«Автомодельный режим образования зародыша новой фазы в пересыщенном растворе»

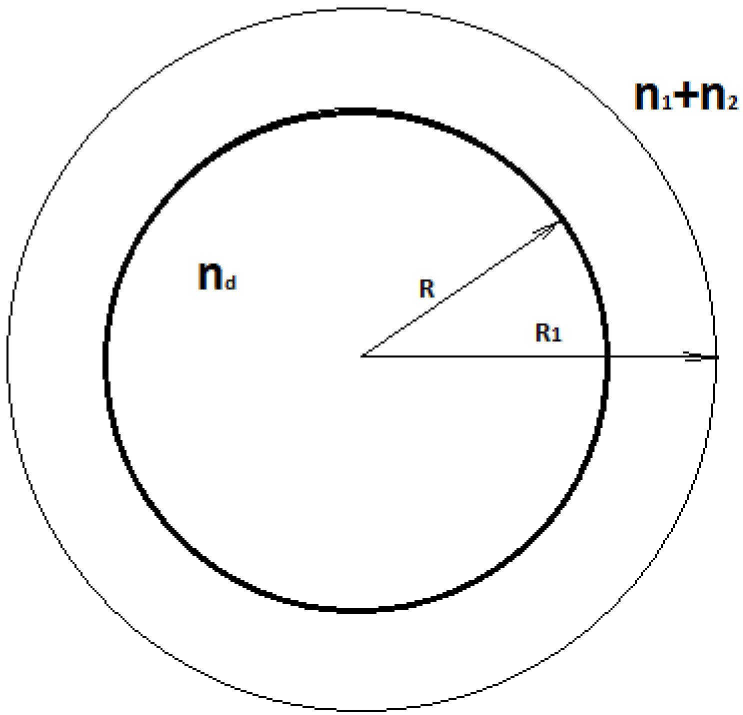
Выполнил
Булгаков Михаил

Научный руководитель:
д. ф. – м. н. А.Е. Кучма

Цели работы:

- Получить уравнение нестационарной диффузии вещества на растущую частицу с учетом движения границы и стефановского течения.
- Построить автомодельное решение этого уравнения.
- Рассмотреть характерные ситуации этой задачи в зависимости от параметров раствора.

$$n_1(r,t)+n_2(r,t)\equiv n(r,t)$$



Граничные условия:

$$n_1(R(t),t)=n_{1\infty},n_1(r\to\infty,t)=n_{10}$$

Условие идеальности раствора:

$$v_1n_1(r,t)+v_2n_2(r,t)=1$$

$$\dot{R}_1(t)=u(r=R_1(t),t)$$

$$\frac{4\pi}{3}n_dR^3(t)+4\pi\int\limits_{R(t)}^{R_1(t)}drr^2\left[n_1(r,t)+n_2(r,t)\right]=const$$

Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial n_1(r,t)}{\partial t} = -div\vec{j}_1(r,t)$$

Уравнение баланса вещества на границе:

$$n_d\dot{R}(t) + \left(j_1\left(R(t),t\right) - n_{1\infty}\dot{R}(t)\right) = 0$$

Поток частиц в случае непостоянной суммарной концентрации раствора :

$$j_1(r,t) = -Dn(r,t)\frac{\partial}{\partial r}\frac{n_1(r,t)}{n(r,t)} + n_1(r,t)u(r,t)$$

Итоговое выражение для потока частиц:

$$j_1(r,t) = -D\frac{\partial n_1(r,t)}{\partial r} + (1 - n_d v_1)\frac{R^2(t)\dot{R}(t)}{r^2}n_1(r,t)$$

Уравнение нестационарной диффузии вещества на растущую частицу:

$$\frac{\partial n_1(r,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n_1(r,t)}{\partial r^2} + \left(\frac{2D}{r} - \frac{(1-n_d v_1)R^2(t)\dot{R}(t)}{r^2}\right)\frac{\partial n_1(r,t)}{\partial r}$$

