Санкт-Петербургский государственный университет

ВАСИЛЬЕВ Егор Сергеевич

Выпускная квалификационная работа

Ренормгрупповое исследование модели эффективной квантовой гравитации

Бакалавриат:

Направление *03.03.02 «Физика»*

Основная образовательная программа *СВ.5011.2021 Физика*

Научный руководитель:

профессор кафедры статистической физики, д.ф.-м.н.,

Налимов Михаил Юрьевич

Рецензент:

профессор кафедры физики высоких энергий, д.ф.-м.н.,

Пастон Сергей Александрович

Санкт-Петербург

2025

Содержание

1 Введение

Настоящая работа посвящена применению ренормгрупповых методов в рамках эффективной теории квантовой гравитации. Современные подходы квантовой механики и теории поля на данный момент способны описывать довольно сложные механизмы фундаментальных взаимодействий. В то время как электромагнитные, слабые и сильные взаимодействия успешно формулируются в терминах калибровочных квантовых теорий, гравитация — продолжает оставаться вне рамок полного квантового описания.

Наиболее успешной классической теорией гравитации является общая теория относительности, сформулированная А. Эйнштейном в 1915 году. Эта теория описывает гравитацию, как проявление кривизны пространства-времени, порождённой распределением материи и энергии. Однако попытки построить квантовую теорию гравитации в духе стандартных полевых подходов сталкиваются с фундаментальными трудностями. Прежде всего, речь идёт о неренормируемости: квантовое описание метрического поля на малых расстояниях приводит к бесконечному числу независимых вкладов, требующих введения бесконечного количества контрчленов (см. (6.4.3)) в лагранжиан.

Тем не менее, как подчеркнул С. Вайнберг в ряде работ [**1**], несмотря на невозможность полной ренормализации, гравитация может рассматриваться как эффективная теория, действующая в области низких энергий или, что эквивалентно, на больших расстояниях. Такой подход позволяет описывать поведение квантовых флуктуаций гравитационного поля, не претендуя на его полное высокоэнергетическое завершение.

Одним из наиболее интересных объектов, рассматриваемым теорией является потенциал взаимодействия квантов поля. В классической теории гравитационное притяжение описывается ньютоновским потенциалом, обратно пропорциональным расстоянию.

В 1939 году Фирц и Паули ввели линейное описание, предположив, что гравитон – переносчик гравитационного взаимодействия, имеет массу [**2**]. В таком контексте ими был получен гравитационный потенциал Юкавы, имеющий экспоненциальное затухание на больших расстояниях. Такой потенциал характерен, в частности, для гравитонов с малой массой, которые могут возникать при наличии космологической постоянной.

Однако в данной работе рассматривается принципиально иная ситуация: исследуется поведение безмассовых мод гравитационного поля в низкоэнергетическом (инфракрасном) секторе теории. Речь идёт о тех флуктуациях, которые не обладают массой даже в присутствии космологической постоянной, и, следовательно, могут давать вклад в дальнодействующее гравитационное взаимодействие. Именно эти моды доминируют в пределе малых импульсов, где и проявляются ИК-особенности квантовой гравитации. Поведение таких мод отличается от ньютоновского и требует использования новых методов, в частности ренормализационной группы.

Цель настоящей работы — определение формы потенциала взаимодействия безмассовых мод гравитона в инфракрасном секторе.

Таким образом, рассматриваемая задача не претендует на полное квантовое описание гравитации, но даёт физически осмысленную модель в низкоэнергетическом режиме — там, где квантовые эффекты хоть и малы, но всё же могут накапливаться на больших расстояниях и приводить к наблюдаемым отклонениям от классического поведения.

2 Формализм гравитонных полей и калибровка

2.1 Поля гравитонов

В настоящей работе рассматривается действие Эйнштейна–Гильберта с космологическим членом:

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\,\sqrt{-g}(R-2\Lambda), \tag{1}$$

где R – скалярная кривизна, Λ – космологическая постоянная, $g = det(g_{\mu\nu})$ - детерминант метрического тензора, а $\kappa = 8\pi G$ – гравитационная постоянная. Скалярная кривизна определяется уравнением:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\,, \tag{2}$$

где тензор кривизны Риччи имеет вид

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} - \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\alpha\lambda}\,, \tag{3}$$

а символы связности Кристоффеля задаются выражением

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}\right)\,. \tag{4}$$

Воспользуемся подходом В.Н. Попова [**3**] и представим метрический тензор в виде:

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} \tag{5}$$

где $\eta_{\mu\nu}$ — метрика пространства Минковского, а $h_{\mu\nu}$ — малое симметричное возмущение, понимаемое как поле гравитона.

2.2 Фиксация калибровки и поля духов

Одна из центральных проблем при квантовании гравитационного поля — наличие диффеоморфной инвариантности, то есть симметрии действия относительно произвольных преобразований координат. При квантовании такая симметрия приводит к избыточности: функциональный интеграл включает в себя интегрирование по всем конфигурациям метрики, эквивалентным с точностью до преобразований координат. Такое интегрирование по орбите симметрии делает выражения в теории формально неопределёнными (подробнее см. [**4**]).

Для устранения этой избыточности появляется необходимость в фиксации калибровки, которая позволяет выбрать единственного представителя в каждом классе эквивалентных конфигураций. Это возможно, благодаря формализму Фаддеева–Попова [**5**], ставшему стандартным инструментом в калибровочных теориях. В функциональный интеграл вводится δ-функция, реализующая выбранное калибровочное условие, а также соответствующий якобиан — детерминант Фаддеева–Попова, учитывающий изменение меры при переходе к сечению калибровки. Определитель, в свою очередь, выражается через функциональный интеграл по антикоммутирующим скалярным полям, называемым полями духов.

