САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Захаров Анатолий Иванович

КОЭФФИЦИЕНТ ЗАТУХАНИЯ ЗВУКА В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ

Курсовая работа

Научный руководитель:
Д, ф-м. н.,
профессор
Л.Ц. Аджемян

Санкт-Петербург
2013

Оглавление

Введение

Колебательное движение с малыми амплитудами в жидкости (газе) представляет собой звуковые волны. Если среда, в которой распространяются звуковые волны, обладает вязкостью и теплопроводностью, или же в ней происходят процессы диффузии, то при распространении такой волны происходит ее поглощение, т.е. при удалении от источника звука амплитуда такой волны гаснет. Поглощение звука в различных средах различно. Величину поглощения можно охарактеризовать коэффициентом поглощения, который показывает, как изменяется амплитуда звуковых волн в среде.

В настоящей работе рассматривается неограниченная в пространстве среда(жидкость или газ), в которой скорость движения частиц и изменения всех термодинамических величин относительно их равновесных значений является первым порядком малости. Для описания динамики такой системы записываются линеаризованные уравнения гидродинамики. Все коэффициенты в этих уравнениях за счет малости отклонений термодинамических величин можно считать постоянными.

Целью настоящей работы является поиск коэффициента затухания звука в однокомпонентной среде и двухкомпонентной смеси.

Система уравнений линейной гидродинамики

Система уравнений линейной гидродинамики имеет вид

$$\frac{\partial\rho^{(s)}}{\partial t} = -\rho_0^{(s)}\mathrm{div}(\mathbf{v}) - \lambda_{se}\Delta\left(\frac{1}{T}\right) + \sum_n \lambda_{sn}\Delta\left(\frac{\tilde{\mu}^{(n)}}{T}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\rho_0\mathrm{div}(\mathbf{v}), \tag{2}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -(e_0 + P_0)\mathrm{div}(\mathbf{v}) - \lambda_{ee}\Delta\left(\frac{1}{T}\right) + \sum_n \lambda_{en}\Delta\left(\frac{\tilde{\mu}^{(n)}}{T}\right), \tag{3}$$

$$\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\bigtriangledown P + \eta\Delta\mathbf{v} + (\zeta + \eta/3)\bigtriangledown div(\mathbf{v}), \tag{4}$$

где

$$\lambda_{se} = \left\langle I^{(s)}I^{(e)}\right\rangle,\ \ \lambda_{sn} = \left\langle I^{(s)}I^{(n)}\right\rangle,\ \ \lambda_{ee} = \left\langle I^{(e)}I^{(e)}\right\rangle,\ \ \lambda_{en} = \left\langle I^{(e)}I^{(n)}\right\rangle, \tag{5}$$

$$\sum_s \rho^{(s)} = \rho, \qquad \sum_s I^{(s)} = 0, \qquad \tilde{\mu}^{(n)} = \frac{\mu^{(n)}}{m^{(n)}}. \tag{6}$$

Уравнения (1)–(4) получены на основе законов сохранения $\partial_t a_i = -\sum\limits_j \partial_j J_j^{(i)}$ для набора a_i плотностей сохраняющихся величин. Первые слагаемы в правых частях (1)–(4) соответствуют выражениям для токов $J_j^{(i)}$ в приближении идеальной жидкости (пренебрежение эффектами диссипации). Для массовой плотности s-ой компоненты эти токи имеют простой вид $\rho^{(s)}v_j \simeq \rho_0^{(s)}v_j$, где замена плотности на ее равновесное значение $\rho_0^{(s)}$ связана с линеаризацией уравнения (считаются малыми отклонения термодинамических параметров от равновесных значений и скорость v_j). Ток энергии в приближении идеальной жидкости определяется выражением $(e_0 + P_0)v_j$. Статистические выражения для кинетических коэффициентов λ в подробной расшифровке

$$\lambda_{\alpha\beta} = \int\limits_0^\infty dt_1 \int d\mathbf{r}_1 \left\langle I^{(\alpha)}(t_1,\mathbf{r}_1)I^{(\beta)}(0,0)\right\rangle. \tag{7}$$

Для дальнейшего важно, что они показывают симметричность матрицы λ (соотношения Онсагера). Входящие в (7) диффузионные токи $I^{(s)}$ определяются разностью полного тока $J^{(s)}$ и его конвективной части (т.е. это ток в системе, движущейся со скоростью v). Аналогично определяется ток энергии $I^{(e)}$.

