

Санкт-Петербургский государственный университет

Чегадаев Рифат Рустемович

Выпускная квалификационная работа

Моделирование переноса инфракрасного излучения в биоткани на основе уравнения Бете-Солпитера

Уровень образования: бакалавриат

Направление 03.03.02 «Физика и астрономия»

Основная образовательная программа СВ.5011.2020 «Физика»

Научный руководитель:

доктор ф.-м. наук, кафедра статистической физики,

Ульянов Сергей Владимирович

Рецензент:

кандидат ф.-м. наук,

Кузьмин Леонид Владимирович

Санкт-Петербург

2025 г.

Оглавление

1	Введение	3
2	Распространение и рассеяние электромагнитных волн в многослойных средах.	5
	Глава 2.1. Рассеяние фотонов в двухслойной среде.	5
	Глава 2.2. Моделирование многократного рассеяния света в биоткани для плоскопараллельных слоёв.	8
	Глава 2.3. Моделирование многократного рассеяния с учётом кривизны слоёв.	10
	Глава 2.4. Моделирование с учётом кривизны слоёв.	14
	2.4.1. Моделирование для двухслойной биоткани.	16
	2.4.2. Сравнение результатов моделирования рассеяния системами плоских и сферических слоёв.	19
	Глава 2.5. Влияние радиуса кривизны рассеивающего объёма на результаты расчётов в четырёхслойной модели.	21
	2.5.1. Моделирование на случай четырёх слоёв.	21
	2.5.2. Результаты моделирования четырёхслойной модели.	23
3	Заключение	26
	Литература	28
	Список литературы	28

Глава 1

Введение

В современном мире множество людей получают травмы в самых разных ситуациях. Одним из наиболее уязвимых органов при травмах является головной мозг. Быстро и точно определить характер и степень его повреждений зачастую непросто. Высокая частота подобных травм, а также важность их своевременной диагностики усиливают интерес научного сообщества к разработке более эффективных методов обследования. Однако существующее оборудование для точной диагностики, как правило, громоздко и не всегда доступно в медицинских учреждениях. В связи с этим исследователи стремятся создать компактные и точные устройства, способные выполнять быструю диагностику повреждений мозга. Одним из перспективных направлений является БИК-спектроскопия: методы спектроскопии в ближнем инфракрасном диапазоне. Существует три основных подхода в рамках БИК-спектроскопии: облучение непрерывной волной, облучение короткими импульсами и волнами с различными вариантами модуляции излучения.

Биомедицинское применение метода непрерывной волны оказывается одним из наиболее важных и плодотворных, для определения и мониторинга подвижности рассеивателей в тканях. В настоящее время метод непрерывной волны является простым и доступным для оценки состояния тканей, в отношении травм мозга и глубоких повреждений тканей. Одним из преимуществ данного метода помимо его пригодности для создания компактного оборудования является его абсолютная безвредность для организма. Все методы БИК-спектроскопии заключаются в исследовании взаимодействия тканей с инфракрасным излучением и продолжают представлять большой интерес в связи с их биомедицинским применением. Для исследования мозга требуется как ми-

нимум двухслойная модель головы (череп–мозг). В работах [3, 4] проведено моделирование методом Монте-Карло (МК), позволяющим определить интенсивность обратного рассеяния непрерывной инфракрасной волны, для двухслойной и четырехслойной модели головы человека. Череп является слоистой структурой, но в реальной жизни он имеет полусферическую форму со своим радиусом кривизны. А как сильно влияет учёт кривизны черепа на обратное рассеяние? В данной работе изучим влияние кривизны слоёв на результаты расчётов.

Глава 2

Распространение и рассеяние электромагнитных волн в многослойных средах.

В данной главе приведено решение уравнения Бете–Солпитера в лестничном приближении для интенсивности обратного рассеяния в виде ряда по кратностям рассеяния, описана процедура МК–вычисления интегралов методом обратного преобразования. В конце главы представлены результаты расчётов интенсивности обратного рассеяния с учётом кривизны и проведен анализ полученных результатов.

Глава 2.1. Рассеяние фотонов в двухслойной среде.

Основной целью настоящей работы является изучение влияния кривизны слоёв в задаче многократного рассеяния в слоистых структурах биологического происхождения. В качестве модели, представляющий наибольший интерес для изучения, рассматривается модель головы человека.

В данной главе развивается подход, посвящённый получению информации о состоянии многослойной биоткани из данных по обратному рассеянию непрерывного инфракрасного лазерного излучения. Объектом исследования является модель головы человека. Для адекватных результатов необходимо учитывать неоднородную, слоевую структуру головы. Также важно помнить, что оптические свойства биологических тканей головы человека существенно меняются в

глубину. Поэтому необходимо учитывать наличие, как минимум, двух слоёв, а именно черепа и мозга. Далее рассмотрим и большее количество слоёв.

Расчёт интенсивности обратно рассеянного лазерного излучения основан на итерационном решении уравнения Бете–Солпитера. Многократные интегралы, являющиеся членами разложения решения по кратностям рассеяния, вычисляются методом Монте-Карло. Метод Монте-Карло для моделирования переноса фотонов в многослойных тканях [1] основан подсчёте фотонов, покинувших среду, после рассеяния. Мы учитываем вклад в интенсивность на каждом рассеянии каждого фотона. Это уменьшает время работы программ.

Моделирование обратного рассеяния инфракрасного излучения проводим, полагая, что слоистая рассеивающая среда находится в полупространстве $z > 0$ (направим ось Z вовнутрь среды). Чтобы учесть кривизну головы, будем исследовать её как шар, радиуса R_{max} . Моделирование же будет проводится на полусфере радиуса R_{max} , с центром в точке $z = R_{max}$. Угол θ_i – угол падения, отсчитанный от внешней нормали к среде ($\mathbf{n} = (0, 0, -1)$), под которым плоская волна входит в рассеивающую среду, θ_f — отсчитанный от той же нормали угол обратного рассеяния, под которым из среды выходит луч, испытавший многократные рассеяния. Для обратно рассеянного поля используется Фраунгоферовское приближение [2, 3]. Некогерентная часть интенсивности обратного рассеяния, с точностью до постоянного размерного множителя, может быть представлена в виде, [2, 3]:

$$J(s_i, s_f) = 4\pi \int_0^\infty dz_1 \int_{z_2 > 0} d\mathbf{r}_2 \Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 | \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) \exp(-\mu(s_f z_2 + s_i z_1)), \quad (2.1)$$

где $s_i = 1/\cos \theta_i$, $s_f = 1/\cos \theta_f$, μ — коэффициент экстинкции. Коэффициент рассеяния μ_s в сумме с коэффициентом абсорбции μ_a дают коэффициент экстинкции $\mu = \mu_s + \mu_a$. Экспоненциальный множитель в (2.1) возникает вследствие затухания плоской волны по закону Бугера-Ламберта-Бера на пути от границы среды до точки первого рассеяния и на пути от последнего рассеяния до границы. Перенос излучения в случайно-неоднородной среде из точки \mathbf{r}_1 в точку \mathbf{r}_2 с учётом рассеяний всех кратностей обеспечивает функция когерентности $\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 | \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$, где \mathbf{k}_i и \mathbf{k}_f — соответственно волновые вектора волны, пришедшей в точку \mathbf{r}_1 , и волны, вышедшей после многократных рассеяний из

точки \mathbf{r}_2 .

Перенос излучения внутри случайно-неоднородной среды может быть описан уравнением Бете-Солпитера

$$\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 | \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \mu_s p(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \mu_s \int d\mathbf{r}_3 p(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_{23}) \Lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \Gamma(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1 | \mathbf{k}_{23}, \mathbf{k}_i), \quad (2.2)$$

где \mathbf{k}_{ij} — волновой вектор, направленный из точки \mathbf{r}_j в \mathbf{r}_i , $\mathbf{k}_{ij} = k_0 \mathbf{r}_{ij} / r_{ij}$, $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Для волнового числа в вакууме использовано обозначение $k_0 = 2\pi / \lambda$, где λ — длина волны. Произведение двух комплексно-сопряженных средних функций Грина скалярного поля даёт пропагатор однократного рассеяния $\Lambda(r) = r^{-2} \exp(-\mu r)$. При написании уравнения (2.2) считалось выполненным условие слабого рассеяния $\lambda \ll l = \mu^{-1}$, Тогда мы можем воспользоваться «лестничным» приближением. Также в уравнении Бете-Солпитера была использована оптическая теорема для скалярного поля,

$$\mu_s = \frac{k_0^4}{(4\pi)^2} \int d\Omega_f G(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i),$$

где $G(\mathbf{k})$ — Фурье-образ корреляционной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости,

$$G(\mathbf{k}) = \int d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)} \langle \delta\varepsilon(\mathbf{r}) \delta\varepsilon^*(\mathbf{r}_0) \rangle.$$

Нормированная корреляционная функция $G(\mathbf{k})$ выступает в качестве фазовой функции $p(\mathbf{k})$

$$p(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) = G(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) / \int d\Omega_f G(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i),$$

которая является функцией угла θ между векторами \mathbf{k}_f и \mathbf{k}_i .