Наложим условия поперечной калибровки на поля $h^{\mu\nu}$:

$$\partial_\nu h^{\mu\nu} = 0, \tag{6}$$

или в более общем виде:

$$\partial_\nu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}\right) = 0. \tag{7}$$

Такой подход предполагает отсутствие продольных вкладов полей гравитонов. Далее вводятся поля духов c^μ и $\bar{c}^\mu$ — антикоммутирующие фермионоподобные поля, действие которых имеет вид:

$$S_{\text{ghost}} = \int d^4x \; \bar{c}^\alpha \, \mathcal{M}_\alpha{}^\beta \, c_\beta, \tag{8}$$

где оператор Фаддеева–Попова задаётся как:

$$\mathcal{M}_\alpha{}^\beta = \Box \delta_\alpha^\beta + h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \delta_\alpha^\beta,$$

а $\Box = \partial^\mu \partial_\mu$ — оператор Даламбера.

3 Действие эффективной теории гравитации

Переход к квантовому описанию требует разложения действия по степеням полей $h^{\mu\nu}$. В настоящем разделе рассматриваются разложения основных геометрических объектов, входящих в действие (1).

3.1 Разложение детерминанта метрики

Введя малое возмущение метрики (5), получим разложения метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и его обратного $g^{\mu\nu}$ по степеням полей $h^{\mu\nu}$. Рассмотрим

$$\sqrt{-g}\det g^{\mu\nu} = \det(\eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}), \tag{9}$$

где используется выражение

$$\sqrt{-g} = \left(\det(-\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})\right)^{-1}. \tag{10}$$

Известно, что детерменант может быть представлен как

$$\sqrt{-g} \approx e^{-\mathrm{Tr}(\ln(\delta^\alpha_\nu + h^\nu_\alpha))}. \tag{11}$$

Тогда, обозначая след $h = h^\mu_\mu$, разложение (10) по полям $h^{\mu\nu}$ имеет вид:

$$\sqrt{-g} \approx 1 - h + \frac{1}{2}\left(h^2 + h^\mu_\nu h^\nu_\mu\right) - \frac{1}{3}h^\mu_\nu h^\nu_\alpha h^\alpha_\mu - \frac{1}{6}h^3 - \frac{1}{2}h h^\mu_\nu h^\nu_\mu + \mathcal{O}(h^4). \tag{12}$$

Таким образом, выражения для метрики $g_{\mu\nu}$ и её обратной имеют вид:

$$g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu}\left(1 + h + \frac{1}{2}h^\gamma_\delta h^\delta_\gamma\right) + h^{\mu\nu}(1+h), \tag{13}$$

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}\left(1 - h + \frac{1}{2}h^\gamma_\delta h^\delta_\gamma\right) - (1-h)\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}h^{\alpha\beta} + h^\alpha_\mu h_{\alpha\nu}. \tag{14}$$

3.2 Разложение символа Кристоффеля

Преобразуя выражение (4), с учетом (13) и (14), было получено следующее разложение по полям $h^{\mu\nu}$:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\left[\partial_\mu\left(\eta_{\nu\beta}\left(-h+\frac{1}{2}h^{\gamma}_{\delta}h^{\delta}_{\gamma}\right)+(h-1)\,\eta_{\nu\delta}\eta_{\gamma\beta}h^{\delta\gamma}+h^{\delta}_{\nu}h_{\delta\beta}\right)+\right.$$
$$+\partial_\nu\left(\eta_{\mu\beta}\left(-h+\frac{1}{2}h^{\gamma}_{\delta}h^{\delta}_{\gamma}\right)+(h-1)\,\eta_{\mu\delta}\eta_{\gamma\beta}h^{\delta\gamma}+h^{\delta}_{\mu}h_{\delta\beta}\right)- \tag{15}$$
$$\left.-\partial_\beta\left(\eta_{\mu\nu}\left(-h+\frac{1}{2}h^{\gamma}_{\delta}h^{\delta}_{\gamma}\right)+(h-1)\,\eta_{\mu\delta}\eta_{\gamma\nu}h^{\delta\gamma}+h^{\delta}_{\mu}h_{\delta\nu}\right)\right].$$

3.3 Разложение тензора Риччи и скалярной кривизны

Зная выражение разложения символов Кристоффеля (15), получим следующее соотношение для тензора Риччи:

$$R_{\mu\nu} \approx -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\left(-\partial_\mu h^{\alpha}_{\lambda}-\partial_\lambda h^{\alpha}_{\mu}+\partial^{\alpha}h_{\mu\lambda}\right)\left(-\partial_\alpha h^{\lambda}_{\nu}-\partial_\nu h^{\lambda}_{\alpha}+\partial^{\lambda}h_{\alpha\nu}\right). \tag{16}$$

Скалярная кривизна определяется сверткой Риччиана с обратной метрикой (13):

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \approx -\frac{1}{2}h^{\mu\nu}\Box h_{\mu\nu}. \tag{17}$$

3.4 Действие гравитонов

Наконец, подставляя полученные (12), (17) в исходное (1), а также с учетом (6), получим разложение действия до третьего порядка по $h^{\mu\nu}$:

$$S \approx -(1-h+\frac{1}{2}(h^2+h^{\mu}_{\nu}h^{\nu}_{\mu})-\frac{1}{3}h^{\mu}_{\nu}h^{\nu}_{\alpha}h^{\alpha}_{\mu}-\frac{1}{6}h^3-\frac{1}{2}hh^{\mu}_{\nu}h^{\nu}_{\mu})\frac{\Lambda}{\kappa}-\frac{1}{4\kappa}h^{\mu\nu}\Box h_{\mu\nu}+S_{ghost}. \tag{18}$$

В результате разложения действия (18) возникает два проблемных вклада: линейный Λh и квадратичный, пропорциональный Λh^2. Первый имеет смысл внешнего поля, квадратичный же приводит к появлению массы гравитона.

