

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(СПбГУ)

РЯБЕНКО Павел Валентинович

Выпускная квалификационная работа

**Квантово-полевая теория возмущений для сверхпроводящего
фазового перехода**

Уровень образования: *бакалавриат*

Направление: *03.03.02 «Физика»*

Основная образовательная программа: *СВ.5011.2022 «Физика»*

Научный руководитель:

доцент кафедры статистической физики СПбГУ, к.ф.-м.н.,
Комарова М.В.

Рецензент:

доцент кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц СПбГУ,
к.ф.-м.н.,
Гулицкий Н.М.

Санкт-Петербург

2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Исторический обзор	3
Мотивация исследования	5
ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ	7
Исследуемое действие	7
Переход в эвклидово пространство	8
Вычисление пропагаторов G^X и G^A	10
Построение диаграммной техники Фейнмана	12
Пример вычисления диаграммы	13
Результаты	16
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	18
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	19

ВВЕДЕНИЕ

Исторический обзор

Исследование сверхпроводимости и различных характеристик сверхпроводящего фазового перехода является важной задачей современной физики, имеющей важные практические приложения. Несмотря на всё более широкое применение сверхпроводников в технологических процессах, теоретическое описание данного явления далеко не закончено.

Для некоторых аспектов сверхпроводимости традиционно используют некоторые известные приближения, такие как уравнение Гросса-Питаевского [1, 2]. В случае сверхпроводимости это уравнение движения куперовских пар бозонов, которое не учитывает температурные возбуждения системы и поэтому не является корректным при ненулевых температурах. В частности, такое приближение не позволяет предсказывать хорошо известную из эксперимента критическую скорость бозонных пар, разрушающую их сверхпроводящее состояние. Также уравнение Гросса-Питаевского не позволяет анализировать критические динамические явления — аномальный рост времён релаксации в окрестности точки фазового перехода в сверхпроводящее состояние.

Другой подход к проблеме — зависящее от времени уравнение Гинзбурга-Ландау [1]. Это также уравнение движения бозонных куперовских пар, однако, в отличие от уравнений Гросса-Питаевского, здесь присутствует вклад, который учитывает релаксационные процессы. Тем не менее, данное приближение соответствует т.н. «теории среднего поля» и не учитывает нарастающие флуктуации в окрестности точки фазового перехода. Для обычных сверхпроводников теория Гинзбурга-Ландау хорошо описывает сверхпроводящий фазовый переход [3], однако для новых материалов в условиях увеличившейся точности измерений оно оказалось недостаточным [4].

Исследование сверхпроводников на основе различных феноменологических моделей не прояснило ситуацию. Оказалось, что даже вопрос о том, какой тип у сверхпроводящего фазового перехода, не вполне ясен; разные работы противоречили друг другу в этом вопросе, соответствующий обзор различных подходов и противоречий между ними можно найти в [5]. В любом

случае, анализ данной проблемы должен проводиться в рамках корректно выбранной модели и на основе многопетлевых вычислений квантово-полевой теории возмущений.

Чтобы решить вопрос о том, какая именно эффективная модель должна быть выбрана для корректного описания сверхпроводимости, в работе [6] изучался переход от микроскопического описания к макроскопическому. Составные бозоны, которые феноменологически описывались в предыдущих подходах, очевидно, должны как-то конструироваться на уровне микроскопии, так что их свойства логичнее не подбирать, а постараться вывести из микроскопических уравнений. Соответствующие уравнения в работе [6] пишутся для электронов (фермионов) в терминах так называемых «грассмановых переменных». Сокращение описания, типичное для статистической физики, соответствует здесь переходу к учёту длинноволновых флуктуаций, то есть построению инфракрасно-эффективной модели (коротко говоря, ИК-эффективной).

Оказалось, что комбинация фермионных мод приводит к образованию эффективного бозонного параметра порядка. Обсуждаемая работа позволила обосновать стохастические уравнения критической динамики, а также понимать, какие физические механизмы участвуют в формировании феноменологического параметра порядка, в частности, в его тензорной структуре.

В дальнейших работах [7,8] проводилось углублённое исследование полученного класса микроскопически обоснованных квантово-полевых моделей. Оказалось, что на физическую систему и соответствующий ей тип фазового перехода существенно влияет возможное наличие слоёв и подрешёток в рассматриваемом веществе, а также наличие учёта магнитного взаимодействия между электронами. Отметим, что кулоновское взаимодействие электронов в рассматриваемых системах существенно подавлено посредством механизма Дебая-Хюккеля. Обсуждаемые работы посвящены лишь изучению статических свойств и не касаются вопросов, связанных с динамическими свойствами и с динамическими критическими индексами.

