

Лекция 1

Введение, основные гипотезы. Универсальность, скейлинг

Речь в курсе пойдёт о критических явлениях и фазовых переходах, а также методе ренормализационной группы. Как хорошо известно из курса статистической физики, вблизи фазового перехода обычное рассмотрение теряет силу, т.к. корреляционный радиус идёт в бесконечность, а различные термодинамические функции становятся неаналитическими. Однако задача описания фазовых переходов и критических явлений – достаточно важная, и почти за век их изучения было создано немало различных моделей. Вот в курсе мы и обсудим некоторые из них, начав с классических и плохо работающих, и закончив наиболее современными, весьма мозголомными, но всё равно плохо работающими. Зато они позволяют (в принципе) посчитать вообще всё (если Вы посчитаете много петель диаграммного разложения). ... Вообще, красивое введение мне писать немного лень, можно будет позже добавить.

Опишем основные определения и качественные свойства фазового перехода на хорошо известном примере. Если кусок железа, являющийся постоянным магнитом, нагреть выше определённой температуры (называемой точкой Кюри), он потеряет свой магнитные свойства. Это является примером фазового перехода. Переход здесь меняет не структуру самого материала, но некоторую важную физическую характеристику (намагниченность).

Фазовый переход в магнетиках: точка Кюри.

Рассмотрим переход при нулевом внешнем поле. Он происходит при некоторой фиксированной критической температуре (температуре Кюри, $T_c = 1144\text{K}$ для Fe). Основным параметром, описывающим переход (такая величина в дальнейшем будет именоваться параметром порядка) здесь является намагниченность системы m . $m = 0$ при $T > T_c$ и $m > 0$ при $T < T_c$.

Кроме того, намагниченность является неаналитической функцией температуры:

$$T \approx T_c \Rightarrow m \propto (T - T_c)^\beta \quad |T = T_c \Rightarrow m \propto h^{1/\delta}$$

Можно определить (всё, что написано вокруг – экспериментальные данные) также теплоёмкость системы как функцию температуры при приближении к критической точке:

$$C \propto \frac{1}{(T - T_c)^\alpha}, T > T_c$$

$$C \propto \frac{1}{(T_c - T)^{\alpha'}}, T < T_c$$

Оказывается, что $\alpha = \alpha'$.

Аналогично ситуация обстоит с магнитной восприимчивостью:

$$\chi = \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{h=0} \propto \frac{1}{|T - T_c|^\gamma}$$

Корреляционная функция $\langle m(x)m(x') \rangle$ и радиус корреляции r_c :

$$r_c \propto \frac{1}{|T - T_c|^\nu}; \langle mm \rangle |_{T=T_c} \propto \frac{1}{k^{2-\xi}}$$

Корреляционная функция здесь записана в Фурье-представлении, k – волновое число.

Абсолютно такие же свойства обнаруживает фазовый переход в системе жидкость-газ. Здесь $T_c = 647\text{K}$, $p_c = 218$ атм. $m = \rho - \rho_{ж}$, $h = p - p_c$, то есть роль намагниченности в качестве параметра порядка заняла разность плотностей жидкости и пара, а роль внешнего поля – отклонение давления от критического. Кстати, роль восприимчивости здесь переходит к изотермической сжимаемости.

После этого можно написать ровно те же условия пропорциональности, причём показатели степеней (они называются *критическими индексами*) останутся неизменными. Сформулируем основные гипотезы, в замкнутом виде подытоживающие экспериментальные факты, и на основании которых дальше будет конструироваться теория.

1. Критический скейлинг (она же – гипотеза подобия)

$$F_{sing}(x_1, \dots, x_n) = \Lambda^{-d_F} F_{sing}(x_1 \Lambda^{d_1}, \dots, x_n \Lambda^{d_n})$$

F_{sing} здесь означает сингулярную часть соответствующего функционала, т.е. стремящаяся в бесконечность его часть. Отсюда, если обнулить все переменные, кроме одной, можно получить все выписанные выше степенные законы. Оправдание этого выражения (а также определение размерностей d_i) – цель курса.

2. Гипотеза универсальности.

Коэффициенты зависят только от глобальных характеристик, таких как размерность пространства, значковая структура и симметрии параметра порядка.

Это, кстати, весьма внезапный экспериментальный факт, который отчасти и положил начало этой области науки вообще.

Заканчивая введение и экспериментальную часть, приведём соотношения на критические индексы, лишь четыре из которых являются независимыми.

$$\alpha = 2 - D\gamma; \alpha + 2\beta + \gamma = 2; \gamma = (2 - \xi)\nu; \delta = 1 + \frac{\gamma}{\beta}; \delta = \frac{D + 2 - \xi}{D - 2 + \xi}$$

Первой теорией, хоть как-то объяснявшей происходящее, была предложена Ландау и теперь называется теорией среднего поля.

Рассмотрим $F(T, V, \alpha)$. $\varphi(x)$ здесь и далее будет обозначать точную намагниченность; $\alpha(x) \equiv \langle \varphi(x) \rangle$
У нас везде будет $h \approx 0$; $T \approx T_c$; $\alpha \approx 0$.

Разложим F в ряд по α . F – скаляр, α – вектор, поэтому

$$F = F_0(T, V) + \frac{\tau}{2}\alpha^2 + \frac{g}{4!}\alpha^4 - \alpha h$$

τ, g являются какими-то функциями от h и T .

Максимум F находится в равновесии, поэтому напишем

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha^2 = \frac{-6\alpha}{g} \end{cases} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial^2 \alpha} = \tau + \frac{g}{2}\alpha^2 = \begin{cases} \tau, \alpha = 0 \\ -2\tau, \alpha^2 = \dots \end{cases}$$

Из положительности второй производной видим, что с двух сторон от критической точки – разные решения. Таким образом, фазовый переход случается, когда минимумы сравниваются (см. рис. 2).

$$]h \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \tau\alpha + \frac{g}{6}\alpha^3 - h = 0$$

$$T = T_c \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow \alpha \propto h^{1/3}$$

Отсюда $\delta = 3$.

<offtop>

Откуда мы считаем, что $\tau = T - T_c$? Это неочевидный вопрос, т.к. τ – лишь коэффициент разложения функционала свободной энергии по α , который вообще говоря является какой-то функцией от T и V . Дело в том, что мы верим, что τ – аналитическая функция $T - T_c$. Отсюда $\tau = C_0 + C_1(T - T_c) + C_2(T - T_c)^2 + \dots$. Из равенства $\tau = 0$ в критической точке можем заключить, что $C_0 = 0$, а дальше мы просто пренебрегаем старшими членами разложения.

</offtop>

Вспоминая, что $\chi = \frac{\partial \alpha}{\partial h}$, пишем $(\tau + \frac{g}{2}\alpha^2)\chi = 1$ Отсюда $\chi = \frac{1}{\tau}, T > T_c$ или $-\frac{1}{2\tau}, T < T_c$. Получается, что $\frac{\chi_{>}}{\chi_{<}} = 2$, это подозрительно.

Кроме того, теплоёмкость в этой модели испытывает скачок: $C = T(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2})_V$; при $h = 0 \dots$ *график*

Теперь о том, почему всё это не работает.

Мы построили теорию среднего поля, которая эквивалентна линейной гидродинамике, которая, в свою очередь, эквивалентна Гауссовой теории в статфизике (в каком месте?).

$\alpha = \alpha(x)$

$$F = \int dx (\frac{\tau}{2}\alpha^2(x) + \frac{g}{4!}\alpha^4(x) + \frac{c}{2}\partial_i \alpha \partial_i \alpha - h(x)\alpha(x))$$

$$\frac{\delta F}{\delta \alpha} = 0 \Leftrightarrow \tau\alpha(x) + \frac{g}{6}\alpha^3 - c\Delta\alpha(x) = h(x) \quad (1)$$

Пренебрегая граничными условиями, можем считать, что $h = 0$, $\alpha \equiv \text{const}$ – это будет то же самое решение теории среднего поля.

$$S = \dots - h\varphi \rightarrow \int D\varphi e^{-S_0 + h\varphi} \Rightarrow \frac{\delta}{\delta \varphi} \rightarrow \langle \varphi \dots \rangle$$

$$G = \frac{\delta \alpha(x)}{\delta h(x')}$$

Проварьируем (1) по $h(x')$:

$$(-c\Delta + \tau + g/2\alpha^2) = \delta(x - x')$$

$$G = \frac{e^{-r/r_c}}{4\pi cr}; \quad r_c = \frac{1}{\sqrt{(\tau + g/2\alpha^2)}} \quad \nu = 1/2; \quad \frac{r_{c>}}{r_{c<}} = \sqrt{2}$$

Лекция 2

Преобразование Каданова, модель Гинзбурга-Ландау. Гауссово приближение.

Из мелкоскопии и статфизики точное решение удалось получить лишь в 2^D -модели Изинга. ($c \rho \propto e^{-H/KT}$, $S \equiv H/KT$)

Для обычных систем логично попытаться перейти от точного к сокращённому описанию системы, пренебрегая быстро меняющимися переменными (жёсткими модами), т.к. они не влияют на длительное поведение системы и на те величины, которые мы только и можем измерять и которыми интересуемся. Иными словами, именно медленно меняющиеся переменные (мягкие моды) и управляют временной эволюцией системы. На этом пути мы сейчас получим φ^4 -модель.

$$q_1, q_2; \rho(q_1, q_2) \cdot \langle A(q_1) \rangle = \int dq_1 \rho(q_1) A(q_1); \rho(q_1) = \int dq_2 \rho(q_1, q_2)$$

В общем случае:

$$q = f(q_1, q_2) \Rightarrow \rho(q) = \int dq_1 dq_2 \delta(q - f(q_1, q_2)) \rho(q_1, q_2)$$

Называется преобразование Каданова.

Пример: магнетик, решёточная модель (Изинг или Гейзенберг). Хотим изгнать микроскопику.

$$H(S_i) \xrightarrow{K_b} H(\varphi(x))$$

Преобразование является блочным и осуществляется следующим образом: в окрестности какого-то узла решётки (точки x) выбирается блок из b ячеек, и значение спина заменяется на среднее арифметическое по блоку:

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{i \in x} S_i}{b}$$

То же можно написать на языке действия: $\hat{S}(S_i) \rightarrow S(\varphi(x))$. Кстати, здесь что-то бывает дискретным или непрерывным, это как обычно не важно: $\int DS_i \equiv \sum_{\{S_i = \pm 1\}}$. Тогда можем записать:

$$S(\varphi(x)) = -\ln \int DS_i \delta(\varphi(x) - \frac{\sum_{i \in x} S_i}{b}) \frac{e^{-S(S_i)}}{Norm}$$

Легко видеть, что множество преобразований Каданова образует полугруппу (группу без обратного элемента). Само преобразование обозначается K_b , единицей является K_1 ; $K_b K_{b'} = K_{bb'}$.

Однако в такой формулировке и система, и гамильтониан с действием, и преобразование являются дискретными. С непрерывными операторами и функциями, конечно, работать удобнее, так что напишем непрерывный аналог происходящего.

$$S_i \rightarrow \varphi(q) = \sum_j S_j e^{iqR_j}, R_j = ja$$

$\pi/L < q < \pi/a$, где a - расстояние между ячейками, L - размер системы.

L мы можем и будем устремлять к бесконечности, а вот обрезание q по размеру сверху важно.

В преобразовании Каданова расстояния мы сохраняем, т.е. расстояние между блоками оказывается больше расстояния между ячейками.

Теперь $\sum_i \rightarrow \int D\varphi(q)$, $\rho = e^{-S(\varphi(q))}$.

$$S(\varphi(q)) \xrightarrow{K_b} S'(\varphi(q)); S'(\varphi(q)) = -\ln \int_{\frac{\Lambda_\Phi}{S} \leq |q| \leq \Lambda_\Phi} D\varphi e^{-S(\varphi(q))}$$

Такое преобразование – тоже полугруппа. Эффективный размер ячейки становится $\frac{\Lambda_\Phi}{S}$; обратно сопоставить решение, конечно, нельзя.

Таковыми операциями можно убрать зависимость модели от микроскопии. Давайте теперь уже усреднённый гамильтониан разложим по полям и их производным, получив

Модель Гинзбурга-Ландау.

$$S'(\varphi) = \int dx \left(\frac{c}{2} \partial\varphi \partial\varphi + \frac{\tau}{2} \varphi^2 + \frac{g}{4!} \varphi^4 - h\varphi \right)$$

Получился в общем-то тот же зверь, что и в теории среднего поля, но "имеются все основания полагать, что здесь всё ок". Ибо в том разложении нету аналитичности. (а разница-то в чём?..)

Проделав всю процедуру честно и с микроскопикой, можно получить в т.ч. критическую температуру, но это непросто; в QM вроде как проще. Там, кстати, действие будет выглядеть

$$S = \Psi^+(\partial_t + p^2/2m - \mu)\Psi + \frac{g}{2}\Psi^+\Psi\Psi^+\Psi$$

... Непонятно про то, что σ перестаёт зависеть от t вблизи критической точки и что это хорошо...

sic В Каданове: дискретный спектр $S_i = \pm 1 \rightarrow$ непрерывный, т.е. мы утверждаем, что в критической точке квантовая и классическая наука дают один и тот же результат.

