§29. Теплопроводность

Близким по механизму реализации к рассмотренному выше процессу диффузии является процесс **теплопроводности**. Если в разных местах термодинамической системы (тела) температура различна, то в теле наблюдаются потоки теплоты из мест более нагретых в места менее нагретые. Как и диффузия, процесс переноса теплоты (более строго – перенос тепловой энергии) связан с беспорядочным тепловым движением молекул. Молекулы из более нагретых мест взаимодействуют (сталкиваются) с молекулами из менее нагретых мест и передают последним часть своей энергии. Потоки теплоты будут существовать до тех пор, пока во всем теле не установится единая температура (если, конечно, система не подвергается постоянному тепловому воздействию).

Как и в случае диффузии, будем полагать, что перенос теплоты происходит **в покоящейся среде**. Это условие хорошо выполняется в твердых телах и часто оказывается нарушенным в жидких и газообразных средах. Наличие поля тяжести приводит к возникновению в таких средах конвекционного перемешивания (например, **при нагревании снизу)**. Более нагретые и потому менее плотные жидкость или газ поднимаются наверх, а на их место приходят менее нагретые жидкость или газ. Выравнивание температуры при наличии конвекции происходит значительно быстрее, чем при теплопроводности в покоящейся среде.

Введем прямоугольную систему координат и пусть $T(x, y, z)$ – меняющаяся от точки к точке температура среды.[1] Процесс переноса теплоты в объеме среды описывается полем вектора плотности потока теплоты $\vec{i}\,(x, y, z)$. В каждой точке среды вектор $\vec{i}\,(x, y, z)$ по направлению совпадает с направлением переноса теплоты, а по величине равен количеству теплоты $i(x, y, z)$, переносимому за единицу

[1] Введение зависящей от координат (и от времени) температуры, как, впрочем, и введение зависящей от координат и времени концентрации примеси при рассмотрении диффузии, а также в дальнейшем поля скорости в потоке при рассмотрении вязкого трения, предполагает, что на характерных пространственных и временных масштабах в системе реализуется так называемое локальное равновесие. На примере диффузии сказанное означает, что концентрация примеси не должна сильно изменяться на расстоянии порядка нескольких длин свободного пробега диффундирующих молекул и за время порядка нескольких времен их свободного пробега.

времени через единичную поверхность, ортогональную направлению потока теплоты. Вектор $\vec{i}(x,y,z)$ задается тремя своими компонентами $i_x(x,y,z)$, $i_y(x,y,z)$ $i_z(x,y,z)$, каждая из которых равна количеству теплоты, переносимого за единицу времени через единичную площадку, ортогональную соответствующей оси.

Связь между полем вектора плотности потока теплоты $\vec{i}(x,y,z)$ и полем температуры среды $T(x,y,z)$ устанавливается феноменологическими соотношениями, аналогичными закону Фика (26.1), и записывается в виде

$$i_x(x,y,z) = -\kappa\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{y,z}, \quad i_y(x,y,z) = -\kappa\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{x,z}, \quad i_z(x,y,z) = -\kappa\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{x,y}, \quad (29.1)$$

где κ – постоянный коэффициент, называемый коэффициентом теплопроводности. Знак минус в соотношениях (29.1) отражает тот факт, что теплота распространяется в сторону уменьшения температуры. Соотношения (29.1) записаны для теплопроводности в изотропной среде, свойства которой не зависят от направления. Поэтому во всех трех соотношениях (29.1) стоит один и тот же коэффициент теплопроводности. Значение коэффициента теплопроводности зависит от свойств среды. Чаще всего это значение определяется опытным путем. Далее на качественном уровне будет показано, каким образом можно придти к соотношениям (29.1), рассматривая молекулярный механизм переноса тепла в газе. В этом случае удается получить и оценочное выражение для коэффициента теплопроводности κ.

Если количество теплоты измеряется в Джоулях, то в системе СИ тепловой поток будет измеряться в $Дж \cdot м^{-2} \cdot с^{-1}$. Согласно (29.1) размерность коэффициента теплопроводности тогда будет