Интенсивность обратного излучения в приближении однократного рассеяния $J^{(1)}(s_i, s_f)$ получается подстановкой в выражение (2.1) первого члена из правой части уравнения Бете-Солпитера. Подстановка в выражение (2.1) всего итерационного ряда для уравнения Бете-Солпитера (2.2) позволяет представить

интенсивность рассеяния в виде разложения по кратностям рассеяния [2, 3].

$$J(s_i, s_f) = \sum_{n=1}^{\infty} J^{(n)}(s_i, s_f),$$

где вклад однократного и двухкратного рассеяний в интенсивность имеют вид

$$\begin{aligned} J^{(1)}(s_i, s_f) &= 4\pi(\mu_s/\mu)(s_f + s_i)^{-1}p(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i), \\ J^{(2)}(s_i, s_f) &= 4\pi\mu_s^2 \int_0^{\infty} dz_1 \int_{z_2 > 0} d\mathbf{r}_2 \Lambda(r_{21}) \\ &\times p(\mathbf{k}_{21} - \mathbf{k}_i)p(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_{21})e^{-\mu(s_i z_1 + s_f z_2)}. \end{aligned}$$

Вклад в интенсивность от n -кратного рассеяния при $n \geq 3$ представляется многократным интегралом

$$\begin{aligned} J^{(n)}(s_i, s_f) &= 4\pi\mu_s^n \int_0^{\infty} dz_1 \int d\mathbf{r}_2 \dots \int d\mathbf{r}_n \Lambda(r_{21})p(\mathbf{k}_{21} - \mathbf{k}_i) \\ &\times \prod_{j=2}^{n-1} \Lambda(r_{j+1j})p(\mathbf{k}_{j+1j} - \mathbf{k}_{jj-1})H(z_j)H(z_n)p(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_{nn-1})e^{-\mu(s_i z_1 + s_f z_n)}. \end{aligned}$$

Здесь функции Хевисайда $H(z)$ обеспечивают учёт актов рассеяния только внутри полубесконечной случайно-неоднородной среды.

Глава 2.2. Моделирование многократного рассеяния света в биоткани для плоскопараллельных слоёв.

Альтернативный способ аналитического решения уравнения Бете-Солпитера является моделирование многократного рассеяния методом Монте-Карло. Он основан на процедуре обратного преобразования. Интегралы по полубесконечному интервалу представляются в виде интегралов по единичным интервалам. Пропагатор однократного рассеяния показывает, что длина свободного пробега фотона экспоненциально распределена с плотностью $f(r) = \mu \exp(-\mu r)$ на интервале $r = [0, +\infty)$, где r это расстояние между соседними точками рассеяния. Для такой плотности вероятности кумулятивная функция распределения

$\xi = F(r)$ находится элементарно:

$$\xi = \int_0^r f(r') dr' = 1 - \exp(-\mu r).$$

Обратное преобразование $r = F^{-1}(\xi)$ дает

$$r = -\mu^{-1} \ln(1 - \xi) = -\mu^{-1} \ln \xi', \quad (2.3)$$

где ξ и $\xi' = 1 - \xi$ — случайные величины, равномерно распределённые в единичном интервале $[0, 1]$. Аналогичное обратное преобразование выполняется с косинусом угла рассеяния: от $\gamma = \cos \theta$ переходим к

$$\chi = 2\pi \int_{-1}^{\gamma} p(\gamma') d\gamma'. \quad (2.4)$$

Азимутальный угол ϕ распределён равномерно на промежутке $[0, 2\pi]$. Таким образом, трехмерный пространственный интеграл по относительной координате $\mathbf{r}'_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}$ преобразуется как

$$\int d\mathbf{r}'_j \Lambda(r'_j) p(t_j) f(r'_j, t_j) = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^1 d\xi_j \int_0^1 d\chi_j \int_0^{2\pi} d\phi_j f(-\mu^{-1} \ln \xi_j, t(\chi_j)), \quad (2.5)$$

где $f(r'_j, t_j)$ — произвольная функция, $t_j = t(\chi_j)$ — обратная функция к $\chi_j = \chi(t_j)$ в 2.4, ϕ_j — азимутальный угол. После этого интеграл вычисляется как среднее по выборке трех равномерно распределенных переменных ξ , χ , ϕ , где первые две равномерно распределены на интервале $[0, 1]$, а азимутальный угол ϕ — на интервал $[0, 2\pi]$.

Получается, что интенсивность n -го порядка $J^{(n)}(1, s_f)$ в приближении средним по выборке из N_{ph} падающих фотонов, есть

$$J^{(n)}(1, s_f) \simeq \sum_{i=1}^{N_{\text{ph}}} \frac{W_n^{(i)}}{N_{\text{ph}}} p(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_{n n-1}^{(i)}) e^{-\mu s_f z_n^{(i)}},$$

где величины $W_n^{(i)}$ — случайные значения многократного пространственного интеграла, полученного в результате итерации n -го порядка уравнения Бете—

Солпитера. В процессе моделирования будем называть их весами. Вычисляя веса, моделируем стохастическую последовательность, или траекторию, точек рассеяния $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$. Переменная $z_j^{(i)}$ — это расстояние до границы от j -го события рассеяния. Функция $\phi_{\text{BLB}}(z_n^{(i)}) = \exp(-\mu_s z_n^{(i)})$ возникает вследствие затухания рассеянного излучения, распространяющегося от случайной точки n -го события рассеяния $z_n^{(i)}$ к границе.

Рассматривается неоднородная среда, в которой её свойства зависят от местоположения, а именно — от декартовой координаты z , нормальной к границам. Поскольку мы не учитываем преломление при переходе между слоями, то мы предполагаем, что направление луча не меняется при движении в неоднородной среде. Тогда экспоненциальная функция распределения определяющая затухание фотона, движущегося из точки \mathbf{r}_0 в точку \mathbf{r} может быть представлена в следующем виде:

$$\exp(-\mu|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \longrightarrow \exp\left(-\frac{1}{\cos\theta} \int_{z_0}^z \mu(z') dz'\right).$$

Здесь θ — угол между направлением движения фотона и осью z , который должен быть определён заранее. Заметим, что распределение зависит от начального положения фотона \mathbf{r}_0 . Определим плотность вероятности для пространственной координаты z , задающей новое положение фотона, формулой

$$f(z, z_0) = C_0^{-1} \exp\left(-\frac{1}{\cos\theta} \int_{z_0}^z \mu(z') dz'\right),$$

где C_0 — нормировочная постоянная.

Глава 2.3. Моделирование многократного рассеяния с учётом кривизны слоёв.

А теперь учтём кривизну черепа. Будем моделировать голову, как полусферу определённого радиуса. Тогда слой черепа (А) будет находиться между полусферами радиусов R_{max} и R_A . Теперь наши слои будут не между бесконечными плоскостями, а между полусферами. В точке $(0, 0, 0)$ будет расположена теменная кость. Уравнение, описывающее данную модель головы в декартовых

координатах:

$$x^2 + y^2 + (z - R_{max})^2 = R_{max}^2$$

Если рассмотреть нашу модель в сферических координатах, то радиус будет меняться в пределах $r_{sph} \in [0; R_{max}]$, полярный в пределах $\phi_{sph} \in [0; 2\pi]$, а азимутальный $\theta_{sph} \in [\pi/2; \pi]$. Кривизну будем учитывать с помощью ограничений на (x, y, z) . А точнее $x^2 + y^2 + (z - R_{max})^2 \leq R_{max}^2$ и $z \in [0; R_{max}]$. Что изменится в этом случае? μ будет зависеть от всех декартовых координат рассеяния, а если точнее, то будет зависеть от r_{sph} :

$$r = -\mu^{-1}(r_{sph}) \ln(1 - \xi) = -\mu^{-1}(r_{sph}) \ln \xi' \quad (2.6)$$

где ξ и $\xi' = 1 - \xi$ — также случайные величины, равномерно распределённые в единичном интервале $[0, 1]$.

