

Санкт-Петербургский государственный университет

**Ф.М.Куни, Л.Ц.Аджемян**

**МЕТОД  
ЭНСКОГА-ЧЕПМЕНА  
В ТЕОРИИ  
НЕРАВНОВЕСНЫХ ЯВЛЕНИЙ**

*Учебно-методическое пособие*

Санкт-Петербург  
1998

Рецензент  
проф. А.П.Гринин (С.-Петербург. гос. ун-т)

**Куни Ф.М., Аджемян Л.Ц.** Метод Энскога-Чепмена в теории неравновесных явлений. СПб: Отдел оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ, 1998. – 21с.

Дана абстрактная, не связанная с конкретной природой изучаемого неравновесного явления, формулировка метода Энскога-Чепмена, предложенного впервые на примере уравнения Больцмана в кинетической теории газов. Показано, что метод Энскога-Чепмена приводит к основополагающим для всех теорий неравновесных явлений представлениям о многостадийности развития неравновесного процесса во времени, о происходящем в этом развитии сокращении необходимого описания неравновесного процесса, о существовании иерархии масштабов времен в многостадийном развитии неравновесного процесса. Тем самым вскрыто фундаментальное значение метода Энскога-Чепмена. Представлены в виде иллюстраций приложения метода к случаю уравнения Больцмана.

Рекомендуется студентам физических, физико-математических и физико-химических специальностей, аспирантам, преподавателям вузов, а также научным работникам, интересующимся проблемами теоретической и математической физики. Учебное пособие будет, кроме того, полезно для Соросовских Учителей, преподающих физику и математику в средних школах.

Печатается по решениям  
учебно-методической комиссии  
Ученого совета  
Физического учебно-научного центра

© Ф.М.Куни,  
Л.Ц.Аджемян,  
1998

## 1. Введение

Одним из важнейших для кинетической теории газов является вопрос, каким образом из уравнения Больцмана, дающего микроскопическое описание эволюции состояния газа, можно получить обычные уравнения гидродинамики, дающие менее детальное, макроскопическое описание этой эволюции. Ответ на данный вопрос искали и сам Больцман, и Гильберт, и Максвелл. Окончательный ответ был дан в 1917 году Энскогом, использовавшим идеи Гильberta, а также независимо Чепменом, использовавшим идеи Максвелла. Предложенный в результате Энскогом и Чепменом метод получения уравнений гидродинамики на основе уравнения Больцмана вошел в историю мировой науки как метод Энскога-Чепмена. С изложением метода Энскога-Чепмена в случае уравнения Больцмана можно познакомиться по книгам [1], [2].

В действительности метод Энскога-Чепмена выходит далеко за рамки данного случая. Этот метод, как показано в книге [3], может быть, например, успешно применен к решению уравнения Фоккера - Планка в задаче о вращательной релаксации броуновских частиц. Метод Энскога-Чепмена оказывается эффективным и в решении многих других уравнений теории неравновесных явлений. Можно без преувеличения сказать, что он внес вклад в золотой фонд естественных наук истекающего двадцатого столетия.

Формулировка метода Энскога-Чепмена, не связанной с конкретной природой изучаемого неравновесного явления, предназначено настоящее учебное пособие. Такая абстрактная формулировка не встречалась ранее в литературе.

Будет показано, что метод Энскога-Чепмена приводит к представлению о многостадийности развития неравновесного процесса во времени и о происходящем в этом развитии сокращении необходимого описания, а также приводит к представлению о существовании иерархии масштабов времен в многостадийном развитии неравновесного процесса. Оба эти представления стали основополагающими для всех последующих теорий неравновесных явлений.

Предлагаемая абстрактная формулировка метода Энскога-Чепмена, свободная от многочисленных технических деталей в конкретных его приложениях, позволила упростить и само изложение этого метода. Ставяясь выдержать логическую строгость и замкнутость рассуждений, мы, вместе с тем, стремились выразить в простом и сжатом виде главное, что составляет суть метода Энскога-Чепмена и вскрывает его фундаментальное значение. Приложения метода Энскога-Чепмена к случаю уравнения Больцмана (в котором он впервые и был разработан) будут представлены в виде иллюстраций метода.

Примыкая непосредственно к книге [3] и дополняя ее, настоящее учебное пособие будет полезно для студентов физических, физико-математических и физико-химических специальностей, аспирантов, преподавателей вузов, а также научных работников, интересующихся проблемами теоретической и математической физики. Учебное пособие будет, кроме того, полезно, ввиду принципиальной значимости затронутых в нем вопросов, для Соросовских Учителей, преподающих физику и математику в средних школах.

## 2. Исходные положения

Пусть  $P \equiv P(\nu, \xi, t)$  есть функция от независимых переменных  $\nu$ ,  $\xi$  и времени  $t$  ( $\nu$  и  $\xi$  могут представлять наборы из нескольких переменных). Условно будем говорить о  $P$  как о "двумерном распределении по  $\nu$  и  $\xi$ ".