$$[\kappa] = Дж \cdot м^{-1} \cdot с^{-1} \cdot град^{-1}. \quad (29.2)$$

Величина плотности потока теплоты определяет скорость передачи теплоты от более нагретых участков тела к менее нагретым участкам. Вместе с тем, изменение температуры элемента тела равно количеству получаемого этим элементом теплоты, деленному на теплоемкость элемента. Найдем скорость изменения температуры тела в точке с координатами x, y, z в момент времени t. Для этого, как и в случае диффузии, выделим малый элемент тела с объемом ΔV, содержащий точку с координатами x, y, z. Форма объема не имеет значения. Для наглядности представим его в виде параллелепипеда, грани которого параллельны координатным плоскостям. Количество теплоты ΔQ, полученное выделенным элементом за единицу времени (или отданное, если знак ΔQ будет отрицательным), определим следующим образом. Рассмотрим пару граней параллелепипеда, параллельных плоскости x, y. Пусть z_1 – координата точки пересечения ближней к плоскости x, y грани с осью z. Обозначим через Δs площадь каждой грани, а через Δz – расстояние между ними (длину ребра параллелепипеда, параллельного оси z). За единицу времени через эту грань объема ΔV по определению плотности потока теплоты будет перенесено количество теплоты, равное $i_z(x, y, z_1, t)\Delta s$, а через другую грань в направлении той же оси z перенесено количество теплоты $i_z(x, y, z_1 + \Delta z, t)\Delta s$. Разность этих двух количеств, считая Δz малой величиной, представим как

$$i_z(x, y, z_1, t)\Delta s - i_z(x, y, z_1 + \Delta z, t)\Delta s = -\frac{\partial i_z(x, y, z, t)}{\partial z}\Delta V, \qquad (29.3)$$

где учтено, что $\Delta z \Delta s = \Delta V$. Аналогичные (29.3) равенства имеют место и для двух других пар параллельных граней. Количество теплоты ΔQ, полученное выделенным элементом за единицу времени тогда, очевидно, равно

$$\Delta Q = -\left(\frac{\partial i_x(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial i_y(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial i_z(x, y, z, t)}{\partial z}\right)\Delta V. \qquad (29.4)$$

Обозначим через ΔC теплоемкость выделенного элемента. В зависимости от условий, в которых происходит перенос тепла, это может быть теплоемкость при постоянном объеме, либо, что бывает чаще, теплоемкость при постоянном давлении. Выразим теплоемкость ΔC через плотность ρ вещества тела и его удельную теплоемкость c (при постоянном объеме или давлении). Запишем

$$\Delta C = \rho c \Delta V. \qquad (29.5)$$

Разделим правую и левую части соотношения (29.4) на теплоемкость ΔC и учтем, что отношение $\Delta Q / \Delta C$ равно изменению температуры выделенного элемента за единицу времени или, что то же самое, скорости изменения температуры $\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t}$. В результате придем к равенству

$$\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c}\left(\frac{\partial i_x(x,y,z,t)}{\partial x} + \frac{\partial i_y(x,y,z,t)}{\partial y} + \frac{\partial i_z(x,y,z,t)}{\partial z}\right). \qquad (29.6)$$

Предполагая, что тело однородно и коэффициент теплопроводности κ в соотношениях (29.1) не зависит от пространственных координат, придем от (29.6) к уравнению

$$\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = \chi\left(\frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial z^2}\right), \qquad (29.7)$$

аналогичному уравнению (26.6). Коэффициент χ в (29.7), равный

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho c}, \qquad (29.8)$$

называется **коэффициентом температуропроводности**. Как ясно из (29.2) или (29.7) размерность этого коэффициента

$$[\chi] = м^2 \cdot c^{-1} \qquad (29.9)$$

совпадает с размерностью коэффициента диффузии D. Само же уравнение (29.7) получило название уравнения теплопроводности, хотя более правильно было бы называть его уравнением температуропроводности. С использованием символа Δ для оператора Лапласа в правой части уравнения (29.7) это уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = \chi \Delta T(x,y,z,t). \qquad (29.10)$$

По своей структуре уравнение теплопроводности аналогично уравнению диффузии, поэтому оба уравнения решаются одними и теми же методами математической физики. Совпадение вида уравнений, описывающих эволюцию поля концентрации примеси в процессе диффузии и поля температуры тела в процессе теплопроводности, позволяет, в частности, утверждать, что пространственный масштаб L, характеризующий линейный размер области, в которой за время t теплопроводность сглаживает распределение температуры, и само это время связаны соотношениями, получающимися из (26.8), (26.9) заменой коэффициента диффузии D на коэффициент температуропроводности χ.

Приведем в качестве примера значения коэффициента теплопроводности нескольких жидкостей и твердых веществ при комнатной температуре.

Вещество	κ, $Дж \cdot см^{-1} \cdot с^{-1} \cdot град^{-1}$.	Вещество	κ, $Дж \cdot см^{-1} \cdot с^{-1} \cdot град^{-1}$.
Вода	$6{,}0 \cdot 10^{-3}$	Железо	0,75
Стекло	$4 \div 8 \cdot 10^{-3}$	Медь	3,8
Свинец	0,35	Серебро	4,2

Обращает на себя внимание большая теплопроводность металлов. В металлах, в отличие от других веществ, тепло переносится не столько при тепловом движении атомов, сколько благодаря тепловому движению свободных электронов.