С учетом этих результатов в работе [9] была построена микроскопически обоснованная статическая модель для электронов и фононов в критической области сверхпроводящего фазового перехода. Модель учитывала явления типа теплопроводности и магнитного взаимодействия. Ренормировка и ана-

лиз соответствующей статической модели были выполнены в однопетлевом приближении. Найденные здесь четыре неподвижные точки не демонстрируют устойчивого критического поведения, все они соответствуют нулевой константе магнитного взаимодействия и являются седловыми, то есть неустойчивыми. В обсуждаемой работе показано, что именно наличие магнитного поля приводит к появлению данной неустойчивости, отмечается, что в отсутствие магнитного поля устойчивость восстанавливается, хотя явно это можно заметить лишь при помощи многопетлевых вычислений, сводя задачу в отсутствие магнитного поля к хорошо изученным моделям S и A критической статики.

Мотивация исследования

Тем не менее, есть надежда, что корректный учёт магнитного поля возможен в строгом микроскопическом подходе. Для этого следует использовать многопетлевые вычисления и последующее пересуммирование результатов.

Основание к такой надежде даёт работа [10], в которой используется феноменологическая модель типа скалярной электродинамики, предложенная в [11], и для которой известны результаты двухпетлевого расчёта. В работе [10] был произведён инстантонный анализ модели [11], а полученные в результате асимптотики высоких порядков были использованы для пересуммирования двухпетлевых результатов [11].

Оказалось, что в данном подходе появляется неподвижная точка, соответствующая нетривиальному значению константы магнитного взаимодействия. Хотя данная точка получилась в [10] неустойчивой, эта неустойчивость не является окончательным результатом. Действительно, стабилизация неподвижной точки значительно более «чувствительна» к порядку теории возмущений, чем сам факт её появления. Поэтому, вполне вероятно, что устойчивость может просто не наблюдаться на основе лишь двухпетлевого счёта.

Отметим, что хотя модель [11] рассматривалась авторами как феноменологическая, анализ, проведённый в [9] показал, что она совпадает со строго полученной на основе микроскопического подхода моделью. Поэтому для исследования в этой работе мы выбрали именно эту модель.

Нашей целью является воспроизвести результаты работы [9] в однопетлевом случае, чтобы затем, на основе освоенной техники, иметь возможность

заняться многопетлевыми вычислениями. Так как мы интересуемся обоснованием существования неподвижной точки, нетривиальной по магнитному взаимодействию, в нашей модели мы отбросили вклад поля m из работы [9], который соответствует флуктуациям поля температуры. Действительно, в соответствии с результатами [9], есть основания предполагать, соответствующие вклады не влияют на появление искомой неподвижной точки.

Поскольку наше исследование касается самого факта существования устойчивой неподвижной точки, нам достаточно ограничиться критической статикой.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Исследуемое действие

Действие рассматриваемой нами модели содержит матричное поле $\chi_{ij}(x)$, описывающее составной параметр порядка, и векторное калибровочное поле $A_\mu(x)$, соответствующее электромагнитному взаимодействию. В простейшем сверхпроводнике, изучением которого мы и ограничимся, матричные индексы поля χ пробегают значения 1 и 2. Диапазон индекса $\mu = 0, 1, 2, 3$ соответствует обычному четырёхвектору в электродинамике. Электромагнитное поле задано над пространством Минковского. Так как в нашей работе мы планируем ограничиться лишь статической теорией критических явлений, поле параметра порядка подразумевается статическим, то есть зависящим лишь от пространственных координат.

Поля χ и χ^+ представляют собой матрицы 2×2 с нулевым следом, компоненты которых выражаются через комплексное скалярное поле $\eta(x)$ и $\eta(x)^*$, описывающие квантовое вещество:

$$\chi = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ -\eta & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^+ = \begin{pmatrix} 0 & \eta^* \\ -\eta^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Действие, которое мы изучаем, имеет вид

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu \chi_{ij} \mathcal{D}^{*\mu} \chi_{ij}^+ + \frac{g}{4} (\chi_{ij} \chi_{ij}^+)^2 \right). \quad (2)$$

В дальнейшем мы везде подразумеваем интегрирование по аргументам полей $\eta^*(x)$, $A_k(x)$, опуская их для краткости, а также суммирование по повторяющимся тензорным значкам.