Рассматривается двухслойная модель, состоящая из слоёв A и B . Слой A занимает область $R_{max} \geq r_{sph} > R_A$, слой B — область $R_A \geq r_{sph} > 0$. Нам необходимо построить алгоритм определения последовательных шагов, которые должен пройти фотон, начиная с точки r_0 .

Начальную точку r_0 выбираем в начале координат $(0, 0, 0)$. Фотон падает в точку r_0 вдоль оси Z (вовнутрь среды), далее он проходит случайное расстояние (2.6). в случае двух слоёв наше μ равно:

$$\mu(r) = \begin{cases} \mu_A, & R_{max} \geq r > R_A, \\ \mu_B, & R_A \geq r > 0, \end{cases}$$

Тогда получается, что случайное расстояние, на которое рассеется фотон равно:

$$\mathbf{r} = \begin{cases} -\mu_A^{-1} \ln(1 - \xi), & \xi_A \geq \xi > 0, \\ -\mu_B^{-1} \ln(1 - \xi), & 1 \geq \xi > \xi_A, \end{cases}$$

где $\xi_A = 1 - \exp(-\mu_A R_A)$. Рассеяние в случайно-неоднородных средах во многом зависит от анизотропии среды. Она учитывается в фазовой функции $p(\cos \theta)$, где θ — угол однократного рассеяния. Мы используем широко-применяемую фа-

зовую функцию Хеньи—Гринштейна [5]:

$$p_{\text{HG}}(\cos \theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{3/2}},$$

где $g = \langle \cos \theta \rangle$ — параметр анизотропии однократного рассеяния. В разных средах он разный. В случае двухслойной системы мы рассмотрим следующий случай: $g = g_A = g_B = 0.9$. Удобство фазовой функции ХГ связано с тем, что для нее в элементарных функциях выражается обратная кумулятивная функция распределения вероятности по углу рассеяния θ . Интегральная функция распределения выглядит следующим образом:

$$P_{\text{HG}}(\cos \theta) = \int_{-1}^{\cos \theta} p_{\text{HG}}(s) ds = \frac{1 - g^2}{2g} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + g^2 - 2g \cos \theta}} - \frac{1}{1 + g} \right)$$

Тогда $\cos \theta$ распределён следующим образом:

$$\cos \theta = \frac{1}{2g} \left(1 + g^2 - \frac{(1 - g^2)^2}{(1 - g + 2g\chi)^2} \right),$$

где χ равномерно распределена на $[0; 1]$.

То есть трёхмерный пространственный интеграл преобразуется точно также, как и в случае плоских слоёв (2.5):

$$\int d\mathbf{r}'_j \Lambda(r'_j) p(t_j) f(r'_j, t_j) = \frac{1}{2\pi\mu(r)} \int_0^1 d\xi_j \int_0^1 d\chi_j \int_0^{2\pi} d\phi_j f(-\mu^{-1} \ln \xi_j, t(\chi_j)),$$

Тогда интенсивность n -ого порядка $J^{(n)}(1, s_f)$ в приближении средним по выборке из N_{ph} падающих фотонов в случае учёта кривизны, имеем

$$J^{(n)}(1, s_f) \simeq \sum_{i=1}^{N_{\text{ph}}} \frac{W_n^{(i)}}{N_{\text{ph}}} p(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_{nn-1}^{(i)}) e^{-\mu s_f l_n^{(i)}},$$

где величины $W_n^{(i)}$ - также случайные значения многократного пространственного интеграла. Переменная $l_j^{(i)}$ — это расстояние до границы от j -го события рассеяния. В нашем случае свойства среды зависят от радиуса r . Функция $\phi_e(r_{\text{sph},n}^{(i)}, \theta_{\text{sph},n}^{(i)}) = \exp(-\mu s_f l_n^{(i)})$ возникает вследствие затухания рассеянного

излучения, распространяющегося от случайной точки n -го события рассеяния $\mathbf{r}_{sph,n}^{(i)}$ к границе. Наглядно продемонстрируем, как мы считали $l_j^{(i)}$ для двух-слойной среды, в случае когда j -ое событие рассеяния находится внутри слоя В.

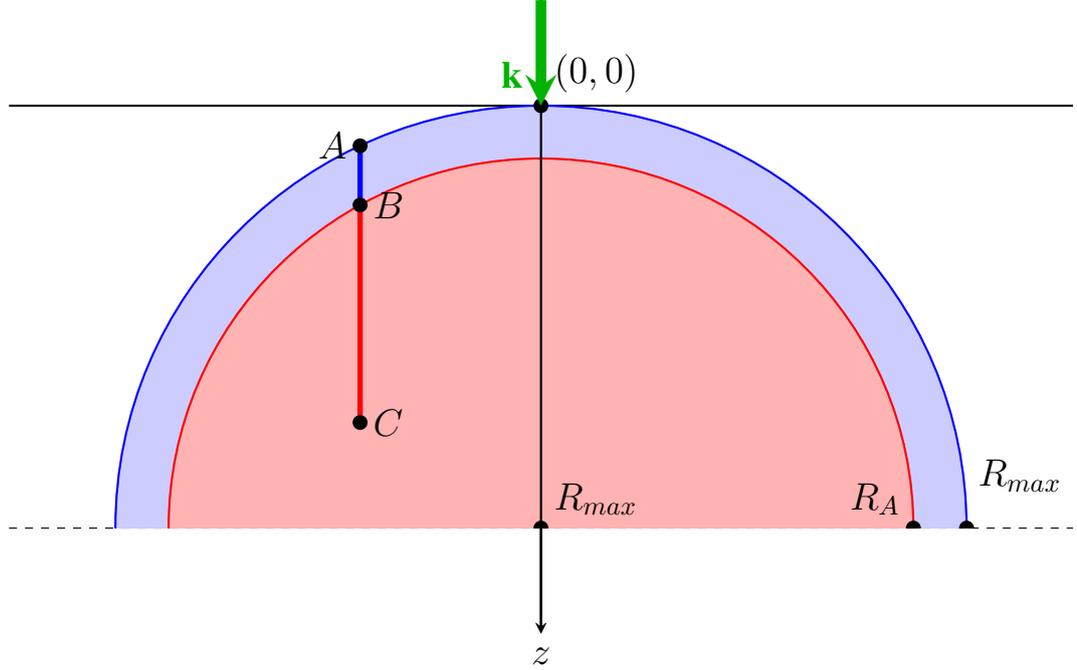


Рис. 2.1: Схематическое представление расчёта $l_j^{(i)}$.

На рисунке 2.1 фотон после $j - 1$ -ого рассеяния попал в точку С (событие j -ого рассеяния). Расстояние до границы от j -го события рассеяния это отрезок $AC = BC + AB$. Мы знаем координаты j -го события рассеяния (точки $C(x_c, y_c, z_c)$) Также мы знаем толщину слоёв А и В, а точнее радиусы (R_A, R_{max}). Тогда:

$$AB = \sqrt{R_{max}^2 - x_c^2 - y_c^2} - \sqrt{R_A^2 - x_c^2 - y_c^2} \quad (2.7)$$

$$BC = \sqrt{R_A^2 - x_c^2 - y_c^2} - R_{max} \quad (2.8)$$

В случае, когда j -ое событие находится в слое А

$$l_j^{(i)} = \sqrt{R_{max}^2 - x_c^2 - y_c^2} - R_{max}$$

Поскольку мы также не учитываем преломление при переходе между слоями, то мы предполагаем, что направление луча между соседними событиями рассеяния не меняется при движении в неоднородной среде. Поскольку мы рассматриваем вклад в рассеяние от каждого рассеяния каждого фотона, тогда

экспоненциальная функция распределения, определяющая затухание фотона, рассеянного из точки \mathbf{r} строго назад может быть представлена в следующем виде:

$$\exp\left(-\mu(r)l_n^{(i)}\right).$$

Поскольку коэффициент рассеяния μ зависит от r , то получается 2 ситуации:

$$\exp\left(-\mu(r)l_n^{(i)}\right) = \begin{cases} \exp\left(-\mu_A(\sqrt{R_{max}^2 - x_c^2 - y_c^2} - R_{max})\right), & R_{max} \geq r > R_A, \\ \exp\left(-(\mu_A AB + \mu_B BC)\right), & R_A \geq r > 0, \end{cases}$$

- где АВ и ВС определены в (2.7), (2.8).