Переход к автомодельной переменной: $\rho = \dfrac{r}{R(t)}$, $n_1(r,t) \equiv n_1(\rho(t))$

$$\frac{d^2 n_1}{d\rho^2} + \left[\frac{2}{\rho} + \frac{R\dot{R}}{D}\left(\rho - \frac{\gamma}{\rho^2}\right)\right]\frac{dn_1}{d\rho} = 0 \ , \quad \gamma \equiv 1 - n_d \nu_1$$

Граничные условия: $n_1(\rho)\big|_{\rho\to\infty} = n_{10}$

$$n_1(\rho)\big|_{\rho=1} = n_{1\infty}$$

Автомодельное решение возможно при:

$$R(t)\dot{R}(t) = const$$

Переходя к автомодельной переменной в уравнении баланса вещества на границе находим:

$$\frac{R\dot{R}}{D} = \frac{\left.\dfrac{dn_1(\rho)}{d\rho}\right|_{\rho=1}}{n_d\left(1 - n_{1\infty}\nu_1\right)}$$

<u>Возможен автомодельный режим роста!</u>

Решение уравнения на концентрацию с учетом граничных условий:

$$n_1(\rho) = n_\infty + (n_{10} - n_{1\infty}) \frac{\int\limits_1^\rho \frac{dz}{z^2} e^{-\frac{bz^2}{2} - \frac{\gamma b}{z}}}{\int\limits_1^\infty \frac{dz}{z^2} e^{-\frac{bz^2}{2} - \frac{\gamma b}{z}}} \quad , \qquad b \equiv \frac{R\dot{R}}{D}$$

Тогда выражение для параметра b:

$$b = \frac{a e^{-b(\gamma + \frac{1}{2})}}{\left(1 - n_{1\infty}\nu_1\right) \int\limits_1^\infty \frac{dz}{z^2} e^{-\frac{bz^2}{2} - \frac{\gamma b}{z}}} \quad , \qquad a \equiv \frac{n_{10} - n_{1\infty}}{n_d}$$

<u>Эти выражения определяют искомое решение задачи!</u>

Случай роста капли в парогазовой среде (конденсация пара при атмосферных условиях):

$$v_1 = v_2 = \frac{k_B T}{P} \equiv \frac{1}{n}$$

$$n \sim 10^{19} см^{-3}, n_{10} \sim 10^{17} см^{-3}, n_d \sim 10^{22} см^{-3}$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{n_d}{n}\right) \sim -10^3$$

$$a = \frac{n_{10} - n_{1\infty}}{n_d} \sim 10^{-5}$$

$$a << |\gamma a| << 1 \ , \quad b << |\gamma b| << 1$$

$$b = a\left(1 + \frac{n_{10} + n_{1\infty}}{2n} + \sqrt{\frac{\pi(n_{10} - n_{1\infty})}{2n_d}}\right)$$

Случай роста пузырька в сильно пересыщенном растворе жидкости:

$$v_1 \sim 10^{-22} см^3 \qquad n_{10} \sim 10^{20} см^{-3}$$

$$n_d \sim 10^{19} см^{-3} \qquad n_{1\infty} << n_{10}$$

$$a \sim 10 \qquad b >> 1$$

$$b = \frac{6a^2}{\pi}$$

***Случай роста капли в расслаивающемся жидком растворе*:**

$$n_d = \frac{1}{v_1} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 0$$

Точное уравнение на b:

$$\frac{a}{b} = (1 - n_{1\infty} v_1)\left[1 - e^{\frac{b}{2}}\sqrt{\frac{\pi b}{2}}\left(1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)\right)\right] \quad , \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-s^2} ds = \Phi(x)$$

Решение в области параметров: $a << 1, v_1 n_{1\infty} << 1$

$$b = a\left(1 + n_{1\infty} v_1 + \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{n_{10} - n_{1\infty}}{n_d}}\right)$$

Спасибо за внимание!