# Курсовая работа.

## УРАВНЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ БОЗЕ-ЖИДКОСТИ.

Выполнил:
Студент 3-го курса кафедры статистической физики
Жаворонков Ю.А.

Научный руководитель:
Налимов М.Ю.

# Цели работы.

1). Ознакомление с уравнениями гидродинамики.
2). Описание способов получения уравнений гидродинамики.
3). Знакомство с моделью F стохастической динамики.
4). Модификация имеющейся модели на случай продольного поля скорости.

# Основные уравнения гидродинамики.

Гидродинамика представляет собой раздел физики, занимающийся изучением движения жидкости, и, вообще говоря, любой сплошной среды. Математическое описание состояния движущейся жидкости осуществляется с помощью функций, определяющих распределение скорости жидкости $v = v(x, y, z, t)$ и каких-либо двух её термодинамических величин.

В гидродинамике можно выделить два типа уравнений:

$$\partial_t N + \mathrm{div}(Nv) = 0,$$

или

$$\frac{\partial M}{\partial t} + v \nabla M = 0,$$

Уравнение непрерывности.

Получим уравнение, представляющее собой закон сохранения вещества.

$\int \rho dV$-масса

$\oint \rho\vec{v}d\vec{S}$ - изменение массы.

С другой стороны:

$$-\partial_t \int \rho dV. \tag{1}$$

Получаем:

$$\int (\partial_t \rho + \mathrm{div} \rho\vec{v})dV = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0. \tag{3}$$

Уравнение Эйлера.

$$-\oint p d\vec{S} \tag{4}$$

$$-\oint p d\vec{S} = -\text{grad} p. \tag{5}$$

На элемент объёма действует сила $-\text{grad}p$.

Теперь можно записать:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad} p. \tag{6}$$

Таким образом:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}. \tag{7}$$

Из этого :

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}. \tag{8}$$

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g} \tag{9}$$

Уравнение адиабатичности.
Свойство адиабатичности можно представить соотношением:

$$\frac{ds}{dt} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v}\text{grad}s = 0. \tag{11}$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \text{div}(\rho s\vec{v}) = 0, \tag{12}$$

Уравнение Навье-Стокса:

$$\rho[\partial_t\vec{v} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}] = -\text{grad}p + \eta\Delta\vec{v} + (\xi + \frac{\eta}{3})\text{graddiv}(\vec{v}), \tag{13}$$

$$\partial_t\vec{v}(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\text{grad}p + \frac{1}{\rho}\eta\Delta\vec{v}. \tag{14}$$

# Лагранжево представление уравнений гидродинамики.

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x), \qquad (15)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_m)$.

Подход Клебша.
$\vec{v} = k\nabla s$, $\vec{\Omega} = \mathrm{rot}\vec{v} = [\nabla k, \nabla s]$.
Можно рассмотреть:

$$\partial_t \vec{\Omega} - \mathrm{rot}[\vec{v} \times \Omega] =$$

$$\nabla((\partial_t + \vec{v} \cdot \nabla)k) \times \nabla s. \tag{16}$$

В случае, когда $\partial_t \Omega = rot[\vec{v} \times \vec{\Omega}]$, завихренность называют вмороженной. Вмороженность завихренности реализуется, когда:
1)$\nabla T = 0$, или
2)$\nabla s = 0$, или
3)$T = T(s)$.

Если в уравнении (16) завихренность вморожена, то его можно представить в виде $(\partial_t + \vec{v}\nabla)k = f(s)$.

$$S = \int \mathcal{L} dt = \int L dt d^3 r \tag{17}$$

В нашем случае плотность лагранжиана выглядит так:

$$L = \frac{\rho \vec{v}^2}{2} - \rho \varepsilon. \tag{18}$$

Её вариация

$$\delta L = \delta\rho \left(\frac{\vec{v}^2}{2} - \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho}\right) + \rho\vec{v} \cdot \delta\vec{v} - \rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial s}\delta s \tag{19}$$

Плотность лагранжиана с учетом связей:

$$L = \frac{\rho\vec{v}^2}{2} - \rho\varepsilon - \rho k(\partial_t + \vec{v}\nabla)s - \lambda(\partial_t\rho + \mathsf{div}(\rho\vec{v})). \tag{20}$$

Вариация

$$\delta L = \delta\rho(\frac{\vec{v}^2}{2} - h - k(\partial_t + \vec{v}\nabla)s + (\partial_t + \vec{v}\nabla)\lambda) - \partial_t(\lambda\delta\rho) - \mathsf{div}(\lambda\vec{v}\delta\rho)$$

$$-\rho\delta k(\partial_t + \vec{v}\nabla)s + \delta\lambda(\partial_t\rho + div(\rho\vec{v}))$$

$$+\delta s(\partial_t(\rho k)) + \mathsf{div}(\rho k\vec{v}) - \rho T) - \partial_t(\rho k\delta s) - \mathsf{div}(\rho k\vec{v}\delta s) \tag{21}$$

$$+\delta v(\rho\vec{v} - \rho k\nabla s + \rho\nabla\lambda) - \mathsf{div}(\lambda\rho\delta\vec{v}).$$