Пусть развитие  $P$  во времени описывается *управляющим уравнением*

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -(\hat{A} + \hat{\epsilon})P, \quad (1)$$

где  $\hat{A} \equiv \hat{A}(\xi)$  и  $\hat{\epsilon} \equiv \hat{\epsilon}(\nu, \xi)$  – не зависящие от времени линейные операторы, которые действуют на функции от  $\xi$  и на функции от  $\nu, \xi$  соответственно (оператор  $\hat{A}$  может содержать зависящий от  $\nu$  множитель). Считаем  $\hat{A}$  "главным оператором", а  $\hat{\epsilon}$  – "оператором возмущения", пропорциональным малому параметру  $\varepsilon$ .

Управляющее уравнение (1) переходит в линеаризованное уравнение Больцмана (79.6) в книге [3], если положить:  $\nu \equiv r$ ,  $\xi \equiv c$ ,

$t \equiv \tau$ ,  $P \equiv \zeta(r, c, \tau)$ ,  $\hat{\epsilon} \equiv c \cdot \lambda \cdot \partial/\partial r$ . Роль малого параметра  $\varepsilon$  оператора  $\hat{\epsilon}$  играет при слабой неоднородности газа отношение  $\lambda/L$ . Задимствованные из книги [3] обозначения не поясняем.

Предполагается, что при каком-то определении скалярного произведения  $(\psi, \chi)$  функций  $\psi$  и  $\chi$  от  $\xi$  главный оператор  $\hat{A}$  является самосопряженным:

$$(\psi, \hat{A}\chi) = (\hat{A}\psi, \chi). \quad (2)$$

В случае линеаризованного уравнения Больцмана скалярное произведение  $(\psi, \chi)$  определяется равенством  $(\psi, \chi) \equiv \pi^{-3/2} \int dce^{-c^2} \psi^*(c)\chi(c)$ . Главный оператор  $\hat{A} \equiv -\hat{J}$  при этом действительно является (см. книгу [3]) самосопряженным.

Далее, предполагается, что в уравнении

$$\hat{A}H_i = \Lambda_i H_i; \quad (3)$$

известны собственные значения  $\Lambda_i$  и собственные функции  $H_i \equiv H_i(\xi)$  главного оператора  $\hat{A}$ . Предполагается, кроме того, что  $i$  принимает дискретные значения. Поскольку главный оператор  $\hat{A}$  – самосопряженный, то собственные значения  $\Lambda_i$  являются вещественными, а собственные функции  $H_i$  образуют полную и, как можно всегда считать, ортонормированную систему. Последнее означает

$$(H_i, H_{i'}) = \delta_{ii'} \quad (4)$$

( $\delta_{ii'}$  – символ Кронекера).

Наконец, предполагается, что среди вещественных собственных значений  $\Lambda_i$  существует равное нулю – его индексу  $i$  – значение  $i = 0$ , а все же остальные собственные значения являются уже строго положительными. Имеем, следовательно:

$$\Lambda_0 = 0, \quad (5)$$

$$\Lambda_i > 0 \quad (i \neq 0). \quad (6)$$

Как раз с такой ситуацией и приходится иметь дело в случае линеаризованного уравнения Больцмана, когда  $\hat{A} \equiv -\hat{J}$ .

О возможных ослаблениях сделанных предположений исследования управляющего уравнения (1) будет сказано в разделе 7.

То, что помимо положительных собственных значений у главного оператора  $\hat{A}$  имеется еще и нулевое собственное значение, вносит *серьезное усложнение* в нахождение решения управляющего уравнения (1). Преодолеть это усложнение и позволяет метод Энскога-Чепмена. Наличие конечной цели, отделяющей положительные собственные значения от нулевого, является принципиально необходимым для метода.

Нулевое собственное значение  $\Lambda_0$  главного оператора  $\hat{A}$  будем для простоты считать невырожденным. Ему при этом отвечает одна собственная функция  $H_0$ . Учет возможного вырождения нулевого собственного значения главного оператора не встречает, как будет ясно из последующего, принципиальных трудностей.

Так, в случае линеаризованного уравнения Больцмана имеется пятикратное вырождение нулевого собственного значения главного оператора в этом уравнении. Соответствующие пять собственных функций главного оператора представляют собой ортонормированные линейные комбинации из пяти сохраняющихся в столкновениях величин  $1, \mathbf{c}^2, c_\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ).

Введем проекцию  $(H_0, \psi)H_0$  функции  $\psi \equiv \psi(\xi)$  на  $H_0$ . Обозначая ортогональную к  $H_0$  проекцию этой функции через  $[\psi]_\perp$ , имеем тогда

$$[\psi]_\perp = \psi - (H_0, \psi)H_0. \quad (7)$$

При наличии вырождения нулевого собственного значения  $\Lambda_0$  нужно было бы вводить проекции функции  $\psi$  на каждую из собственных функций, отвечающих этому собственному значению. Соответственно все эти проекции нужно было бы и вычитать из функции  $\psi$  в обобщающем равенство (7) определении ортогональной проекции  $[\psi]_\perp$ .

Введем функцию  $n \equiv n(\nu, t)$  с помощью соотношения

$$n = (H_0, P). \quad (8)$$

Условно будем говорить об этой функции, не зависящей от переменной  $\xi$ , как об *"одномерном распределении по  $\nu$ "*.

