получим формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{Kx^2}{2}} x^{2n} = \sqrt{\frac{2\pi}{K}} \frac{(2n-1)!!}{K^n},$$

обобщение которой на случай функционального интеграла дает сумму со всевозможным расстановкам аргументов от перемноженных функций G в количестве $n/2$ штук (для нечетных n интеграл от нечетной функции, очевидно, равен нулю).

Теперь, когда мы вычислили парную корреляционную функцию при $g = 0$, вычислим поправки по g . Тем самым мы научимся вычислять функциональные интегралы (6) в виде ряда теории возмущений⁸. Разобъем действие следующим образом:

$$S \equiv S_0 + S_{int}, \quad \text{где} \quad S_{int} = \frac{g}{4} \int d\mathbf{x} \varphi^4(\mathbf{x}),$$

и разложим в функциональных интегралах (6) вклад $\exp(-S_{int})$ в ряд:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_2) \left(\frac{g}{4} \int d\mathbf{x} \varphi^4(\mathbf{x}) \right)^m e^{-S_0}.$$

Каждое слагаемое полученной суммы выражается через уже построенные корреляционные функции при $g = 0$. Полученные после интегрирования по $\mathcal{D}\varphi$ выражения опять оказываются громоздкими. Поэтому воспользуемся введенными в предыдущем разделе правилами диаграммной техники. Ответ приведен на рисунке 3. Как и в предыдущем раз-

⁸Для простоты мы делаем это только для парной корреляционной функции G_2 , однако обобщение на случай произвольных G_k не вызывает принципиальных трудностей.

$$\varphi(x) = \frac{\text{---}}{x_1} \frac{\text{---}}{x_2} - 3g \frac{\text{---}}{x_1} \frac{\text{---}}{x_2} \text{---} + 6g^2 \frac{\text{---}}{x_1} \text{---} \frac{\text{---}}{x_2} +$$

$$+ 9g^2 \frac{\text{---}}{x_1} \text{---} \frac{\text{---}}{x_2} \text{---} + 9g^2 \frac{\text{---}}{x_1} \text{---} \text{---} \frac{\text{---}}{x_2} + \dots$$

Рис. 3: Графическое представление для парной корреляционной функции.

деле линиями изображены функции G от соответствующих координат, в необозначенных вершинах подразумеваются интегрирования. Не представляет труда продолжить этот ряд диаграмм и за приведенный явно порядок по g . Полученное графическое представление одинаково справедливо и для рассматриваемой модели статистической физики, и для квантово-полевой модели ϕ^4 в пространстве Минковского. Отличие заключается лишь в конкретном виде функции G и типе пространственных переменных.

В теории поля представленные диаграммы имеют очень наглядную интерпретацию. Первая диаграмма правой части равенства на рис. 3 описывает распространение свободной частицы между точками x_1 и x_2 ; второй диаграмме соответствует процесс испускания и поглощения в некоей точке x виртуальной частицы; в третьей диаграмме происходит распад частицы на три с последующим собиранием их снова в одну. Линиями диаграмм изображается распространение свободных частиц, нелинейное взаимодействие отвечает за процессы рождения и уничтожения. Можно предположить, что эта наглядность графических обозначений и сделала их основой языка квантовой теории поля.

5 Заключение.

Мы рассмотрели основы теоретико-полевой диаграммной техники. Интересной может показаться и история диаграммных методов. Слегка мо-

дифицированное разложение сперва было создано для описания неидеальных газов (так называемая *майеровская диаграммная техника*). В нем в качестве нулевого приближения фигурирует идеальный газ, разложение идет, в сущности, по взаимодействию между частицами. Результатом этого метода явилось *виртуальное разложение*, позволяющее при известном виде межмолекулярного потенциала рассчитывать поправки по степеням плотности к законам идеального газа (более подробно с этим кругом вопросов можно ознакомиться в [2]).

Аппарат майеровской диаграммной техники оказал существенное влияние на развитие квантовой теории поля, был там усовершенствован, и вернулся обратнов статистическую физику для описания критических явлений, явлений сверхпроводимости, сверхтекучести, разнообразных процессов случайных блужданий, длинных полимерных цепей, а также теории турбулентности.

Имеются и другие диаграммные разложения, которые, впрочем, принципиально не отличаются от вышеупомянутых. Следует вспомнить высоко- и низкотемпературные разложения, используемые для описания статистических свойств твердых тел (простые варианты этих разложений описаны в [3]). В настоящее время приемы высокотемпературных разложений пытаются использовать для исследования сильных взаимодействий в решеточных аппроксимациях функциональных интегралов.

Совокупность упомянутых диаграммных подходов и составляет основу функциональных методов квантовой теории поля и статистической физики [4, 5].

Последовательное диаграммное вычисление связанных с нелинейностью поправок сыграло немаловажную роль в теоретической физике (причем известны примеры, когда число диаграмм, вычисляемых еще до использования компьютеров, доходило до нескольких сотен). Это и результаты упомянутых виртуального, высоко- и низкотемпературных разложений, и расчеты лэмбовского сдвига, электромагнитной постоянной, разнообразных сечений рассеяния элементарных частиц.

Однако основной теоретический интерес представляют проблемы, где нелинейность сильна настолько, что невозможно ограничиться конечным отрезком ряда теории возмущений. К таковым относятся, например, теории критического поведения, развитой турбулентности, андерсоновской локализации в твердом теле, конфайнмента (невыветание кварков) в квантовой хромодинамике. Приемы исследований таких ситуаций активно развиваются в последнее время, и в этой области имеются суще-

ственные успехи. Функциональные интегралы допускают замены переменных и интегрирование по частям, что приводит к функциональным уравнениям Швингера и тождествам Уорда, справедливым и вне рамок теории возмущений. Современная теория критического поведения основывается на методе ренормализационной группы, позволяющем отсуммировать из бесконечного диаграммного ряда вклады, наиболее существенные в интересующей области. Разрабатывается инстантонный анализ – аналог метода стационарной фазы для функциональных интегралов – и поиск инстантонов и солитонов – локализованных куполообразных решений уравнений на экстремум функции распределения, имеющих интересный физический и математический смысл. Но несмотря на большие успехи в этих задачах, остается еще много важных нерешенных проблем для современного исследователя.

Список литературы

- [1] *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* // Введение в теорию квантованных полей, М.: Наука, 1976. 480 с.
- [2] *Куни Ф.М.* // Статистическая физика и термодинамика, М.: Наука, 1981. 351 с.
- [3] *Фишер М.* // Природа критического состояния, М.: Мир, 1968. 223 с.
- [4] *Васильев А.Н.* // Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике, Л.: ЛГУ, 1976. 295 с.
- [5] *Zinn-Justin J.* // Quantum Field Theory and Critical Phenomena, NY.: Clarendon, 1996. 998 с.

Михаил Юрбевич Налимов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры статистической физики Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: применение методов квантовой теории поля в задачах статистической физики, фазовые переходы второго рода, развитая турбулентность.