Слагаемые с оператором Лапласа в уравнениях (1), (3) устроены следующим образом. В них стоит сумма вкладов, в которых оператор Лапласа берется от параметра $\frac{1}{T}$, сопряженного энергии и параметров $-\frac{\tilde{\mu}^{(n)}}{T}$, сопряженных числам частиц n-го сорта. Каждый из этих вкладов умножается на взятый с минусом кинетических коэффициент λ, который определяется коррелятором тока величины, для которой написано рассматриваемое уравнение и током величины, сопряженной параметру.

В Фурье представлении уравнения (1)–(4) имеют вид (не меняя обозначений, но подразумевая, что все величины, зависящие от радиус-вектора $\mathbf{r}$, теперь зависят от вектора $\mathbf{k}$)

$$\frac{\partial \rho^{(s)}}{\partial t} = -\rho_0^{(s)} i(\mathbf{k},\mathbf{v}) + \lambda_{se} k^2 \frac{1}{T} - \sum_n \lambda_{sn} k^2 \frac{\mu^{(s)}}{T}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 i(\mathbf{k},\mathbf{v}), \tag{9}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -(e_0 + P_0) i(\mathbf{k},\mathbf{v}) + \lambda_{ee} k^2 \frac{1}{T} - \sum_n \lambda_{en} k^2 \frac{\mu^{(n)}}{T}, \tag{10}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{k}P - \eta k^2 \mathbf{v} - (\zeta + \eta/3)(\mathbf{k},\mathbf{v})\mathbf{k}, \tag{11}$$

Разложим скорость $\mathbf{v}$ на продольный вклад, направленный вдоль $\hat{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{k}/k$, и ортогональную состовляющую

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\parallel} + \mathbf{v}^{\perp}, \qquad \mathbf{v}^{\parallel} = \hat{\mathbf{k}}(\mathbf{v},\hat{\mathbf{k}}) = \hat{\mathbf{k}} v^{\parallel}$$

Из (11) и (9) получаем

$$\rho_0 \frac{\partial v^{\perp}_{1,2}}{\partial t} = -\eta k^2 v^{\perp}_{1,2} \tag{12}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v^{\parallel}}{\partial t} = -ikP - (\zeta + \frac{4}{3}\eta) k^2 v^{\parallel} \tag{13}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 i k v^{\parallel} \tag{14}$$

Введем концентрацию s-ой компоненты смеси $c^{(s)} = \dfrac{\rho^{(s)}}{\rho}$. Ясно, что $\sum\limits_s c^{(s)} = 1$. Из этого получаем (с линейной точностью)

$$\rho_0 \frac{\partial c^{(s)}}{\partial t} = \frac{\partial \rho^{(s)}}{\partial t} - c_0^{(s)} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\lambda_{se} \Delta \left(\frac{1}{T}\right) + \sum_n \lambda_{sn} \Delta \left(\frac{\mu^{(n)}}{T}\right) \tag{15}$$

В уравнении (3) удобно в качестве независимой переменной выбрать вместо плотности энергии e энтропию единицы массы s. С линейной точностью имеем

$$e = E/V, \;\; \tilde{s} = S/V, \;\; \tilde{\mu}^{(s)} = \mu^{(s)}/m^{(s)} \longrightarrow de = T_0 d\tilde{s} + \tilde{\mu}_0^{(n)} d\rho^{(n)}$$

Дифференцируя это выражение по времени и используя $e_0 = T_0 \tilde{s}_0 - P_0 + \sum\limits_n \tilde{\mu}_0^{(n)} \rho_0^{(n)}$, получаем

$$T_0 \frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} = -iT_0 \tilde{s}_0 k v^{\parallel} - \lambda_{ee} \Delta \left(\frac{1}{T}\right) + \sum_n \lambda_{en} \Delta \left(\frac{\tilde{\mu}^{(n)}}{T}\right) + \sum_n \tilde{\mu}_0^{(n)} \lambda_{ne} \Delta \left(\frac{1}{T}\right) - \sum_{s,n} \tilde{\mu}_0^{(s)} \lambda_{sn} \Delta \left(\frac{\tilde{\mu}^{(n)}}{T}\right)$$