4 Анализ полученного действия

4.1 Линейный член

Рассмотрим классическое уравнение Эйнштейна в отсутствии материи:

$$R - 2\Lambda = 0 \tag{19}$$

Это соотношение показывает, что кривизна пространства определяется исключительно космологической постоянной $\Lambda \neq 0$, что означает, что вакуумное состояние, иначе говоря, решение уравнений Эйнштейна без материи не является плоским, а соответствует пространству с постоянной кривизной. Это, в свою очередь, влечет за собой некорректность разложения метрики (5), ведь оно рассматривается как флуктуации относительно плоского фона.

Однако в квантовой теории с действием (1) уравнение Эйнштейна заменяется на условие стационарности эффективного действия, учитывающего флуктуации полей. В этом смысле формулируется условие на среднее значение поля:

$$\langle h \rangle = 0 \tag{20}$$

— квантовый аналог классического уравнение Эйнштейна. Для учета этого условия рассмотрим сдвиг поля:

$$h^{\mu\nu} \to h^{\mu\nu} + \alpha^{\mu\nu}, \tag{21}$$

где $\alpha^{\mu\nu}$ — фоновая конфигурация с условием связи $h = 0$.

В общем случае конфигурация $\alpha^{\mu\nu}$ определяется из требования стационарности эффективного действия и может быть найдена из соответствующих уравнений движения.

Однако в рамках настоящей работы будем интересоваться вкладом безмассовых гравитонов в инфракрасную проблему в самом простом случае, где

$$\alpha^{\mu\nu} = 0\,, \tag{22}$$

что соответствует плоскому пространству. Такое приближение оправдано тем, что, хотя $\alpha_{\mu\nu}$ в общем случае может быть отличен от нуля, он предполагается достаточно малым (по крайней мере порядка Λ) и логично предположить, что его наличие подправит безмассовые моды, но оказывать существенного влияния на них не будет. Такое предположение позволяет сохранить кубическое взаимодействие для дальнейшего исследования, а влияние $\alpha_{\mu\nu}$ может быть учтено как малая поправка.

Важно отметить, что до сдвига поля $h^{\mu\nu}$ являются массивными за счёт квадратичного члена Λh^2, однако после сдвига возможно появление безмассовых мод. Такие моды возникают как колебания вокруг конденсата. При этом сам сдвиг не обязательно приводит к спонтанному нарушению лоренц-инвариантности: если фоновая конфигурация $\alpha^{\mu\nu}$ лоренц-инвариантна, то голдстоуновские моды отсутствуют. В дальнейшем мы будем исходить именно из этого случая.

4.2 Квадратичный член

Рассмотрим квадратичный по флуктуациям метрики вклад в эффективное действие:

$$S_{quad} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[- \left(h^2 + h^\mu_\nu h^\nu_\mu \right) \Lambda - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \Box h_{\mu\nu} \right]. \tag{23}$$

Первое слагаемое представляет собой эффективный «массивный» вклад, наличие которого нарушает условие безмассовости гравитона, поэтому для дальнейшего описания необходимо исключить массивные моды, то есть выделить такие поля $h^{\mu\nu}$, для которых выполнено

$$h^2 + h^\mu_\nu h^\nu_\mu = 0. \tag{24}$$

На данном этапе удобно перейти к импульсному пространству (k-представление, см. Приложение А), где проектор на поперечное подпространство имеет вид:

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}. \tag{25}$$

С их помощью определяются взаимно ортогональные проекционные операторы, которые расщепляют пространство поперечных тензоров на бесследовую и диагональную компоненты:

$$\mathcal{P}_{TL}^{\mu\nu,\mu'\nu'} = \frac{1}{2}\left[P^{\mu\mu'}P^{\nu\nu'} + P^{\mu\nu'}P^{\nu\mu'}\right] - \frac{1}{P}P^{\mu\nu}P^{\mu'\nu'}, \quad \mathcal{P}_{D}^{\mu\nu,\mu'\nu'} = \frac{1}{P}P^{\mu\nu}P^{\mu'\nu'}. \tag{26}$$

Здесь $P = P_\mu^\mu$ — след проектора $P^{\mu\nu}$. Бесследовые компоненты не удовлетворяют (24), а значит, не являются безмассовыми. Поэтому следует ограничиться рассмотрением диагональных конфигураций, задаваемых проектором $\mathcal{P}_D$.

Несложно убедиться, что поперечные поля, натянутые на пространство матриц со следом равным -1, удовлетворяют условию (24). Подходящим примером являются:

$$h^{\mu\nu} = \mathcal{P}_D^{\mu\nu,\mu'\nu'}h, \tag{27}$$

где проектор $\mathcal{P}_D^{\mu\nu,\mu'\nu'}$ вырезает две компоненты: временную и одну произвольную пространственную, иными словами, из всевозможных конфигураций выбирается подпространство полей размерности $D = 1 + 1$, для которых выполнено (24).

Поля, выбранные таким образом, являются безмассовыми, удовлетворяют условиям поперечности (6) и образуют линейное пространство, при условии отбрасывания перекрёстных членов, которые в инфракрасной области оказываются несущественными (см. раздел 6.2.3).