Учитывая равенство нулю отынтегрированных производных по времени и полных дивергенций, а также независимость вариаций, в качестве уравнений Лагранжа получаем:

$$(\partial_t + \vec{v}\nabla)s = 0, \tag{22}$$

$$\partial_t \rho + div(\rho \vec{v}) = 0, \tag{23}$$

$$v = k\nabla s - \nabla\lambda, \tag{24}$$

$$(\partial_t + \vec{v}\nabla)k = T, \tag{25}$$

$$(\partial_t + \vec{v}\nabla)\lambda = h - \frac{\vec{v}^2}{2}. \tag{26}$$

$$\partial_t \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - (\vec{v}\nabla)\vec{v}. \tag{27}$$

Полученное выражение и есть уравнение Эйлера.

# Модель F стохастической динамики. Физическая интерпретация модели.

В стохастической динамике речь идет о случайных величинах и их статистическом распределении. Стохастичность порождается внутренними причинами - хаотическими соударениями из-за теплового броуновского движения, спонтанным возникновением и взаимодействием вихрей в турбулентном потоке и т.д.

Уравнение Фоккера-Планка:

$$\partial_t P = -\frac{\delta}{\delta\varphi}(V(\varphi)P(\varphi,t) + \frac{\delta}{\delta\varphi}(\frac{D}{2}\frac{\delta}{\delta\varphi}P(\varphi,t))), \tag{28}$$

Стандартная задача стохастической динамики:

$$\partial_t\varphi(x) = U(x;\varphi) + \eta(x), \tag{29}$$

$$< \widehat{\eta}(x)\widehat{\eta}(x') >= D(x,x'). \tag{30}$$

Уравнение Ланжевена.

$$\partial_t \varphi(x) = \alpha [\frac{\delta S^{st}(\varphi)}{\delta \varphi(\vec{x})}]|_{\varphi(\vec{x}) \to \varphi(x)} + \eta(x), \tag{31}$$

$$< \widehat{\eta}(x) \widehat{\eta}(x') >= 2\alpha\delta(x - x'). \tag{32}$$

Поскольку поле $\varphi$ является многокомпонентным $\varphi \equiv (\varphi_1, ...)$, уравнение можно переписать в виде:

$$\partial_t \varphi_i = \alpha_{ij} \frac{\delta S^{st}}{\delta \varphi_j} + \eta_i \tag{33}$$

$$\partial_t \varphi_i = (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \frac{\delta S^{st}}{\delta \varphi_j} + \eta_i \tag{34}$$

$$\beta_{ij} = -\beta^T_{ji}, \tag{35}$$

$$\frac{\delta \beta_{ij}(\vec{x}; \varphi)}{\delta \varphi_i(\vec{x})} = 0 \tag{36}$$

Модель F

$$S^{st} = -\partial\psi^{+}\partial\psi - \frac{g_1}{6}(\psi^{+}\psi)^2 + g_2 m\psi^{+}\psi - \frac{1}{2}m^2 + mh \qquad (37)$$

Модель F в нашем случае используется для описания критической динамики перехода от нормальной к сверхтекучей жидкости в $He_4$.

# Модификация имеющейся модели на случай продольного поля скорости.

Поле скорости называется поперечным, если:

$$\partial_i v_i = 0 \tag{38}$$

Запишем новое уравнение:

$$S^{st} = -\partial\psi^+\partial\psi - \frac{g_1}{6}(\psi^+\psi)^2 + g_2 m\psi^+\psi - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}v^2 + mh, \tag{39}$$

Имеем выражение для $S^{st}$, пользуясь уравнением, можем получить систему динамических уравнений Ланжевена:

$$\partial_t\psi + \partial_i(v_i\psi) = \lambda(1+ib)[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi] \tag{40}$$

$$+i\lambda g_3\psi[g_2\psi^+\psi - m + h] + \eta_{\psi^+}$$

$$\partial_t \psi^+ + \partial_i(v_i\psi^+) = \lambda(1-ib)[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+] \tag{41}$$

$$-i\lambda g_3\psi^+[g_2\psi^+\psi - m + h] + \eta_\psi$$

$$\partial_t m + \partial_i(v_i(m+c^2)) = -\lambda u\partial^2[g_2\psi^+\psi - m + h] \tag{42}$$

$$+i\lambda g_3[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+] + \eta_m$$

$$\partial_t v = \nu\partial^2 v - \partial_i(v_i v) - \psi^+\partial[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi] \tag{43}$$

$$-\psi\partial[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+] - (m+c^2)\partial[g_2\psi^+\psi - m + h] + \eta_v$$

Спасибо за внимание!