Энтропия единицы массы равна $s = \frac{\tilde{s}}{\rho}$. Продифференцируем это выражение по времени:

$$T_0 \rho_0 \frac{\partial s}{\partial t} = -\lambda_{ee} \Delta \frac{1}{T} + \sum_n \lambda_{en} \Delta \left(\frac{\tilde{\mu}^{(n)}}{T}\right) + \sum_n \tilde{\mu}_0^{(n)} \lambda_{ne} \Delta \left(\frac{1}{T}\right) - \sum_{s,n} \tilde{\mu}_0^{(s)} \lambda_{sn} \Delta \left(\frac{\tilde{\mu}^{(n)}}{T}\right) \tag{16}$$

Однокомпонентная система

Однокомпонентная система описывается уравнениями

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \mathrm{div}(\mathbf{v}), \tag{17}$$

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial s}{\partial t} = -\lambda_{ee} \Delta \left(\frac{1}{T}\right), \tag{18}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = - \bigtriangledown P + \eta \Delta \mathbf{v} + (\zeta + \eta/3) \bigtriangledown div(\mathbf{v}). \tag{19}$$

В приближении линейной термодинамики

$$\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s P + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_P s, \tag{20}$$

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{T}\right)}{\partial P}\right)_s P + \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{T}\right)}{\partial s}\right)_P s, \tag{21}$$

Возьмем преобразование Фурье уравнения (18). Вместе с уравнениями (13), (14) имеем

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial s}{\partial t} = \lambda_{ee} k^2 \left(\left(\frac{\partial \left(\frac{1}{T}\right)}{\partial P}\right)_s P + \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{T}\right)}{\partial s}\right)_P s \right) \tag{22}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v^{\parallel}}{\partial t} = -ikP - (\zeta + \frac{4}{3}\eta) k^2 v^{\parallel} \tag{23}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s \frac{\partial P}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_P \frac{\partial s}{\partial t} = -i\rho_0 k v^{\parallel}, \tag{24}$$

Уравнения (22)–(24) представляют собой замкнутую систему пяти зацепляющихся уравнений. Путем линейного преобразования переменых эту систему можно диагонализовать, сведя к независимым уравнениям для пяти гидродинамических мод

$$\frac{\partial y^{(i)}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = \gamma^{(i)}(\mathbf{k}) y^{(i)}(\mathbf{k}, t), \quad y^{(i)}(\mathbf{k}, t) = e^{\gamma^{(i)}(\mathbf{k})} y^{(i)}(\mathbf{k}, t = 0). \tag{25}$$

Две гидродинамические моды с $\gamma^{(i)}(\mathbf{k}) = -\frac{\eta}{\rho_0} k^2$ представляют собой поперечные составляющие скорости (выражение (12)).

Таким образом получили систему из трех уравнений на $v^{\parallel}$, P, s. Будем искать решение этой системы в виде $v^{\parallel}(\mathbf{k}, t) = v_0^{\parallel}(\mathbf{k}) e^{-i\omega t}$ (аналогично для s и P). Получаем однородную систему линейных уравнений, нетривиальное решение которой существует, если определитель

$$|\Delta| = 0, \tag{26}$$

где

$$\Delta = \begin{pmatrix} \omega\rho_0 + i(\zeta + \frac{4}{3}\eta)k^2 & -k & 0 \\ -\rho_0 k & c_3^{-2}\omega & d\omega \\ 0 & \lambda_{ee} a k^2 & i\omega\rho_0 T_0 + \lambda_{ee} b k^2 \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$a=\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial P}\right)_s,\ \ b=\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial s}\right)_P,\ \ c_з^{-2}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s,\ \ d=\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_P.$$

Соотношение (26) представляет собой закон дисперсии. Ищем решение в виде

$$\omega=\Omega_0 k+\Omega_1 k^2$$

(звуковая мода). Подстановка в (26) дает (отбрасывая все члены порядка k^2 и более)

$$\omega_{1,2}=\pm c_з k-i\left(\frac{(\zeta+\frac{4}{3}\eta)}{2\rho_0}+\frac{\lambda_{ee}dac_з^2}{2\rho_0 T_0}\right)k^2 \tag{28}$$