В рассматриваемом действии слагаемое $-\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}$ — свободный лагранжиан электромагнитного поля, где тензор $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Второе слагаемое содержит ковариантную производную $\mathcal{D}_\mu = (\partial_\mu - ieA_\mu)$. Последнее слагаемое обеспечивает самодействие поля χ — отражает электрон-фононное взаимодействие вещества.

Отметим какими симметриями обладает приведённое действие. Имеется глобальная $U(1)$ калибровочная симметрия, обеспечивающая сохранение

заряда и устранение нефизичных для электромагнитного поля степеней свободы. Матрица χ преобразуется как заряженное поле в $U(1)$, отражая спиновую структуру электронов проводимости. При произвольном преобразовании фазы α поля преобразуются следующим образом:

$$\eta(x) \rightarrow e^{i\alpha}\eta(x), \quad \eta^*(x) \rightarrow e^{-i\alpha}\eta^*(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x).$$

Ковариантная производная $(\partial_k \pm ieA_k)$ и тензор $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ инвариантны относительно этих преобразований. При $\alpha = \text{const}$ симметрия является глобальной $U(1)$, сохраняющей число частиц (или электрический заряд).

Переход в эвклидово пространство

В условиях экспоненциально убывающего поля на масштабах, больших дебаевского радиуса, следует пренебречь электростатическим взаимодействием электронов в среде. При этом для вектора электромагнитного поля A_μ компонентой A_0 следует пренебречь. Переход к рассмотрению лишь пространственных компонент калибровочного поля мы будем отражать в выкладках, переходом к записи A_n с латинскими индексами ($n = 1, 2, 3$).

В дальнейших построениях мы будем фиксировать калибровку при помощи условия

$$\partial_k A_k = 0. \quad (3)$$

Как мы увидим, это условие позволяет доопределить пропагатор калибровочного поля.

Математически отбрасывание электростатических вкладов производится следующим образом. В трёхмерном евклидовом пространстве лагранжиан свободного электромагнитного поля раскладывается на две части, электрическую и магнитную:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} = 2\mathcal{F}_{k0}\mathcal{F}_{k0} + \mathcal{F}_{kl}\mathcal{F}_{kl}. \quad (4)$$

Электрическая компонента имеет вид $\mathcal{F}_{k0} = \partial_k A_0 - \partial_0 A_k$. Первое слагаемое здесь несущественно из-за экранировки Дебая-Хюккеля $A_0 \approx 0$, второе слагаемое следует отбросить в рамках критической статики. В итоге остаются только пространственные компоненты магнитного поля $\mathcal{F}_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k$ с

латинскими индексами. При этом вклад свободного электромагнитного поля преобразуется к виду

$$-\frac{1}{4}\mathcal{F}_{kl}\mathcal{F}_{kl} = \frac{1}{2}A_k(-\delta_{kl}\partial^2 + \partial_k\partial_l)A_l \equiv \frac{1}{2}A_k\Delta_{kl}^\perp A_l, \quad (5)$$

где введён поперечный оператор $\Delta_{kl}^\perp \equiv (-\delta_{kl}\partial^2 + \partial_k\partial_l)$ для удобства записи.

Касательно получившегося равенства стоит сказать, что были перекинуты производные при интегрировании по частям, получившиеся внеинтегральные члены же оказались равны полным производным, которые в свою очередь убывают на границах.

Таким образом, в отличие от стандартной электродинамики, в нашей модели можно заменить метрику на евклидову $\delta_{\mu\nu}$, а также отождествить верхние и нижние индексы.

В результате исследуемое действие приобретает вид

$$S = [(\partial_k + ieA_k)\chi_{ij}] [(\partial_k - ieA_k)\chi_{ij}^+] - \frac{1}{2}A_k\Delta_{kl}^\perp A_l + \frac{g}{4}(\chi_{ij}\chi_{ij}^+)^2. \quad (6)$$

Матричная форма параметра порядка (поле χ_{ij}) позволяет записать действие в более компактной форме, отразив присущие модели симметрии. Однако для реализации теории возмущений более удобно переписать действие в терминах его матричных компонент — поля η .

