Курсовая работа.

Проверка модификации борелевского суммирования.

Вайнзихер Олег

04.06.2015

Научный руководитель:

Л.Ц.Аджемян

Вступление.

В физических задачах решение часто представляется в виде степенного ряда, но не всегда известны все коэффициенты. Также удовлетворительным решением обычно можно считать сходящийся ряд. Некоторые же задачи приводят к рядам с нулевым радиусом сходимости, для этих задач также есть методы для аппроксимации функции. Используя несколько первых членов ряда и асимптотику высоких порядков, можно сделать качественное приближение ответа.

Метод Бореля

Пусть для ряда (1) известны первые n членов и АВП в виде (2).

$$A(g) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n g^n \qquad (1)$$

$$A_n = c(-a)^n n! n^{b_0}[1 + O(1/n)] \qquad (2)$$

Тогда мы можем приближенно просуммировать ряд по Борелю. Введем конформную переменную w

$$w(g) = \frac{\sqrt{1+ag}-1}{\sqrt{1+ag}+1}, \qquad \left(g = \frac{4w}{a(1-w)^2}\right) \qquad (3)$$

и представим функцию A(g) в виде

$$A(g) = \int_o^{\infty} dx\, e^{-x} x^b P(w(xg)) \qquad (4)$$

, где P(w) – полином, который берется степени равной количеству известных членов разложения оригинальной функции. Коэффициенты полинома подбираются так, чтобы разложение борелевского представления по g имело те же первые коэффициенты и такую же АВП, как и искомая функция. Эти коэффициенты будут иметь вид (5), а из равенства асимптотик будет следовать (6)

$$p_n = \sum_{m=1}^{n} (4/a)^m \frac{a_m \binom{n-m}{n+m-1}}{\Gamma(m+b+1)} \qquad (5)$$

$$b = b_0 + \frac{3}{2} \qquad (6)$$

Модификация

В методе, изложенном выше, $p_n = \sum_{m=1}^{n} (4/a)^m \frac{a_m \binom{n-m}{n+m-1}}{\Gamma(m+b+1)}$ никак не используется константа с асимптотики изначального разложения, модификация метода состоит в том, чтобы учесть эту константу. Для этого надо добавить еще один ненулевой коэффициент в полином, чтобы он удовлетворил равенству (7), следующему в свою очередь из равенства асимптотик изначального разложения и разложения по w.

$$p_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}[c\sqrt{\pi} + p_1 - 2p_2 + \ldots - (-1)^n a_n] \qquad (7)$$

Таким образом, учитывается вся информация известная нам. Данную модификацию предложил Дмитрий Казаков. Целью моей работы была проверка улучшения сходимости после введения этого нового члена.

Пример

Для выяснения целесообразности модификации мне было предложено рассмотреть функцию, известную заранее, и сравнить графики самой функции, ее же просуммированной по Борелю, и просуммированной с модификацией.

Функция была интегралом с параметром (8)

$$f(g) = \int_0^\infty e^{-x^2 - gx^4} dx \qquad (8)$$

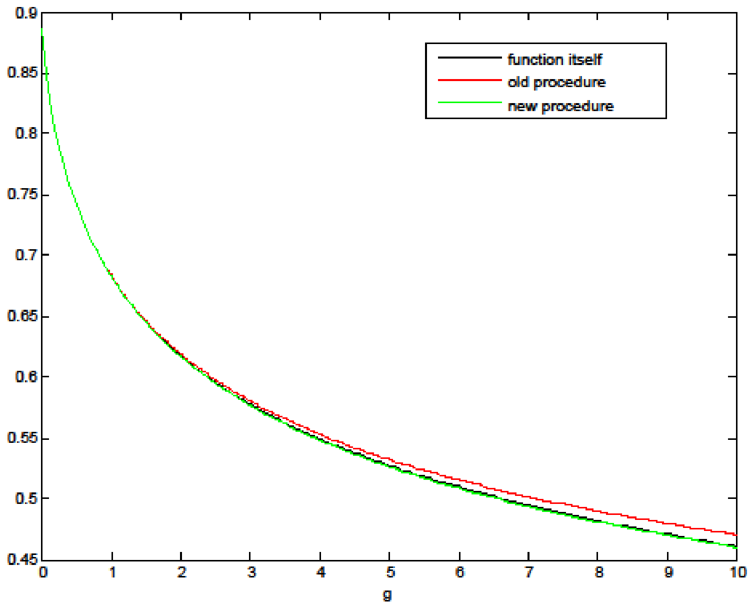
Ее коэффициенты при разложении в ряд около нуля имели явный вид (9) и асимптотику (10)

$$a_n = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}(4n-1)!}{n! 2^{4n} (2n-1)!} \qquad (9)$$