Гауссово приближение в статфизике.

Рассмотрим одномерную задачу; H имеет минимум, значит, ρ имеет максимум. Достаточно острый, т.к. ρ зависит от H как экспонента. Вот Гауссово приближение и гласит, что "Основной вклад – рядом с точкой q_0 , где в $q_0 \frac{\partial H}{\partial q_0} = 0$ "

$$\int dq e^{-S(q)} \approx \int d(q - q_0) e^{-S(q_0) - \frac{1}{2}S^{(2)}(q_0)(q - q_0)^2} \approx e^{-S(q_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{S^{(2)}(q_0)}}$$

Такое разложение имеет право на жизнь, если S аналитично. Тогда

$$F = -KT \ln \Sigma = H(q_0) - \frac{KT}{2} \ln \left(\frac{2\pi}{S^{(2)}(q_0)} \right)$$

А теперь напишем то же самое, но не для одной степени свободы, а для нашей науки, т.е. для их континуального количества.

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = 0 \Leftrightarrow -c\Delta\varphi + \tau\varphi + g/6\varphi^3 = 0$$

Мы это уже писали, и решение с тех пор не изменилось. И оно лежит в классе констант. На самом деле, для реального применения неплохо бы вспомнить, что система конечна и снабдить всё это граничными условиями, но пока пофиг. $F = -KT \ln \Xi = F_0 +$ поправка от ρ . (F_0 – предсказание теории среднего поля). $\rho \sim e^{-S^{(2)}(\alpha)(\delta\varphi)^2}$. *Здесь не до конца (почему? как?) сработала теория Ландау.*

Пусть теперь наш параметр порядка векторный.

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \varphi_i} &= -c\Delta\varphi_i + \tau\varphi_i + g/6\varphi^2\varphi_i \\ \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_i \delta \varphi_j} &= (-c\Delta + \tau)\delta_{ij} + g/6\varphi^2\delta_{ij} + g/3\varphi_i\varphi_j \equiv S_{ij}^{(2)} \\ \rho &\sim e^{-\frac{1}{2}\delta\varphi_i S_{ij}^{(2)}\delta\varphi_j} \end{aligned}$$

Найдём пропагатор, он же функция Грина, он же ядро квадратичной формы.

$$\tau > 0 \Rightarrow \langle \delta\varphi_i \delta\varphi_j \rangle = \frac{\delta_{ij}}{ck^2 + \tau} \quad (\text{т.к. тогда } \varphi_0 \equiv \alpha = 0, \text{ и пара слагаемых вылетают})$$

При $\tau > 0$ поле не равно нулю, и ядро (ф.Грина) – какая-то матрица, которую нужно обращать в Фурье не только как оператор, но и как матрицу. Обращать подобные штуки удобно с использованием поперечного и продольного проекторов:

$$\begin{aligned} P_{\parallel} &= \frac{\varphi_i\varphi_j}{\varphi^2}; P_{\perp} = \delta_{ij} - \frac{\varphi_i\varphi_j}{\varphi^2} \\ S_{ij}^{(2)} &= (ck^2 + \tau + g/6\varphi^2)P_{\perp} + (ck^2 + \tau + g/2\varphi^2)P_{\parallel} = ck^2 P_{\perp} + (ck^2 - 2\tau)P_{\parallel} \quad (\text{подставили } \varphi) \\ \Rightarrow \text{при } \tau < 0 < \delta\varphi\delta\varphi >_{\perp} &= \frac{1}{ck^2}; < \delta\varphi\delta\varphi >_{\parallel} = \frac{1}{ck^2 - 2\tau} \end{aligned}$$

А вот восприимчивость $\chi \equiv \frac{\delta \langle \varphi \rangle}{\delta h}$ легко мерить, понятная величина. Обладает производящими свойствами.

$$\chi = \frac{\partial}{\partial h} \langle \varphi \rangle = \int dx \langle \varphi(y)\varphi(y-x) \rangle$$

Из-за трансляционной инвариантности задачи, это просто ответ в Фурье при $k = 0$, т.е.

$$\tau > 0 \Rightarrow \chi = \frac{1}{\tau}; \tau < 0 \Rightarrow \begin{cases} \chi_{\parallel} = \frac{1}{2\tau} \\ \chi_{\perp} = \infty \end{cases}$$

Интерпретация: *картинка*. Продольная восприимчивость – не ∞ , а $\perp -\infty$, т.к. α^2 - решение, а направление любое. Теория Голдстоуна и Голдстоуновские сингулярности – вот примерно про это.

Посчитаем F , уже здесь, а не в теории среднего поля.

$$\tau > 0 \Rightarrow \Delta F = -\frac{nKT}{2} \int_{|k| < \Lambda} dk \ln \frac{2\pi}{ck^2 + \tau} \quad (n - \text{число значков у } \varphi)$$

$$\text{Теплоёмкость: } \Delta c = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \rightarrow -T_c \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = \frac{nKT_c^2}{2} \int_{|k| < \Lambda} dk \frac{1}{(ck^2 + \tau)^2}$$

$$\Delta c = \frac{nKT_c^2}{2} S_D \int_0^\Lambda \frac{k^{D-1} dk}{(ck^2 + \tau)^2} = (k \equiv q\sqrt{\tau}) = \frac{nKT_c^2}{2} S_D \int_0^{N\sqrt{\tau}} \frac{q^{D-1} dq}{(cq^2 + 1)^2 \tau^{2-D/2}}$$

Таким образом, поправка к теплоёмкости оказывается больше основного значения.

Интеграл сходится для $D < 4$, вот только оказывается бесконечным в критической точке ($\tau \equiv T - T_c \equiv 0$), т.е. th Ландау считала главным не главный вклад.

При отрицательном τ можно провести аналогичные вычисления и убедиться, что во-первых, поперечные моды не дают вклада в теплоёмкость (что неплохо соотносится с соотв. сингулярностями), а также что $\frac{\Delta C_{>}}{\Delta C_{<}} = n \cdot 2^{2-D/2}$. Например, это потом можно сравнить с экспериментом.

Все эти выводы и вычисления – результат Гауссова приближения. Кстати, попытка учёта флуктуаций ломает и его. Это мы, впрочем, проверять здесь не будем.

Лекция 3

Размерности [канонические], преобразование Вильсона. Две масштабных инвариантности.

$$S = \frac{c}{2} \partial \varphi \partial \varphi + \frac{\tau}{2} \varphi^2 + \frac{g}{4!} \varphi^4$$

Посмотрим на размерности этого выражения; размерность импульса при этом по определению положим равной единице. Отсюда сразу $[x] = -1$. Пусть есть некая функция Φ , обладающая свойством:

$$\Phi\left(\frac{k}{\lambda}\right) \equiv \Phi(k) \lambda^{d_\Phi}$$

Тогда d_Φ называется канонической (масштабной) размерностью функции $\Phi(x)$. Размерности функций, которые мы сейчас посчитаем – это их канонические размерности в x -представлении. В частности, если немного тавтологично определить $x(x) = x$, то $x\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{x}{\lambda} = x(x) \lambda^{-1}$, откуда $d[x] = -1$.

Действие является безразмерным, $d(S) = 0$. Определим размерность поля φ . Мы можем переобозначить поля и функции τ и g так, чтобы выбрать $c = 1$ (и размерность c равна нулю). Тогда

$$\int d^D x \partial \varphi \partial \varphi = S^{-D} \int d^D x' \partial_{x'} \varphi\left(\frac{x'}{S}\right) \partial_{x'} \varphi\left(\frac{x'}{S}\right) = S^{-D+2+2d_\varphi} \int d^D x' \partial_{x'} \varphi(x') \partial_{x'} \varphi(x')$$

Из равенства левой и правой части

$$-D + 2 + 2d_\varphi = 0, \text{ а значит, } d[\varphi] = \frac{D-2}{2} - \text{размерность поля } \varphi$$

Аналогично,

$$d[\tau] = D - 2d[\varphi] = 2; \quad d[g] = D - 4d[\varphi] = 4 - D.$$

Преобразование Вильсона.

Будем строить преобразование R_s в два шага на основе преобразования Каданова. Вновь для примера рассмотрим решёточную модель (хотя можно, конечно, для любой):

$$I. S(\varphi) \xrightarrow{K_s} S''(\varphi)$$

$$II. x \rightarrow x' = \frac{x}{S}$$

То есть преобразование Вильсона – это преобразование Каданова + сжатие по координатам.

Дальше Вильсон произносит следующую мантру, которая является чистым предположением:

В окрестности τ_c действие раскладывается в сумму двух частей: $S = S_* + \delta S$; S_* – масштабно-инвариантно, δS – поправки. Т.е. масштабная инвариантность относится только к сингулярной части действия.

Ну и с потолка добавляется ещё одна, новая масштабная инвариантность: $\varphi(x/S) = \lambda_S \varphi(x)$. У нас вообще-то уже есть одна понятная: $\varphi(x/S) = S^{d[\varphi]} \varphi(x)$. Но мы добавляем ещё одну вот такую вот.

Было бы неплохо, чтобы множество преобразований Вильсона также образовывало полугруппу: $K_S K_{S'} = K_{SS'}$. Отсюда должно быть $\lambda_S \lambda_{S'} = \lambda_{SS'}$. А значит, вид новой инвариантности в общем совпадает с видом старой: $\lambda_S = S^a$.

Итого, теперь у нас две масштабных инвариантности.

Вновь запишем действие в виде разложение в ряд Гинзбурга-Ландау, т.е. в ряд по полям и производным.

$$S(\varphi) = \frac{c}{2} \partial \varphi \partial \varphi + \frac{\tau}{2} \varphi^2 + \frac{g}{4!} \varphi^4 + \dots$$

$$\mu = \{c, \tau, g, \dots\} \quad \mu \xrightarrow{R_S} \mu'$$

Def μ_* называется неподвижной точкой преобразования Вильсона, если $\forall S \quad R_S(\mu_*) = \mu_*$.

Def $K_\Pi \equiv \{\mu | R_S \mu \xrightarrow{S \rightarrow \infty} \mu_*\}$ – критическая поверхность.

$$\text{Основная гипотеза: } \mu \in K_\Pi \Leftrightarrow \begin{cases} T = T_C \\ h = 0 \end{cases}$$

$\mu \equiv \mu_* + \delta\mu$. Назовём R_S^L линейную часть R_S : $\mu' = R_S(\mu_* + \delta\mu)$; $\mu' = \mu_* + \left(\frac{\partial \mu'}{\partial \mu}\right)_{\mu_*} \delta\mu + O(\delta\mu^2)$

$$\Rightarrow R_S^L = \left(\frac{\partial \mu'}{\partial \mu}\right)_{\mu_*} \quad R_S^L(\mu_* + \delta\mu) = \mu_* \quad (wtf?!)$$

$$R_S R_{S'} = R_{SS'} = R_{S'} R_S; \quad [R_S^{(L)}, R_{S'}^{(L)}] = 0$$

Рассмотрим собственные числа и собственные вектора оператора R_S^L . $e_i(S)$ – собственный вектор R_S^L .

$$R_S^L(R_{S'}^L e_i(S)) = R_{S'}^L(R_S^L e_i(S)) = \rho_i(S) R_{S'}^L e_i(S)$$

То есть если с.з. R_S^L не нулевые, то $e_i(S)$ является также и собственным вектором $R_{S'}^L$.

А значит, набор собственных векторов R_S^L одинаков $\forall S$. (Мы верим в невырожденность с.з. (почему?)), и тогда e_i перестаёт зависеть от S . $\rho_i(S) \rho_i(S') = \rho_i(SS')$. Отсюда вновь $\rho_i(S) = S^{a_i}$.

$$\mu = \mu_* + \delta\mu = \mu_* + \sum_i A_i e_i$$

$$R_S \mu = \mu_* + \sum_i A_i S^{a_i} e_i + O(\delta\mu^2)$$

Видно, что знак a_i определяет, приближаемся мы по соответствующему вектору e_i к критической поверхности, или удаляемся от неё (при $S \rightarrow \infty$).

После некоторых самоубеждающих слов можем предположить, что a_1 и a_h допустимо быть положительными (иначе критическая поверхность будет включать в себя не только крит. температуру и нулевое поле), а вот все остальные a_i должны быть отрицательными. И тогда

$$K_\Pi \Leftrightarrow A_1, A_h = 0 \quad \{e_i : a_i < 0\} \in K_\Pi$$

Покажем, что из выполнения данных предположений можно получить непосредственный результат:

$$R_S \mu \cong \mu_* + A_1 S^{a_1} e_1 + O(S^{a_2}), \quad a_2 = \max\{a_i < 0\}$$

$$A_1 \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0 \Rightarrow A_1 \approx b(T - T_C), \text{ типа взяли первый член ряда}$$

$$\langle \varphi(x) \rangle_\mu = \langle \varphi(x) \rangle_{\mu'} = S^a \langle \varphi(x) \rangle_{\mu'} \quad \mu \rightarrow \mu'' - \text{Каданов, } \mu \rightarrow \mu' - \text{Вильсон}$$

или же

$$m(\mu) \approx S^a m(\mu_* + A_1 S^{a_1} e_1),$$

где $\langle \varphi(x) \rangle \equiv m$ – намагниченность.