При упрощении действия (6) удобно пользоваться тождеством

$$\chi_{ij}\chi_{ij}^+ = 2\eta\eta^*.$$

В результате получаем

$$S = 4\partial_k\eta\partial_k\eta^* - \frac{1}{2}A_k\Delta_{kl}^\perp A_l - 4ieA_k\eta^*\partial_k\eta + 2e^2A_kA_k\eta\eta^* + g\eta\eta^*\eta\eta^*. \quad (7)$$

Исследуемое действие естественным образом разбивается на часть, содержащую лишь квадратичные по полям члены (S_0), и вклад старших степеней (S_1) полей:

$$S = S_0 + S_1; \quad (8)$$

$$S_0 = 4(\partial_k\eta)(\partial_k\eta^*) - \frac{1}{2}A_k\Delta_{kl}^\perp A_l; \quad (9)$$

$$S_1 = -4ieA_k\eta^*\partial_k\eta + 2e^2A_kA_k\eta\eta^* + g(\eta\eta^*)^2. \quad (10)$$

Первое слагаемое в 9 определяет пропагатор поля χ , второе соответствует пропагатору электромагнитного поля. Обозначим эти пропагаторы G^χ и G^A соответственно. Слагаемые (10) соответствуют трём вершинам диаграммной техники.

Вычисление пропагаторов G^χ и G^A

Вычислим пропагаторы, соответствующие свободному действию S_0 . Для этого необходимо найти операторы обратные, полученным квадратичным формам, известно, что пропагатор совпадает с функцией Грина соответствующей дифференциальному уравнению.

Чтобы вычислить G^χ , перейдём к Фурье-образам полей

$$\eta(x) \xrightarrow{F} \tilde{\eta}(p)$$

и произведём необходимые свёртки в выражении $(\partial_k\eta)(\partial_k\eta^*)$.

Вычисления мы будем проводить в D -мерном пространстве. Имеем:

$$4 \int d^4x (\partial_k\eta)(\partial_k\eta^*) = \int d^4x \left[\int \frac{d^D p}{(2\pi)^4} i p_k 4\tilde{\eta}(p) e^{ipx} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^4} i q_k \tilde{\eta}^*(p) e^{iqx} \right], \quad (11)$$

здесь мы учли, что в результате преобразования Фурье производные обратятся в компоненты соответствующего волнового вектора k :

$$\begin{bmatrix} \partial_n \xrightarrow{F} i p_n \\ \partial_n \partial_n \xrightarrow{F} -p_n^2 \end{bmatrix}.$$

Упрощаем выражение (11):

$$\int d^D x \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} (-p_k q_k) 2\tilde{\eta}(p) 2\tilde{\eta}^*(q) e^{i(p+q)x}.$$

Вычислим интеграл по переменной x , получим

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} (-p_k q_k) 2\tilde{\eta}(p) 2\tilde{\eta}^*(q) (2\pi)^D \delta^D(p+q) =$$

$$= 4 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{\eta}(p) p^2 \tilde{\eta}^*(-p).$$

Мы получили, что в импульсном пространстве квадратичная часть действия для поля χ записывается в виде

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{\eta}(-p) K(p) \tilde{\eta}(p),$$

где оператор квадратичной формы $K(p) = 4p^2$. Пропагатор $G_\chi(p)$ определяется как обратный к этому оператору:

$$K(p) G_\chi(p) = 1,$$

что в явном виде даёт результат для пропагатора свободного поля χ в импульсном представлении:

$$G_\chi(p) = \frac{1}{4p^2}. \quad (12)$$

Теперь перейдём к поиску следующего пропагатора, G_{mn}^A . Для этого аналогичным образом исследуем вклад в действие $\frac{1}{2} A_k \Delta_{kl}^{\perp} A_l$. В терминах Фурье-образа векторного поля

$$A_k(x) \xrightarrow{F} \tilde{A}_k(p)$$

второе слагаемое в (9) легко переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int d^D x A_n (-\partial^2 \delta_{nm} + \partial_m \partial_n) A_m = \\ & = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left(\frac{1}{2} \tilde{A}_n(-k) k^2 \tilde{A}_m(k) - \frac{1}{2} \tilde{A}_n(-k) k_m k_n \tilde{A}_n(k) \right) = \\ & = \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{A}_m(-k) (k^2 \delta_{mn} - k_m k_n) \tilde{A}_n(k). \end{aligned}$$

Напомним, что индексы пробегает значения $m, n = 1, 2, 3$.