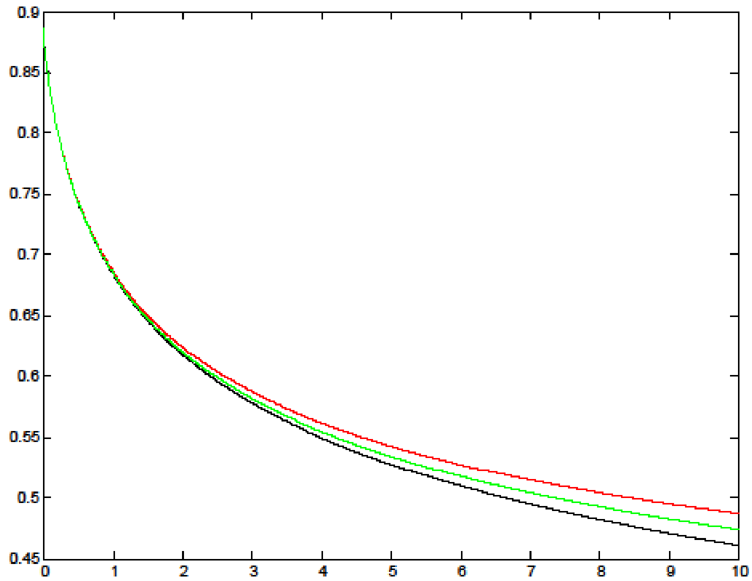
$$a_n \approx \frac{n! n^{-1} (-4)^n (1 + O(/n))}{2 * \sqrt{2\pi}} \qquad (10)$$

Далее я проделал все действия, изложенные выше, и проведя численное интегрирование получил графики оригинальной функции и двух приближений для разного количества известных членов оригинального разложения.

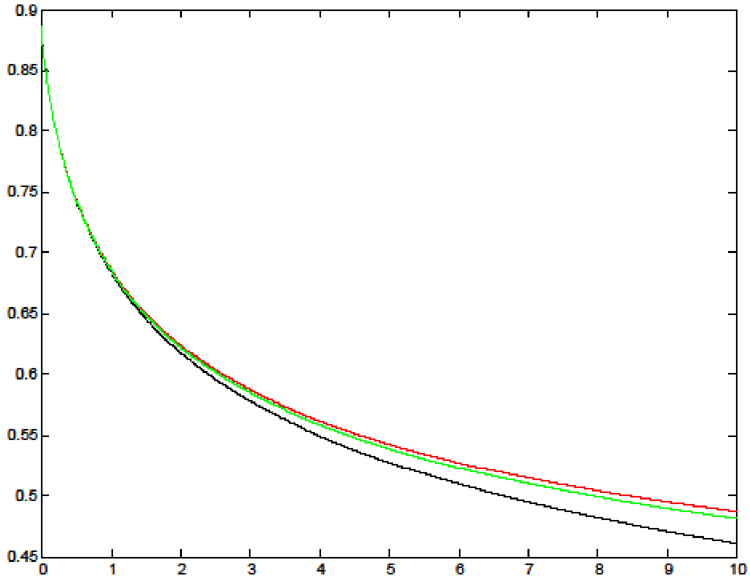
Графики для пяти известных коэффициентов изображены на этой странице. Можно заметить, что согласие приближений с самой функцией довольно хорошее, а новая процедура позволила сделать аппроксимацию на этом диапазоне практически идеальной, но на практике редко известно 5 членов разложения, так что такого близкого приближения достичь не удается.



Здесь изображены графики для 4 известных членов разложения. Черный по прежнему сама функция, красный - борелевская аппроксимация, зеленый - улучшенная версия. Можно видеть, что с ростом аргумента графики расходятся, но новая процедура по прежнему позволяет приблизиться еще ближе к оригинальной функции.



Ниже изображен график для трех известных членов разложения, можно увидеть что графики расходятся еще больше, чем раньше, а улучшение от новой процедуры стало менее значительным, что говорит о меньшей его применимости в случае малого количества информации о первых членах разложения.



Вывод

Борелевское суммирование-мощный инструмент для суммирования расходящихся рядов, работающий очень хорошо в окрестности точки разложения и теряющий свою точность при отходе от нее. Точность позволяет повысить модификация этого метода, однако это повышение становится менее значительным при уменьшении количества известных членов изначального разложения.