Подставим в это уравнение S в определённом виде:

$$\langle S \rangle = \left(\frac{1}{b(T - T_C)^{1/a_1}} \right) \text{ Тогда } m(\mu) \sim \frac{1}{b|T - T_C|^{1/a_1}} m(\mu_* \pm e_1)$$

При стремлении $T \rightarrow T_C$ как раз рассматривается нужный предел $S \rightarrow \infty$. Вспоминая критический индекс намагниченности β , можем заключить: $\beta = -\frac{a}{a_1}$. Рассмотрим теперь парную корреляционную функцию.

$$\langle \varphi(0) \varphi(x) \rangle_\mu \underset{x > S/\Lambda}{=} \langle \varphi(0) \varphi(x) \rangle_{\mu'} = S^{2a} \langle \varphi(0) \varphi(x/S) \rangle_{\mu'}$$

$$G(x, \mu) = S^{2a} G\left(\frac{x}{S}, \mu_* + A_1 S^{a_1} e_1\right)$$

Посмотрим на то же самое в Фурье-представлении.

$$\int dx e^{ikx} = S^D \int \frac{dx}{S^D} e^{ikSx/S}$$

$$S^D \int \frac{dx}{S^D} e^{ikSx/S} G(x, \mu) = G(k, \mu) = S^{D+2a} G(kS, \mu_* + A_1 S^{a_1} e_1)$$

Вновь подставим S определённого вида:

$$\langle S = \left(\frac{1}{b|T - T_C|^{1/a_1}} \right) \Rightarrow G(k, \mu) = \left(\frac{1}{b|T - T_C|} \right)^{\frac{D+2a}{a_1}} G\left(k \left(\frac{1}{b|T - T_C|} \right)^{\frac{1}{a_1}}, \mu_* \pm e_1\right)$$

Как уже отмечалось, парная корреляционная функция в Фурье-представлении и в точке $k = 0$ – это восприимчивость, отсюда получаем индекс гамма: $\gamma = \frac{D+2a}{a_1}$.

Радиус корреляции – величина, не имеющая общепринятого точного определения, и в общем определённая с точностью до константы. В любом случае, это что-то, стоящее в аргументе парной корреляционной функции, и имеющее соответствующую асимптотику. Взглянув на неё, можем заключить, что

$$r_c \equiv \left(\frac{1}{b|T - T_C|} \right)^{\frac{1}{a_1}}, \quad \text{и} \quad \nu = \frac{1}{a_1}$$

Последнее, что мы получим – индекс Фишера η .

$$T = T_c \Rightarrow A_1 = 0. \quad \langle S = \frac{1}{k}, k \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(k, \mu) = \frac{1}{k^{D+2a}} G(1, \mu_*) \Rightarrow \text{из def } \eta : D + 2a = 2 - \eta$$

Все индексы, которые мы получили – это скейлинговые, или полные размерности соответствующих функций. (а какие ещё будут?..) Теперь рассмотрим внешнее поле h . Интересуемся пока постоянными полями.

$$S \rightarrow S - h\varphi; \quad h\varphi \equiv \begin{cases} h \int dx \varphi(x) \rightarrow h\varphi(k=0) \\ h \sum_i \varphi_i \end{cases} \quad \text{т.е. } h \xrightarrow{I} h \quad (h'' = h)$$

$$\int dx \varphi(x) \rightarrow \int dx S^a \varphi(x/S) = S^{D+A} \int dx \varphi(x), \quad \text{т.е. } h' = S^{D+a} h$$

$$\text{т.е. } a_h = D + a; \quad e_h = (000\dots 1)^T; \quad A_h = h$$

$$(e_h : \mu \equiv \{c, \tau, g, \dots, h\}; \quad \mu = \mu_* + \sum_i A_i S^{a_i} e_i, \text{ мы всё про них же})$$

$$T = T_c \Rightarrow m(\mu) = S^a m(\mu_* + S^{D+a} h e_h)$$

$$\langle S = \frac{1}{h^{1/(D+a)}} \Rightarrow m \sim \frac{1}{h^{1/(D+a)}} \Rightarrow 1/\delta = -\frac{a}{D+a}$$

– Намагниченность по внешнему полю при $T = T_c$.

Можно получить ещё и α , но очень муторно, и мы забудём. В любом случае, мы уже получили выражения для критических индексов:

$$\frac{a}{a_1} = -\beta; \quad \frac{D+2a}{a_1} = \gamma; \quad \nu = \frac{1}{a_1}; \quad D+2a = 2 - \eta; \quad \frac{1}{\delta} = -\frac{a}{D+a}$$

Из этих выражений, в частности, следуют соотношения на критические индексы, анонсированные в начале курса как экспериментальные факты – определённый profit!

Поиски неподвижной точки. Попробуем посмотреть на преобразование Каданова.

$$S = \frac{c}{2} \partial \varphi \partial \varphi + \frac{\tau}{2} \varphi^2 + \frac{g}{4!} \varphi^4 - h\varphi$$

$h\varphi$ – выкинем, т.к. с ним всё ясно уже; ищем μ_* , т.е. неподвижную точку. Вообще всё пространство переменных состоит сейчас из четырёх функций: c, τ, g, h . Вот по ним и ищем.

Считаем неподвижную точку Гауссовой, т.е. $g = 0$.

Вечнополезный комментарий про Фурье:

$$\int dx \varphi^2(x) = \int dx \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \int dk_1 e^{ik_1 x} \varphi(k_1) \int dk e^{ikx} \varphi(k) = \left(\int dx \rightarrow (2\pi)^D \delta(k+k_1) \right)$$

$$= \int \frac{dk}{(2\pi)^D} \varphi(k) \varphi(-k)$$

Поэтому в импульсном представлении действие запишется как

$$S = \int \frac{dk}{(2\pi)^D} \left[\frac{1}{2} \varphi(k) (ck^2 + \tau) \varphi(-k) \right] + \frac{g}{4!} \int \frac{dk_1 dk_2 dk_3}{(2\pi)^{3D}} \varphi(k_1) \varphi(k_2) \varphi(k_3) \varphi(-k_1 - k_2 - k_3)$$

Делаем преобразование Каданова ($g = 0$)

$$\varphi(x) = \int \frac{dk}{(2\pi)^D} \varphi(k) e^{ikx} = \varphi' + \frac{\bar{\varphi}}{\Lambda}$$

Формально в Фурье Λ нету, но из физических свойств функции мы можем выбрать образ так, чтобы был. Собственно, Каданов усредняет по жёстким модам, т.е. интегрирует по $\bar{\varphi}$. Запишем уже в координатном представлении:

$$S = \frac{c}{2} \partial \varphi' \partial \varphi' + \frac{\tau}{2} \varphi'^2 + \frac{c}{2} \partial \bar{\varphi} \partial \bar{\varphi} + \frac{\tau}{2} \bar{\varphi}^2$$

Перекрестные члены отсутствуют из-за того, что носители не перекрываются, и произведение даёт ноль.

$$e^{-S''} \cong \int D\bar{\varphi} e^{-S_0(\varphi') - S_0(\bar{\varphi})}$$

Интеграл можно взять, он просто даёт какую-то константу. Отсюда

$$S'' = \frac{c}{2} \partial \varphi' \partial \varphi' + \frac{\tau}{2} \varphi'^2; \quad \mu'' = \mu$$

$$\int dx \varphi'(x) \varphi'(x) \xrightarrow{II} \int dx \varphi'^2 \left(\frac{x}{S}\right) S^{2a} \rightarrow S^{D+2a} \int dx \varphi'^2(x)$$

$$\int dx \partial \varphi' \partial \varphi' \xrightarrow{II} S^{D+2a-2} \int dx \partial \varphi' \partial \varphi'$$

$$\mu' = (S^{D+2a-2} c, S^{D+2a} \tau) = (S^{-\eta} c, S^{2-\eta} \tau)$$

Мы нашли двух кандидатов на неподвижную точку: $\mu_* = (c, 0, 0)$ при $\eta = 0$ и $\mu_* = (0, \tau, 0)$ при $\eta = 2$. Реально измеряемое значение индекса Фишера $\eta \approx \frac{3}{1000}$, поэтому вторая неподвижная точка нам не нравится, а первую мы рассматриваем как соответствующую Гауссовому случаю.

$$\text{Тогда } S_* = \frac{c}{2} \partial \varphi \partial \varphi; \quad \delta S = \frac{\tau}{2} \varphi^2 + \frac{g}{4!} \varphi^4.$$

Лекции 4-5

Продолжение пр-я Вильсона и Вильсоновская РГ. Вильсоновская РГ в динамике, пример модели А. Вводим КТП РГ. Убиваем УФ-расх.

Обсудим теперь вопрос применения Вильсоновской РГ. Как мы убедились на прошлой лекции, поправка к свободному действию модели φ^4 после разложения полей по низкоэнергетическим или длинноволновым ($|k| < \frac{\Lambda}{s}, \varphi'$) и высокоэнергетическим или коротковолновым ($\frac{\Lambda}{s} < |k| < \Lambda, \bar{\varphi}$) модам имеет вид

$$\delta S'' = \frac{\tau}{2} \varphi'^2 + \frac{\tau}{2} \text{ (loop)} + \frac{g}{4!} \varphi'^4 + \frac{g}{6} \langle \varphi' \bar{\varphi}^3 \rangle + \frac{g}{2} \text{ (loop)} + \frac{g}{4!} \cdot 3 \text{ (loop)},$$

где loop = φ' , а 3 в последнем слагаемом - симметричный коэффициент. Так как носители φ' и $\bar{\varphi}$ не совпадают, вклад 4-го слагаемого равен нулю.

$$\delta S'' = \frac{\tau}{2} \varphi'^2 + \frac{\tau}{2} \text{ (loop)} + \frac{g}{4!} \varphi'^4 + \frac{g}{2} \text{ (loop)} + \frac{g}{4} \text{ (loop)} \quad (2)$$

Применение метода Вильсоновской ренормгруппы происходит в 2 этапа:

1. Взятие интегралов по обрезанной области.

Рассмотрим петлевые вклады:

$$\text{loop} = \int_{\frac{\Lambda}{s} < k < \Lambda} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{Ck^2} = \frac{S_D}{(2\pi)^D} \int_{\frac{\Lambda}{s} < k < \Lambda} dk \frac{k^{D-1}}{Ck^2} = \frac{K_D}{C(D-2)} k^{D-2} \Big|_{\Lambda/s}^{\Lambda} = \frac{K_D}{C(D-2)} \Lambda^{D-2} (1 - s^{2-D}) \quad (3)$$

В уравнении (3) $K_D = \frac{S_D}{(2\pi)^D}$ называется множителем Каданова, $S_D = D \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2+1)}$ - площадь единичной D-мерной сферы.

Бесхвостые диаграммы дают поправки только нормировочный множитель, а потому не интересны. С другой стороны, структура хвостатых и бесхвостых диаграмм в (2) одинакова (одна петля), поэтому и интегралы будут одинаковыми.

Из формул (2) и (3) следует, что набор параметров в действии

$$\mu = (c, \tau, g)$$

необходимо заменить на

$$\mu'' = \left(c, \tau + \frac{g}{2} \frac{K_D}{C(D-2)} \Lambda^{D-2} (1 - s^{2-D}), g \right)$$

Вклад в массовом члене τ определяется диаграммой , так как у нее 2 хвоста (Если бы было 4 хвоста - это был бы вклад в g).

2. Преобразование Вильсона

Если до этого мы дробили область интегрирования на 2 части, то сейчас настало время порастягивать эти области при помощи параметра s , чтобы сами уравнения не поменялись (или, как говорится, образовали группу. на самом деле, полугруппу из-за отсутствия обратного преобразования Каданова):

$$\begin{aligned} \tau'' &\longrightarrow \tau' = \tau'' s^{2-\eta} \\ g'' &\longrightarrow g' = g'' s^{4-D-2\eta} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} g \int d^D x \varphi^4(x) &= g s^D \int d^D \frac{x}{s} s^{4a} \varphi^4(x) = g s^{D+4a} \int d^D y \varphi^4(y) \\ D + 2a &= 2 - \eta = 2, \quad \eta = 0 \\ D + 4a &= 4 - D - 2\eta = 4 - D \\ g'' &\longrightarrow g' = g'' s^{4-D-2\eta} = g'' s^{4-D}, \end{aligned} \quad (5)$$

где a - аномальная размерность поля. Тогда после таких растяжений набор параметров станет следующим:

$$\mu'' \longrightarrow \mu' = \left(c, \left(\tau + \frac{g}{2} \frac{K_D}{C(D-2)} \Lambda^{D-2} (1 - s^{2-D}) \right) s^2, g s^{4-D} \right)$$

Ок. Теперь мы знаем, как поменяются значения всех интегралов, если порезать область интегрирования и обратно ее растянуть, а затем скинуть всё растяжение на параметры модели. Но чтобы понять, как будет меняться ответ в зависимости от растяжения, надо построить матрицу Якоби этого преобразования и найти ее собственные вектора. Собственные вектора покажут, в каком "направлении" будет "выходить" система из неподвижной точки.

$$R_S^L = \frac{\partial \mu'_i}{\partial \mu_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & \frac{K_D \Lambda^{D-2}}{2C(D-2)} (1 - s^{2-D}) s^2 \\ 0 & 0 & s^{4-D} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Почему обозначается R_S^L ? Понятно, что в (6) первая строка и первый столбец не представляют никакого интереса, поэтому их можно вычеркнуть:

$$R_S^L = \frac{\partial \mu'_i}{\partial \mu_j} = \begin{pmatrix} s^2 & \frac{K_D \Lambda^{D-2}}{2C(D-2)} (1 - s^{2-D}) s^2 \\ 0 & s^{4-D} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\lambda_1 = s^2, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\lambda_2 = s^{4-D}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{K_D \Lambda^{D-2}}{2c(D-2)} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Несложно представить, куда будут направлены вектора \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 .