Выбранная нами ранее кулоновская калибровка в импульсном пространстве соответствует условию поперечности:

$$\partial_n A_n = 0 \quad \xrightarrow{F} \quad p_n \tilde{A}_n(p) = 0.$$

Это условие устраняет продольные моды поля рассматриваемого векторного

поля. Свойство поперечности наследует и искомый пропагатор. Математически это означает следующее:

$$k_m G_{mn}(k) = G_{mn}(k) k_n = 0. \quad (13)$$

Заметим, что оператор свободного поля имеет вид $\hat{C}_{mn} = k^2 \delta_{mn} - k_m k_n$ и поэтому вырожден на продольных векторах ($\hat{C}_{mn} k_m = 0$). Это означает, что он необратим во всём пространстве. Однако ограничение в виде условия поперечности позволяет однозначно определить обратный оператор:

$$G_{mn}(k) = \frac{1}{k^2} \left(\delta_{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2} \right) \equiv \frac{P_{mn}^\perp(k)}{k^2}, \quad (14)$$

здесь $P_{mn}^\perp(k)$ — поперечный проектор.

Поперечность пропагатора $k_m P_{mn}^\perp = 0$ гарантирует, что при вычислении диаграмм Фейнмана продольные компоненты импульса автоматически сокращаются, так что в петлевых интегралах остаются только физические моды.

Каждому из найденных пропагаторов сопоставим линии диаграммной техники. Сопряженное поле η^* будем помечать вертикальной чертой:

$$\langle AA \rangle = \text{~~~~~}$$

$$\langle \eta \eta^* \rangle = \text{—————|—————}$$

Построение диаграммной техники Фейнмана

Для вычисления корреляторов $\langle \eta \eta^* \rangle$, $\langle \eta A_n \eta^* \rangle$, $\langle A_n A_m \rangle$, $\langle \eta A_n A_m \eta^* \rangle$ необходимо применять квантовополевую теорию возмущений. Здесь мы ввели обозначение

$$\langle \dots \rangle = \int D\eta D\eta^* DA e^{-S_0} e^{-S_1} \dots, \quad (15)$$

для функционального интеграла по всем полям теории.

Для построения теории возмущений экспоненту от взаимодействующей части действия e^{-S_1} разлагаем в ряд Тейлора по степеням S_1 :

$$e^{-S_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (S_1)^n. \quad (16)$$

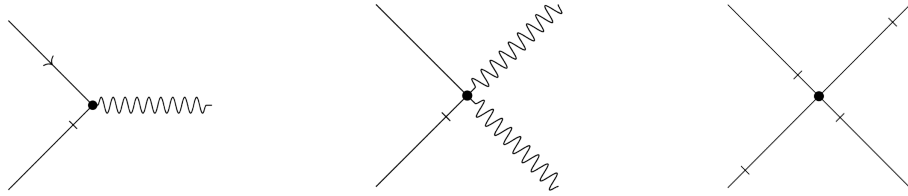
При этом под степень $(S_1)^n$ подразумевается n -кратное произведение интегралов по пространственным координатам, а усреднение членов ряда вычисляется с помощью гауссова интеграла от e^{-S_0} по правилам теоремы Вика.

В результате

$$\langle \dots \rangle = \int D\eta D\eta^* DA e^{-S_0} \dots \left[1 - 4e A_k \eta^* \partial_k \eta + 2e^2 A_k A_k \eta \eta^* + g(\eta \eta^*)^2 + \frac{1}{2!} \left(-4e A_k \eta^* \partial_k \eta + 2e^2 A_k A_k \eta \eta^* + g(\eta \eta^*)^2 \right)^2 \right]. \quad (17)$$

Каждому такому объекту сопоставляется ряд по теории возмущений, члены этого ряда конструируются следующим образом. Каждому члену из предэкспоненты графически сопоставляется вершина. Поля, которые входят в выражение для вершины вместе с производной (например, $4ie A_k \eta^* \partial_k \eta$), будем помечать стрелочкой, направленной к упомянутой вершине.

В наших обозначениях слагаемые действия (10) соответствуют следующим вершинам диаграммной техники:



(a) Вершины диаграммной техники $4ie A_k \eta^* \partial_k \eta$, $2e^2 A_k A_k \eta \eta^*$ и $g(\eta \eta^*)^2$.