Глава 2.4. Моделирование с учётом кривизны слоёв.

В данном разделе приводятся результаты расчётов интенсивности обратного рассеяния лазерного излучения ближнего инфракрасного диапазона двухслойной средой. Существуют данные по оптическим параметрам биотканей (см. напр. [6, 7, 8, 9]). Параметры для изучаемых в настоящей работе тканей, использованные нами при моделировании приведены в Таблице 2.1.

Таблица 2.1: Коэффициенты абсорбции μ_a мм⁻¹ и приведённые коэффициенты рассеяния μ'_s мм⁻¹ для различных тканей при заданной длине волны.

	Длина волны, λ							
	750 нм		850 нм		950 нм		1050 нм	
	μ_a	μ'_s	μ_a	μ'_s	μ_a	μ'_s	μ_a	μ'_s
Мозг	0.036	0.859	0.106	0.762	0.114	0.622	0.118	0.525
Череп	0.006	1.974	0.013	1.876	0.019	1.757	0.019	1.665
Кровь	0.530	0.725	0.720	0.649	0.930	0.650	0.560	0.645
Кожа	0.046	1.535	0.038	1.485	0.030	1.625	0.022	1.695

Моделирование проводилось методом МК с использованием традиционного метода обратного преобразования кумулятивной функции распределения вероятности длины свободного пробега фотона [1]. В расчётах полагалось, что в среду, лазерное излучение попадает вдоль направления оси z . В результате многократного рассеяния в двухслойной среде возникает обратное рассеяние. Мы фиксируем вклад интенсивности обратного рассеяния в каждой точке события

рассеяния. Поскольку наша модель симметрична относительно оси Z , вклад в интенсивность рассчитывался в точке на поверхности полусферы на расстоянии ρ от оси Z . В расчётах кратность рассеяния ограничивалась числом $n = 3 \cdot 10^5$, а объём выборки фотонов был выбран $N_{ph} = 10^6$.

В оптических исследованиях биотканей используется приведенный коэффициент рассеяния μ'_s (обратная транспортная длина), связанный с коэффициентом рассеяния μ_s (обратной длиной рассеяния) соотношением $\mu'_s = (1 - g)\mu_s$. Для нашего моделирования будем брать значения из таблицы 2.2. Мы хотим получить зависимость $\log_{10} J(\rho)$. Максимальное ρ возьмём 4 см по той причине, что далее в моделировании интенсивность на бóльших расстояниях слишком мала по сравнению (где-то в 10^{10} раз) с интенсивностью в точке $\rho = 0$. Обратный рассеянный фотон, будет "вылетать" из какого-то кольца. Фотон рассеивается строго назад с определённой вероятностью и вылетает из какого-то кольца. Программа фиксирует из какого кольца вылетел фотон. Для наглядности на рисунке 2.2 показано расположение колец (представлена только схема, количество колец мы выбираем для различных ситуаций).

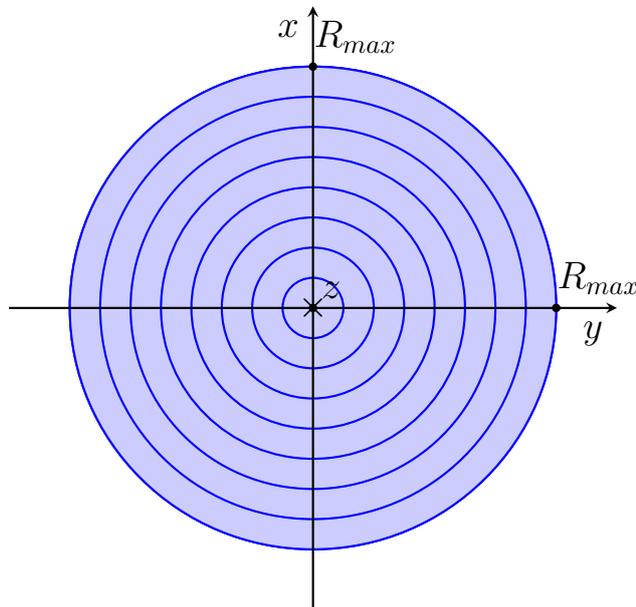


Рис. 2.2: Схематическое представление расположения колец для удобства подсчёта (вид сверху).

Гипотеза состоит в том, что на больших радиусах модели головы, результаты должны быть похожи на результаты в случае плоских слоёв. Для того, чтобы убедиться в этом, смоделируем различные ситуации:

2.4.1 Моделирование для двухслойной биоткани.

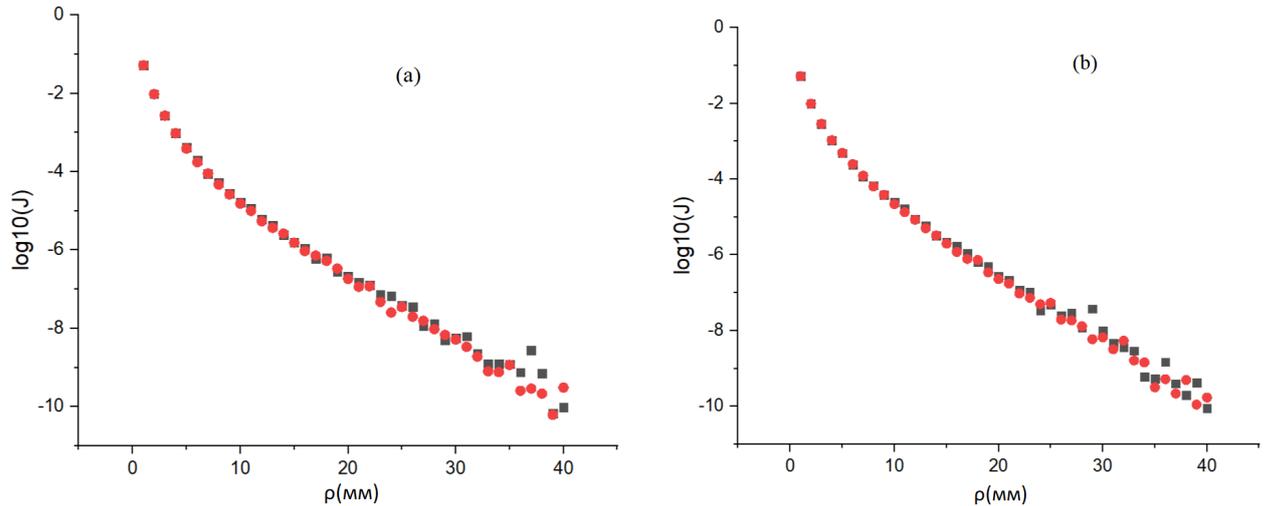


Рис. 2.3: Зависимость интенсивности обратного рассеяния в двухслойной модели череп (А) и мозг (В) от расстояния источник-приёмник. Толщина слоёв в случае плоских равна $T_{full} = 150\text{мм}$, в случае сферических слоёв $R_{max} = 150\text{мм}$. Значения толщины слоя А равны $T_A = 3\text{мм}$ (а) и $T_A = 5\text{мм}$ (б). ■ — сферические слои, ● — плоские слои.