Вообще говоря эти результаты можно было бы выбросить с самого начала, так как мы использовали критические индексы из теории среднего поля Ландау ($\nu = 1/2$, $\eta = 0$), проблемы которой общеизвестны и обсуждались ранее. Тем не менее, в учебных целях их можно и оставить.

Несмотря на то, что эта схема показывает поведение системы в неподвижной точке, саму неподвижную точку найти не удастся. Поэтому Вильсон сделал гениальное предположение: при малом изменении размерности пространства фазовый переход пропасть не может, поэтому давайте менять размерность.

В случае теории среднего поля для ϕ^4 известно, что при $D > 4$ результаты становятся верными, поэтому имеет смысл рассматривать систему около 4-мерия, а затем положить $\varepsilon = 1$:

$$D = 4 - \varepsilon \tag{10}$$

Гипотезой Вильсона было следующее утверждение, касающееся поведения неподвижной точки в зависимости от размерности пространства:

$$g_*, \tau_* \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \tag{11}$$

То есть устойчивая точка сдвигается ближе к неустойчивой.

Только что было рассмотрено приближение, в котором градиентный вклад был много больше квадратичного (что соответствует модели слабой связи и может применяться для описания газов), но мы можем решить задачу и посложнее - когда градиентный и квадратичный сравнимы между собой, но при этом много больше вклада четвертой степени (что может соответствовать как жидкостям, так и газам, а значит может сработать для описания фазовых переходов).

$$e^{-S''} = \int \mathcal{D}\bar{\varphi} e^{-S}, \quad S = S_0 + \delta S = \left(\frac{c}{2} \partial\varphi\partial\varphi + \frac{\tau}{2} \varphi^2 \right) + \frac{g}{4!} \varphi^4 \tag{12}$$

Раскладывать будем экспоненту теперь только по члену $\frac{g}{4!} \varphi^4$:

$$\int \mathcal{D}\bar{\varphi} e^{-(S_0[\bar{\varphi}] + \delta S)} = e^{-S_0[\varphi']} \int \mathcal{D}\bar{\varphi} e^{-S_0[\bar{\varphi}]} \left(1 - \frac{g}{4!} \varphi'^4 - \frac{g}{4} \varphi'^2 \bar{\varphi}^2 - \frac{g}{4!} \bar{\varphi}^4 \right) \tag{13}$$

Введем обозначения: \sim = φ' , --- = $\frac{1}{Ck^2 + \tau}$ - пропагатор массивного поля.

Тогда уравнение (13) можно будет нарисовать в виде:

$$\int \mathcal{D}\bar{\varphi} e^{-(S_0[\bar{\varphi}] + \delta S)} = e^{-S_0[\varphi']} \left(1 - \frac{g}{4!} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \frac{g}{4} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \frac{g}{4!} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \cdot 3 \right) \tag{14}$$

Так как у четыреххвостки нет петель, то $g'' = g$. Возьмем интеграл у двуххвостки:

$$\int_{\Lambda/s}^{\Lambda} \frac{d^D k}{(2\pi)^D (Ck^2 + \tau)} = K_D \int_{\Lambda/s}^{\Lambda} \frac{k^{D-1} dk}{Ck^2 + \tau} = K_D \int_{\Lambda/s}^{\Lambda} \frac{k^{D-1} dk}{Ck^2} \left(1 - \frac{\tau}{Ck^2} + \left(\frac{\tau}{Ck^2} \right)^2 - \dots \right) = K_D \left(\frac{k^{D-2}}{C(D-2)} \Big|_{\Lambda/s}^{\Lambda} - \tau \frac{\ln s}{C} + \dots \right) = K_D \left(\frac{\Lambda^{D-2}}{C(D-2)} (1 - s^{2-D}) - \tau \frac{\ln s}{C} + \dots \right) \tag{15}$$

Следовательно,

$$\tau'' = K_D \left(\frac{\Lambda^{D-2}}{C(D-2)} (1 - s^{2-D}) + \tau (1 - K_D \frac{\ln s}{C} + \dots) \right) \tag{16}$$

Идея Вильсона: g -мало, значит в ряд по нему разлагаем, писать его уже надоело, потому пусть $g/4!$ теперь будет всюду вершинным множителем.

$$\int \mathcal{D}\bar{\varphi} e^{-(S_0[\bar{\varphi}] + \delta S)} = e^{-S_0[\varphi']} \left(1 - \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \right) \tag{17}$$

6-хвостка напоминает множество меры ноль, значит выкидываем.

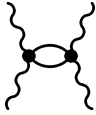
Диаграмма с 3 хвостами с одной стороны и 1 хвостом с другой стороны не может существовать по закону сохранения импульса (интегрируем по большим импульсам, а втекает маленький). Вообще говоря, внутри всех петель большие импульсы, а внешние хвосты - только малые импульсы.

Двухпетлевая 1-неприводимая диаграмма выбрасывается по 1 теореме Майера (не по второй ли? Первая вроде про логарифм и связанные диаграммы?).

Два креста тоже можно выбросить по 1 теореме Майера.

3. Учимся считать петли по Вильсону

Диаграмма "Рыба"



$$= \int dx dy \varphi'^2(x) G^2(x-y) \varphi'^2(y) \quad (18)$$

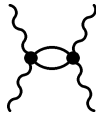
//Тут могу сильно врать. Я не помню, нафига нужно было градиентное разложение =(((

Очевидно, что эта диаграмма дает вклад в контрчлен к g , так как у нее 4 хвоста. С другой стороны, вклады в контрчлены к g должны выглядеть как $\int dx \varphi'^4(x)$. Видно, что аргументы функций в формуле (18) не совпадают с предъявленным видом. Поэтому вводят градиентное разложение (по факту - ряд Тейлора).

$$\varphi'(y) = \varphi'(x) + (y-x)\partial\varphi'(x) + \dots \quad (19)$$

$$\int dx dy \varphi'^2(x) G^2(x-y) \varphi'^2(y) = \int dx \varphi'^4(x) \int dy G^2(x-y) + \dots \quad (20)$$

Видно, что в координатном представлении решить не получается. Перейдем в импульсное представление.



$$= \varphi'(k_1)\varphi'(k_2)\varphi'(k_3)\varphi'(-k_1 - k_2 - k_3) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(Ck^2 + \tau)(C(k_1 + k_2 - k)^2 + \tau)}$$

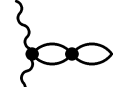
$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(Ck^2 + \tau)(C(k_1 + k_2 - k)^2 + \tau)} = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(Ck^2 + \tau)^2} + \dots \quad (21)$$

В равенстве (21) использовалось разложение в ряд по малым k_1 , k_2 , τ и оставлен только главный член. Используя способ, изложенный выше в формулах (3) и (15) получаем вклад главного члена ($D=4$)

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(Ck^2 + \tau)^2} = \frac{K_4}{C^2} \ln s \quad (22)$$

Стоит заметить, что интеграл в (21) брался по области $\frac{\Lambda}{s} < |k| < \Lambda$, $\frac{\Lambda}{s} < |k_1 + k_2 + k| < \Lambda$. Понятно, что эта область весьма сложна для представления и сложность растет с количеством хвостов и петель у диаграмм. Этот момент является одной из проблем теории Вильсона: чем выше порядок разложения, тем сложнее область интегрирования.

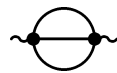
Диаграмма "Матрешка"



$$= \left. \text{loop} \right|_{\varepsilon=0} \cdot \left. \text{loop} \right|_{\varepsilon=0} \cdot \varphi'^2(p)$$

Диаграмма "Арбуз"

В отличие от других диаграмм, "Арбуз" ренормирует два контрчлена: как обычно τ (сама внутренность "Арбуза"), но еще и (первая производная по p при $p=0$).



$$= \int \frac{d^D k d^D q}{(2\pi)^{2D} (Ck^2 + \tau)(Cq^2 + \tau)(C(p-k-q)^2 + \tau)} \quad (23)$$

Здесь область вот такая: $\frac{\Lambda}{s} < |k| < \Lambda$, $\frac{\Lambda}{s} < |q| < \Lambda$, $\frac{\Lambda}{s} < |k+q| < \Lambda$. Так как 4-мерная ($D=4$, с этой размерности пространства расходимости в интегралах исчезают и теория становится суперренормируемой) система находится в окрестности особой точки, то τ можно считать малым. В других точках это не так. Вычисление этой диаграммы представляло тему одной из статей и выкладок было примерно на страницу А4. В статье использовался прием перехода от координатного представления к импульсному и обратно. Ввиду особой сложности диаграммы, она рассматриваться здесь не будет.

4. Результаты однопетлевого расчета

$$\tau'' = \tau + g \cdot a - \tau \ln s$$

$$g'' = g - g^2 \frac{K_4}{C^2} \ln s, \quad (24)$$

Здесь a - множитель из формулы (3). Добавочное слагаемое в g взялось из диаграммы "Рыба". Про симметричные коэффициенты в формуле опять забыто. Пользуясь формулами (5) и гипотезой Вильсона ($D = 4 - \varepsilon, g_* \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$) получаем уравнение на положение неподвижной точки:

$$g' = (g - g^2 \frac{K_4}{C^2} \ln s) s^\varepsilon, \quad (25)$$

$$g_* = (g_* - g_*^2 \frac{K_4}{C^2} \ln s) s^\varepsilon \quad (26)$$

Корень уравнения $g_* = 0$ нас не интересует, так как эта точка не устойчива (будет показано дальше). $a = \frac{K_4}{C^2} \cdot \text{Symm.coef}$.

$$\begin{aligned} 1 &= (1 - g_* \frac{K_4}{C^2} \ln s) e^{\varepsilon \ln s} = (1 - g_* a \ln s)(1 + \varepsilon \ln s) = 1 - g_* a \ln s + \varepsilon \ln s \\ 0 &= -g_* a \ln s + \varepsilon \ln s \\ g_* &= \frac{\varepsilon}{a} \end{aligned} \quad (27)$$

Исследуем поведение системы вблизи g_* :

$$\left. \frac{\partial g'}{\partial g} \right|_{g=g_*} = s^\varepsilon (1 - 2g_* a \ln s) = 1 + \ln s (\varepsilon - 2g_* a) = 1 - \varepsilon \ln s \approx s^{-\varepsilon} \quad (28)$$

Покажем, что в окрестности неподвижной точки g_* τ мало:

$$\begin{aligned} \tau' &= (\tau + g(B(\varepsilon) - \frac{K_4 \tau}{C^2} \ln s)) s^{2-\eta}, \eta = 0 \\ B(\varepsilon) &\sim J \cdot (\Lambda^{D-2} - (\frac{\Lambda}{s})^{D-2}) \\ \tau_* &= (\tau_* + g_*(J\Lambda^{2-\varepsilon}(1 - s^{\varepsilon-2}) - \frac{K_4 \tau_*}{C^2} \ln s)) s^2 \\ \tau_* &= \tau_* s^2 + g_*(J\Lambda^{2-\varepsilon}(s^2 - s^\varepsilon) - \frac{K_4 \tau_*}{C^2} s^2 \ln s) \\ \tau_*(1 - s^2 + \frac{g_*}{C^2} K_4 s^2 \ln s) &= g_* J (s^2 - s^\varepsilon) \Lambda^{2-\varepsilon} \\ \tau_* &= g_* \frac{J(s^2 - s^\varepsilon) \Lambda^{2-\varepsilon}}{1 - s^2 + \frac{g_*}{C^2} K_4 s^2 \ln s} \\ \tau_* &= \frac{\varepsilon}{a} J \Lambda^{2-\varepsilon} \frac{s^2 - 1 - \varepsilon \ln s}{1 - s^2 + \frac{\varepsilon}{a} \frac{K_4}{C^2} s^2 \ln s} \end{aligned} \quad (30)$$

Получили очень неприятный факт: сдвиг критической температуры зависит от параметра обрезания Λ . Как с этим бороться - я уже не помню.=(((

Лекция 6

Анализ ИК-расходимостей, ренормируемые науки. Размерная регуляризация. Схема MS.

В прошлой лекции мы боролись с УФ-расходимостями диаграмм. Мы успешно устранили их все (и т.е. убрали Λ из итоговых выражений для всех диаграмм), использовав всего два контрчлена. Рассмотрим теперь ИК-расходимости. Размерность нашего пространства равняется трём, т.е. $\dim g = 4 - D = 1$, а значит, безразмерным является параметр $g/\sqrt{\tau}$. И таким образом, в каждом следующем порядке теории возмущений эта конструкция будет возникать общим множителем, что делает каждое последующее слагаемое всё более злобно расходящимся при малых значениях k .