Отметим, что кубические взаимодействия, возникающие в третьем порядке разложения действия, для выбранных конфигураций также обращаются в нуль, однако, такие взаимодействия восстанавливаются при учёте, например, сколь угодно малого фонового поля $\alpha_{\mu\nu}$, которое ранее было проигнорировано.

5 Уравнения движения

5.1 Первая вариация

Рассмотрим первую вариацию действия Эйнштейна–Гильберта (1). Для удобства работы с определителем метрики воспользуемся матричной формулой:

$$\sqrt{-g} = \exp\left(-\mathrm{Tr}(\ln(1+\eta h))\right), \tag{28}$$

где $(1+\eta h)$ трактуется как матрица с компонентами

$$(1+\eta h)^{\alpha}{}_{\nu} = \delta^{\alpha}_{\nu} + \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu}. \tag{29}$$

Первая вариация действия по полю $h^{\mu\nu}$ задается выражением:

$$\frac{\delta S}{\delta h^{\mu\nu}} = \sqrt{-g}\left[-\eta(1+\eta h)^{-1}_{\mu\nu}(R-2\Lambda) + \frac{\delta R}{\delta h^{\mu\nu}}\right]. \tag{30}$$

Равенство нулю первой вариации действия по полю $h^{\mu\nu}$,

$$\frac{\delta S}{\delta h^{\mu\nu}} = 0, \tag{31}$$

представляет собой уравнение движения. В классической общей теории относительности аналогичное выражение даёт уравнения Эйнштейна. Тогда, уравнение

$$\left.\frac{\delta S}{\delta h^{\mu\nu}}\right|_{h=\alpha} = 0 \tag{32}$$

является его квантовым аналогом, иначе говоря, новым уравнением Эйнштейна с учетом квантовых поправок. Оно определяет фоновое поле, вокруг которого осуществляется дальнейшее разложение, однако на данный момент следует ограничиться условиями, обсуждаемыми в разделе (4.1).

5.2 Вторая вариация

Рассмотрим вторую вариацию действия Эйнштейна-Гильберта, отвечающую за определение пропагатора (см. (6.4.2)). При условии (22) вторая вариация имеет вид:

$$\left.\frac{\delta^2 S}{\delta h^{\mu\nu}\delta h^{\mu'\nu'}}\right|_{h=\alpha=0} = \sqrt{-g}\Bigg[-\eta(1+\eta h)^{-1}_{\mu'\nu'}(R-2\Lambda)\left(-\eta(1+\eta h)^{-1}_{\mu\nu}(R-2\Lambda)+\frac{\delta R}{\delta h^{\mu\nu}}\right)$$
$$+\,\eta(1+\eta h)^{-1}_{\mu\nu}\eta(1+\eta h)^{-1}_{\mu'\nu'}(R-2\Lambda)-\eta(1+\eta h)^{-1}_{\mu\nu}\frac{\delta R}{\delta h^{\mu'\nu'}}+\frac{\delta^2 R}{\delta h^{\mu\nu}\delta h^{\mu'\nu'}}\Bigg]. \quad (33)$$

6 Диаграммная техника

Настоящий раздел посвящен рассмотрению диаграммной техники применительно к эффективной теории в рамках однопетлевого приближения.

6.1 Проблема неренормируемости

При разложении действия (18) ранее мы ограничились членами до третьего порядка по $h_{\mu\nu}$, однако в действительности гравитационное оно содержит бесконечное число взаимодействий. Запишем действие в символическом виде:

$$S=\int d^D x\Big[h\Box h+\lambda h^3+g_4h^4+g_5h^5+\dots\Big], \quad (34)$$

где λ — константа взаимодействия, а g_4, g_5... — параметры взаимодействий более высоких порядков. Линейный по h член, а также h^2, отсутствуют из соображений, приведенных выше (см. (4.1), (4.2)).

Рассмотрим каноническую размерность величин в выражении (34). Размерность поля гравитонов:

$$\Big[h\Big]=\frac{D}{2}-1, \quad (35)$$

тогда соответствующие размерности коэффициентов взаимодействия имеют вид:

$$\Big[\lambda\Big]=3-\frac{D}{2}, \qquad \Big[g_4\Big]=4-D, \qquad \Big[g_5\Big]=5-\frac{3D}{2}. \quad (36)$$

В случае четырехмерного пространства Минковского ($D = 4$) получим, что:

$$\Big[\lambda\Big] = 1, \qquad \Big[g_4\Big] = 0, \qquad \Big[g_5\Big] = -1.$$

Начиная с g_5 — параметры имеют отрицательные размерности. Это означает, что соответствующие члены действия порождают ультрафиолетовые расходимости и требуют введения бесконечного числа контрчленов, что и делает теорию неренормируемой, т.е. невозможно устранить все расходимости конечным числом параметров.

Параметр λ, обладающий положительной размерностью, наоборот оказывается существенным ИК-пределе, потому является наиболее интересным в контексте поставленной задачи. В этом смысле действие, ограниченное третьим порядком разложения — ИК-существенное действие — оказывается ренормируемым.

В 1972 году Джерардом Хофтом и Мартинусом Вельтманом был предложен метод размерной регуляризации [**6**], который нашел применение в самых разных областях теоретической физики.