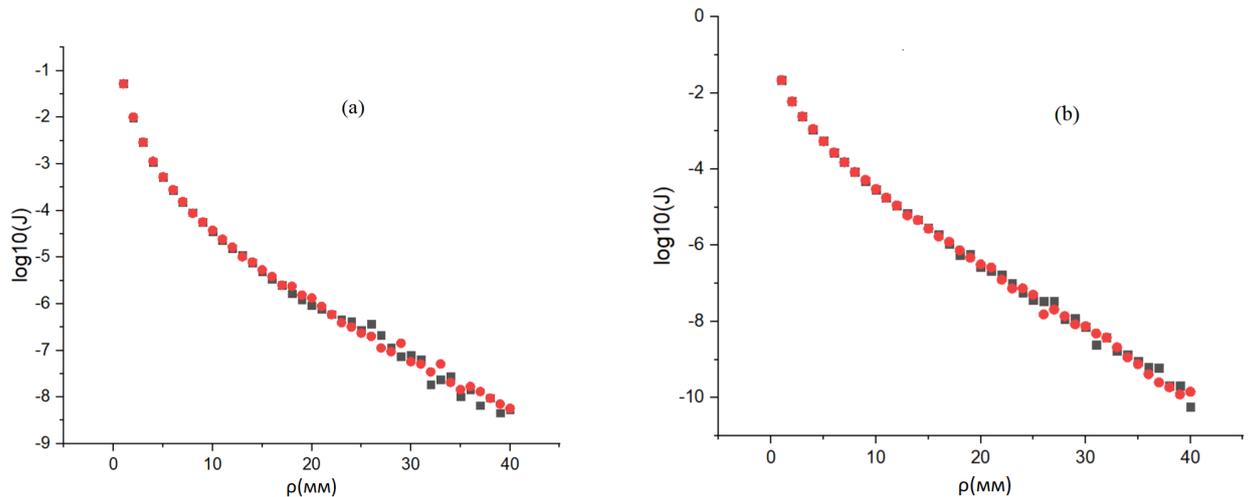


Рис. 2.4: Зависимость интенсивности обратного рассеяния в однослойной модели из костной ткани (а) и из мозга (б) от расстояния источник-приёмник. Толщина плоских слоёв равна $T_{full} = 150\text{мм}$, радиус сферических слоёв $R_{max} = 150\text{мм}$: ■ — сферические слои, ● — плоские слои.

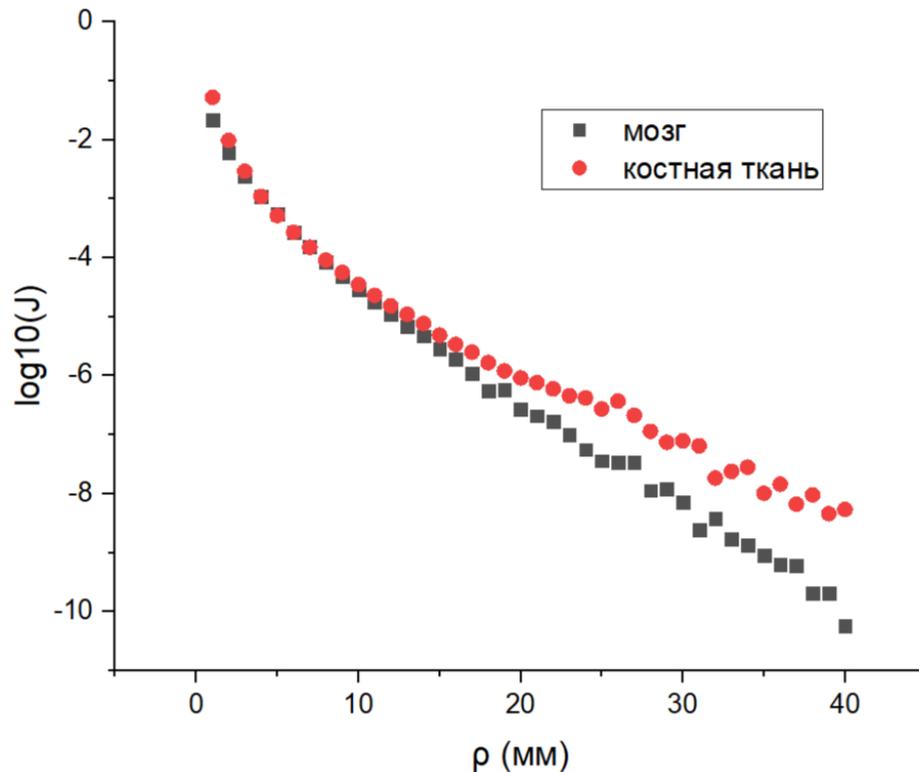


Рис. 2.5: Зависимость интенсивности обратного рассеяния в однослойной модели сферических слоёв ($R_{max} = 150\text{мм}$) от расстояния источник-приёмник: ■ — костная ткань, ● — мозг.

Из рисунков 2.3 - 2.4 можно утверждать, что наша гипотеза оказалась верна. Отличия есть только при больших ρ , но их можно объяснить случайностью нашего процесса. Теперь мы хотим узнать на каких радиусах плоские слои и полусферы не отличаются. Смоделируем 3 ситуации:

1. Плоские слои с толщиной $T = 150\text{мм}$.
2. Сферические слои с радиусом $R_{max} = 150\text{мм}$.
3. Сферические слои с радиусом $R_{max} = 80\text{мм}$.

Мы написали плоские, а не полубесконечные, по той причине, что в ходе моделирования было выяснено, что ни один фотон из 10^6 не рассеялся ниже 150 мм. В связи с этим, мы будем рассматривать полубесконечные, как плоские с толщиной $T = 150\text{ мм}$. Рассмотрим рассеяние при различных толщинах слоя А(череп).

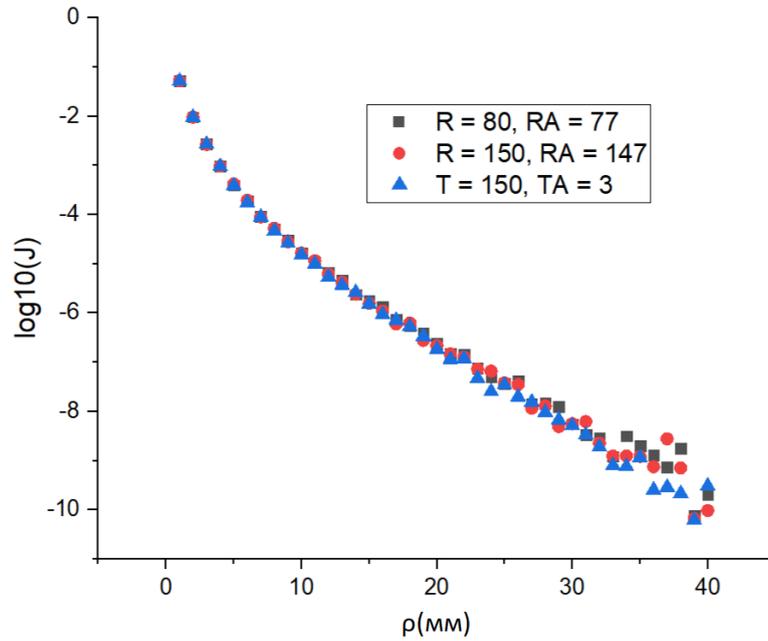


Рис. 2.6: Зависимость интенсивности обратного рассеяния в двухслойной модели череп (А) и мозг (В) от расстояния источник-приёмник для толщины слоя $T(A) = 3$ мм в трёх случаях: ■ — $R_{max} = 80$ мм, ● — $R_{max} = 150$ мм, ▲ — $T = 150$ мм.

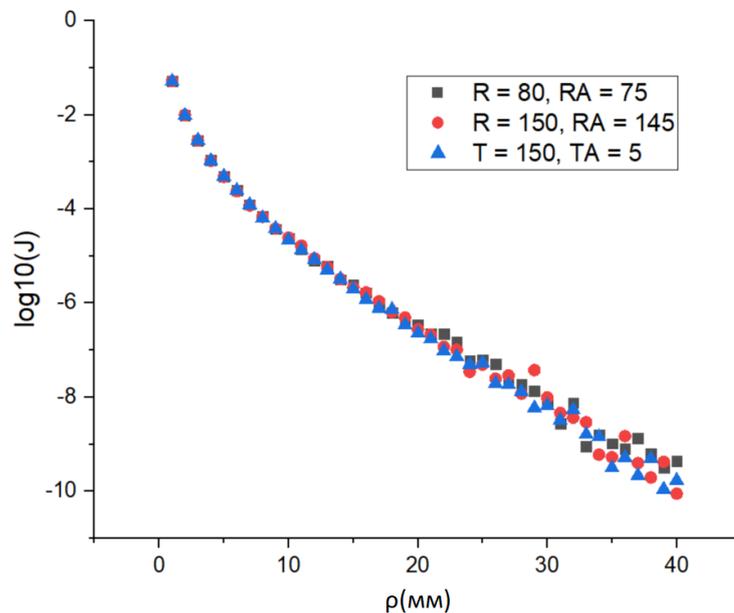


Рис. 2.7: Зависимость интенсивности обратного рассеяния в двухслойной модели череп (А) и мозг (В) от расстояния источник-приёмник для толщины слоя $T(A) = 5$ мм в трёх случаях: ■ — $R_{max} = 80$ мм, ● — $R_{max} = 150$ мм, ▲ — $T = 150$ мм.