Как уже отмечалось, такое поведение – результат неудачного разложения в ряд, т.к. исходная конструкция (функциональный интеграл) был сходящимся. К сожалению, по-другому в ряды раскладывать мы не умеем. Идея заключается в следующем: давайте положим размерность пространства равной четырём, чтобы уже сама константа связи была безразмерной. Тогда каждая следующая петля разложения по теории возмущений не будет иметь дополнительной патологии, вызванной множителем с g (либо инфракрасной, либо ультрафиолетовой). На самом деле, тогда диаграммы будут расходиться, но логарифмически, причём как в УФ, так и в ИК-диапазоне. И вот эти расходимости нам удастся сократить друг с другом, в чём мы сейчас будем убеждаться.

Вообще, диаграммы по модулю циркулирующего импульса – это чистые степени. Чистая степень не сходится никогда: расходится либо в ИК, либо в УФ. И лишь одна чистая степень ($1/k$, собственно) даёт после интегрирования логарифм и расходится и там, и там. Вот мы будем сокращать расходимости в одном диапазоне расходимостями в другом. Из минусов: размерность пространства поменялась, и нам нужно будет заново ренормировать науку, уже при $D = 4$. Здесь, как всегда, ренормировать = устранять ультрафиолетовые расходимости.

Рассмотрим кратко УФ-расходимости диаграмм в 4^D :

$$\begin{aligned} *loop* &= \int \frac{d^4 k}{k^2 + \tau} \approx \Lambda^2; *arbue* \approx \int \frac{d^4 k d^4 q}{k^6} \approx \Lambda^2 \\ *4 - hv1* &\approx \int \frac{d^4 k}{k^4} \approx \ln \Lambda; *4 - hv2* \approx \int \frac{d^8 k}{k^8} \approx \ln \Lambda \end{aligned}$$

Шестихвостые диаграммы поверхностно не расходятся. Вообще, можно заметить, что $D * \text{число петель} - 2 * \text{число пропагаторов} = \delta \geq 0$ – индекс расходимости диаграммы в УФ

Если g не безразмерно (т.е. $D \neq 4$), то добавляется слагаемое (число петель)* $d[g]$.

Отсюда можно сделать точный вывод, что:

- Диаграммы старших порядков имеют ИК-расходимости в $D < 4$, в $D > 4$ – нет;
- Диаграммы старших порядков имеют УФ-расходимости в $D > 4$, в $D < 4$ – нет.

Контрчлены должны устранять расходимости при больших импульсах ($k \rightarrow \infty$), т.е. они локальны в x -представлении ($\delta(x)$), об этом говорят, что „линия стягивается в точку“.

Здесь немного обсуждения

Наука называется ренормируемой, если все расходимости устраняются конечным числом типов контрчленов.

Размерная регуляризация.

Будем вычислять диаграммы в нецелой мерности пространства, считая $D = 4 - \varepsilon$ и считая ε параметром. Мы вычислим хоть при каких-то значениях ε , аналитическое продолжение даст нам ответы при всех D .

α -представление:

$$\frac{1}{a^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dt \cdot t^{\alpha-1} e^{-at}$$

Ещё полезна площадь сферы в D -мерном пространстве:

$$S_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$$

Будем считать интеграл для петли.

$$\int \frac{d^{4-\varepsilon}k}{(2\pi)^{-\varepsilon}(k^2 + \tau)} = \int \frac{d^{4-\varepsilon}k}{(2\pi)^{-\varepsilon}} \int_0^\infty dt \cdot e^{-(k^2 + \tau)t} =$$

Хотим поменять местами порядок интегрирования. Это можно сделать не всегда, а лишь при малых D (больших ε). Воспользуемся обычным здесь трюком: сосчитаем интеграл в той области, где это сделать можно, а потом аналитически продолжим ответ на любые D . Метод особенно удобен тем, что фактически это означает, что мы молча меняем местами интегралы и ничего не делаем. Однако помнить про этот нюанс стоит.

$$= \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \int dt \cdot t^{-D/2} e^{-t\tau} = \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \tau^{D/2-1} \Gamma(1 - D/2)$$

Обратим внимание: при $D = 3$ выражение содержит множителем $\sqrt{\tau}$, но не содержит Λ . Вот как раз она-то и ушла благодаря трюку с аналитическим продолжением.

Можно привести следующую аналогию с $\Gamma(-1/2)$: $\int_0^\infty \frac{dt}{t^{3/2}} e^{-t}$ – не существует, но ведь гамма-функция от $-1/2$ – есть!

$$\frac{1}{2^{4-\varepsilon} \pi^{2-\varepsilon/2}} \tau^{1-\varepsilon/2} \Gamma(-1 + \varepsilon/2) = \frac{\tau}{2^4 \pi^2} \left(-\frac{2}{\varepsilon} - \Psi(1) + \ln \tau - 2 \ln 2 - \ln \pi - 1 + O(\varepsilon) \right)$$

Пси здесь – какая-то функция, типа логарифм производной гамма-функции

Некоторый разговор про то, что где-то в μ сокрыта размерность, и там на самом деле не $\ln \tau$, но $\ln \tau / \mu$.

И тогда $K[*loop*] = \frac{\tau}{16\pi^2} \left(-\frac{2}{\varepsilon} \right)$

Действие становится $S = \frac{1}{2} \partial \varphi \partial \varphi + \frac{\tau_0}{2} \varphi^2 + \frac{g_0}{4!} \varphi^4 - \frac{1}{2} K[*loop*] \varphi^2$

Пара вспомогательных выражений (есть у Васильева):

$$\int \frac{dk}{(2\pi)^D (k^2 + \tau)^\alpha} = \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(\alpha) (2\pi)^D} \tau^{D/2-\alpha} \Gamma(\alpha - D/2)$$

Вычислим следующий контрчлен – добавку к действию:

$$\begin{aligned} *pic2* &= \int \frac{dk}{(2\pi)^D (k^2 + \tau)((p-k)^2 + \tau)} = \int \frac{dk}{(2\pi)^D} \int_0^1 \frac{dx}{((k^2 + \tau)x + ((p-k)^2 + \tau)(1-x))^2} = \\ &= \int \frac{dk}{(2\pi)^D} \int_0^1 \frac{dx}{(k^2 + \tau - 2pk(1-x) + p^2(1-x))^2} = //q^2 = (k-p(1-x))^2 // = \int \frac{dq}{(2\pi)^D} \int_0^1 \frac{dx}{(q^2 + \tau + p^2x(1-x))^2} = \\ &= \int_0^1 dx \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} (\tau + p^2x(1-x))^{-\varepsilon/2} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \end{aligned}$$

И $K[*pic2*] = \frac{2}{\varepsilon} \frac{g^2 \mu^\varepsilon}{16\pi^2}$, и в $S \rightarrow +K[*pic2*] \varphi^4$.

Кажется, эта часть закончилась.

Заметим (что вообще происходит?!): можно в действии переопределить параметры g и τ и получить ренормированное действие:

$$S^R = \frac{1}{2} Z_\varphi \partial\varphi\partial\varphi + \frac{\tau}{2} Z_\tau Z_\varphi^2 \varphi^2 + \frac{g\mu^\varepsilon}{4!} Z_g Z_\varphi^4 \varphi^4$$

Если науку можно ренормировать растяжением полей и констант, то она называется мультипликативно-ренормируемой.

Отдельно пара слов про расходимость подграфов. Есть такая гадость: мы убрали поверхностную расходимость диаграммы с помощью контрчлена, но у неё остался подграф, который тоже расходится. Вот есть некая теорема Боголюбова, которую мы доказывать и обсуждать толком не будем, но которая утверждает, что уже введённые контрчлены сокращают и расходимости подграфов тоже.

R'-операция: вычитание из диаграммы всех расходящихся подграфов.

Демонстрация в картинках

Утверждается, что в теории с локальным взаимодействием все расходимости диаграммы после R'-операции – локальны. (что бы означала эта фраза?..)

Также утверждается, что даже при зафиксированной схеме регуляризации есть много конкретных схем ренормировок. (А эта?..)

Можно добавлять в $K[\dots]$ константы, например.

Схема MS (min. вычитаний)

???

Лекция 7

Вычисление констант ренормировки. Получения ренормгрупповых уравнений.

5. 21.10, VII – Считаем константы ренормировки, какие-то диаграммы. Получаем РГ-ур-я.

5.1. Вид констант ренормировки:

Общий вид ренормировки:

$$\varphi(x) = Z_\varphi \varphi_R(x), \quad g_0 = g\tau^\varepsilon Z_g, \quad \tau_0 = \tau Z_\tau \quad (31)$$

τ_0, g_0 – затравочные параметры.

В форме записи (31) предполагается, что τ ($\tau = T - T_c$) размерный параметр. В дальнейшем мы бы хотели рассматривать критическую точку, т.е. где $\tau = 0$. Константы ренормировки Z предполагаются безразмерными величинами, которые могут зависеть только от безразмерных параметров (g, ε) . Для этого введем новый размерный параметр μ (ренормированная масса) и перепишем (32):

$$\varphi(x) = Z_\varphi \varphi_R(x), \quad g_0 = g\mu^{2\varepsilon} Z_g, \quad \tau_0 = \tau Z_\tau \quad (32)$$

Теперь $Z = Z(g, \lambda, \varepsilon)$, $\lambda = \tau\mu^{2\varepsilon}$.

Соотношения (32) не позволяют однозначно определить вид констант ренормировки Z . Существует 2 условия. I : Z выбираются таким образом, что бы устранить из функции Грина все УФ-расходимости, т.е. полюса по ε . II : выбор схемы вычитаний. (в нашем случае схема минимальных вычитаний – MS). В этой схеме при $\tau! = 0$ Z не зависят от λ и τ имеет простой физический смысл $T - T_c$.

В итоге в теории возмущений Z – это ряд по g , начинающийся с 1. А зависимость от ε только, как от полюсов:

$$Z = Z(g, \varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g^n \sum_{k=1}^n \varepsilon^{-k} c_{nk} \quad (33)$$

В дальнейшем будем использовать:

$$Z_g = 1 + \frac{ag}{\varepsilon} + \frac{a'g^2}{\varepsilon^2} + \frac{a''g^2}{\varepsilon} + \dots \quad (34)$$

$$Z_\varphi = 1 + \frac{bg^2}{\varepsilon} + \frac{b'g^2}{\varepsilon^2} + \dots \quad (35)$$

$$Z_\tau = 1 + \frac{cg}{\varepsilon} + \frac{c'g^2}{\varepsilon^2} + \frac{c''g^2}{\varepsilon} + \dots \quad (36)$$

$$(37)$$

В итоге мы провели УФ-ренормировку. Следующая задача разобраться с ИК расходимостью. Решая данную проблемы мы не можем брать конечный ряд разложения в теории возмущений. Так как формально у нас параметр разложения не g_0 , а $g_0 p^{-2\varepsilon}$ ($p \rightarrow 0$, $T \rightarrow T_c$). Но можно заметить, что при $\varepsilon = 0$ проблемы ИК расходимости не возникает (но борьба с УФ расходимостью дала нам полюса по ε)

5.2. Уравнение РГ

Квантовополевая ренормгруппа – это множество всех преобразований УФ конечной ренормировки. Неоднозначность ренормировки проявляется в параметре μ .

Если мы оставим фиксированным μ и будем менять затравочные параметры и обрезание, то одни величины изменятся (неренормируемые), а другие нет (ренормируемые).

Ренорминвариантность:

$$\tilde{D}_\mu F = 0, \quad \tilde{D}_\mu = \mu \partial_\mu |_{\Lambda, \epsilon_0} \quad (38)$$

Рассмотрим все на примере модели φ^4 :

$$S = \frac{1}{2} \partial \varphi \partial \varphi + \frac{1}{2} \tau \varphi^2 + \frac{g}{4!} \varphi^4 \quad (39)$$

Запишем ренормированное действие:

$$S_R = \frac{1}{2} Z_\varphi^2 \partial \varphi \partial \varphi + \frac{1}{2} \tau Z_\tau Z_{\varphi^2} \varphi^2 + \frac{g}{4!} \mu^{2\epsilon} Z_g Z_\varphi^4 \varphi^4 \quad (40)$$

Полные нормированные функции Грина имеют вид:

$$G = a\mu + bg(\mu) + c\tau(\mu) \quad (41)$$

$$G_{0n}(x, g_0, \tau_0) = \frac{1}{Norm} \int D\varphi \varphi_1 \cdots \varphi_n \exp^{-S} \quad (42)$$

$$G_n(x, g, \tau) = \frac{1}{Norm} \int D\varphi \varphi_1 \cdots \varphi_n \exp^{-S_R} \quad (43)$$

Что бы получить из $S \rightarrow S_R$ необходимо растянуть поля. Возникает якобиан перехода, содержащий слагаемые, которые утягиваются на ∞ . Тогда кроме растяжения полей $\varphi_i^0 \rightarrow Z_\varphi \varphi_i$ в действии делаем ренормировку параметров $\tau_0 = \tau Z_\tau$ и $g_0 = g Z_g$. В итоге получаем ренормированное действие.

$$Z_\varphi^{-n} G_n(x, \mu, \tau, g) = G_{0n}(x, g_0, \tau_0) \quad (44)$$

Это выражение удобно тем, что тут есть произвольный параметр μ .