Позже, возникла идея Вильсона [**7**] об исследовании инфракрасных проблем, которая заключается в том, чтобы подобрать размерность пространства-времени таким образом, что λ окажется безразмерной. То есть физическая размерность $D = 4$ заменяется на величину $D = D^* - \varepsilon$, где $\varepsilon \to 0$. При таком подходе из петлевых интегралов, возникающих при рассмотрении теории возмущений, можно выделить расходимости в виде полюсов по ε (подробнее см. (6.4)). В контексте настоящей работы, необходимые условия выполняются при $D^* = 6 - \varepsilon$:

$$[\lambda] = 3 - \frac{D^*}{2} = \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (37)$$

6.2 ИК-поведение теории

Эффективная квантовая гравитация — это теория, описывающая поведение гравитонов при низких энергиях или, что эквивалентно, на больших расстояниях. В таком режиме важную роль играет инфракрасное (ИК) поведение теории. ИК-анализ позволяет определить, какие взаимодействия доминируют в пределе малых внешних импульсов, и какие вклады приводят к расходимостям при вычислении тех или иных выражений. Рассмотрим подробнее.

6.2.1 Природа ИК-расходимостей

Главной особенностью безмассовых теорий, состоит в том, что безмассовые частицы могут порождать ИК-расходимости — бесконечные вклады в петлевых интегралах, возникающих при интегрировании по малым импульсам. Такие расходимости возникают, когда в процессах участвуют кванты с произвольно малой энергией (например, мягкие фотоны), в результате величины, выражающиеся через интегралы по D-мерному пространству, становятся расходящимися в инфракрасной области.

Проблема ИК-расходимостей впервые возникла в квантовой электродинамике (КЭД), где при рассмотрении процессов рассеяния электронов возникает излучение мягких фотонов. Эта особенность была подробно проанализирована в работе Блоха и Нордау [**8**], где показано, что наивный расчёт вероятности излучения фотонов с энергией $\varepsilon \to 0$ приводит к логарифмически расходящимся выражениям вида

$$\int_0^E \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \sim \ln E, \tag{38}$$

где E — минимальная энергия фотона, регистрируемая детектором. Возникающая особенность при $E \to 0$ и есть инфракрасная расходимость. В КЭД такие расходимости устраняются путём суммирования по всем возможным конфигурациям мягких фотонов, неразличимых при измерении (см, например [**9**]).

6.2.2 ИК-расходимости в квантовой гравитации

Аналогичный механизм работает и в эффективной квантовой гравитации: безмассовые гравитоны также могут вызывать ИК-сингулярности в петлевых поправках. Для анализа расходимостей в эффективной теории используется ренормализационная группа (РГ), которая в ИК-секторе показывает, как теория ведёт себя на больших расстояниях, где квантовые поправки становятся существенными.

Метод, описанный в (6.1) позволяет применять методы ренормгруппы для суммирования вклада диаграмм, однако прежде всего, необходимо определить какие взаимодействия наиболее значимы в ИК-секторе, иначе говоря, являются наиболее ИК-существенными.

6.2.3 Размерный анализ и степенной счет

В низкоэнергетическом секторе вклад различных членов эффективного действия в физические процессы можно классифицировать на ИК-существенные и ИК-несущественные в зависимости от их масштабного поведения при стремлении внешних импульсов к нулю.

ИК-существенные вклады определяют ведущую ИК-асимптотику корреляционных функций. Несущественные, напротив, становятся подавленными при низких энергиях. Такие взаимодействия могут быть отброшены при анализе ведущей ИК-динамики, однако они становятся важными при переходе к более высоким энергиям.

Пусть h_m – массивные поля, h_{ml} – безмассовые и c_{gh} – поля духов. Тогда соответствующие канонические размерности равны:

$$\Big[h_m\Big] = \frac{D}{2}, \qquad \Big[h_{ml}\Big] = \frac{D}{2} - 1, \qquad \Big[c_{gh}\Big] = \frac{D}{2} - 1. \tag{39}$$

Далее применяется степенной счёт: ИК-существенность взаимодействий определяется их размерностью — чем ниже каноническая размерность взаимодействующего члена, тем более существенным он является в инфракрасной области. Таким образом, по степенному счёту в ИК-эффективной теории в первую очередь следует отбросить все самодействия массивных мод как ИК-несущественные. Более того, взаимодействие массивных мод с безмассовыми оказывается менее ИК-существенным, чем взаимодействие безмассовых мод между собой. Поэтому массивные моды могут быть исключены из рассмотрения. Также по степенному счёту оказывается несущественным взаимодействие с духами и они также исключаются из рассмотрения.

6.3 Ренормированное действие

Анализ, проведенный в разделах 4.1 и 4.2, показывает, что ИК-динамика определяется безмассовыми модами с кубическим самодействием. В этом приближении неренормированное действие принимает вид:

$$S_B = \frac{1}{2\kappa}\left(\frac{\lambda_0}{6}h^3 - \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\Box h_{\mu\nu}\right), \tag{40}$$

где λ_0 — голая константа связи, а h_0 — неренормированное поле.

Поскольку экспериментально наблюдаемыми являются только ренормированные величины, переход к физической формулировке осуществляется мультипликативной ренормировкой:

$$h_{\mu\nu} \longrightarrow h_{\mu\nu} Z_h^{1/2} \mu^{\frac{\varepsilon}{2}}, \quad \lambda_0 = \lambda Z_\lambda \mu^{\frac{\varepsilon}{2}}, \tag{41}$$

где Z_h и Z_λ — константы ренормировки, μ — ренормировочная масса, а ε — регуляризационный параметр.

Подстановка соотношений (41) в (40) дает ренормированное действие:

$$S_R = \frac{1}{2\kappa}\left(Z_h^3 Z_\lambda \mu^{\frac{\varepsilon}{2}}\frac{\lambda}{6}h^3 - Z_h^2\frac{1}{2}h^{\mu\nu}\Box h_{\mu\nu}\right). \tag{42}$$

Таким образом, все ИК-расходимости поглощаются константами ренормировки Z_h и Z_λ, при этом форма действия сохраняется, а физические величины выражаются через конечные и ренормированные.