Проектируя управляющее уравнение (1) на  $H_0$ , учитывая (2), (3), (5), (8) и то, что  $H_0$  не зависит (вместе с оператором  $\hat{A}$ ) от времени  $t$ , получим

$$\partial n / \partial t = -(H_0, \hat{\epsilon}P). \quad (9)$$

Благодаря наличию оператора возмущения  $\hat{\epsilon}$  в правой части (9) одномерное распределение  $n$  оказывается *квазинтегралом движения*. Чем меньше малый параметр  $\epsilon$  оператора  $\hat{\epsilon}$ , тем согласно (9) медленнее меняется со временем одномерное распределение  $n$ . При  $\epsilon = 0$  оно становится строгим интегралом движения.

В случае линеаризованного уравнения Больцмана, когда  $P \equiv \zeta(r, c, \tau)$  и имеется пятикратное вырождение нулевого собственного значения главного оператора  $\hat{A} \equiv -\hat{J}$ , нужно было бы вместо одного квазинтеграла движения  $n$  вводить пять квазинтегралов  $(1, \zeta), (c^2, \zeta), (c_\alpha, \zeta)$ . Они по формулам (79.18) из книги [3] определяют пять зависящих от положения в пространстве и от времени гидродинамических величин – плотностей числа частиц, энергии и импульса. Чем меньше малый параметр  $\lambda/L$  оператора возмущения в линеаризованном уравнении Больцмана, тем медленнее меняются со временем эти плотности.

### 3. Начальная стадия эволюции

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  в разложении двумерного распределения  $P$  по полной системе функций  $H_i$  заметно представлены члены с  $i \neq 0$ . При действии на такие члены главный оператор  $\hat{A}$  в управляющем уравнении (1) дает, ввиду (3) и (6), относительно большие по сравнению с оператором возмущения  $\hat{\epsilon}$  вклады. Поэтому в начальный момент времени  $t = 0$  и близкие к нему последующие времена  $t$  можно пренебречь оператором  $\hat{\epsilon}$  в управляющем уравнении (1) и соответственно свести его к уравнению

$$\partial P / \partial t = -\hat{A}P. \quad (10)$$

Как ясно из (3), (5) и того, что  $\Lambda_i$  и  $H_i$  не зависят (вместе с оператором  $\hat{\Lambda}$ ) от времени  $t$ , общее решение уравнения (10) имеет вид

$$P = nH_0 + \sum_{i \neq 0} e^{-\Lambda_i t} n_i H_i, \quad (11)$$

где коэффициенты разложения по полной системе функций  $H_i$  даются в силу (4) равенствами

$$n = (H_0, P) = (H_0, P|_{t=0}), \quad (12)$$

$$n_i = (H_i, P|_{t=0}) \quad (i \neq 0). \quad (13)$$

Сравнивая (12) с (8) видим, что коэффициент разложения  $n$  имеет смысл одномерного распределения по  $\nu$ , а также и то, что это распределение не меняется со временем – сохраняет свое начальное значение. Последнее подтверждает отмечавшееся ранее, что при  $\varepsilon = 0$  одномерное распределение  $n$  является строгим интегралом движения.

Уравнение (10) и его решение (11) отвечают *начальной стадии эволюции*, на которой происходит развитие двумерного распределения  $P$  по "быстрой" переменной  $\xi$ . Эта стадия согласно (6) и (11) протекает в чисто затухающем режиме релаксации со спектром времен

$$t_i = 1/\Lambda_i \quad (i \neq 0) \quad (14)$$

и с характерным временем развития  $1/\Lambda_1$ , где  $\Lambda_1$  – наименьшее из положительных собственных значений  $\Lambda_i$ .

По окончании начальной стадии, т.е. при  $t \sim 1/\Lambda_1$ , имеем на основании (6) и (11):

$$P \simeq nH_0 \quad (t \sim 1/\Lambda_1), \quad (15)$$

так что двумерное распределение  $P$  существенно изменилось и приблизилось, независимо от того, каким оно было до начальной стадии, к "квазиравновесному распределению"  $nH_0$ .

Поскольку квазиравновесное распределение  $nH_0$  является, ввиду (3) и (5), собственной функцией главного оператора  $\hat{\Lambda}$  с нулевым

собственным значением, то по окончании начальной стадии пренебрегать оператором возмущения  $\hat{e}$  в управляющем уравнении (1) и сводить его к более простому уравнению (10) уже нельзя. Соответственно уравнение (10) и его решение (11) относятся лишь к временам  $t \leq 1/\Lambda_1$ , на которых и протекает начальная стадия.

В случае линеаризованного уравнения Больцмана уравнение (10) и его решение (11) даются формулами (79.16) и (79.17) из книги [3]. Роль начальной стадии эволюции играет *кинетическая стадия*, на которой происходит релаксация распределения частиц по их скорости (по их "быстрой" переменной) к локально-равновесному в каждой точке пространства распределению Максвелла. Оно и служит квазиравновесным распределением. Характерное время развития кинетической стадии имеет (см., например, книги [1] – [3]), порядок времени свободного пробега частицы газа  $\lambda/v$ .

