§31. Вязкое трение. Коэффициент вязкости.

Упрощающим фактором при обсуждении диффузии и теплопроводности было предположение о том, что эти процессы протекают в покоящейся среде. Явление переноса, рассматриваемое в настоящей лекции, принципиально связано с движением среды. Это явление называется **внутренним трением или вязкостью** и проявляется при различии скорости течения в разных местах потока жидкости или газа. Внутреннее трение стремится уровнять скорости течения в потоке, передавая импульс (количество движения) от быстротекущих слоев жидкости или газа более медленным слоям. По этой причине внутреннее трение и попало в разряд явлений переноса. Количественным выражением внутреннего трения является вязкая сила, действующая на единичный объем жидкости или газа в данном месте потока. Величина и направление силы в каждый момент времени определяется полем скорости потока и **коэффициентом вязкости** текущего вещества. Связь между силой и полем скорости в общем случае достаточно сложна и подробно обсуждается в гидродинамике. Для понимания существа явления мы предельно упростим конфигурацию потока.

Рассмотрим простой эксперимент, демонстрирующий существование вязкой силы при движении в жидкости. Пусть имеются две плоские твердые горизонтально расположенные пластины, между которыми находится жидкость, например, вода. Нижняя пластина неподвижна, а верхняя, отстоящая от нижней на расстояние d, движется параллельно нижней с малой постоянной скоростью $\vec{u}$. Введем прямоугольную систему координат, совместив направление оси x с направлением скорости $\vec{u}$. Ось z направим от нижней пластины к верхней, а ось y – ортогонально двум построенным осям.

Сила F, требуемая для поддержания движения верхней пластины, будет пропорциональна площади пластины S и отношению u/d:

$$F = \eta S \frac{u}{d}. \qquad (31.1)$$

Коэффициент пропорциональности η называется коэффициентом вязкости. Экспериментальным фактом является равенство нулю скорости движения жидкости или газа на (вблизи) поверхности твердого тела относительно этой поверхности. Поэтому жидкость у нижней пластины покоится, а у верхней пластины движется вместе с ней со скоростью $\vec{u}$. В установившемся режиме, при котором скорость движения и сила постоянны, жидкость между пластинами будет также двигаться в направлении движения верхней пластины. Скорость этого движения $\vec{u}(z)$ направлена по оси x, равна нулю вблизи нижней пластины и линейно нарастает с увеличением z до значения $\vec{u}$ при приближении к верхней пластине. Так что отношение u/d представляет здесь также и производную $\partial u_x(z)/\partial z$ от составляющей скорости потока жидкости, параллельной поверхности пластины, по расстоянию в направлении верхней пластины. Равномерность движения верхней пластины означает, что действующая на нее внешняя сила уравновешена силой вязкого трения, которая в данном эксперименте направлена в сторону, противоположную оси x. Отнесенное к единице площади пластины значение проекции Π_x этой силы на ось x (других проекций у силы вязкого трения в данном случае нет) согласно (31.1) равно

$$\Pi_x = -\frac{F}{S} = -\eta\frac{u}{d} = -\eta\frac{\partial u_x(z)}{\partial z}. \qquad (31.2)$$

Из механики известно, что действующая на тело сила сообщает ему за единицу времени импульс (изменяет количество движения тела), численно равный величине силы и совпадающий с ней по направлению. В рассмотренном примере импульс, сообщаемый движущейся пластине силой вязкого трения, компенсируется импульсом, сообщаемым пластине внешней движущей силой F. Если внешнюю силу убрать, то импульс, сообщаемый движущейся пластине силой вязкого трения, затормозит ее движение.

Выделим в пространстве между пластинами элемент объема в форме параллелепипеда, боковые грани которого параллельны потоку, две из них, отстоящие друг от друга на расстоянии Δz, параллельны ограничивающим поток пластинам.

