§33. Формула Пуазейля

В качестве иллюстрации явления вязкого трения рассмотрим течение жидкости по цилиндрической трубе с радиусом R и длиной L. Пусть на концах трубы поддерживаются постоянные давления p_1 и p_2. Жидкость течет по трубе под действием перепада давления $\Delta p = p_2 - p_1$. Считаем, что в трубе уже установился стационарный поток жидкости. Скорость этого потока u направлена вдоль оси трубы. Величина скорости зависит только от расстояния r до центра трубы: $u = u(r)$, причем на самой поверхности трубы скорость потока равна нулю

$$u(r)\big|_{r=R} = 0. \tag{33.1}$$

Построим внутри трубы две коаксиальные с ней цилиндрические поверхности, близкие друг к другу. Обозначим через r радиус внутренней цилиндрической поверхности, а через $r + dr$ радиус внешней поверхности. Введем прямоугольную систему координат, направив ось x по оси трубы в направлении течения жидкости, а оси y и z ортогонально оси трубы. Расстояние r от центра трубы точки с координатами y, z очевидно равно

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}. \tag{33.2}$$

Рассмотрим жидкость, текущую между построенными цилиндрическими поверхностями. Ее суммарный объем dV есть

$$dV = 2\pi r L\, dr. \tag{33.3}$$

На эту жидкость согласно (31.8) действует сила вязкого трения dF, равная

$$dF = \eta \left[\frac{\partial^2 u(y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(y,z)}{\partial z^2} \right] 2\pi r\, L\, dr. \tag{33.4}$$

Поскольку скорость течения жидкости в выделенном объеме не зависит от времени, то сила dF компенсируется перепадом давлений на основаниях объема, представляющих собой кольца с площадью $2\pi r dr$. Следовательно

$$dF = -\Delta p 2\pi r dr. \tag{33.5}$$

С учетом (33.4) равенство (33.5) дает

$$\frac{\partial^2 u(y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(y,z)}{\partial z^2}=-\frac{\Delta p}{\eta L}. \qquad (33.6)$$

Преобразуем левую часть соотношения (33.6), учитывая, что скорость $u(y,z)$ зависит от координат y и z посредством только радиуса r. Для производной $\frac{\partial^2 u(y,z)}{\partial y^2}$ ввиду (33.2) имеем:

$$\frac{\partial u(y,z)}{\partial y}=\frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{du}{dr}\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},$$

$$\frac{\partial^2 u(y,z)}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{du}{dr}\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)=.$$

$$=\frac{d^2u}{dr^2}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)^2+\frac{du}{dr}\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^3}\right). \qquad (33.7)$$

Точно так же для производной $\frac{\partial^2 u(y,z)}{\partial z^2}$ найдем

$$\frac{\partial^2 u(y,z)}{\partial z^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\left(\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)^2+\frac{du}{dr}\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}-\frac{z^2}{\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^3}\right). \qquad (33.8)$$

Подставим два последних выражения в (33.6). После приведения подобных членов получим

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du(r)}{dr}=-\frac{\Delta p}{\eta L}\ . \qquad (33.9)$$

Если бы при описании поля скорости потока мы воспользовались цилиндрической системой координат, то от соотношения (33.6) можно было бы сразу перейти к соотношению (33.9). Замечая, что левая часть (33.9) тождественно равна $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du(r)}{dr}\right)$, запишем

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du(r)}{dr}\right) = -\frac{r\Delta p}{\eta L}. \qquad (33.10)$$

Интегрирование соотношения (33.10) дает

$$r\frac{du(r)}{dr} = -\frac{r^2\Delta p}{2\eta L} + const. \qquad (33.11)$$

Произвольную постоянную интегрирования в (33.11) следует, очевидно, положить равной нулю, поскольку при $r = 0$ обращаются в ноль левая часть равенства (33.11) и первое слагаемое в его правой части. Выполняя интегрирование (33.11), выберем произвольную постоянную таким образом, чтобы скорость $u(r)$ согласно (33.1) обращалась в ноль при $r = R$. Получим

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right). \qquad (33.12)$$

Как видно из представленного результата, скорость текущей по трубе жидкости $u(r)$ меняется по параболическому закону по мере отклонения от оси трубы. На поверхности трубы скорость течения равна нулю. На оси трубы скорость принимает максимальное значение $\Delta p R^2 / (4\eta L)$.

Найдем количество жидкости (объем жидкости), вытекающей из трубы за единицу времени. Очевидно, что за единицу времени область потока, выделенную двумя построенными вспомогательными цилиндрическими поверхностями, покинет объем жидкости dQ, равный

$$dQ = u(r) 2\pi r\, dr. \qquad (33.13)$$

Всего из трубы за единицу времени вытечет объем жидкости, определяемый согласно

$$Q = 2\pi \int_0^R u(r)\, r\, dr. \qquad (33.14)$$

Подставив в (33.14) выражение (33.12) для скорости $u(r)$ и выполнив интегрирование, получим

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8 \eta L} R^4 . \tag{33.15}$$

Формула (33.15) называется формулой Пуазейля. Согласно этой формуле, количество вытекающей из трубы жидкости пропорционально четвертой степени радиуса трубы.