Заметим, что фактическое знание отличных от нуля собственных значений  $\Lambda_i$  главного оператора и отвечающих им собственных функций  $H_i$  в случае линеаризованного уравнения Больцмана и во многих других физических приложениях управляющего уравнения (1) требует решения сложной, однако несравнимо более простой по сравнению с решением уравнения (1) задачи.

То, что по окончании начальной стадии пренебрегать оператором возмущения  $\hat{e}$  в управляющем уравнении (1) уже нельзя, как раз и усложняет серьезно нахождение решения этого уравнения. Преодолеть возникающее усложнение и позволяет метод Энскога-Чепмена.

#### 4. Эволюция по окончании начальной ее стадии

Итак, по окончании начальной стадии двумерное распределение  $P$  приблизилось к квазиравновесному распределению  $nH_0$ . Последнее выступает как "начальное условие ослабления корреляций" по отношению к эволюции, следующей за начальной ее стадией. Квазиравновесное распределение  $nH_0$  определяется одномерным распределением  $n$ . Будучи квазинтегралом движения, одномерное распределение  $n$  начинает *управлять* дальнейшей эволюцией двумерного распределения  $P$ .

Учитывая все сказанное, а еще и то, что оператор  $\hat{e}$  в управляющем уравнении (1) является оператором возмущения, будем искать решение уравнения (1) по окончании начальной стадии в виде разложения по малому параметру  $\epsilon$  оператора  $\hat{e}$ :

$$P = nH_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)}(\nu, \xi | n). \quad (16)$$

Верхний индекс указывает порядок приближения по параметру  $\epsilon$  – пропорциональный параметру  $\epsilon$  в степени, равной этому индексу. Аргумент  $n$  в поправочных членах  $x^{(k)} \equiv x^{(k)}(\nu, \xi | n)$  указывает, что они в каждый момент времени являются функционалами от одномерного распределения  $n$  в тот же момент времени. Зависимость поправочных членов  $x^{(k)}$  от времени осуществляется, таким образом, посредством одномерного распределения  $n$  – квазинтеграла движения, управляющего эволюцией двумерного распределения  $P$ . Квазиравновесное распределение  $nH_0$ , к которому двумерное распределение  $P$  приблизилось по окончании начальной стадии, выбрано за нулевое приближение.

Согласно (9) производная  $\partial n / \partial t$  в нулевом порядке по  $\epsilon$  равна нулю ( $n$  является квазинтегралом движения). Имеем, таким образом:

$$(\partial n / \partial t)^{(0)} = 0. \quad (17)$$

Из (3), (5) и того, что  $H_0$  не зависит от времени, следует тогда, что квазиравновесное распределение  $nH_0$ , выбранное за нулевое приближение разложения (16), действительно является решением управляющего уравнения (1) в нулевом порядке по  $\epsilon$ . Из (17) также следует, что разложение производной  $\partial n / \partial t$  по параметру  $\epsilon$  начинается по крайней мере с членов первого порядка, т.е. имеет вид

$$\partial n / \partial t = \sum_{p=1}^{\infty} (\partial n / \partial t)^{(p)}. \quad (18)$$

Итерационное построение решения управляющего уравнения (1) по окончании начальной стадии с совместным учетом главного оператора  $\hat{A}$  и оператора возмущения  $\hat{e}$  представляет цель метода Энскога-Чепмена. То, что это построение, как убедимся, действительно удастся осуществить в виде разложения (16), подтвердит положенные в основу разложения (16) предположения, а вместе с тем подтвердит и сам метод Энскога-Чепмена.

Из (4), (8) и (16) явствует

$$(H_0, x^{(k)}) = 0 \quad (k \geq 1). \quad (19)$$

Таким образом, поправочные члены разложения (16) не содержат проекций на  $H_0$  – на собственную функцию оператора  $\hat{A}$  с нулевым собственным значением. Предполагая выполненным условие

$$\epsilon / \Lambda_1 \ll 1 \quad (20)$$

( $\Lambda_1$  – наименьшее из положительных собственных значений оператора  $\hat{A}$ ), заключаем тогда, ввиду (3) и (6), что при действии на поправочные члены разложения (16) оператор  $\hat{A}$  всегда является главным по сравнению с оператором  $\hat{e}$ .

Условие (20) налагает ограничение на малость параметра  $\epsilon$ . Это ограничение тем жестче, чем уже щель, отделяющая положительные собственные значения главного оператора  $\hat{A}$  от его нулевого собственного значения. Условие (20) выражает *условие применимости* метода Энскога-Чепмена. Безразмерная величина  $\epsilon / \Lambda_1$  в условии (20) и играет роль физического малого параметра теории. Фактически условие (20) уже использовалось на начальной стадии эволюции при замене управляющего уравнения (1) на более простое уравнение (10).