Далее подествуем операцией $\tilde{D}_\mu = \mu \partial_\mu |_{g_0, \tau_0}$ на (44).

$$Z_\varphi^{-n} [D_\mu + \tilde{D}_\mu g \partial_g + \tilde{D}_\mu \tau \partial_\tau] G_n - n(\tilde{D}_\mu Z_\varphi) Z_\varphi^{-n-1} G_n = 0 \quad (45)$$

$$[D_\mu + \tilde{D}_\mu g \partial_g + \tilde{D}_\mu \tau \partial_\tau] G_n - n(\tilde{D}_\mu \ln Z_\varphi) G_n = 0 \quad (46)$$

Введем обозначения :

$$\begin{cases} \beta_g = \tilde{D}_\mu g \\ \beta_\tau = \tilde{D}_\mu \tau \\ \gamma_\varphi = \tilde{D}_\mu \ln Z_\varphi \\ \gamma_\tau = -\tilde{D}_\mu \ln Z_\tau \end{cases} \quad (47)$$

Таким образом получаем уравнение РГ:

$$[D_\mu + \beta_g \partial_g - \beta_\tau \partial_\tau + n\gamma_\varphi] G_n = 0 \quad (48)$$

Следующая задача получить скейлинг или масштабную инвариантность.

Рассмотрим уравнение скейлинга:

$$(D_{x_1} + D_{x_2}) \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = 0 \Rightarrow (D_{x_1} + D_{x_2}) f \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = 0 \quad (49)$$

$$\Rightarrow [\sum D_{x_i} - D_\mu - 2D_\tau + nd[\varphi]] G_n = 0 \quad (50)$$

Это уравнение масштабной инвариантности.

Размерности величин

$$\begin{cases} d[x] = 1 \\ d[\mu] = 1 \\ d[\tau] = 2 \end{cases} \quad (51)$$

Считаем, что ренормированная функция не зависит от μ .

(48)+(50) \Rightarrow :

$$[\sum D_{x_i} + \beta_g \partial_g - (2 + \gamma_\tau) D_\tau + n(\gamma_\varphi + d[\varphi])] G_n = 0 \quad (52)$$

Вот это называется РГ .

$\Delta_\tau = 2 + \gamma_\tau$ и $n\Delta_\varphi = d[\varphi] + \gamma_\varphi$. Применим фурье к (52):

$$[\sum D_{p_i} + D_\mu + 2D_\tau + dn] G_n(p, \dots) = 0 \quad (53)$$

(53)-(50) \Rightarrow

$$D_{RG} = [\sum D_{p_i} - \beta_g \partial_g + \Delta_\tau \partial_\tau + d_n - n\gamma_\varphi] G_n = 0 \quad (54)$$

где d_n - размерность и хвостой корреляционной функции в импульсном представлении .

$$F = \int d(x_1 - x_n) \cdots d(x_{n-1} - x_n) \exp[ip_1(x_1 - x_n) + \cdots + ip_{n-1}(x_{n-1} - x_n)] \quad (55)$$

$$F G_n(x_1, \dots, x_n) = G_n(p_1, \dots, p_{n-1}) \quad (56)$$

Если F применить к (52) , то получим импульсное представление и старанные члены D_{x_i} Но $F D_{x_i} G \rightarrow x_i \partial_{x_i} = -i \partial_{p_i} \partial_{x_i}$ В итоге \Rightarrow

$$[-\sum D_{p_i} + \beta_g \partial_g - \Delta_\tau \partial_\tau - (n-1)D + n\gamma_\varphi] G_n = 0 \quad (57)$$

Перепишем как :

$$[\sum D_{p_i} - \beta_g \partial_g + \Delta_\tau \partial_\tau + \Delta_n] G_n = 0 \quad (58)$$

$$[\sum D_p + D_\mu + 2D_\tau + d_n] G_n^R = 0 \quad (59)$$

Утверждение:РГ функции конечны(не содержат полюсов по ε).

В определении РГ функций участвуют заправочные параметры и константы ренормировки, поэтому мы ожидаем наличие полюсов по ε (УФ расходимость). Но можно написать систему уравнений составленную из (62), но для разных n . Сами G_n конечны по определению. Следовательно мы можем выразить неизвестные РГ функции, через известные УФ конечные G_n . Т.е. РГ функции должны быть тоже УФ-конечными.

Построим β функции:

$$\beta_g := \tilde{D}_\mu g \quad (60)$$

Применим \tilde{D}_μ к $g_0 = g\mu^\varepsilon Z_g$:

$$0 = \beta_g \mu^\varepsilon Z_g + \varepsilon g \mu^\varepsilon Z_g + g \mu^\varepsilon + g \mu^\varepsilon \tilde{D}_\mu Z_g \quad (61)$$

6. 28.10, VIII – Решение ИК-проблемы с помощью РГ-уравнений. Инвариантные заряды.

$$0 = [D_p - \beta_g \partial_g + \Delta_\tau D_\tau + \Delta_n] G_n \quad (62)$$

$$\begin{cases} \Delta = d + \gamma(g) \\ \gamma_i = \tilde{D}_\mu \log Z_i \end{cases} \quad (63)$$

Масштабное уравнение:

$$[D_p + D_\mu + 2D_\tau + d_n] G_n^R = 0 \quad (64)$$

Теперь выразим РГ функции через константы ренормировки:

$$Z_a(g, \varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{na}(g) \varepsilon^{-n} \quad (65)$$

$$\begin{cases} Z_g = 1 + \frac{ag}{\varepsilon} \\ Z_\phi = 1 + \frac{bg}{\varepsilon} \\ Z_\tau = 1 + \frac{cg}{\varepsilon} \end{cases} \quad (66)$$

Запишем бета функцию β_g и анамальные размерности γ_φ , γ_τ как ряды по заряду g .

$$g_0 = g \mu^\varepsilon Z_g \quad (67)$$

$$\beta_g = \tilde{D}_\mu g \quad (68)$$

$$\gamma_i = \tilde{D}_\mu \ln Z_i \quad (69)$$

Применим \tilde{D}_μ к (67)

$$0 = \beta_g \mu^\varepsilon Z_g + \varepsilon g \mu^\varepsilon Z_g + g \mu^\varepsilon \tilde{D}_\mu Z_g \quad (70)$$

$$0 = \beta_g + \varepsilon g + g \tilde{D}_\mu \ln Z_g \quad (71)$$

$$\beta_g = -\varepsilon g - g \tilde{D}_\mu \ln Z_g \quad (72)$$

$$\beta_g = -\varepsilon g - g \gamma_g \quad (73)$$

$$\beta_g = -\varepsilon g - \beta_g D_g \ln Z_g \quad (74)$$

$$\Rightarrow \beta_g = \frac{-\varepsilon g}{1 + D_g \ln Z_g} \quad (75)$$

$$\begin{cases} \beta_g = \frac{-\varepsilon g}{1 + D_g \ln Z_g} \\ Z_g = 1 + \frac{ag}{\varepsilon} + O(g^2) \end{cases} \Rightarrow \quad (76)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_g = \frac{-\varepsilon g}{1 + D_g \ln Z_g} \\ D_g \log Z_g = \frac{ag}{\varepsilon} - \frac{a^2 g^2}{\varepsilon^2} + \dots \end{cases} \Rightarrow \quad (77)$$

$$\Rightarrow \beta_g = -\varepsilon g + ag^2 + 2a^2 g^2 \frac{1}{\varepsilon} + \dots \quad (78)$$

Вычеты A_{na} всех старших полюсов по ε в константах ренормировки (65) определяются через вычеты A_{1a} в полюсе первого порядка трех констант Z_a . Это свойство следует из УФ конечности РГ функций, в MS схеме сводящейся к их полной независимости от ε и являющейся следствием ренормируемости рассматриваемой модели.

Если мы рассмотрели все правильно, то :

$$\gamma_i = \log \tilde{D}_\mu Z_i = \beta_g \partial_g \log Z_i = \quad (79)$$

$\beta_g = \varepsilon + const$, а $\log Z_i$ – полюса по ε . В силу УФ конечности РГ функций, вклады в γ содержащие полюса по ε должны сократиться. Поэтому дальнейшую запись можно упростить:

$$= -\varepsilon g \partial_g \frac{[Z_i]^{(1)}}{\varepsilon} = -g \partial_g [Z_i]^{(1)} = \quad (80)$$

$$= -D_g [Z_i]^{(1)} \quad (81)$$

В итоге можно увидеть, что аномальные размерности не зависят от ε и полностью определяются коэфф при полюсе констант ренормировки.

Это справедливо только для схемы MS, где Z содержит только полюсные вклады.

В итоге \Rightarrow

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_g = -\varepsilon g + ag^2 + a_1 g^3 + a_2 g^4 + \dots \\ a, a_1, a_2 = const \\ \gamma_\varphi = -2bg^2 + b_1 g^3 + \dots \\ \gamma_\tau = -cg + O(g^2) \end{cases} \quad (82)$$

В итоге сначала непосредственно по диаграммам вычисляются константы ренормировки Z . После по формулам (75) и (81) РГ функции.

6.1. решение линейных дифф. ур. в частных производных

Научимся решать линейные дифференциальные уравнения в частных производных, на примере (62).

$$\begin{cases} 0 = [D_p - \beta_g \partial_g + \Delta_\tau D_\tau + \Delta_n] G_n \\ 0 = [D_p + D_\mu + 2D_\tau + d_n] G_n^R \end{cases} \quad (83)$$

I. Рассмотрим (83) при $\tau = 0$:

$$G_2(\tau = 0) \Rightarrow D_\tau G_2 = 0$$

$$\begin{cases} [D_p - \beta_g \partial_g + \Delta_2] G_2^R = 0 \\ [D_p + D_\mu + d_2] G_2^R = 0 \end{cases} \quad (84)$$

Из масштабнo инвариантного уравнения с учетом того , что размерность парного коррелятора $d_2 = 2$, следует , что $G_2 = \frac{1}{p^2} f\left(\frac{p}{\mu}\right)$.

Рассмотрим только 1 уравнение из системы (83).

Используя $\Delta_2 = d_2 + \gamma_2 = 2 + \gamma_2$:

$$[D_p - \beta_g \partial_g + \gamma_2] f\left(\frac{p}{\mu}\right) = 0 \quad (85)$$

Замена $\frac{p}{\mu} = s$:

$$\Rightarrow [D_s - \beta_g \partial_g + \gamma_2] f(s) = 0 \quad (86)$$

$f(s) = f(s, g)$

Пусть $f = \exp^w$, $w = w(s, g)$. Тогда :

$$[D_s - \beta_g \partial_g] w + \gamma_2 = 0 \quad (87)$$

- это неоднородное линейное дифференциальное уравнение .

$w = \bar{w}_2 + \tilde{w}_2 \Rightarrow f = \bar{G}_2 * \tilde{G}_2$, где \bar{G}_2 - общее решение однородного, а \tilde{G}_2 - частное решение неоднородного.

Ищем $\bar{G}_2(s, g)$:

инвариантный заряд : $\bar{g}(s, g)$

начальное условие : $\bar{g} |_{t=0} = g$

$$\begin{cases} t = \log s \\ \partial_t \bar{g} = \beta_g(\bar{g}) \end{cases} \quad (88)$$

Пояснение :

$t = 0 \rightarrow s = 1 \rightarrow |p| = \mu$

ИК $p \rightarrow 0 \Rightarrow s \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow -\infty$

Ищем $\tilde{G}_2(s, g)$:

$\beta, \gamma_{..} = f(g); \quad \bar{g}(s, g)$

Ищем \tilde{G}_2 в виде :

$$\tilde{G}_2 = \exp\left[-\int_0^t \gamma_2(\bar{g}(u)) du\right] \quad (89)$$

Применим $D_s (= D_t)$ к (89).

$$D_s \tilde{G}_2 = -\gamma_2(\bar{g}(t)) \quad (90)$$

$$\beta_g \partial_g \gamma_2(\bar{g}(t)) = \partial_u \gamma_2(\bar{g}(u)) = \gamma_2(\bar{g}(0)) - \gamma_2(\bar{g}(t)) \quad (91)$$

$$\Rightarrow [D - \beta \partial_g] \tilde{G}_2 = [-\gamma_2(\bar{g}(t)) + \gamma_2(g(t)) - \gamma_2(g(0))] \quad (92)$$

$$(93)$$

В итоге наш ответ для уравнения выглядит как :

$$\Rightarrow G_2(p, \mu, g) = \frac{1}{p^2} \bar{G}_2(\bar{g}(t, g)) \exp\left[-\int_0^t \gamma_2(\bar{g}(u)) du\right] \quad (94)$$

Рассмотрим его свойства :

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^t \gamma_2(\bar{g}(u)) * \frac{\beta_g(\bar{g}(u))}{\beta_g(\bar{g}(u))} du \\ \beta_g(\bar{g}) = \partial_t \bar{g} \end{array} \right\} \Rightarrow \beta_g(\bar{g}) du \Rightarrow \partial_u \bar{g} du = dv \Rightarrow \int_g^{\bar{g}(t)} \frac{\gamma_2(v) dv}{\beta_g(v)} \quad (95)$$

6.2. Инвариантный заряд g :

1. Обычный заряд g и его β - функцию понимаем , как:

$$\beta_g = \tilde{D}_\mu g \quad (96)$$

2. Инвариантный заряд для уравнения (86) (β функция данного РГ-уравнения, как коэффициент при ∂_g).

$$\bar{g} = \bar{g}(s, g), \quad D_s \bar{g} = \beta(\bar{g}), \quad \bar{g} |_{s=1} = g \quad (97)$$

Соответственно можно написать простую связь:

$$\ln s = \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \quad (98)$$

Обычный и инвариантный заряд могут совпадать, если масштабный аргумент s не имеет нетривиальную критическую размерность. В нашем случае ($s = p/\mu$) это выполнено.