6.4 Петлевые поправки и ренормировка

6.4.1 Функциональный интеграл

Дальнейшее квантовое описание гравитационного поля требует перехода от классической формулировки к функциональному интегралу — подходу, впервые предложенному Р. Фейманом в 1948 году для нерелятивистской квантовой механики и позднее обобщённому на квантовую теорию поля.

Рассмотрим выражение вида:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}h \, \exp\left(iS[h]\right), \tag{43}$$

где $S[h]$ — полное действие, а $\mathcal{D}h$ — мера интегрирования по всевозможным полевым конфигурациям. Представим функционал действия в виде:

$$S[h] = S_0[h] + S_1[h], \tag{44}$$

где $S_0[h]$ – описывает свободное поле, а $S_{int}[h]$ – действие взаимодействия.

Далее, экспоненту, содержащую действие $S_1[h]$, можно разложить в ряд по константе связи:

$$\exp(iS_1[h]) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\lambda}{6}\right)^n \int h^3(x_1) \dots h^3(x_n) \, d^D x_1 \dots d^D x_n. \tag{45}$$

Каждый член ряда (45) представляет собой вклад от n взаимодействующих вершин, соответствующих гравитон-гравитон-гравитонному взаимодействию. Подставим (45) в (43):

$$\mathcal{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\lambda}{6}\right)^n \int \mathcal{D}h \exp\left(iS_0[h]\right) \int h^3(x_1) \dots h^3(x_n) d^D x_1 \dots d^D x_n. \tag{46}$$

Далее необходимо определить пропагатор ИК-эффективного действия.

6.4.2 Пропагатор эффективного действия

Пропагатором гравитационного действия будем называть двухточечную функцию Грина, описывающую распространение гравитационного возмущения между двумя точками пространства-времени:

$$G^{\mu\nu,\mu'\nu'}(x,y) = i\langle h^{\mu\nu}(x) h^{\mu'\nu'}(y)\rangle_0, \tag{47}$$

где угловые скобки обозначают усреднение по свободному действию S_0. Пропагатор определяется как обратный оператор к квадратичному действию S_0, описывающему свободное поле:

$$S_0 = -\frac{1}{4\kappa}\int d^D x\, h^{\mu\nu}(x)\Box h_{\mu\nu}(x), \tag{48}$$

или в k-представлении:

$$S_0 = \frac{1}{4\kappa}\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} h^{\mu\nu}(-k)\, k^2\, h_{\mu\nu}(k). \tag{49}$$

Тогда среднее значение $\langle h_{\mu\nu}(x) h_{\mu'\nu'}(y)\rangle_0$ сводится к вычислению обратного к оператору k^2, с учётом соответствующего проектора на безмассовые моды (см. (4.2)). Таким образом, пропагатор в импульсном пространстве имеет вид:

$$G^{\mu\nu,\mu'\nu'}(k) = \frac{2i\kappa}{k^2}\,\mathcal{P}_D^{\mu\nu,\mu'\nu'}, \tag{50}$$

с соответствующими условиями $D = 1+1$.

6.4.3 Однопетлевые диаграммы

Первая диаграмма, содержащая расходимость, получается при разложении действия по теории возмущений до второго порядка:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(x_1,x_2) &= \langle h(x_1)h(x_2)h^3(x)h^3(y)\rangle = \\ &\frac{1}{2!}\left(\frac{i\lambda}{6}\right)^2 \int \mathcal{D}h\, \exp\left(iS_0[h]\right) h(x_1)h(x_2)\int d^D x\, d^D y\, h^3(x)h^3(y).\end{aligned} \tag{51}$$

Данный интеграл содержит ИК-расходимости, которые можно выявить с помощью метода размерной регуляризации:

$$\mathcal{R}(p) \longrightarrow -\frac{25}{384\pi^3}\frac{\lambda^2}{\varepsilon}p^2. \tag{52}$$

Второй важный вклад — однопетлевая диаграмма с тремя вершинами взаимодействия:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(x_1, x_2, x_3) &= \langle h(x_1)h^3(x)h^3(y)h^3(z)h(x_2)h(x_3)\rangle = \\ &= \frac{1}{3!}\left(\frac{i\lambda}{6}\right)^3 \int \mathcal{D}h\, e^{iS_0}\, h(x_1)h(x_2)h(x_3) \int d^D x\, d^D y\, d^D z\, h^3(x)h^3(y)h^3(z),\end{aligned} \tag{53}$$

Аналогично, вычисления дают:

$$\mathcal{T}(p_1, p_2) \longrightarrow \frac{125}{64\pi^3}\frac{\lambda^3}{\varepsilon}\left(p_1^2 + p_2^2\right). \tag{54}$$

Подробные вычисления соответствующих диаграмм приведены в Приложении B.

Вычисленные расходимости (52), (54) — это так называемые контрчлены, которыми нужно подправить действие (40), чтобы получить ренормированное (42). Тогда константы ренормировки будут иметь вид:

$$Z_h = 1 - \frac{25\lambda^2}{768\pi^3\varepsilon} \qquad Z_\lambda = 1 + \frac{475\lambda^2}{256\pi^3\varepsilon} \tag{55}$$

7 Уравнение ренормгруппы

Одной из ключевых задач квантовой теории поля является описание поведения физических величин при изменении характерного масштаба энергии. В случае эффективной квантовой гравитации интерес представляет инфракрасный (ИК) режим, соответствующий большим расстояниям. Ренормгрупповое уравнение (РГУ) предоставляет способ анализа таких масштабных изменений, позволяя отслеживать, как параметры теории «текут» в зависимости от изменения масштаба μ.