Поскольку  $x^{(k)}$  ( $k \geq 1$ ) пропорциональны  $\epsilon^k$ , а зависимость  $x^{(k)}$  от времени осуществляется посредством одномерного распределения  $n$ , то в силу (18) разложение производной  $\partial x^{(k)} / \partial t$  по параметру  $\epsilon$  начинается по крайней мере с членов  $(k+1)$ -го порядка по  $\epsilon$ . Подставляя тогда разложение (16) в управляющее уравнение (1), учитывая, что  $H_0$  не зависит от времени, а также принимая во внимание, что при действии на поправочные члены разложения (16) оператор  $\hat{A}$  всегда

является главным по сравнению с оператором  $\hat{\varepsilon}$ , запишем уравнение (1) в  $s$ -ом порядке по  $\varepsilon$ :

$$(\partial n / \partial t)^{(s)} H_0 + \sum_{k=1}^{s-1} (\partial x^{(k)} / \partial t)^{(s)} = -\hat{\Lambda} x^{(s)} - \hat{\varepsilon} x^{(s-1)} \quad (s \geq 1). \quad (21)$$

Сумма по  $k$  в левой части (21) дает вклад лишь при  $s \geq 2$ . Встречающаяся при  $s = 1$  в правой части (21) величина  $x^{(s-1)}$ , т.е. величина  $x^{(0)}$ , понимается в соответствии с разложением (16) как

$$x^{(0)} = n H_0. \quad (22)$$

То обстоятельство, что в сумме по  $k$  в левой части (21) присутствуют лишь  $k \leq s-1$ , будет иметь решающее значение для проведения итераций в методе Энскога-Чепмена. Как мы видели, данное обстоятельство оказалось следствием того, что  $n$  является квазинтегралом движения и что зависимость  $x^{(k)}$  от времени  $t$  осуществляется посредством  $n$ . Это следствие обязано тому, что у главного оператора в управляющем уравнении (1) имеется нулевое собственное значение, т.е. тому, что как раз и внесло усложнение в решение управляющего уравнения.

Представим (21) в виде проекции на  $H_0$  и в виде проекции, ортогональной к  $H_0$ . Используя (2) – (5), (7) и равенства (19), а точнее вытекающие из них, ввиду независимости  $H_0$  от  $t$ , равенства  $(H_0, \partial x^{(k)} / \partial t) = 0$  ( $k \geq 1$ ), получим соответственно

$$(\partial n / \partial t)^{(s)} = -(H_0, \hat{\varepsilon} x^{(s-1)}) \quad (s \geq 1), \quad (23)$$

$$\hat{\Lambda} x^{(s)} = -[\hat{\varepsilon} x^{(s-1)}]_{\perp} - \sum_{k=1}^{s-1} (\partial x^{(k)} / \partial t)^{(s)} \quad (s \geq 1). \quad (24)$$

Сложение уравнений (23), умноженных на  $H_0$ , с уравнениями (24) естественно приводит в силу (7) к уравнениям (21).

## 5. Итерации в методе Энскога-Чепмена

Уравнения (23) позволяют найти производную  $\partial n / \partial t$  в  $s$ -ом порядке по параметру  $\varepsilon$  с помощью результатов в ближайшем предыдущем порядке по параметру  $\varepsilon$ . Уравнения же (24) дают для величины  $x^{(s)}$ , имеющей  $s$ -ый порядок по параметру  $\varepsilon$ , линейное неоднородное уравнение, неоднородный член которого выражается через результаты во всех предыдущих порядках по параметру  $\varepsilon$ .

Покажем, что решение уравнений (24) относительно  $x^{(s)}$  при каждом  $s \geq 1$  существует и единствено. Согласно сказанному выше, правая часть (24) представляет собой проекцию, ортогональную к  $H_0$ . Разлагая ее тогда по полной системе функций  $H_i$ , учитывая отсутствие вклада от  $H_0$ , запишем (24) как

$$\hat{\Lambda} x^{(s)} = \sum_{i \neq 0} c_i(\nu) H_i(\xi) \quad (s \geq 1), \quad (25)$$

где коэффициенты разложения  $c_i(\nu)$  могут быть легко получены с помощью (4) при найденной правой части (24). Из (3) и того, что согласно (6) имеет место  $\Lambda_i \neq 0$  при  $i \neq 0$  следует, что решением уравнения (25) служит

$$x^{(s)} = \sum_{i \neq 0} [c_i(\nu) / \Lambda_i] H_i(\xi) \quad (s \geq 1). \quad (26)$$

Единственность решения (26) (отсутствие в нем возможного, ввиду (5), вклада от  $H_0$ ) явствует из (19).

Помимо самого обоснования существования и единственности решения уравнений (24) относительно  $x^{(s)}$  формулы (25), (26) дают, вместе с тем, конструктивный способ практического нахождения данного решения при знании отличных от нуля собственных значений главного оператора  $\hat{\Lambda}$  и отвечающих им собственных функций. Без этого знания невозможно в принципе обойтись при нахождении решения уравнений (24) относительно  $x^{(s)}$ .

Итак, (23) и (24) образуют рекуррентную систему уравнений метода Энскога-Чепмена, позволяющую итерационно находить все более и

более высокие члены разложений (18) и (16) по параметру  $\varepsilon$ . Опишем проведение итераций в методе Энскога-Чепмена.

В нулевом порядке по параметру  $\varepsilon$  производная  $\partial n / \partial t$  согласно (17) равна нулю.

