§23. Условие нормировки. Различные виды распределений Максвелла.

Поскольку квадрат модуля импульса p^2 равен сумме квадратов декартовых компонент импульса

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2, \qquad (23.1)$$

то распределение (22.20) представляет собой произведение трех статистически независимых одинаковых по виду распределений по каждой из компонент импульса

$$f(\vec{p}) = f_1(p_x) f_1(p_y) f_1(p_z). \qquad (23.2)$$

Запишем такое распределение для компоненты p_x:

$$f_1(p_x) = \frac{1}{(2\pi m k_B T)^{1/2}} e^{-\frac{p_x^2}{2mk_BT}}. \qquad (23.3)$$

Обратим внимание на отличие степени множителя перед экспонентой в (23.3) по сравнению с (22.20). Представление функции $f(\vec{p})$ в виде произведения трех множителей, каждый из которых зависит только от величины одной компоненты импульса, говорит о том, что вероятность иметь значение одной компоненты импульса в каком-либо интервале не зависит от значений других компонент импульса молекулы.

Как уже говорилось, каждое распределение вероятности должно удовлетворять условию нормировки. Это условие в случае распределения (22.20) имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z f(\vec{p}) = 1. \qquad (23.4)$$

По смыслу вероятности dw из предыдущей лекции интеграл в левой части (23.4) есть вероятность того, что импульс молекулы имеет какое-нибудь значение, т.е. вероятность достоверного события, равная единице. Не стоит придавать значение факту расширения пределов интегрирования по компонентам импульса до $-\infty$ и $+\infty$, поскольку основной вклад в интеграл (в интегральную сумму) дает конечная область значений компонент импульса. Расширение же пределов за физически разумные значения, практически не меняя величины интеграла, существенно упрощает процедуру его вычисления. Тройной интеграл в (23.4) ввиду (23.2), (23.3) представляет собой произведение трех одинаковых множителей вида

$$\frac{1}{(2\pi m k_B T)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{p_x^2}{2mk_B T}} dp_x \,. \tag{23.5}$$

Интеграл в (23.5) есть интеграл Пуассона, о котором известно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} . \tag{23.6}$$

Полагая в (23.5) $\alpha = 1/2mk_B T$, согласно (23.6), получим

$$\frac{1}{(2\pi m k_B T)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{p_x^2}{2mk_B T}} dp_x = 1 \,. \tag{23.7}$$

Таким образом, условие нормировки (23.4) для распределения Максвелла выполняется.

От распределения Максвелла молекул по импульсам $f(\vec{p})$ легко перейти к распределению Максвелла молекул по скоростям $g(\vec{v})$. По аналогии с (22.3), (22.4) функцией распределения молекул по скоростям является такая функция $g(\vec{v})$, что величина

$$g(\vec{v})d^3v = g(\vec{v})dv_x dv_y dv_z = dw \tag{23.8}$$

есть вероятность того, что скорость молекулы будет иметь значения соответствующих компонент в интервалах

$$[v_x, v_x + dv_x], \; [v_y, v_y + dv_y], \; [v_z, v_z + dv_z]. \tag{23.9}$$

Поскольку между импульсом $\vec{p}$ и скоростью $\vec{v}$ есть взаимно однозначная связь: $\vec{p} = m\vec{v}$, то для интервалов изменения компонент скорости (23.9), соответствующих интервалам изменения компонент импульса (22.4), должно выполняться равенство

$$f(\vec{p})dp_x dp_y dp_z = g(\vec{v})dv_x dv_y dv_z. \qquad (23.10)$$

Полагая в (23.10)

$$dp_x = mdv_x, \quad dp_y = mdv_y, \quad dp_z = mdv_z, \qquad (23.11)$$

представляя аргумент функции $f(\vec{p})$ в (22.20) как $m\vec{v}$ из (23.10), для распределения Максвелла молекул по скоростям $g(\vec{v})$ получим

$$g(\vec{v}) = m^3 f(m\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}. \qquad (23.12)$$

Из распределения Максвелла молекул по скорости $\vec{v}$ (по компонентам вектора скорости) следует вполне определенное распределение молекул $\varphi(v)$ по величине (по модулю) скорости. Это распределение также называется распределением Максвелла, но с добавкой: – молекул по величине скорости. Функция $\varphi(v)$ такова, что величина

$$dw = \varphi(v)dv \qquad (23.13)$$

есть вероятность, того, что молекула имеет значение скорости из интервала

$$[v, v + dv]. \qquad (23.14)$$

Для определения вида функции $\varphi(v)$ воспользуемся трехмерным пространством скоростей молекулы, точки которого имеют своими координатами компоненты вектора скорости молекулы v_x, v_y, v_z. Интересующим нас значениями величины скорости из интервала (23.14) отвечают все точки пространства скоростей молекулы, лежащие **в сферическом слое** с центром в начале координат, с радиусом внутренней поверхности v и толщиной dv. Толщина слоя dv считается настолько малой, что можно пренебречь изменением распределения Максвелла (23.12) при изменении скорости молекулы в интервале (23.14). Разобьем сферический слой на большое число M элементарных фрагментов. Пусть ΔV_i – объем i-того фрагмента. Очевидно, что его можно представить в виде произведения отвечающей ему части ΔS_i площади сферы с радиусом v на толщину слоя dv: $\Delta V_i = \Delta S_i dv$. Согласно (23.8) и распределению Максвелла в виде (23.12) вероятность dw_i обнаружить, что скорость молекулы такова, что изображающая ее точка лежат в объеме ΔV_i i-того фрагмента сферического слоя, равна

$$dw_i = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \Delta S_i dv\,. \qquad (23.15)$$

Интересующее нас событие, что скорость молекулы лежит в интервале (23.14), можно представить как сумму событий, каждое из которых заключается в обнаружении скорости молекулы в одном из M элементарных фрагментов, на которые разбит рассматриваемый сферический слой. Эти события, как говорят, несовместны и вероятность их суммы равна сумме вероятностей. Суммирование всех вероятностей (23.15) даст, таким образом, вероятность dw обнаружения скорости молекулы в интервале (23.14). Из (23.13) и (23.15) для $\varphi(v)$ тогда получим

$$\varphi(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} 4\pi v^2\,. \qquad (23.16)$$

Убедимся, что функция распределения $\varphi(v)$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^\infty \varphi(v) dv = 1\,. \qquad (23.17)$$

Подставим (23.17) функцию $\varphi(v)$ из (23.16) и заменим в интеграле переменную интегрирования v на переменную y согласно

$$y = \left(\frac{m}{2k_B T}\right)^{1/2} v, \quad dy = \left(\frac{m}{2k_B T}\right)^{1/2} dv\,. \qquad (23.18)$$

Получим

$$\int_0^\infty \varphi(v) dv = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \left(\frac{2k_B T}{m}\right)^{3/2} 4\pi \int_0^\infty y^2 e^{-y^2} dy\,. \qquad (23.19)$$

Интеграл $\int_0^\infty y^2 e^{-y^2} dy$ можно вычислить, сведя его к интегралу (23.6):

$$\int_{0}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = \frac{1}{2}(-1)\left(\frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx\right)\Bigg|_{\alpha=1} = \frac{\pi^{1/2}}{4}. \qquad (23.20)$$

Из (23.19), (23.20) видим, что условие (23.17) действительно выполняется.