Для упрощения последнего выражения воспользуемся термодинамическим соотношением

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_{P,N}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_P\left(\frac{\partial s}{\partial S}\right)_N=\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_P\frac{1}{mN},$$

(m - масса частиц вещества). Получаем

$$\frac{\lambda_{ee}dac_з^2}{2\rho_0 T_0}=\frac{\lambda_{ee}}{2\rho_0 T_0}\left(\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_P\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_s\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial P}\right)_s\right)=-\frac{\lambda_{ee}mN}{2\rho_0 T_0^3}\left(\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{P,N}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{S,N}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S,N}\right),$$

где $S=sNm$.

Далее, используя выражение

$$C_p-C_v=T_0\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N},$$

получим

$$\omega_{1,2}=\pm c_з k-i\left(\frac{(\zeta+\frac{4}{3}\eta)}{2\rho_0}+\frac{\varkappa}{2\rho_0}\left(\frac{1}{c_v}-\frac{1}{c_p}\right)\right)k^2, \tag{29}$$

где $c_{v,p}$– удельные теплоемкости, $\varkappa=\lambda_{ee}/T_0^2$– коэффициент теплопроводности.

Для нахождения еще одной моды подставляем в уравнение (26)

$$\omega=\Omega_3 k^2.$$

Получаем решение

$$\omega_3=i\frac{\lambda_{ee}b}{\rho_0 T_0}k^2 \tag{30}$$

Заменим

$$b\simeq-\frac{1}{T_0^2}\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_P=-\frac{1}{T_0^2}\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_P.$$

Итого

$$\omega_3=-i\frac{\varkappa}{\rho_0 c_p}k^2.$$

Двухкомпонентная система

Рассмотрим двухкомпонентную систему. Учитывая то, что $\lambda \equiv \lambda_{11} = \lambda_{22} = -\lambda_{12} = -\lambda_{21}$, $\mu \equiv \tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2$, $\lambda_{e1} = -\lambda_{e2}$ и $c^{(1)} \equiv c$, из (15), (16) после несложных преобразований получаем

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial s}{\partial t} = -(\lambda_{ee} - \mu_0 \lambda_{e1})\Delta\left(\frac{1}{T}\right) - (\lambda\mu_0 - \lambda_{e1})\Delta\left(\frac{\mu}{T}\right) \tag{31}$$

$$\rho_0 \frac{\partial c}{\partial t} = -\lambda_{1e}\Delta\left(\frac{1}{T}\right) + \lambda\Delta\left(\frac{\mu}{T}\right) \tag{32}$$

В линейном приближении

$$\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_{s,c} P + \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_{P,c} s + \left(\frac{\partial\rho}{\partial c}\right)_{P,s} c \tag{33}$$

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial P}\right)_{s,c} P + \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial s}\right)_{P,c} s + \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial c}\right)_{P,s} c \tag{34}$$

$$\frac{\mu}{T} = \left(\frac{\partial\left(\frac{\mu}{T}\right)}{\partial P}\right)_{s,c} P + \left(\frac{\partial\left(\frac{\mu}{T}\right)}{\partial s}\right)_{P,c} s + \left(\frac{\partial\left(\frac{\mu}{T}\right)}{\partial c}\right)_{P,s} c \tag{35}$$

Возьмем преобразование Фурье уравнений (31) и (32). Вместе с уравнениями (9), (11) имеем