Наша задача — построить однопетлевое приближение, то есть все диаграммы, имеющие в своём строении один замкнутый путь между вершинами. Для каждого рассматриваемого коррелятора необходимые диаграммы приведены в таблице 1.

Пример вычисления диаграммы

Поскольку вычисления диаграмм достаточно однотипные, проиллюстрируем их подробно лишь на примере одной диаграммы. Для рассмотрения выберем диаграмму D 2.1.

Мы будем работать с диаграммами в размерной регуляризации в схеме минимальных вычитаний. Логарифмическая размерность нашей модели

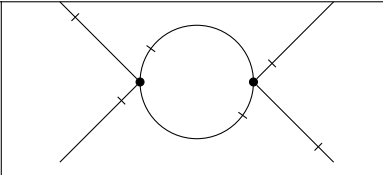
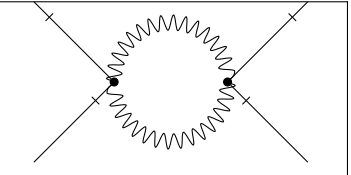
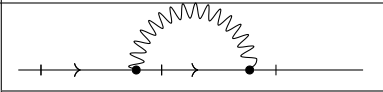
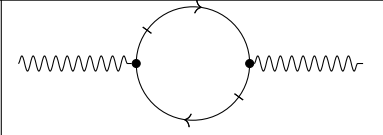
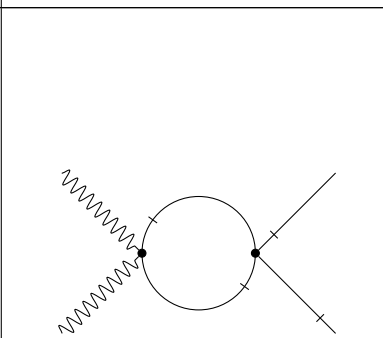
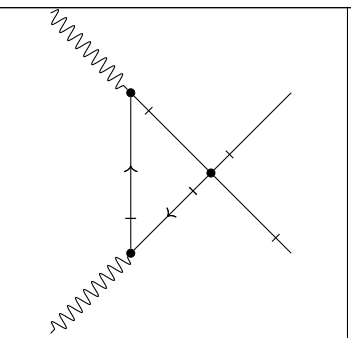
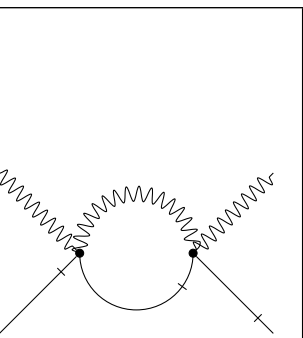
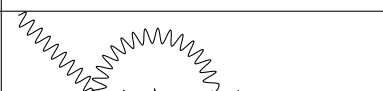
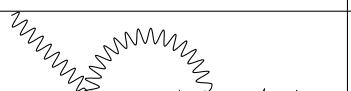
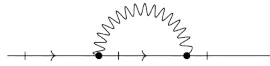
$\langle \eta \eta^* \eta \eta^* \rangle$			
	D 1.1	D 1.2	
$\langle \eta \eta^* \rangle$			
	D 2.1		
$\langle A_i A_j \rangle$			
	D 3.1		
$\langle A_i A_j \eta \eta^* \rangle$			
	D 4.1	D 4.2	D 4.3
			
$\langle A_i \eta \eta^* \rangle$			
	D 5.2		

Таблица 1. Нетривиальные однопетлевые диаграммы

равна четырём. Поэтому следует проводить вычисления в пространстве размерности $D = 4 - 2\varepsilon$, считая параметр ε малым и вычисляя для каждой диаграммы полюсной по ε вклад.

В импульсном представлении рассматриваемая диаграмма может быть записана следующим образом:



$$D 2.1 = - \int \frac{dk}{(2\pi)^D} \frac{(p-k)_j p_i \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}}{(p-k)^2 k^2}. \quad (18)$$

Раскроем скобки и воспользуемся поперечностью поля

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dk}{(2\pi)^D} \frac{(p_j p_i - p_i k_j) \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}}{(p-k)^2} = \\
& = \int \frac{dk}{(2\pi)^D} \frac{p_j p_i}{(p-k)^2} \frac{\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}}{k^2} - \frac{p_i k_j}{(p-k)^2} \frac{\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}}{k^2} = \\
& = p_i p_j \int \frac{dk}{(2\pi)^D} \left[\frac{\delta_{ij}}{k^2 (p-k)^2} - \frac{k_i k_j}{k^4 (p-k)^2} \right].
\end{aligned}$$