Как мы видим различий практически нет, то есть мы можем приближённо рассматривать сферические слои, как плоские.

2.4.2 Сравнение результатов моделирования рассеяния системами плоских и сферических слоёв.

Главная задача данной работы, узнать влияние кривизны модели головы в приближении полусферы на интенсивность обратного рассеяния. Исследуем до какого радиуса головы это приближение работает. Чтобы это узнать будем рассматривать однослойную систему А (череп), но при различных радиусах R_{max} . Будем уменьшать радиус от 80мм до 10 мм.

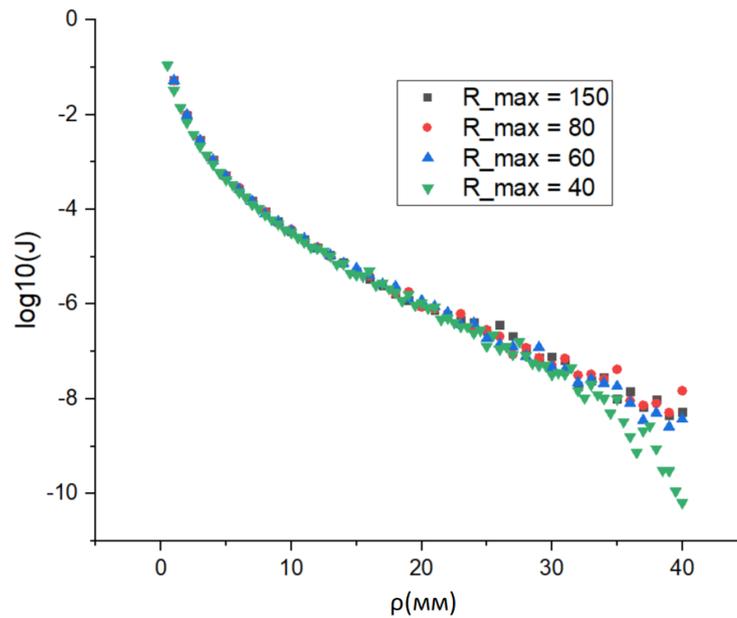


Рис. 2.8: Зависимость интенсивности обратного рассеяния в половине шара из костной ткани от расстояния источник-приёмник для различных радиусов: ■ — $R_{max} = 150$ мм, ● — $R_{max} = 80$ мм, ▲ — $R_{max} = 60$ мм, ▼ — $R_{max} = 40$ мм.

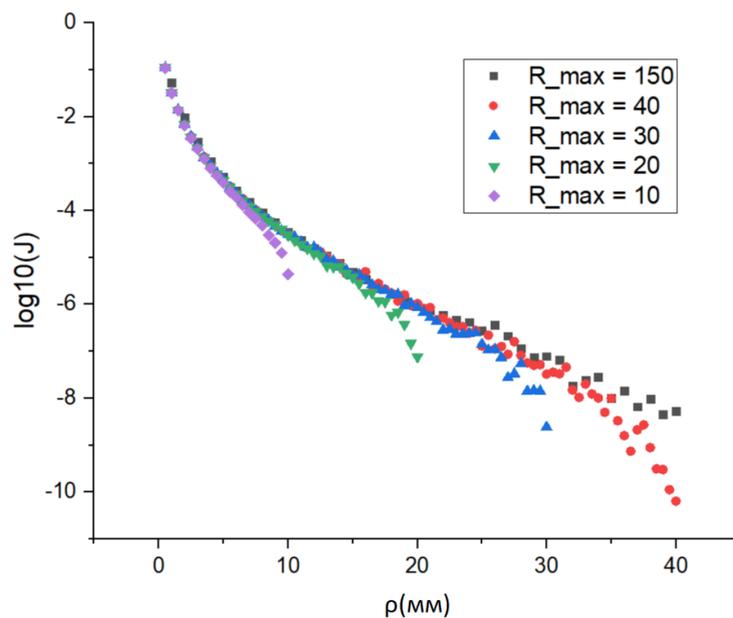


Рис. 2.9: Зависимость интенсивности обратного рассеяния в половине шара из костной ткани от расстояния источник-приёмник для различных радиусов: \blacksquare — $R_{max} = 150$ мм, \bullet — $R_{max} = 40$ мм, \blacktriangle — $R_{max} = 30$ мм, \blacktriangledown — $R_{max} = 20$ мм, \blacklozenge — $R_{max} = 10$ мм.

На основе этих данных, можно предположить, что влияние кривизны головы на интенсивность обратного рассеяния заметна при радиусах 4 см и меньше. Большие радиусы можно рассматривать, как полубесконечные с конечной толщиной слоёв. Результаты вполне логичны и их можно объяснить. На рисунке 2.10 представлена схематическое представление сравнения плоских слоёв и черепа.

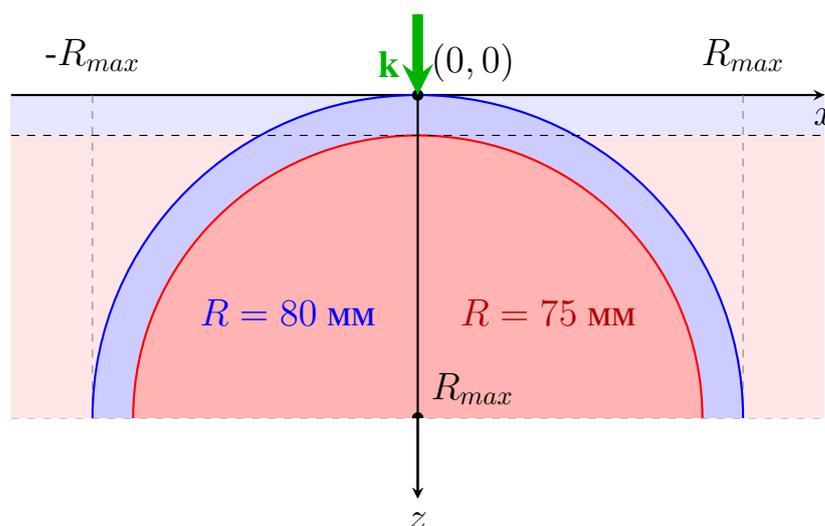


Рис. 2.10: Схематическое представление сравнения плоских слоёв и сферических.

По данным [10] в голове человека содержится около 100-150 мл. В случае удара и последующего попадания крови в СМЖ, различают три степени тяжести: когда в СМЖ попало менее 50 мл крови (слабая), 51 - 100 мл крови (средние), 101 мл и более (тяжелые). Поэтому рассмотрим как меняется интенсивность обратного рассеяния в случае когда в СМЖ попадает кровь. Для того, чтобы учесть попадания крови в смж, воспользуемся коэффициентами адсорбции (μ_a) и рассеяния (μ'_s) крови, взятой из работы [11].

Таблица 2.2: Коэффициенты адсорбции μ_a мм⁻¹ и приведённые коэффициенты рассеяния μ'_s мм⁻¹ для СМЖ при заданной длине волны.

	Длина волны, λ							
	750 нм		850 нм		950 нм		1050 нм	
	μ_a	μ'_s	μ_a	μ'_s	μ_a	μ'_s	μ_a	μ'_s
СМЖ	0.002	0.001	0.004	0.001	0.039	0.001	0.016	0.001

Глава 2.5. Влияние радиуса кривизны рассеивающего объёма на результаты расчётов в четырёхслойной модели.

Расширим рассмотренную модель на случай четырёх слоёв. А именно, кожа (А), череп(В), СМЖ (С) и мозг (D). На самом деле слоёв больше, кожа содержит свои слои, имеет волосяные фолликулы и тд. Но мы рассмотрим более детальную модель четырёх слоёв. Таким образом, в главе проводится расчёт зависимости интенсивности обратного рассеяния лазерного излучения от ρ (расстояние от точки обратного рассеяния луча до оси Z). Источник находится в непосредственной близости к точке входа луча. Затем отдельно будет рассмотрено влияние попадания крови в СМЖ в случае травмы головы.

2.5.1 Моделирование на случай четырёх слоёв.