При ренормализации поля и константы взаимодействия заменяются на их ренормированные значения, а зависимость полей и параметров от масштаба описывается ренормгрупповыми функциями $\beta(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)$.

Пусть $G_R^{(n)}$ — ренормированная n-точечная функция Грина. Тогда она удовлетворяет ренормгрупповому уравнению:

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}+n\gamma(\lambda)\right)G_R^{(n)}(p_i,\mu,\lambda)=0, \tag{56}$$

где

$$\beta(\lambda)=\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}, \quad \gamma(\lambda)=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_h. \tag{57}$$

7.1 β- и γ-функции

Ренормгрупповые функции $\beta(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)$ полностью определяют масштабное поведение теории. Знание их аналитической формы позволяет судить о свойствах теории в инфракрасном ($\mu\to 0$) режиме. Особенно важным является поведение β-функции: её нули определяют фиксированные точки, в которых константа связи перестаёт зависеть от масштаба. Рассмотрим подробнее.

7.1.1 Фиксированные точки и аномальная размерность

Действуя оператором дифференцирования по масштабу $\mathcal{D}_\mu=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}$ на уравнение ренормированной константы λ_0 из уравнения (41), получаем выражение для β-функции:

$$\beta(\lambda^2)=-\lambda^2\varepsilon+\lambda^4\frac{475}{128\pi^3}. \tag{58}$$

Это уравнение допускает тривиальное решение $\lambda=0$, и нетривиальное — ИК-устойчивую фиксированную точку:

$$\lambda_*^2=\frac{128\pi^3\varepsilon}{475}. \tag{59}$$

$\lambda=0$ соответствует свободной теории и не даёт вклада в аномальную размерность, тогда как нетривиальная фиксированная точка определяет универсальное поведение теории в ИК-пределе. Таким образом, аномальная размерность поля h:

$$\gamma(\lambda_*) = -\frac{\varepsilon}{114}. \tag{60}$$

7.1.2 ИК-асимпотика и потенциал взаимодействия

В стандартной теории поведение двухточечной корреляционной функции в импульсном пространстве определяется классическим пропагатором (50):

$$\langle h(p)h(-p)\rangle \sim \frac{1}{p^2}, \tag{61}$$

что в координатном представлении соответствует ньютоновскому закону $V(r) \sim 1/r$. Однако учет квантовых поправок приводит к появлению аномальной размерности поля h, которая модифицирует это поведение. В теории с нетривиальной фиксированной точкой корреляционная функция приобретает вид:

$$\langle h(p)h(-p)\rangle = V(p) \sim \frac{1}{p^{2-\eta}}, \tag{62}$$

где $\eta = 2\gamma(\lambda_*)$ представляет полную аномальную размерность оператора h^2, вычисленную в фиксированной точке ренормгруппы. Переход в координатное пространство дает модифицированный потенциал:

$$V(r) \sim \frac{1}{r^{1+\eta}}, \tag{63}$$

который демонстрирует отклонение от классического ньютоновского поведения. Используя полученное ранее значение аномальной размерности поля $\gamma(\lambda_*)$, находим:

$$\eta = 2\gamma(\lambda_*) = -\frac{\varepsilon}{57}, \tag{64}$$

что приводит к скорректированному закону взаимодействия:

$$V(r) \sim \frac{1}{r^{1-\frac{\varepsilon}{57}}}. \tag{65}$$

Для случая четырехмерного пространства-времени ($\varepsilon = 2$) численное значение поправки составляет:

$$\eta = -\frac{2}{57} \approx -0.035, \tag{66}$$

что соответствует принципиально важной модификации гравитационного взаимодействия.

8 Заключение

В настоящей работе был проведён ренормгрупповой анализ эффективной квантовой гравитации в инфракрасном секторе. Основной целью исследования было описание поведения безмассовых мод гравитационного поля и определение формы их взаимодействия на больших расстояниях.

Показано, что безмассовые следовые моды гравитона в поперечной калибровке формируют неприводимое подпространство, для которого можно построить диаграммную технику и вычислить однопетлевые поправки.

Вычислена аномальная размерность поля h, и на её основе установлен модифицированный закон гравитационного взаимодействия:

$$V(r) \sim \frac{1}{r^{1+\eta}}, \quad \eta = -\frac{2}{57}.$$

Следует отметить, что вычислен только первый порядок $6 - \varepsilon$ аномальной степени поведения потенциала. Соответствующий ряд является асимптотическим, первый порядок при физическом значении $\varepsilon = 2$ не может гарантировать даже знак аномалии. Но сам факт изменения закона гравитации Ньютона вдохновляет на дальнейшее исследование проблемы.

Список литературы

[1] С. Вайнберг. *Квантовая теория полей. Том II: Современные приложения.* М.: Мир, 2003. (см. оригинал: S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol. II: Modern Applications, Cambridge University Press, 1996).

[2] M. Fierz, W. Pauli. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. // *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **173**, 211 (1939).

[3] В.Н. Попов, *Формализм функционального интеграла в теории гравитации*, ЖЭТФ **68** (1975), 672–686.

[4] Н.П. Коноплёв, В.Н. Попов. *Калибровочные поля.* М.: Энергоатомиздат, 1980.

[5] Л.Д. Фаддеев, В.Н. Попов. «Формализм Фейнмана для калибровочных теорий», *Успехи физических наук*, 1972, том 137, №3, с.427–444.