В следующем, первом порядке по параметру  $\varepsilon$  производная  $\partial n / \partial t$  дается согласно (23) и (22) равенством

$$(\partial n / \partial t)^{(1)} = -(H_0, \hat{\epsilon}n H_0). \quad (27)$$

Соответственно для  $x^{(1)}$  имеем согласно (24) и (22) уравнение

$$\hat{A}x^{(1)} = -[\hat{\epsilon}n H_0]_{\perp}. \quad (28)$$

Дальнейшее проведение итерационной процедуры Энскога-Чепмена по уравнениям (23) и (24) становится очевидным.

Укажем на возможное существенное упрощение этой процедуры. Из (27) и (28) видно, что  $(\partial n / \partial t)^{(1)}$  и  $x^{(1)}$  являются в каждый момент времени линейными функциями от одномерного распределения  $n$  в тот же момент времени. Сделаем предположение, которое подтвердим чуть ниже, что и в последующих порядках по параметру  $\varepsilon$  величины  $(\partial n / \partial t)^{(s)}$  и  $x^{(s)}$  ( $s \geq 2$ ) в каждый момент времени линейно зависят от одномерного распределения  $n$  в тот же момент времени, однако зависят от него уже не как функции, а как функционалы.

Предложенная локальная во времени, линейная зависимость функционалов  $x^{(k)}$  от одномерного распределения  $n$  позволяет написать равенства

$$\partial x^{(k)}(\nu, \xi | n) / \partial t = x^{(k)}(\nu, \xi | \partial n / \partial t), \quad (29)$$

где функционалы  $x^{(k)}(\nu, \xi | \partial n / \partial t)$  зависят от функции  $\partial n / \partial t$  точно так же, как зависят функционалы  $x^{(k)}(\nu, \xi | n)$  от функции  $n$ . Говоря ниже о локальных во времени, линейных функционалах  $x^{(k)}$ , будем допускать в качестве их функциональных аргументов не только функцию  $n$ , но и функцию  $\partial n / \partial t$ . Сами функционалы  $x^{(k)}$  будут при этом *одними и теми же*.

В  $s$ -ом порядке по  $\varepsilon$  ( $s \geq k + 1$ ) равенства (29) выглядят так:

$$(\partial x^{(k)}(\nu, \xi | n) / \partial t)^{(s)} = x^{(k)}(\nu, \xi | (\partial n / \partial t)^{(s-k)}) \quad (s \geq k + 1). \quad (30)$$

Учтено, что функционалы  $x^{(k)}(\nu, \xi | n)$  от функции  $n$  пропорциональны  $\varepsilon^k$ , и что лишь при  $s \geq k + 1$  правая и левая части равенств (30) отличны от нуля.

Равенства (30) позволяют выразить сумму в правой части (24) уже непосредственно через локальные во времени, линейные функционалы  $x^{(k)}$  ( $1 \leq k \leq s - 1$ ), функциональными аргументами которых являются функции  $(\partial n / \partial t)^{(s-k)}$ , которые, в свою очередь, являются согласно (23), (24) и (30) локальными во времени, линейными функционалами от функции  $n$ . Это существенно упрощает процедуру Энскога-Чепмена, позволяя в каждом очередном порядке по  $\varepsilon$  легко находить с помощью (23), (24) и (30) локальные во времени, линейные функционалы  $(\partial n / \partial t)^{(s)}$  и  $x^{(s)}$  от функции  $n$  по таким же функционалам в предыдущих порядках по  $\varepsilon$ . Это вместе с тем подтверждает и само сделанное выше предположение о локальной во времени, линейной зависимости функционалов  $(\partial n / \partial t)^{(s)}$  и  $x^{(s)}$  от одномерного распределения  $n$ .

Чтобы на  $s$ -ом шаге процедуры Энскога-Чепмена, т.е. с точностью до величин порядка  $\varepsilon^s$  включительно, найти зависимость одномерного распределения  $n$  от  $\nu$  и  $t$ , нужно решить *уравнение*, в левой части которого стоит производная  $\partial n / \partial t$ , а в правой части стоит, в согласии с (18), сумма  $\sum_{p=1}^s (\partial n / \partial t)^{(p)}$ , слагаемые которой уже найдены на этом шаге с помощью (23), (24) и (30) как функции от  $\nu$  и как локальные во времени, линейные функционалы от  $n$ . Это уравнение имеет вид

$$\partial n / \partial t = - \sum_{p=1}^s (H_0, \hat{\epsilon}x^{(p-1)}). \quad (31)$$

Начальным условием к уравнению (31) служит одномерное распределение, которое согласно (12) задавалось двумерным распределением  $P$  в самом начале эволюции, происходящей по управляющему

уравнению (1), и оставалось практически неизменным на протяжении всей начальной стадии этой эволюции. Хотя уравнение (31), определяющее зависимость  $n$  от  $\nu$  и  $t$ , является локальным во времени, линейным и одномерным, нахождение его решения  $n(\nu, t)$  может все же составить сложную задачу.