Пусть ΔS – площадь этих граней, z_1 – высота нижней грани, $z_2 = z_1 + \Delta z$ – высота верхней грани, точка z находится между точками z_1 и z_2. На нижнюю грань в направлении оси x действует сила вязкого трения, проекция которой на ось x согласно (31.2) равна

$$\Pi_x(z_1)\Delta S = -\eta\,\Delta S \left.\frac{\partial u_x(z)}{\partial z}\right|_{z=z_1}. \qquad (31.3)$$

На жидкость над верхней гранью со стороны выделенного объема действует сила, равная, очевидно, $\Pi_x(z_2)\Delta S$. Поскольку жидкость над верхней гранью и под этой гранью движутся с одинаковой скоростью, то на верхнюю грань (на жидкость под верхней гранью) со стороны вышележащей жидкости в направлении оси x действует сила вязкого трения, проекция которой на ось x равна $-\Pi_x(z_2)\Delta S$. Результирующая сила ΔF, действующая на жидкость в выделенном элементе объема, направлена вдоль оси x и ее проекция на эту ось в силу сказанного равна

$$\Delta F_x = \Pi_x(z_1)\Delta S - \Pi_x(z_2)\Delta S = \eta\,\Delta S\left[\left.\frac{\partial u_x(z)}{\partial z}\right|_{z=z_2} - \left.\frac{\partial u_x(z)}{\partial z}\right|_{z=z_1}\right]. \qquad (31.4)$$

Полагая в общем случае, что функции $\Pi_x(z)$ и $\partial u_x(z)/\partial z$ мало меняются при изменении переменной z на интервале (z_1, z_2), запишем

$$\Pi_x(z_1) - \Pi_x(z_2) = -\frac{\partial \Pi_x(z)}{\partial z}\Delta z, \qquad (31.5)$$

$$\left.\frac{\partial u_x(z)}{\partial z}\right|_{z=z_2} - \left.\frac{\partial u_x(z)}{\partial z}\right|_{z=z_1} = \frac{\partial^2 u_x(z)}{\partial z^2}\Delta z. \qquad (31.6)$$

Заметим, что в рассматриваемом эксперименте функции $\Pi_x(z)$ и $\partial u_x(z)/\partial z$ – константы по z.

Произведение $\Delta S \Delta z$ равно объему выделенного параллелепипеда. Поделив на него равенства (31.4) при учете (31.5), (31.6), получим искомое соотношение для силы вязкого трения, действующей на единицу объема в рассматриваемом потоке

$$\frac{\Delta F_x}{\Delta V} = -\frac{\partial \Pi_x(z)}{\partial z} = \eta \frac{\partial^2 u_x(z)}{\partial z^2}. \tag{31.7}$$

Соотношение (31.2) определяет поток импульса Π_x через единичную площадку (плотность потока импульса), ортогональную направлению переноса импульса. Это соотношение похоже на соотношения, которые ранее были записаны для плотности потока примеси в диффузии и плотности потока тепла в теплопроводности. Если компонента скорости u_x в рассматриваемом потоке по какой-либо причине меняется также и в направлении оси y, то сила вязкого трения, действующей на единицу объема в потоке вычисляется по формуле, обобщающей (31.7):

$$\frac{\Delta F_x}{\Delta V} = -\frac{\partial \Pi_x(y,z)}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_x(y,z)}{\partial z} = \eta \left[\frac{\partial^2 u_x(y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x(y,z)}{\partial z^2} \right]. \tag{31.8}$$

Из проведенных рассуждений в принципе ясно, как находить силу вязкого трения в произвольном потоке, локальная скорость течения в котором имеет три компоненты, каждая из которых зависит от трех пространственных координат. Последовательное определение всех сил, действующих в потоке жидкости или газа, приводит к формулировке основного уравнения гидродинамики – уравнения Навье-Стокса. Обсуждение связанных с этим уравнением вопросов выходит за пределы данного курса. Предметом нашего рассмотрения здесь является молекулярный механизм переноса импульса. Прежде чем перейти к нему в случае газов заметим следующее. Коэффициент вязкости η определяет скорость передачи импульса в потоке. Скорость же потока равна импульсу единицы объема потока, деленному на плотность. Соответственно вклад в скорость изменения **скорости** потока от вязкого трения будет пропорционален коэффициенту вязкости η, деленному на плотность вещества потока ρ. Величину

$$\chi = \eta / \rho \tag{31.9}$$

называют кинематической вязкостью. Сам же коэффициент η часто называют динамической вязкостью. Из (31.7) легко установить размерность кинематической вязкости. После деления правой и левой частей (31.7) на плотность ρ в левой части формулы будет стоять величина с размерностью ускорения. Множитель при кинематической вязкости имеет размерность $м^{-1} \cdot c^{-1}$ Следовательно

$$[\chi] = м^2 \cdot c^{-1} \ . \qquad (31.10)$$

Таким образом, размерность кинематической вязкости совпадает с размерностью коэффициентов диффузии и температуропроводности.