Большой канонический ансамбль. Квантовые газы.

Семинары второго семестра

В тексте возможны опечатки, в т. ч. в формулах!!!

Разминка) Рассмотрим струну фортепьяно массы M с натяжением F, концы которой закреплены на расстоянии L друг от друга. Ось OX направлена вдоль струны. Для предположим, что отклонение струны от положения равновесия происходит только пер оси OX - вдоль оси OY, $y(0) = y(L)$ так как концы закреплены. Если задано $y(x,t)$, энергия струны имеет вид

$$E[y(x,t)] = \frac{1}{2}\int_0^L dx\left(\frac{M}{L}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)$$

Запишем $y(x,t)$ в виде Фурье-ряда:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{N} A_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

а) Покажите, что энергия может быть записана в виде

$$E[y(x,t)] = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{M}{4}\dot{A}_n^2 + \frac{n^2\pi^2 F}{4L}A_n^2\right)$$

Будем рассматривать величины A_n и $\dot{A}_n$ как набор обобщенных координат задающих положение и скорость струны. Тогда

б) Вычислите среднюю энергию и, соответственно, теплоемкость натянутой струны.

в) Найдите средние величины A_n, A_n^2 и $A_nA_{n'}$ при $n \neq n'$.

г) Запишите среднее $< y(x,t)^2 >$ в виде суммы по n (также, как это сделано для $E[y(x,t)]$). Из полученного выражения определите среднее от квадрата отклонения точки посередине струны (при $x = L/2$). Воспользуйтесь вспомогательной формулой

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\rho_{BKA} = \frac{1}{\Theta} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \exp\left(\frac{\mu N - E_N}{kT}\right)$$

Сосчитаем статсумму идеального газа в БКА.

$$\Omega = -kT \ln \Theta = -kTe^{\mu/kT} \sqrt{2\pi mkT}^3$$

$$< N >= -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}$$

$$< U >= -\frac{\partial \ln \Theta}{\partial \beta}$$

См. методичку про квантовые газы

Задачи про БКА

I) Считая вселенную полостью радиуса $R = 10^{26}$ метра с температурой 3 K оцените число фотонов во вселенной и энергию, соответствующую этим фотонам.

II) Вселенная полна черного излучения при температуре 2.73 K. Предположим, радиус вселенной меняется линейно $R = Ht$, H - постоянная Хаббла, t - возраст вселенной. Предположим, полная энергия излучения во вселенной постоянна. Вычислите, как энтропия излучения меняется со временем.

III) Для спиновых волн дисперсионное соотношение имеет вид $\omega = \alpha k^2$. Найти, как в трехмерных системах внутренняя энергия зависит от температуры?

IV) Элементарные возбуждения в сверхтекучем жидком гелии можно рассматривать как квазичастицы со сложным дисперсионным сотношением. Для волнового вектора меньше, чем $0.8 * 10^{10}$ метра$^{-1}$ дисперсионное соотношение практически линейное

$$\epsilon(p) = \hbar sp$$

Соответствующие квазичастицы называются фононы.

Для волновых векторов порядка $2 * 10^{10}$ метра$^{-1}$ дисперсионное соотношение имеет вид

$$\epsilon(p) = \Delta + \frac{\hbar^2 (p - p_0)^2}{2\mu}$$

т. е. зависимости типа параболической ямы дно которой соответствует основному состоянию квазичастиц, называющихся ротонами. Ротонная энергия Δ соответствует 8.65 K, величина $p_0 \simeq 2 * 10^{10}$ метра$^{-1}$ при нулевом давлении.

Свободная энергия газа возбуждений в гелии имеет фононную (продольный звук) и ротонную составляющие. Найдите эти составляющие.

V) Стивен Хокинг (1974, 1976) вычислил энтропию невращающейся черной дыры и получил выражение

$$S = kc^3 A/(4G\hbar)$$

где A - площадь черной дыры $A = 4\pi R_s^2$ ($R_s = 2GM/c^2$ - сфера Шварцшильда, M - масса звезды из которой образовалась черная дыра, G - гравитационная постоянная).

а) Найдите температуру черной дыры.

Предположим, черная дыра излучает по закону Стефана-Больцмана.

б) Напишите уравнение описывающее динамику массы черной дыры. Решите его.

в) Дана черная дыра массой $2 * 10^{11}$ кг. Найдите время за которое она испарится согласно решенному в пункте б) уравнению. Сравните ответ с возрастом вселенной $7 * 10^{17}$ сек.