Подставляя решение  $n(\nu, t)$  уравнения (31) в разложение (16), ограничиваясь в нем учетом поправочных членов  $x^{(k)}(\nu, \xi | n)$  лишь с  $k \leq s$ , раскрывая с помощью  $n(\nu, t)$  зависимость от  $\nu$ ,  $\xi$  и  $t$  этих членов, найденных на  $s$ -ом шаге процедуры Энскога-Чепмена в виде функций от  $\nu$ ,  $\xi$  и локальных во времени, линейных функционалов от  $n$ , получим на том же шаге процедуры (с точностью до величин порядка  $\varepsilon^s$  включительно) решение  $P(\nu, \xi, t)$  управляющего уравнения (1), т.е. двумерное распределение по  $\nu$  и  $\xi$ .

*Критерий эффективности* метода Энскога-Чепмена служит быстрота убывания приближений  $(\partial n / \partial t)^{(s)}$  с ростом их номера  $s$  - быстрота сходимости ряда (18) по степеням параметра  $\varepsilon$ . Этот критерий близок к условию (20). Действительно, чем меньше параметр  $\varepsilon$ , тем лучше соблюдается условие (20) и тем быстрее сходится степенной ряд (18).

## 6. Заключительная стадия эволюции

Построенное методом Энскога-Чепмена решение управляющего уравнения (1) по окончании начальной стадии отвечает следующей за ней *заключительной стадии эволюции*.

Упрощение, которое внес метод Энскога-Чепмена в нахождение решения управляющего уравнения (1) на заключительной стадии, состоит в том, что он позволил свести это *двумерное* уравнение для распределения  $P(\nu, \xi, t)$  к двум гораздо более простым *одномерным* уравнениям: к уравнению (3) для собственных значений  $\Lambda_i$  и собственных функций  $H_i(\xi)$  главного оператора  $\hat{\Lambda}$  и к уравнению (31) для распределения  $n(\nu, t)$ .

Достигнутое упрощение физически обязано сокращению необходимого описания, происходящему в процессе двухстадийной эволюции

по управляющему уравнению (1). На начальной стадии описание требовало знания двумерного распределения  $P(\nu, \xi, t)$ . На заключительной же стадии описание требовало лишь знания одномерного распределения  $n(\nu, t)$ , от которого функционально зависит двумерное распределение  $P(\nu, \xi, t)$ .

Основополагающее для всех последующих теорий неравновесных явлений представление о *многостадийности* развития неравновесного процесса во времени и о происходящем в этом развитии *сокращении* необходимого описания было, таким образом, не только выдвинуто, но и обосновано в методе Энскога-Чепмена, причем обосновано с помощью самого исходного управляющего уравнения.

На заключительной стадии переменная  $\xi$ , на функции от которой действует главный оператор  $\hat{\Lambda}$  в управляющем уравнении (1), уже не является "быстрой" по сравнению с переменной  $\nu$ . Развитие во времени двумерного распределения по переменным  $\nu$  и  $\xi$  становится согласованным - происходящим с одинаковой скоростью.

Поскольку на заключительной стадии вклад от оператора  $\hat{\Lambda}$  в правую часть управляющего уравнения (1) оказывается одного порядка с вкладом в нее от оператора  $\hat{e}$ , то, как видно из уравнения (1), характерное время развития заключительной стадии имеет порядок величины  $1/\varepsilon$ . Отношение данного времени к характерному времени развития начальной стадии  $1/\Lambda_1$ , которое по отношению к заключительной стадии выступает как время ее установления – "время корреляции", равно обратной величине от физического малого параметра теории  $\varepsilon/\Lambda_1$  в условии ее применимости (20) и потому весьма велико. Это выражает существование *иерархии масштабов времен* в многостадийном развитии неравновесного процесса – основополагающее для всех последующих теорий неравновесных явлений представление, которое тоже было не только выдвинуто, но и обосновано в методе Энскога-Чепмена, причем обосновано с помощью самого исходного управляющего уравнения.

Не успевая практически измениться на протяжении начальной стадии, одномерное распределение  $n$  (квазинтеграл движения) меняет-

ся, однако, существенно на протяжении заключительной стадии, развивающейся на порядок по большому параметру  $\Lambda_1/\varepsilon$  медленнее, чем развивается начальная стадия. Вместе с одномерным распределением  $n$  меняется существенно на протяжении заключительной стадии и квазиравновесное распределение  $nH_0$ , служащее нулевым, главным членом разложения (16).

В случае линеаризованного уравнения Больцмана роль заключительной стадии эволюции играет *гидродинамическая стадия*, на которой происходит релаксация распределения частиц по их скорости и положению к финальному равновесному распределению Максвелла-Больцмана. Метод Энскога-Чепмена позволяет при этом получить согласно (31) на гидродинамической стадии в каждом очередном приближении по малому параметру  $\lambda/L$ , играющему роль малого параметра  $\varepsilon$ , точнее, малого параметра  $\varepsilon/\Lambda_1$ , пять гидродинамических уравнений для пяти зависящих от положения в пространстве и от времени плотностей числа частиц, энергии и импульса. Эти гидродинамические уравнения имеют ту же структуру, что и выявленные в главе "Неравновесная статистическая термодинамика" книги [3]. Однако входящие в уравнения коэффициенты переноса оказываются уже полностью раскрытыми и доступными численным расчетам. То, что характерное время развития гидродинамической, заключительной стадии превышает на порядок по большому параметру  $L/\lambda$  характерное время развития кинетической, начальной стадии, имеющее, как отмечалось, порядок времени свободного пробега частицы газа  $\lambda/\bar{v}$ , позволяет оценить характерное время развития гидродинамической стадии как произведение величин  $L/\lambda$  и  $\lambda/\bar{v}$ , т.е. как  $L/\bar{v}$ . Приведенная оценка согласуется с оценкой (69.6) в книге [3].