Нас интересует ИК проблема:

$$(p \rightarrow 0) \Rightarrow (s \rightarrow 0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty) \quad (99)$$

Т.е. нас интересует инвариантный заряд при $(t \rightarrow -\infty)$

$$\partial_t \bar{g} = \beta(\bar{g}) \quad (100)$$

Возможно 2 варианта. 1) Частица уходит на ∞ . 2) Частица где-то останавливается. Рассмотрим 2 вариант. Т.е. нам необходимо, чтобы $\beta(\bar{g}) = 0$. Тогда $\partial_t \bar{g} = 0$.

Исследуем (100) около фиксированной точки g^* .

$$g = g^* + \delta g \quad (101)$$

$$\Rightarrow \partial_t \delta g = \beta'(g^*) \delta g \quad (102)$$

$$\delta g = \delta g_0 \exp(\beta'(g^*)t) \quad (103)$$

Замена $\beta'(g^*) = w$

$$\delta g = \delta g_0 \exp(wt) \quad (104)$$

Знак w определяет характер g^* . Если $w > 0$, то сваливаемся при $(t \rightarrow -\infty)$. А если $w < 0$, то сваливаемся при $(t \rightarrow +\infty)$. Т.е. это определяет нам устойчивость или неустойчивость g^* .

$$\begin{cases} w > 0 \Rightarrow g^* & IR \text{устойчива} & (\text{ИК}) \\ w < 0 \Rightarrow g^* & UV \text{устойчива} & (\text{УФ}) \end{cases} \quad (105)$$

7. Решение РГ уравнения. Критические индексы. Универсальность.

В предыдущей лекции было получено РГ уравнение на ренормированные функции Грина. Рассмотрим его применительно к двуххвостой функции Грина (парный коррелятор) и исследуем его решение в инфракрасной области $k \rightarrow 0$

$$(D_\mu + \beta_g \partial_g - \gamma_\tau D_\tau + 2\gamma_\varphi(g)) G_2 = 0. \quad (106)$$

Положим $\tau = 0$, что соответствует случаю, когда система находится в критической точке. Решение будем искать в виде

$$G_2 = \frac{1}{k^2} f\left(\frac{k}{\mu}\right),$$

тогда для f , как функции переменной $s \equiv k/\mu$ получим уравнение

$$(D_s - \beta_g \partial_g - 2\gamma_\varphi(g)) f = 0. \quad (107)$$

Это уравнение может быть решено методом характеристик¹. Решение ищется вдоль характеристических кривых $\bar{g}(t)$, которые удовлетворяют условию

$$\partial_t \bar{g} = \beta(\bar{g}), \quad \bar{g}|_{t=0} = g, \quad t \equiv \ln s. \quad (108)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решением (107) является функция

$$f(s) = \widetilde{G}_2(\bar{g}(t)) \exp\left(2 \int_0^t \gamma_\varphi(\bar{g}) dt\right), \quad (109)$$

здесь \widetilde{G}_2 является произвольной функцией, которая вычисляется в рамках теории возмущений. Уравнение РГ может быть решено и для высших корреляционных функций. Как видно, для этого необходимо рассмотреть обыкновенное дифференциальное уравнение на бегущую константу связи $\bar{g}(t)$. Его правая часть, β -функция, представляет собой полином некоторой степени, который соответствует отрезку ряда теории возмущения по

¹См. бактериологическую аналогию для РГ уравнения, Пескин/Шредер

заряду g . Однако, в критическом режиме $s \rightarrow 0$ для получения универсальных характеристик проблема упрощается. Рассмотрим уравнение (107) в ИК-области и предположим, что в этой области находится устойчивая фиксированная точка g^* , т.е. любая характеристическая траектория, начинающаяся в различных точках g с неограниченным уменьшением параметра s неограниченно близко приближается к g^* . Естественно эта точка является нулем бета-функции. Таким образом, в этой области уравнение (107) упростится до

$$(D_s - 2\gamma_\varphi(g^*)) f = 0, \quad (110)$$

что сразу позволяет найти ИК-асимптотику коррелятора $f(s) \sim s^{2\gamma_\varphi(g^*)}$.

Если устойчивые фиксированные точки отсутствуют, то вышеизложенные результаты неприменимы. Вопрос существования фиксированных точек решается непосредственно в каждой модели для конкретной β -функции. Тип фиксированных точек можно определить следующим образом. Предположим нам известны нули β -функции, т.е. фиксированные точки. Рассмотрим поведение характеристических траекторий в окрестности каждой из этих точек. Для определённости назовем эту точку g^* . В её окрестности уравнение (108) может быть линеаризовано и решено

$$\partial_t \bar{g} = \omega(\bar{g} - g^*) + o(\bar{g} - g^*), \quad (111)$$

$$\bar{g} = g^* + \text{const } s^\omega, \quad (112)$$

здесь $\omega \equiv \partial_g \beta|_{g=g^*}$. Теперь ясно, что фиксированная точка является ИК-устойчивой, если показатель $\omega > 0$. Для многозарядных моделей ω является уже матрицей, в этом случае требуется её положительная определённость. Суммируя вышеизложенное мы приходим к выводу, что критический скейлинг определяется наличием ИК-устойчивых фиксированных точек. Кроме того, их наличие приводит к универсальности критического поведения систем из одного класса. Универсальность проявляется в независимости критических показателей от стартового значения ренормированного заряда g . Так для корреляционной функции G_2 мы обнаружили ИК-асимптотику

$$G_2 \sim \frac{1}{k^{2-\eta}},$$

и указали явный вид критического индекса (индекс Фишера) $\eta = 2\gamma_\varphi(g^*)$. Этот результат может быть получен непосредственно из (109). Рассмотрим показатель экспоненты и перепишем его в следующем виде, пользуясь динамическим уравнением (108)

$$\int_0^t \gamma_\varphi(\bar{g}) dt = \int_g^{\bar{g}(t)} \frac{\gamma_\varphi(x)}{\beta_g(x)} dx = \int_g^{\bar{g}(t)} \frac{\gamma(g^*) + \gamma_\varphi(x) - \gamma(g^*)}{\beta_g(x)} dx = \gamma(g^*)t + \int_g^{\bar{g}(t)} \frac{\gamma_\varphi(x) - \gamma(g^*)}{\beta_g(x)} dx, \quad (113)$$

подынтегральная функция в последнем интеграле не имеет особенностей на контуре интегрирования, поэтому интеграл хорошо определён. Подставляя такой тождественно преобразованный показатель в (109) получим для ренормированного коррелятора

$$G_2 = \frac{s^\eta}{k^2} \tilde{G}(\bar{g}) \exp \left(2 \int_g^{\bar{g}(t)} \frac{\gamma_\varphi(x) - \gamma(g^*)}{\beta_g(x)} dx \right). \quad (114)$$

Определим вид функции $\tilde{G}(\bar{g})$. Как следует из (114) $\tilde{G}(\bar{g})/\mu^2 = G_2|_{t=0}$, т.е. в качестве точки нормировки удобно выбирать $k = \mu$. С другой стороны, функцию Грина G_2 можно строить в виде разложения по заряду в ренормированной теории. Так в однопетлевом приближении

$$G_2 = \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{g^2}{6} [\text{const}_1 \ln(k/\mu) + \text{const}_2] + O(g^3) \right), \quad (115)$$

следовательно функция $\tilde{G}(\bar{g}) = 1 + \text{const}_2 \bar{g}^2/6 + O(\bar{g}^3)$ является свободной от ИК-расходимостей. Метод ренорм-группы позволил собрать все эти сингулярности в инвариантные переменные \bar{g} , а так же в аномальные члены, такие как s^η .

В случае отличного от нуля параметра близости к точки перехода τ уравнение (106) имеет решением функцию

$$G_2 = \frac{s^\eta}{k^2} \tilde{G}(\bar{\tau}, \bar{g}) \exp \left(2 \int_g^{\bar{g}(t)} \frac{\gamma_\varphi(x) - \gamma(g^*)}{\beta_g(x)} dx \right), \quad (116)$$

где инвариантная переменная $\bar{\tau}$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \bar{\tau} = -\Delta_\tau \bar{\tau}, \quad \bar{\tau}|_{t=0} = \tau/\mu^2, \quad \Delta_\tau \equiv 2 + \gamma_\tau(\bar{g}), \quad (117)$$

а решение имеет вид

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{\mu^2} \exp \left(- \int_g^{\bar{g}(t)} \frac{2 + \gamma_\tau(x)}{\beta_g(x)} dx \right) = s^{-2 - \gamma_\tau(g^*)} \frac{\tau}{\mu^2} \exp \left(- \int_g^{\bar{g}(t)} \frac{\gamma_\tau(x) - \gamma_\tau(g^*)}{\beta_g(x)} dx \right). \quad (118)$$

Здесь и выше экспоненты содержат начальную точку g , с которой стартует бегущая константа связи, поэтому они не являются универсальными характеристиками критического поведения. Однако скейлинговая функция $\tilde{G}(\bar{\tau}, \bar{g})$ является универсальной характеристикой критического поведения, как и критические индексы. Для определения последних, достаточно знать лишь два из них, остальные можно восстановить по известным соотношениям (см. лекцию №?). Второй индекс (индекс для длины корреляции) можно определить, переписав результаты (118) в виде $\bar{\tau} \sim 1/(kr_c)^2$, где $r_c \sim 1/\tau^\nu$ и искомый индекс $\nu = 1/[2 + \gamma_\tau(g^*)]$.

8. Вычисление критических показателей

Появившиеся УФ-расходимости, которые на первый взгляд мешали применению теории возмущения, имеют, как показано, и полезные физические приложения. Их анализ и устранение дают пошаговый алгоритм к вычислению универсальных характеристик фазовых переходов второго рода – критических показателей. В размерной регуляризации и MS-схеме ренормировки вся информация об этих показателях содержится в вычете в простом полюсе по ε констант ренормировки Z_i , что следует из определения ренормгрупповых функций: $\beta(g)$ и $\gamma_i(g)$. В рамках теории возмущения бета-функция представляет собой степенной ряд вида

$$\beta(g) = -\varepsilon g + a_2 g^2 + a_3 g^3 + \dots, \quad (119)$$

а критические индексы, как говорилось выше, выражаются через значения аномальных размерностей в фиксированной точке

$$\eta = 2\gamma_\varphi(g^*), \quad \nu = \frac{1}{2 + \gamma_\tau(g^*)}. \quad (120)$$

Положение точки g^* , т.е. корень уравнения $\beta(g^*) = 0$, ищется в виде ряда по ε . Из представления (119) получаем

$$g^* = \frac{\varepsilon}{a_2} - \frac{a_3}{a_2^2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (121)$$

кроме того, всегда существует тривиальный корень $g^* = 0$ (гауссова фиксированная точка). Чтобы ответить на вопрос об устойчивости этих точек, нужно определить знак параметра ω (112). Для тривиального решения $\omega = -\varepsilon$, что означает ИК-неустойчивость этой точки, поэтому она неинтересна с точки зрения критического поведения. Для нетривиальной фиксированной точки $\omega = \varepsilon + a_3/a_2^2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$. Эта точка уже может быть ИК-устойчивой, если значение индекса $\omega > 0$, однако, для объективного вычисления ω необходимы методы обобщенного суммирования Бореля. Для модели φ^4 точка (121) ИК-устойчива, поэтому она определяет критический скейлинг с соответствующими критическими показателями. Естественно и они имеют вид отрезка ε -разложения.

Суммируя вышеизложенное мы можем заключить, что РГ уравнение позволило не только показать наличие критического скейлинга, но и дало конструктивный способ вычисления критических показателей в виде отрезка ε -разложения. Несмотря на эти результаты количественные значения показателей варьируются в зависимости от метода обработки ε -разложения. Основная причина сего связана с расходимостью рядов теории возмущения.

9. Мультипликативная ренормировка составных операторов.

Как отмечалось в предыдущих главах, эффективный функционал действия Ландау, описывающий длинно-волновую физику системы, строится в виде разложения по полям φ и их градиентам. Ранее при анализе мы оставляли лишь члены не выше $g\varphi^4$. Это оправдывалось тем, что в интересующей нас ИК-области слагаемые более высокого порядка оказывались несущественными в логарифмической размерности $D = 4$. Например, взаимодействие $\lambda\varphi^6$ несущественно поскольку размерность соответствующей константы связи отрицательна $d[\lambda] = -2$. Однако возникают ситуации, когда необходимо учитывать старшие члены. Такая ситуация, например, может быть связана со сменой знака заряда g в процессе ренормировки. В этом случае теряется термодинамическая устойчивость системы, что связано с отрицательной определённой действия. Здесь приходится включать ранее неучтенный член $\lambda\varphi^6$. Рассмотрим следующий функционал действия

$$S = \frac{1}{2} \varphi(\mathbf{p}^2 + \tau)\varphi + \frac{g}{4!} \varphi^4 + \frac{\lambda}{6!} \varphi^6 \quad (122)$$

Учёт нового члена в действии порождает теперь новые УФ-расходимости. Выясним, какие графики будут иметь поверхностные УФ-расходимости в этом случае.