Примеры Ферми - систем

Разбавленный раствор ^{3}He в сверхпроводящем ^{4}He.

^{4}He выступает как инертный фон для слабовзаимодействующих фермионов ^{3}He. Кроме того, обычная масса атома ^{3}He заменяется на эффективную, зависящую от давления, при нулевом давлении m_* в 2.26 раз больше обычной массы атома. Дисперсионное соотношение

$$\epsilon(p) = \epsilon_0 + \frac{\hbar^2 p^2}{2m_*}\left(1 - \frac{p^2}{p_0^2}\right)$$

Можно менять концентрацию ^{3}He в ^{4}He и мерить теплоемкость и осмотическое давление.

Электроны в металле $n \sim 10^{28}$ м$^{-3}$ - концентрация электронов. Показать, что это вырожденная нерелятивистская ферми-система. Масса электрона известна.

Электроны в звездах Типичная масса звезды $M = 3 * 10^{30}$ кг, радиус $R = 3 * 10^7$ м, температура $T = 10^7$ K. Предполагаем, что звезда состоит из диссоциированного водорода. Показать. что это вырожденная *релятивистская* ферми-система.

Электроны в белых карликах

Белый карлик образуется когда водород в звезде выгорает в гелий и под действием гравитации гелий сжимается. При этом атомы гелия столь локаализованы, что по принципу неопределенности их скорость очень высока. При таких кинетических энергиях электроны уже не удерживаются атомами. Поэтому белый карлик состоит в основном из альфа - частиц и обобществленных электронов.

Обозначим массу белого карлика M, а радиус R. Предположим, электроны нерелятивистские.

а) Рассмотреть условие стабильности звезды под действием гравитационного сжатия (характерное давление GM^2/R^4) и давлением электронного ферми-газа. Найти зависимость радиуса звезды от ее массы. Убедиться что с ростом массы радиус убывает.

Будем рассматривать все более тяжелые белые карлики. Так как их радиус будет все меньше и меньше, наступит момент, когда электронная плотность вырастет настолько, что электроны станут релятивистскими с дисперсией $\epsilon(p) = \hbar c p$.

б) Рассмотреть условие стабильности звезды под действием гравитационного сжатия (характерное давление GM^2/R^4) и давлением электронного релятивистского ферми-газа. При каких массах такое равовесие возможно?

Задачка на формулу Дебая

Оцените для калия температуру, при которой вклад в теплоемкость за счет кристаллической решетки (температура Дебая для калия 89.4 K) сравняется с электронным вкладом. Энергия Ферми для калия 2 эВ.

Вычислить среднюю энергию в расчете на одну частицу в идеальном двумерном нерелятивистском Ферми-газе при $T = 0$. Что является аналогом давления в таких системах?

Вычислите адиабатический модуль всестороннего сжатия

$$B = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S$$

при $T = 0$. Вычислите модули, соответствующие электронной плотности калия цезия и меди (см. таблицу)

Металл	Плотность, м$^{-3}$	E_F эВ	B, Паскаль
Калий	$1.3 * 10^{28}$	0.9	$2.81 * 10^9$
Цезий	$0.9 * 10^{28}$	0.7	$1.43 * 10^9$
Медь	$8.5 * 10^{28}$	7	$134.3 * 10^9$

Почему вычисленные B отличаются от экспериментальных значений (см. последнюю колонку таблицы).

На ранних этапах существования вселенной можно с хорошей точностью пренебречь кинетической энергией частиц и химпотенциалом по сравнению с kT. Найдите плотность числа невзаимодействующих фермионов а также плотность энергии.

Рассмотрим идеальный бозе газ из N атомов массы m и нулевым спином. Движение частиц ограничено двумерной поверхностью площадью A.

а) Напишите выражение для $\mu(N, A, T)$.

б) Покажите, что интеграл для μ расходится при $\mu \to 0-$. Всегда ли существует отрицательное μ, удовлетворяющее этому уравнению?

в) Есть ли Бозе - конденсация в двухмерном случае?

Литература

1. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. "Статистическая физика".

2. Куни Ф.М. "Статистическая физика".

3. Васильев А.Н. "Функциональные методы в квантовой теории поля и статистической физике".

4. Рыжик И.М., Градштейн И.С. "Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений".

5. Roger Bowley, Mariana Sanchez "Introductory Statistical Mechanics"