Разобьём интеграл на два слагаемых D 2.1 (а) и D 2.1 (б). Первое из них сразу вычисляется

$$D 2.1 (a) = \int \frac{dk}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{ij}}{k^2 (p-k)^2} = \delta_{ij} (4\pi)^{-D/2} H(1, 1, D-2) (p^2)^{D/2-2}, \quad (19)$$

здесь, в соответствии с [12], введено обозначение

$$H(1, 1, D-2) \equiv H(1)H(1)H(D-2), \quad H(z) = \frac{\Gamma(D/2 - z)}{\Gamma(z)}.$$

Для слагаемого (D 2.1 (б)) воспользуемся свойством преобразования Фурье $\partial_j \xrightarrow{\mathcal{F}} -ik_j$

$$\begin{aligned}
D 2.1 (б) & = \int \frac{dk}{(2\pi)^D} \frac{k_i k_j}{k^4 (p-k)^2} = \\
& = (4\pi)^{-D/2} H(1, 1, D-2) \frac{(p^2)^{D/2-2}}{2} \left[\delta_{ij} + \left(2 - \frac{D}{2}\right) \frac{p_i p_j}{p^2} \right]. \quad (20)
\end{aligned}$$

Теперь соберём все вместе:

$$\begin{aligned}
D 2.1 & = -p_i p_j (D 2.1 (a) - D 2.1 (б)) = \quad (21) \\
& = -p_i p_j (4\pi)^{-D/2} H(1, 1, D-2) (p^2)^{D/2-2} \left[\delta_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{D}{2}\right) \frac{p_i p_j}{p^2} \right] = \\
& = -(4\pi)^{-D/2} H(1, 1, D-2) (p^2)^{D/2-2} \left[\frac{1}{2} \delta_{ij} p_i p_j - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{D}{2}\right) \frac{p_i p_j}{p^2} p_i p_j \right] = \\
& = -(4\pi)^{-D/2} H(1, 1, D-2) (p^2)^{D/2-2} \left[\frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{D}{2}\right) p^2 \right]. \quad (22)
\end{aligned}$$

Вклад рассматриваемой диаграммы в константы ренормировки опреде-

ляется её полюсом первого порядка по ε . Вычислим его.

Для сокращения записи, следуя [12], введём обозначение $\|z\| \equiv \Gamma(z)$. Тогда

$$\begin{aligned}
D 2.1 &= -(4\pi)^\varepsilon \frac{1}{16\pi^2} \frac{\|1-\varepsilon\|}{\|1\|} \frac{\|1-\varepsilon\|}{\|1\|} \frac{\|\varepsilon\|}{\|2-2\varepsilon\|} (p^2)^{-\varepsilon} (p^2) \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\varepsilon) \right] = \\
&= -(1+2\gamma_E\varepsilon) \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) (1-2\varepsilon(\gamma_E-1))(1+\varepsilon \ln 4\pi)(1-2\varepsilon \ln p) (p^2) \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\varepsilon) \right] = \\
&= -\frac{p^2}{2 \cdot 16\pi^2\varepsilon} \tag{23}
\end{aligned}$$

Теперь полученный полюс нужно домножить на коэффициент $(-16e^2)$, который мы получили из разложения Тейлора (16).

Осталось обсудить симметричный коэффициент. Очевидно, что построить такую диаграмму в рамках теоремы Вика можно несколькими способами. Этому соответствует множитель — «симметричный коэффициент».

Поле в вершине можно либо соединить пропагатором с другой вершиной, либо с внешним полем. Два вершинных поля между собой можно соединить двумя способами, а с внешними полями — одним. Сложим вместе полученные комбинаторные результаты и получим множитель 3. Также стоит учесть двойку из разложения экспоненты, ведь рассматриваемая диаграмма состоит из двух вершин. В итоге получаем симметричный коэффициент равный $3/2$.

Результатом для данной диаграммы является итоговое значение: $\frac{3}{4\pi^2\varepsilon}$.