Рассматривается четырёхслойная система из слоёв А, В, С, D. Слой А находится в области $R_{max} \geq r > R_A$, слой В в области $R_A \geq r > R_B$, слой С в области $R_B \geq r > R_C$ и слой D в области $R_C \geq r > 0$. В это случае наше $\mu(r)$

выглядит следующим образом:

$$\mu(r) = \begin{cases} \mu_A, & R_{max} \geq r > R_A, \\ \mu_B, & R_A \geq r > R_B, \\ \mu_C, & R_B \geq r > R_C, \\ \mu_D, & R_C \geq r > 0, \end{cases}$$

Тогда случайное расстояние, на которое рассеется фотон равно:

$$\mathbf{r} = \begin{cases} -\mu_A^{-1} \ln(1 - \xi), & \xi_A \geq \xi > 0, & \xi_A = 1 - \exp^{-\mu_A R_A}, \\ -\mu_B^{-1} \ln(1 - \xi), & \xi_B \geq \xi > \xi_A, & \xi_B = 1 - \exp^{-\mu_B R_B}, \\ -\mu_C^{-1} \ln(1 - \xi), & \xi_C \geq \xi > \xi_B, & \xi_C = 1 - \exp^{-\mu_C R_C}, \\ -\mu_D^{-1} \ln(1 - \xi), & 1 \geq \xi > \xi_C. \end{cases}$$

Параметр анизотропии (g) для крови равен $g_A = 0.9$ [12], для кости $g_B = 0.9$ [1], для СМЖ $g_C = 0.98$ [13] и для мозга $g_D = 0.9$ [14]. Фазовая функция Хеньи–Гринштейна остаётся неизменной. Рассмотрим, как считается расстояние до границы от j -ого события рассеяния на случай 4-ёх слоёв:

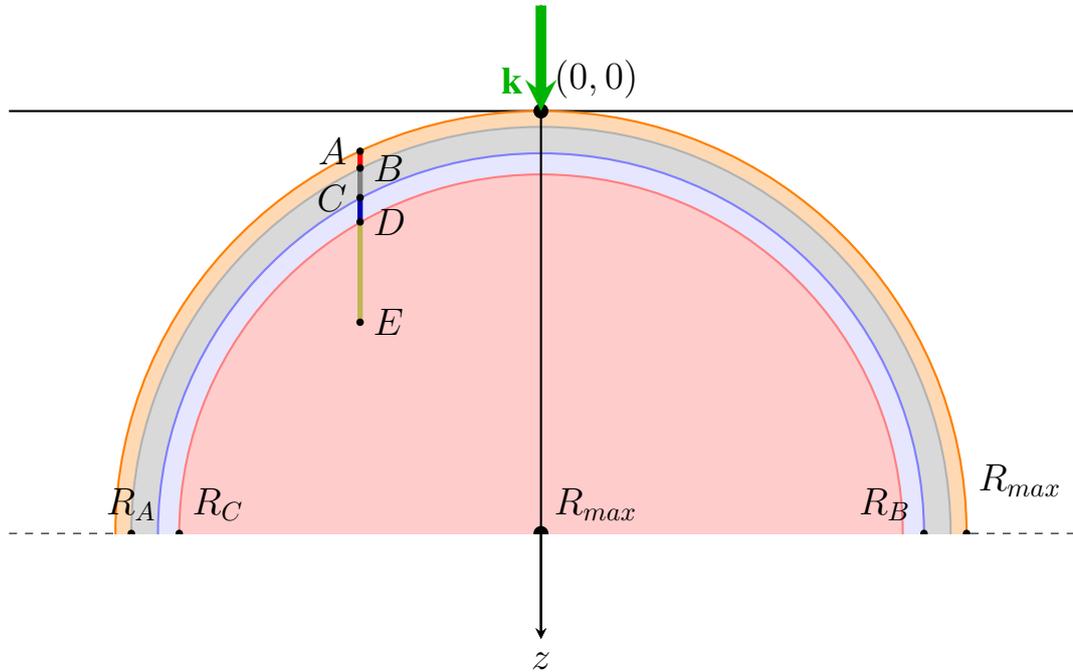


Рис. 2.11: Схематическое представление расчёта $l_j^{(i)}$ в случае 4-ёх слоёв.

На рисунке 2.11 расстояние до границы от j -го события рассеяния это отрезок $AE = AB + BC + CD + DE$. Мы знаем координаты j -го события рассеяния (точки $E(x_E, y_E, z_E)$) Также мы знаем толщины слоёв А, В, С, D, а точнее радиусы (R_{max}, R_A, R_B, R_C). Тогда мы можем спокойно найти АЕ, аналогично формулам 2.7, 2.8.

Можно расписать для всех 4-ёх случаев, когда событие рассеяние находится в слое А, В, С, D. Аналогично, как и в случае 2-ух слоёв, можно расписать экспоненциальную функцию (закон Бугера - Ламберта - Бера) для всех 4-ёх случаев.

2.5.2 Результаты моделирования четырёхслойной модели.

В данном разделе приводятся результаты расчётов интенсивности обратного рассеяния лазерного излучения в четырёхслойной среде. Данные взяты из Таблицы 2.2.

Моделирование проводилось точно такое же как и в двухслойной система. В расчётах кратность рассеяния ограничивалась числом $n = 3 \cdot 10^5$, а объём выборки фотонов был выбран $N_{ph} = 10^6$.

Нам интересна ситуация, когда кровь попала в СМЖ. Чтобы смоделировать такую ситуацию мы возьмём коэффициент рассеяния для среды СМЖ (μ) в виде суммы коэффициентов μ для СМЖ и крови в процентном соотношении. Например в случае, если кровь будет составлять 10% от объёма СМЖ, то $\mu = 0.9\mu_{СМЖ} + 0.1\mu_{кровь}$. Поскольку, как мы выяснили в разделе 2.2, голова радиуса 8 см и 15 см не отличимы, то будем рассматривать $R_{max} = 80$ мм. Так как это ближе к реальному радиусу головы человека. Теперь рассмотрим результаты моделирования.

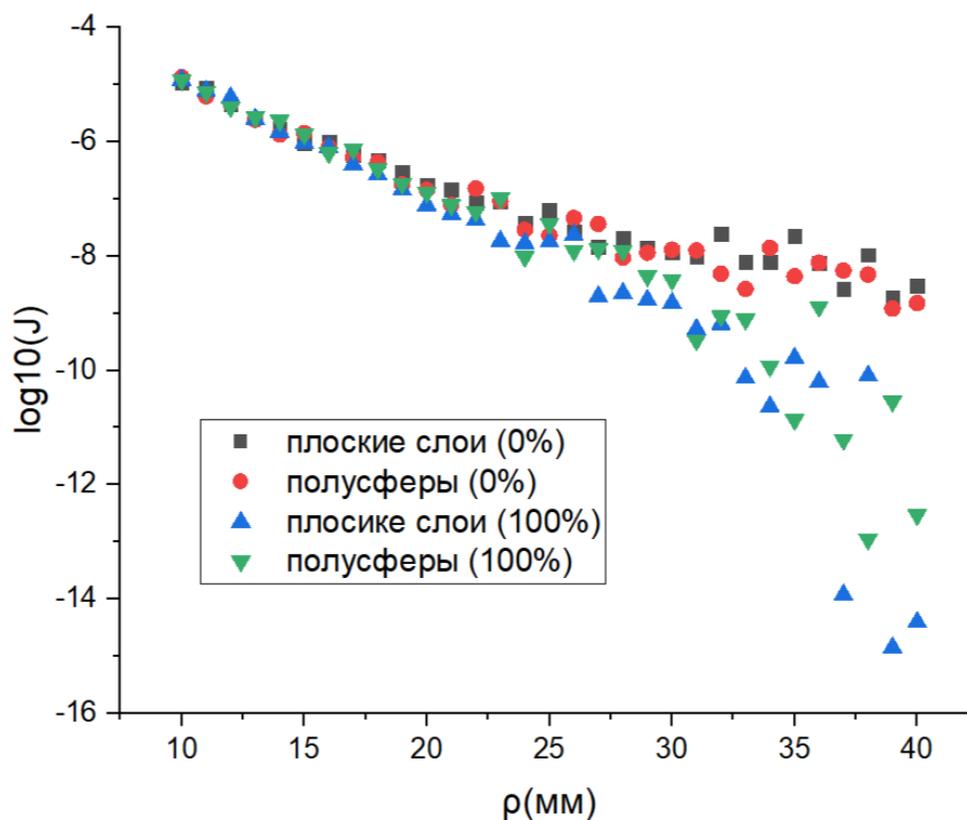


Рис. 2.12: Зависимость интенсивности обратного рассеяния в четырёхслойной модели: кожа (А), череп (В), СМЖ (С), мозг (D) от расстояния источник-приёмник при различной концентрации крови в СМЖ: ■ — плоские слои (0%), ● — полусферические слои (0%), ▲ — плоские слои (100%), ▼ — полусферические слои (100%).