[6] G. 't Hooft and M. Veltman, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nucl. Phys. B **44**, 189 (1972).

[7] K. G. Wilson, "Renormalization group and critical phenomena. II. Phase space cell analysis of critical behavior," *Phys. Rev. B* **4**, 3184 (1971).

[8] F. Bloch, A. Nordsieck, *Note on the Radiation Field of the Electron*, Phys. Rev. **52**, 54–59 (1937).

[9] Б.Л. Иоффе, В.А. Файст, В.Н. Фаддеев. *Квантовая теория поля.* М.: Наука, 1984. — Гл. 7, §4.

9 Приложение A. Преобразование Фурье

Для полей h:

$$h(k) = \int d^D x \, e^{-ik\cdot x} \, h(x) \,,$$

$$h(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \, e^{ik\cdot x} \, \tilde{h}(k),$$

Аналогично определяется Фурье-образ функции Грина:

$$G(p_1, \ldots, p_n) = \int d^D x_1 \ldots d^D x_n \, e^{-i(p_1\cdot x_1 + \ldots + p_n \cdot x_n)} \, G(x_1, \ldots, x_n),$$

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \ldots \frac{d^D p_n}{(2\pi)^D} \, e^{i(p_1\cdot x_1 + \ldots + p_n \cdot x_n)} \, G(p_1, \ldots, p_n).$$

10 Приложение B. Подробные вычисления

Рассмотрим выражение:

$$\mathcal{R}(p) = \frac{1}{2!} \frac{1}{(2\kappa)^2} \left(\frac{i\lambda}{6} \right)^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} G^{\mu\nu,\mu'\nu'}(k) G^{\alpha\beta,\alpha'\beta'}(p-k), \tag{67}$$

с пропагатором

$$G^{\mu\nu,\mu'\nu'}(k) = \frac{2i\kappa}{k^2} \mathcal{P}_D^{\mu\nu,\mu'\nu'}, \tag{68}$$

где $\mathcal{P}_D^{\mu\nu,\mu'\nu'} = \frac{P^{\mu\nu}P^{\mu'\nu'}}{P}$. Безмассовые моды гравитона — это следовая часть пропагатора, тогда:

$$Tr(G^{\mu\nu,\mu'\nu'}(k)) = -\frac{2\kappa i}{k^2}. \tag{69}$$

Выражение (67) переписывается следующим образом:

$$\mathcal{R}(p) = \frac{\lambda^2}{72} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k_0^2 - k'^2 + i\delta)((p_0 - k_0)^2 - (p' - k')^2 + i\delta)} \,, \tag{70}$$

где

$$k'^2 = \sum_{j=1}^{5} k_j^2 \,, \qquad (p' - k')^2 = \sum_{j=1}^{5} (p_j - k_j)^2.$$

Далее существует стандартный прием, позволяющий упростить вычисления. Идея заключается в переходе от метрики Минковского ко псевдоевклидовой. При интегрировании по "временной"переменной k_0 интеграл может содержать полюса на вещественной оси, но можно обойти проблему, вводя замену

$$k_0 \to i k_0^E , \quad p_0 \to i p_0^E , \qquad k_0^E , p_0^E \in \mathbb{R}$$

Тогда

$$k^2 = -(k_0^E)^2 - \vec{k}^2 = -k_E^2 , \quad dk_0 \to i dk_0^E$$

И выражение (70) после Викова поворота имеет вид:

$$\mathcal{R}(p) = \frac{i\lambda^2}{72} \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{k_E^2 \cdot (p_E - k_E)^2} . \tag{71}$$

Такой интеграл расходится квадратично, поэтому ответ пропорционален p^2, однако можно свести расходимость к логарифмической, подействовав на выражение операцией:

$$\partial_i \partial_j \Big|_{p_E = 0} , \qquad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial (p_E)_i} . \tag{72}$$

Таким образом, приходим к проявлению расходимости:

$$-\frac{\lambda^2}{216} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^6} \longrightarrow \frac{\lambda^2}{36} \frac{1}{384\pi^3 \varepsilon} . \tag{73}$$

Учтем также знак разложения, симметрийный коэффициент и тот факт, что на каждой линии взаимодействовать могут пять мод гравитона (см. (4.2)), тогда константа при полюсе:

$$\mathcal{R}(p) \longrightarrow -\frac{25\lambda^2}{384\pi^3} \frac{p^2}{\varepsilon} \tag{74}$$

Перейдем к вычислению выражения (53). Запишем в k-представлении и Виковски повернем:

$$\mathcal{T}(p_1,p_2)=\frac{1}{3!}\left(\frac{i\lambda}{6}\right)^3\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{1}{k^2+i\delta}\,\frac{1}{(p_1-k)^2+i\delta}\,\frac{1}{(p_2+k)^2+i\delta}=$$

$$=\frac{i\lambda^3}{1296}\int\frac{d^Dk_E}{(2\pi)^D}\frac{1}{k_E^2+i\delta}\,\frac{1}{((p_{1,E}-k_E)^2+i\delta}\,\frac{1}{((p_{2,E}+k_E)^2+i\delta} \quad (75)$$

Исходный интеграл расходится логарифмически, что означает, что можно посчитать «ампутированную» диаграмму, то есть на нулевом внешнем импульсе (например, $p_{2,E}$), тогда:

$$\frac{i\lambda^3}{1296}\int\frac{d^Dk_E}{(2\pi)^D}\frac{1}{k_E^4\cdot(p_{1,E}-k_E)^2}\longrightarrow\frac{125\lambda^3}{64\pi^3\varepsilon} \quad (76)$$