Заметим, что в некоторых физических приложениях метода Энскога-Чепмена, например в задаче о вращательной релаксации броуновских частиц, производная  $dn/dt$  от квазинтеграла движения по времени может быть равна нулю не только в нулевом порядке по малому параметру  $\varepsilon$ , как то отмечалось в (17), но даже и в первом порядке (см. §83 книги [3]). Характерное время развития заключительной стадии

окажется тогда больше, оно будет иметь порядок величины  $(1/\varepsilon)^2$  – квадратичной по большому параметру  $1/\varepsilon$ .

## 7. Обобщения метода Энскога-Чепмена

Собственные значения  $\Lambda_i$  и собственные функции  $H_i$  с  $i \neq 0$ , а также предположение, что они не зависят от времени, использовались в начальной стадии в решении (11) уравнения (10). На заключительной стадии, т.е. в самом методе Энскога-Чепмена, собственные значения  $\Lambda_i$  и собственные функции  $H_i$  с  $i \neq 0$  использовались в формулах (25), (26), позволяющих решать уравнения (24). Отсутствия зависимости  $\Lambda_i$  и  $H_i$  с  $i \neq 0$  от времени при этом не требовалось.

Ясно тогда, что метод Энскога-Чепмена непосредственно обобщается на случай, когда положительные собственные значения главного оператора и отвечающие им собственные функции зависят от времени, и даже обобщается на случай, когда эти собственные значения образуют сплошной спектр. Существование сплошного спектра проявится лишь в том, что в формулах (25), (26) нужно будет сменить суммирование по  $i$  на интегрирование по  $i$ . Однако, по-прежнему остается необходимым, чтобы, в согласии с условием (20), нижняя граница спектра положительных собственных значений главного оператора была отделена конечной щелью от его нулевого собственного значения (которое и внесло усложнение в решение управляющего уравнения (1)). По-прежнему остается необходимым также и то, что собственная функция главного оператора с нулевым собственным значением не зависит от времени. В принципе такое возможно при зависимости от времени положительных собственных значений главного оператора и отвечающих им собственных функций, т.е. при зависимости от времени самого главного оператора.

Существование сплошного спектра положительных собственных значений главного оператора, однако при дополнительном к нему требовании об отсутствии его зависимости от времени, не является препятствием и для проведенного исследования начальной стадии. Нужно будет лишь сменить в (11) суммирование по  $i$  на интегрирование

вание по  $i$ .

Метод Энскога-Чепмена можно обобщить и на случай, когда оператор возмущения  $\hat{e}$  зависит от времени, однако зависит настолько слабо, что производная  $d\hat{e}/dt$  по крайней мере на порядок по малому параметру  $\epsilon$  оператора  $\hat{e}$  меньше самого этого оператора.

Представленные выше в виде иллюстраций приложения метода Энскога-Чепмена к уравнению Больцмана касались лишь случая линеаризованного уравнения Больцмана. На деле метод применим, как было показано уже самими Энскогом и Чепменом, и к нелинейному уравнению Больцмана. В нашей абстрактной формулировке метода Энскога-Чепмена мы, начиная с исходного управляющего уравнения (1), ограничились линейным вариантом теории потому, что стремились изложить главное в методе Энскога-Чепмена. Сделанное при этом упрощение не является существенным. Действительно, как показано в §67 книги [3], построение нелинейных гидродинамических уравнений, включая и нахождение входящих в них коэффициентов переноса, может быть осуществлено при малом параметре неоднородности  $\lambda/L$  (при "локальной однородности") уже и на основе линейных гидродинамических уравнений. Использованные при таком обобщении в книге [3] идеи близки к тем, которые использовались Энскогом и Чепменом при учете ими нелинейности уравнения Больцмана.

## Содержание

1. Введение .....	3
2. Исходные положения .....	4
3. Начальная стадия эволюции .....	7
4. Эволюция по окончании начальной ее стадии .....	9
5. Итерации в методе Энскога-Чепмена .....	13
6. Заключительная стадия эволюции .....	16
7. Обобщения метода Энскога-Чепмена .....	19
Список литературы .....	20

## Список литературы

- [1] Уленбек Дж., Форд Дж. *Лекции по статистической механике*. Москва. Издательство "Мир". 1965. 308 с.
- [2] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. *Физическая кинетика*. Москва. Издательство "Наука". 1979. 528 с.
- [3] Куни Ф. М. *Статистическая физика и термодинамика*. Москва. Издательство "Наука". 1981. 352 с.

ЛР № 040815 от 22.05.97.

Подписано к печати 1.12.1998 г. Формат бумаги 60X90 1/16. Бумага офсетная.  
Печать ризографическая. Объем 1,3 п.л. Тираж 100 экз. Заказ 578.  
РИОП НИИХ СПбГУ, 198904, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр. 2.  
Отпечатано в отделе оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ.  
198904, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр. 2.