Результаты

Проводя аналогичные расчёты для всех диаграмм, перечисленных в таблице 1, мы получили следующие результаты:

$\langle \eta \eta^* \eta \eta^* \rangle$	D 1.1	$\frac{5g^2}{4\pi^2\epsilon}$
	D 1.2	$\frac{6e^4}{\pi^2\epsilon}$
$\langle \eta \eta^* \rangle$	D 2.1	$\frac{3e^2}{4\pi^2\epsilon}$
$\langle A_i A_j \rangle$	D 3.1	$-\frac{e^2}{24\pi^2\epsilon}$
$\langle A_i A_j \eta \eta^* \rangle$	D 4.1	$\frac{ge^2}{2\pi^2\epsilon}$
	D 4.2	$-\frac{ge^2}{2\pi^2\epsilon}$
	D 4.3	$\frac{3e^4}{2\pi^2\epsilon}$
$\langle A_k \eta \eta^* \rangle$	D 5.1	$-\frac{3ie^3}{4\pi^2\epsilon}$
	D 5.2	$-\frac{3ie^3}{4\pi^2\epsilon}$

Таблица 2. полюса $1/\epsilon$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнивая наши результаты с результатами работы [9], мы обнаружили, что смогли их воспроизвести. Во-первых, это означает, что в соответствующей работе отсутствуют опечатки и результаты её верны. Во вторых, полученный при вычислениях опыт позволяет нам приступить к более амбициозной задаче — проверке и улучшению результатов [11] и проверке предположения работы [10] о существовании устойчивой неподвижной точки, обладающей нетривиальным поведением относительно учёта магнитного взаимодействия в сверхпроводниках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kopnin N. Introduction to ginzburg-landau and gross-pitaevskii theories for superconductors and superfluids // Journal of Low Temperature Physics. 2002 01. Vol. 129. P. 219–262.
2. Mesoscopic samples: the superconducting condensate via the gross-pitaevskii scenario / A.A. Shanenko, J. Tempere, F. Brosens, J.T. Devreese // Solid State Communications. 2004. Vol. 131. No. 6. P. 409–414. Access mode: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0038109804001917>.
3. Halperin B. I., Lubensky T. C., Ma S.-k. First-order phase transitions in superconductors and smectic-*a* liquid crystals // Phys. Rev. Lett. 1974 Feb. Vol. 32. P. 292–295. Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.32.292>.
4. Lobb C. J. Critical fluctuations in high- T_c superconductors // Phys. Rev. B. 1987 Sep. Vol. 36. P. 3930–3932. Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.36.3930>.
5. Kleinert H. Order of superconductive phase transition // Condensed Matter Physics. 2005 01. Vol. 8.
6. Komarova M. V., Nalimov M. Y., Honkonen J. Temperature green's functions in fermi systems: The superconducting phase transition // Theoretical and Mathematical Physics. 2013 07. Vol. 176.
7. Antonov, N.V., Kompaniets, M.V., Lebedev, N.M. Critical behavior of $u(n)$ -del with antisymmetric tensor order parameter coupled with magnetic field // EPJ Web Conf. 2016. Vol. 125. P. 05021. Access mode: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201612505021>.
8. Kalagov G., Kompaniets M., Nalimov M. Renormalization-group investigation of a superconducting $u(r)$ -phase transition using five loops calculations // Nuclear Physics B. 2016. Vol. 905. P. 16–44. Access mode: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321316000390>.
9. Gosteva L. A., Nalimov M. Y., Yashugin A. S. Dynamical description of the phase transition to the superconducting state // Theoretical and Mathematical Physics. 2024. Vol. 221. No. 2. P. 1981–1993. Access mode: <https://doi.org/10.1134/S0040577924110126>.
10. Komarova M. V., Nalimov M. Y. On the influence of magnetic interaction

- on the phase transition to the superconducting state // Physics of Particles and Nuclei Letters. 2025 Sep. Vol. 22. No. 3. Access mode: <https://pepan.jinr.ru/index.php/PepanLetters/article/view/1910>.
11. Folk R., Holovatch Y. On the critical fluctuations in superconductors // Journal of Physics A: Mathematical and General. 1996 jul. Vol. 29. No. 13. P. 3409. Access mode: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/29/13/014>.
 12. Vasiljev A. The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics. pnpi, spb. 1998. ISBN: 5-86763-122-2. (A.N. Vasil'ev, Quantum-Field Renormalization Group in the Critical Behavior Theory and in Stochastic Dynamics, St. Petersburg Institute for Nuclear Physics, St. Petersburg, 1998).
 13. Dudka M., Folk R., Moser G. Gauge dependence of the critical dynamics at the superconducting transition. 2006. cond-mat/0612643.