$$\begin{aligned}\rho_0 T_0 \frac{\partial s}{\partial t} = (\lambda_{ee} - \mu_0\lambda_{e1})k^2 \left(\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial P}\right)_{s,c} P + \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial s}\right)_{P,c} s + \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial c}\right)_{P,s} c\right) + \\ +(\lambda\mu_0 - \lambda_{e1})k^2 \left(\left(\frac{\partial\left(\frac{\mu}{T}\right)}{\partial P}\right)_{s,c} P + \left(\frac{\partial\left(\frac{\mu}{T}\right)}{\partial s}\right)_{P,c} s + \left(\frac{\partial\left(\frac{\mu}{T}\right)}{\partial c}\right)_{P,s} c\right)\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial c}{\partial t} = \lambda_{1e}k^2 \left(\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial P}\right)_{s,c} P + \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial s}\right)_{P,c} s + \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial c}\right)_{P,s} c\right) - \\ -\lambda k^2 \left(\left(\frac{\partial\left(\frac{\mu}{T}\right)}{\partial P}\right)_{s,c} P + \left(\frac{\partial\left(\frac{\mu}{T}\right)}{\partial s}\right)_{P,c} s + \left(\frac{\partial\left(\frac{\mu}{T}\right)}{\partial c}\right)_{P,s} c\right)\end{aligned} \tag{37}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v^{\parallel}}{\partial t} = -ikP - (\zeta + \frac{4}{3}\eta)k^2 v^{\parallel} \tag{38}$$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_{s,c} \frac{\partial P}{\partial t} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_{P,c} \frac{\partial s}{\partial t} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial c}\right)_{P,s} \frac{\partial c}{\partial t} = -i\rho_0 k v^{\parallel}, \tag{39}$$

По аналогии с однокомпонентной системой получаем следующее уравнение на ω

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} -i\omega\rho_0 + b_{11}k^2 & ik & 0 & 0 \\ -\rho_0 k & b_{22}\omega & b_{23}\omega & b_{24}\omega \\ 0 & b_{32}k^2 & i\omega\rho_0 T_0 + b_{33}k^2 & b_{34}k^2 \\ 0 & b_{42}k^2 & b_{43}k^2 & i\omega\rho_0 + b_{44}k^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{40}$$

$$b_{11} = (\zeta + \frac{4}{3}\eta), \quad b_{23} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_{P,c}, \quad b_{22} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_{s,c} \equiv c_з^{-2}, \quad b_{24} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial c}\right)_{P,s}$$

$$b_{33} = (\lambda_{ee} - \mu_0\lambda_{e1})\chi + (\lambda\mu_0 - \lambda_{e1})\theta$$

$$b_{34} = (\lambda_{ee} - \mu_0\lambda_{e1})f + (\lambda\mu_0 - \lambda_{e1})\nu$$

$$b_{32} = (\lambda_{ee} - \mu_0\lambda_{e1})\gamma + (\lambda\mu_0 - \lambda_{e1})g$$

$$b_{42} = \lambda_{e1}\gamma - \lambda g, \quad b_{43} = \lambda_{e1}\chi - \lambda\theta, \quad b_{44} = \lambda_{e1}f - \lambda\nu$$

$$\chi = \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial s}\right)_{P,c}, \quad \theta = \left(\frac{\partial\left(\frac{\mu}{T}\right)}{\partial s}\right)_{P,c} \quad f = \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial c}\right)_{P,s},$$

$$\nu = \left(\frac{\partial\left(\frac{\mu}{T}\right)}{\partial c}\right)_{P,s}, \quad \gamma = \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial P}\right)_{s,c}, \quad g = \left(\frac{\partial\left(\frac{\mu}{T}\right)}{\partial P}\right)_{s,c}$$

Проделывая аналогичные операции, из закона дисперсии получаем следующие решения для звуковых мод

$$\omega_{1,2} = \pm c_з k - i\left(\frac{\zeta + \frac{4}{3}\eta}{2\rho_0} + \frac{b_{32}b_{23}c_з^2}{2\rho_0 T_0} + \frac{b_{24}b_{42}c_з^2}{2\rho_0}\right)k^2 \tag{41}$$

Подстановка в уравнение (40)

$$\omega = \Omega k^2$$

(диффузионные моды) дает еще два решения

$$\omega_{3,4} = i\left(\frac{T_0 b_{44} + b_{33}}{2\rho_0 T_0} \pm \frac{\sqrt{4b_{43}b_{34} + (T_0 b_{44} - b_{33})^2}}{2\rho_0 T_0}\right)k^2 \tag{42}$$

Заключение

Суммируя полученные результаты, можно сказать, что в однокомпонентной среде звук затухает за счет внутреннего трения и за счет процессов теплообмена (наличие коэффициента теплопроводности). В двухкомпонентной среде на затухание звука начинают влиять диффузионные процессы.

Литература

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. — Издание 5-е. — 2003. — Т. VI. Гидродинамика. — 736 с.