Рис. 1. Расходящиеся составные диаграммы для оператора φ^6 .

Рис. 2. Графическое изображение для операторов $(\varphi\nabla\varphi)^2$ и $\Delta\varphi\Delta\varphi$ соответственно.

Пусть n – число петель (интегрирований) в графе, N_φ – число внешних хвостов, N_g – число φ^4 -вершин в диаграмме, N_λ – число φ^6 -вершин в диаграмме, Π – число пропагаторов в графе. Также предположим наличие УФ-обрезания в интегралах – Λ . Ясно, что каждая диаграмма при этом пропорциональна степени обрезания Λ^δ , где $\delta = Dn - 2\Pi$. Если $\delta \geq 0$, то соответствующая диаграмма расходится в ультрафиолетовой области. В $N_g N_\lambda$ порядке теории возмущения имеется $4N_g + 6N_\lambda$ свободных хвостов из вершин, к которым присоединяется N_φ внешних хвостов, поэтому число пропагаторов, соединяющих оставшиеся хвосты, есть $\Pi = (4N_g + 6N_\lambda - N_\varphi)/2$. Кроме того, как следует из правил построения диаграмм, каждая вершина содержит дельта-функцию, которая снимает интегрирование. После снятия всех дельта-функций в диаграмме остаётся лишь одна, которая отражает закон сохранения втекающих в диаграмму импульсов, поэтому число интегрирований $n = \Pi - (N_g + N_\lambda - 1)$. Окончательно для индекса расходимости имеем

$$\delta = D - d[\varphi]N_\varphi - d[\lambda]N_\lambda \quad (123)$$

Видно, что новый член действительно увеличивает степень расходимости диаграмм. Такая модель теперь становится неперенормируемой в $D = 4$.

Основные объекты, который можно вычислять в рамках теории возмущений для заданной модели – различные функции Грина. Будем интересоваться ими в модели (122) в линейном по λ приближении, т.е.

$$\langle \varphi(\mathbf{x}_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_s) \rangle = \langle \varphi(\mathbf{x}_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_s) \rangle|_{\lambda=0} - \frac{\lambda}{6!} \langle \varphi(\mathbf{x}_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_s) \varphi^6 \rangle|_{\lambda=0} + o(\lambda) \quad (124)$$

Функция перед λ называется функцией Грина со вставкой составного оператора. Под составным оператором здесь и далее будем понимать локальные мономы, составленные из полей и их производных. Например, $\varphi^2, \varphi^3, \Delta\varphi\Delta\varphi$ и т.п. Отметим, что когда речь идет о составных операторах, не обязательно под этим понимается учет старших членов в действии, так, например, рассмотрение монома φ^2 в качестве составного оператора и ренормировка двуххвостых функций Грина со вставкой этого оператора позволяет вычислять константу ренормировки Z_τ в безмассовой схеме в модели φ^4

$$\langle \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2) \rangle = \langle \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2) \rangle|_{\tau=0} - \frac{\tau Z_\tau}{2} \langle \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2) \varphi^2 \rangle|_{\tau=0} + o(\tau). \quad (125)$$

Из формулы (123) следует, что одна вставка φ^6 порождает расходимости типа $\ln \Lambda$ в шестихвостках ($\delta = 0, N_\varphi = 6$), Λ^2 в четыреххвостках ($\delta = 2, N_\varphi = 4$) и Λ^4 в двуххвостках ($\delta = 4, N_\varphi = 2$), (Рис.9). Таким образом, возникает необходимость устранять появившиеся расходимости, т.е. нужно ренормировать функции Грина со вставкой составного оператора. Это делается добавлением к базовому действию соответствующих контрчленов. При разложении по градиентам в действии также возникают члены типа $(\varphi\nabla\varphi)^2$ и $\Delta\varphi\Delta\varphi$ (Рис.9), которые выделены тем, что имеют ту же каноническую размерность при $D = 4$, что и φ^6 , поэтому они порождают те же самые УФ-расходимости и в процессе ренормировки перемешиваются между собой: контрчлен данного монома, содержит в себе другие мономы той же размерности. В этом смысле они образуют замкнутый набор, элементы которого имеют одну каноническую размерность. Если поля имеют тензорную структуру, то в набор входят элементы имеющие одну и ту же симметрию относительно соответствующих преобразований. Будем обозначать за $F_i(\varphi)$ какой либо элемент замкнутого набора, λ_i^0 -соответствующая затравочная константа связи или источник. Определим семейство ренормированных составных операторов

$$\lambda_i^0 F_i(\varphi) = \lambda_i^0 Z_{ij} F_j^R(Z_\varphi \varphi) \quad (126)$$

для такой модели можно определить ренормированные источники $\lambda_j = \lambda_i^0 Z_{ij}$, бета-функции $\beta_{\lambda_j} \equiv \tilde{D}_\mu \lambda_j$ и матрицу аномальных размерностей $\gamma \equiv Z^T \tilde{D}_\mu (Z^{-1})^T$. При этом уравнение ренормгруппы для k -хвостой функции Грина со вставкой составного оператора F_j имеет вид

$$\{p_i \partial_{p_i} + \Delta_\tau - \beta_g \partial_g + \lambda_i \Delta_{ij} \partial_{\lambda_j} + k \Delta_\phi\} G_k^R(\{\mathbf{p}_i\}, \lambda_j, g, \tau) = 0, \quad (127)$$

здесь по повторяющемуся индексу j суммирование не проводится, матрица $\Delta = \text{diag}(d_{\lambda_1}, d_{\lambda_2}, d_{\lambda_3}) - \gamma$. Это уравнение выполняется лишь в линейном по λ_i приближении. Из него, как и для заряда g , можно получить уравнения на бегущие константы $\bar{\lambda}_i$, тем самым анализировать их поведение в ходе процедуры перенормировки, а так же вычислять аномальные размерности соответствующих составных операторов. Учет лишь линейного члена в разложении (124) оправдывается тем, что в ходе перенормировки заряды λ_i остаются малыми в ИК-области.

10. Ряды теории возмущений. Асимптотика высоких порядков.

Любая величина, вычисляемая в рамках теории возмущения представима в виде ряда по некоторому параметру. Этим параметром может быть константа связи g , параметр размерной регуляризации ε , для многокомпонентных полей это, например, $1/N$ и т.д. Вычислительные методы позволяют получать лишь некоторый конечный отрезок первых членов подобных рядов и сопоставлять эту информацию с экспериментальными данными. Однако возникает вопрос об аналитических свойствах таких разложений, т.е. вопрос о сходимости рядов теории возмущения.

В качестве примера рассмотрим 2-хвостую функцию Грина $G(g)$ как функцию константы связи g в модели ϕ^4 . Её разложение представим в виде ряда

$$G(g) = \sum_{m \geq 0} g^m G_m. \quad (128)$$

Естественно свойства сходимости этого ряда определяются поведением коэффициентов разложения G_m при больших номерах $m \rightarrow \infty$, поэтому задача сводится к исследованию этого поведения. Точное выражение для коэффициентов разложения может быть получено использованием интегральной формулы Коши

$$G_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_C G(g) \frac{dg}{g^{m+1}}, \quad (129)$$

где C замкнутый контур вокруг нуля; для $G(g)$ используется функциональное представление

$$G(g) \equiv \langle \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2) \rangle = \frac{1}{NORM} \int D\varphi \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2) e^{-S(\varphi)}. \quad (130)$$

Строго говоря, $G(g)$ является аналитической только в правой полуплоскости переменной g , а сама точка $g = 0$ является существенно особой, поскольку при $g < 0$ функциональный интеграл не существует. Тем не менее, представлением Коши можно пользоваться, если понимать член со взаимодействием $\exp(-S_{int})$ лишь как формальную запись ряда, либо можно считать, что интеграл регуляризован членом $+0\varphi^6$.

Подстановка представления (130) в формулу (131) позволяет исследовать поведение G_m при $m \rightarrow \infty$ методом перевала в интеграле

$$G_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dg}{g} \frac{1}{NORM} \int D\varphi \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2) e^{-S(\varphi) - m \ln g}. \quad (131)$$

Перевальные конфигурации здесь ищутся как по φ , так и по переменной g . Растянем поля $\varphi \rightarrow \sqrt{m} \varphi$ и заряд $g \rightarrow g/m$, при этом $e^{-S(\varphi) - m \ln g} \rightarrow m^m e^{-m\{S(\varphi) + \ln g\}}$. Видно, что точки перевала определяются экстремумом функционала $J \equiv S(\varphi) + \ln g$. Вариационные уравнения для него имеют вид

$$\frac{\delta}{\delta \varphi} J = 0 \quad \Longrightarrow \quad (-\Delta + \tau) \varphi_{st} + \frac{g}{3!} \varphi_{st}^3 = 0 \quad (132)$$

$$\frac{\partial}{\partial g} J = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{g}{4!} \int \varphi_{st}^4 d\mathbf{x} = -1. \quad (133)$$

Выясним при каких условиях уравнение (132) имеет решение. Действие модели представим в виде

$$S(\varphi) = \int d\mathbf{x} \left[-\frac{1}{2} \varphi \Delta \varphi + \frac{1}{2} \tau \varphi^2 + \frac{g}{4!} \varphi^4 \right] \equiv F_1 + F_2 + F_3 \quad (134)$$

соответственно. Умножим уравнение (132) на φ_{st} и проинтегрируем по всему пространству, после этого оно примет вид $F_1 + F_2 + 2F_3 = 0$. Выберем некоторое число λ и рассмотрим функционал $S(\varphi(\lambda \mathbf{x}))$. После растяжения координат $\lambda \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}$ его можно записать в виде $S(\varphi(\lambda \mathbf{x})) = \lambda^{2-D} F_1 + \lambda^{-D} F_2 + \lambda^{-D} F_3$. Ясно, что

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} S(\varphi_{st}(\lambda \mathbf{x}))|_{\lambda=1} = \frac{\delta}{\delta \varphi_{st}} S(\varphi_{st}(\mathbf{x})) \partial_\lambda \varphi_{st}(\lambda \mathbf{x})|_{\lambda=1} = 0,$$

принимая это во внимание, получим следующую систему

$$\begin{cases} F_1 + F_2 + 2F_3 = 0 \\ (1 - \frac{2}{D}) F_1 + F_2 + F_3 = 0 \end{cases} \quad (135)$$

Эта система является совместной при $D = 4$, если $F_2 = 0$, т.е. стационарное решение существует в четырехмерье только в безмассовой модели. В прочих измерениях стационарное решение существует в массивной теории. Стационарное решение, соответствующее экстремали классического действия называется инстантоном, если оно локализовано в некоторой области. В рассматриваемом случае стационарное решение представляет собой сферически-симметричные относительно некоторого центра убывающие функции вида

$$\varphi_{st}(\mathbf{x}) = \frac{\text{const}}{y} \frac{1}{1 + \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2}{y^2}}, \quad (136)$$

параметры y, \mathbf{x}_0 являются произвольными. Параметр $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^4$ называется центром инстантона, его наличие является следствием трансляционной инвариантности действия S . Параметр $y \in \mathbb{R}$ называется радиусом инстантона, он отражает дилатационную инвариантность теории, другими словами инвариантность относительно растяжений. Инстантон локализован на масштабах порядка его радиуса. Существование непрерывного 5-параметрического семейства инстантонов, которые дают одинаковый вклад в методе перевала, порождает дополнительные трудности, которые решаются методом Фаддеева-Попова, т.е. введением корректной меры в функциональном интегрировании.

Инстантонный анализ позволяет вычислить асимптотическое поведение коэффициентов разложения и приводит к следующей оценке для них

$$G_m = c(-a)^m m^b m! (1 + O(1/m)). \quad (137)$$

Этот вид является общим, как для асимптотики коэффициентов функций Грина, так и для коэффициентов ε -разложения критических индексов. Различаются лишь значения параметров a, b и c . Видно, что ряды теории возмущения носят асимптотический характер, кроме того сам параметр разложения, считающийся формально малым, может оказаться порядка и больше 1. Так для ε -разложения критических индексов параметр $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = 2$. Всё это вносит существенные трудности при получении количественных результатов. Однако и это можно обойти, применяя методы обобщенного суммирования, такие как метод Бореля или Бореля-Леруа. Они приводят к хорошему согласию теоретических расчетов и экспериментальных результатов.

Изложенные выше идеи применяются к одномерному интегралу и сравниваются с точными методами в пособии <http://stat.phys.spbu.ru/Method/metbor.pdf> «Асимптотики высоких порядков квантовопольевых разложений и пересуммирование по Борелю асимптотических рядов» Налимов М.Ю., Новожилова Т.Ю.