Из графика, можно сказать, что наличие крови в СМЖ, очень сильно заметно на расстояниях от точки входа, падающих фотонов, более 2 см. Рассмотрим различные концентрации крови в СМЖ, чтобы выяснить, при каком количестве крови в СМЖ, её можно заметить.

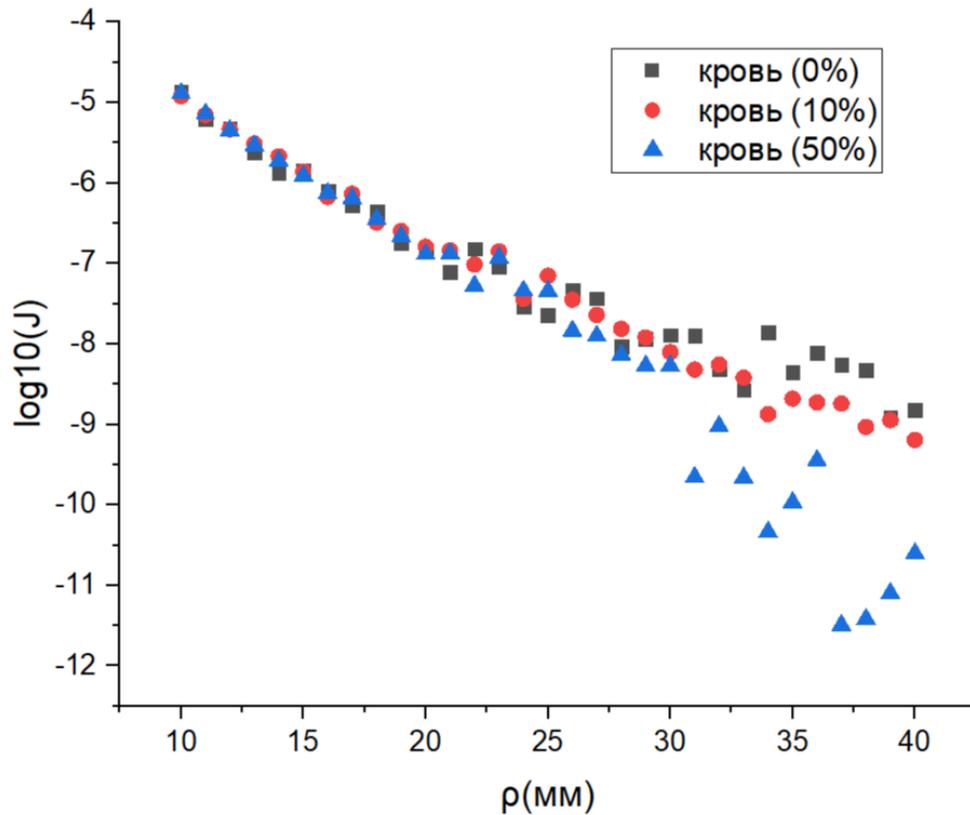


Рис. 2.13: Зависимость интенсивности обратного рассеяния в четырёхслойной модели: кожа (А), череп (В), СМЖ (С), мозг (D) от расстояния источник-приёмник при различной концентрации крови в СМЖ: ■ — 0%, ● — 10%, ▲ — 50%.

Как видно из графика, концентрация более 10% сильно влияет на интенсивность обратного рассеяния на расстояниях более 3 см от точки входа лазерного луча.

Глава 3

Заключение

Перечислим основные результаты, полученные в настоящей работе.

1. В разделе 2.1 проведён расчёт интенсивности обратного рассеяния лазерного инфракрасного излучения на двухслойной случайно неоднородной биоткани. В качестве биоткани была рассмотрена голова. Простейшей моделью головы является система «череп–мозг». Было рассмотрено 2 случая: плоские бесконечные слои, конечной толщины и полусферические слои. Моделирование переноса излучения в биоткани основывалось на уравнении Бете–Солпитера в лестничном приближении, решение которого представлено в виде разложения по кратностям рассеяния. Каждый член разложения является многократным интегралом, вычисление которого производится методом Монте-Карло. Были рассчитаны зависимости интенсивности обратного рассеяния от расстояния между точкой входа луча и точкой выхода фотона. Изучено влияние на интенсивность рассеяния кривизны черепа при различных толщинах черепа. Изучено влияние на интенсивность обратного рассеяния радиуса кривизны черепа. Из рисунка **2.11**, можно утверждать, что кривизна головы влияет на интенсивность обратного рассеяния на радиусах менее 40 мм. При бóльших 4 см, можно вполне рассматривать модель головы, как плоские полубесконечные слои. Для моделирования был использован традиционный метод MCML.

2. В разделе 2.2 проведён расчёт интенсивности обратного рассеяния лазерного инфракрасного излучения на четырёхслойной случайно неоднородной биоткани. В качестве основной модели рассматривалась система «кожа — череп — спинномозговая жидкость(СМЖ) — мозг», которая лучше подходит для

моделирования головы человека, чем рассмотренная в разделе 2.1 упрощённая двухслойная биомодель «череп – мозг». В расчётах, для моделирования длины свободного пробега фотона также был применен, как традиционный метод MCML, так и был рассмотрен модифицированный метод на случай 4-ёх слоёв. Было произведено сравнение модели плоских слоёв и полусферических. Изучено влияние на интенсивность обратного рассеяния радиуса кривизны черепа.

3. В разделе 2.5 был рассмотрен случай попадания крови в СМЖ для четырёхслойной системы. Моделирование проводилось теми же методами, что и в разделе 2.2. Были рассмотрены различные концентрации крови в СМЖ. На основе данных из графика 2.13, можно сказать, что даже небольшое попадание крови в СМЖ очень сильно влияет на интенсивность обратного рассеяния.

Список литературы

- [1] L. Wang, S. L. Jacques, L. Q. Zheng, *Comput. Meth. Prog. Bio.* **47**, 131, (1995).
- [2] В.Л. Кузьмин, А.Ю. Вальков, Л.А. Зубков, *ЖЭТФ* **155**, 460, (2019).
- [3] В. Л. Кузьмин, Ю. А. Жаворонков, С. В. Ульянов, А. Ю. Вальков, *ЖЭТФ* **161**(6), 779, (2022).
- [4] Ю.А. Жаворонков, С. В.Ульянов, А.Ю.Вальков, В. Л. Кузьмин, *Письма в ЖЭТФ* **117** (5), 389–396, (2023).
- [5] В.В. Тучин, *Оптика биологических тканей. Методы рассеяния света в медицинской диагностике*, IPR Media, Москва, (2021).
- [6] A.N. Bashkatov, E.A. Genina, V. I. Kochubey et al., *J. Phys. D. Appl* **38**, 2543–2555, (2005).
- [7] A.N. Bashkatov, E.A. Genina, V.I. Kochubey et al., *Proc. SPIE* **6163**, 616310, (2006).
- [8] J.D. Johansson, *J. Biomed. Opt.* **15**, 0570059, (2010).
- [9] E.A. Genina, A.N. Bashkatov, D.K. Tuchina et al., *Biomed. Opt. Express* **10**, 5182–5197, (2019).
- [10] Wright BL, Lai JT, Sinclair AJ, "Cerebrospinal fluid and lumbar puncture: a practical review". *Journal of Neurology.* 259 (8): 1530–45. doi:10.1007/s00415-012-6413-x
- [11] R. Francis, B. Khan, G. Alexandrakis, J. Florence, D. MacFarlane. DOI:10.1364/BOE.6.003256
- [12] S.L. Jacques(2013), "Optical properties of biological tissues: a review"DOI: 10.1088/0031-9155/58/11/R37
- [13] A. Roggan(1999), "Optical properties of circulating human blood in the wavelength range 400–2500 nm"DOI: 10.1117/1.429919

[14] Yaroslavsky, A.N., et al. (2002). "Optical properties of selected native and coagulated human brain tissues in vitro in the visible and near infrared spectral range"DOI: 10.1088/0031-9155/47/12/305