

Санкт-Петербургский государственный университет

*Конохов Данила Кириллович*

Выпускная квалификационная работа

*"Расчет показателей аномального скейлинга в модели Крейчнана  
турбулентного перемешивания пассивной примеси"*

Уровень образования: бакалавриат, 4 курс

Направление 03.03.20 «Физика»

Основная образовательная программа 03.03.20 «Физика»

Научный руководитель:  
профессор,  
кафедра статистической физики,  
д.ф.-м.н.,  
Аджемян Лоран Цолакович

Рецензент:  
профессор,  
кафедра физики высоких энергий  
и элементарных частиц,  
д.ф.-м.н.,  
Антонов Николай Викторович

Санкт-Петербург

2024 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Модель Крейчнана турбулентного перемешивания пассивной примеси</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Квантово-полевая формулировка модели Крейчнана</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Структурные функции, аномальный скейлинг</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Метод ренормгруппы</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Вычисление показателей аномального скейлинга</b>	<b>13</b>
<b>7</b>	<b>Ренормировка оператора <math>F_{22}</math></b>	<b>14</b>
7.1	Вычисление $\Gamma_1$ . . . . .	17
7.2	Вычисление $\Gamma_2$ . . . . .	17
7.3	Вычисление $\Gamma_3$ . . . . .	19
<b>8</b>	<b>Заключение</b>	<b>20</b>
<b>9</b>	<b>Приложение</b>	<b>21</b>
9.1	Интегрирование по времени . . . . .	21
9.2	Угловое усреднение . . . . .	22
9.3	Формулы для интегрирования по модулям векторов в трёхпетлевой диаграмме . . . . .	24
9.4	Список вкладов $A_{ijk}$ для расчёта трёхпетлевой диаграммы . . . . .	25
<b>10</b>	<b>Список литературы</b>	<b>25</b>

# 1 Введение

Одним из важных следствий турбулентного движения воздушных масс в атмосфере является явление турбулентного перемешивания пассивной примеси. Оно проявляется, в частности, в том, что после выброса в атмосферу вулканических масс, их расплывание вдоль поверхности Земли обусловлено как усредненными турбулентными потоками (перенос вдоль поверхности), так и пульсационной составляющей скорости, которая на порядки ускоряет процесс расплывания облака примеси по сравнению с обычным диффузионным механизмом. С теоретической точки зрения большой интерес представляет изучение статистических характеристик поля примеси. Значительным успехом в статистическом описании как самого поля турбулентных пульсаций скорости, так и поля примеси, является феноменологическая теория Колмогорова. Однако эксперимент показывает систематические отклонения от предсказаний этой теории – так называемый аномальный скейлинг. Последовательной теории этого явления до сих пор не получено, однако было обнаружено, что если описывать статистику поля турбулентных пульсаций некоторой упрощенной моделью, то для статистики примесного поля удается обосновать явление аномального скейлинга и рассчитать в некоторых приближениях аномальные показатели. В дипломной работе рассматриваются некоторые попытки уточнения этих расчетов.

## 2 Модель Крейчнана турбулентного перемешивания пассивной примеси

Влияние турбулентности в атмосфере на выбросы вулканов и промышленные выбросы сказывается двояко. Постоянная составляющая потоков переносит эти выбросы вдоль земной поверхности, а пульсационная составляющая способствует их перемешиванию, расплыванию. В отсутствие турбулентности рассасывание неоднородностей описывается уравнением диффузии

$$\partial_t \psi = D \Delta \psi. \quad (1)$$

Здесь  $\psi(\vec{x}, t)$  – поле концентрации примеси,  $D$  – коэффициент диффузии. Величина  $\psi(\vec{x}, t)$  может также иметь смысл неоднородностей поля температуры, в этом случае (1) – уравнение теплопроводности, а  $D$  – коэффициент температуропроводности. Последующее рассмотрение охватывает оба этих случая. Наличие турбулентных пульсаций многократно ускоряет процесс рассасывания неоднородностей, их влияние можно учесть, заменив в (1) производную по времени на субстанциональную производную, учитывающую движение среды:

$$\partial_t \rightarrow \nabla_t = \partial_t + v_j \partial_j, \quad \partial_j \equiv \partial_{x_j}. \quad (2)$$

Выполнив такую замену в (1) и добавив уравнение Навье-Стокса для поля скорости  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ , получаем замкнутую систему уравнений

$$\begin{cases} \nabla_t \psi = D \Delta \psi, \\ \nabla_t v_j = -\partial_j P + \nu \Delta v_j, \quad \partial_j v_j = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Примесь предполагается «пассивной», не влияющей на динамику турбулентного потока, она не входит в уравнение Навье-Стокса. Идея модели Крейчнана состоит в том, чтобы отказаться от решения этого уравнения, а моделировать каким-либо образом статистику пульсаций скорости и изучить влияние турбулентности на перемешивание пассивной примеси. Простейшая модель такого рода основана

на идее максимальной хаотичности поля пульсаций скорости, имеющей нулевое среднее значение и заданный парный коррелятор вида:

$$\langle v_i(\vec{k}, t_1)v_j(-\vec{k}, t_2) \rangle = D_{ij}(\vec{k}, t_1 - t_2) = R_{ij}(\vec{k})\delta(t_1 - t_2) = P_{ij}(\vec{k})R(k)\delta(t_1 - t_2), \quad P_{ij}(\vec{k}) \equiv \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (4)$$

Коррелятор записан в импульсно-временном представлении, предполагается однородность и изотропность поля скорости, условие несжимаемости в (3) приводит к пропорциональности коррелятора поперечному проектору  $P_{ij}(\vec{k})$ . Компоненты скорости не коррелируют в различные моменты времени – хаотичность поля скорости. Другое проявление хаотичности в том, что статистика поля скорости предполагается гауссовой (максимально хаотичное распределение при заданном парном корреляторе).

Поставим задачу расчета функции Грина  $\widehat{G}(\vec{x}, t)$  пассивной примеси:

$$\nabla_t \widehat{G}(\vec{x}, t) = D\Delta \widehat{G}(\vec{x}, t) + \delta(\vec{x})\delta(t). \quad (5)$$

Уравнение (5) является стохастическим – в него входит случайный параметр с заданной статистикой. В отличие от стохастического уравнения Ланжевена, в котором случайная сила входит слагаемым, в данном случае случайный параметр (скорость) входит мультипликативно. Решение уравнения (5) зависит от реализации случайного параметра и, тем самым, само является случайным, это отражается шляпкой над функцией Грина. Нас интересует результат усреднения такого решения по всевозможным реализациям случайной скорости.

Будем искать решение уравнения (5) по теории возмущений, считая скорость формально малым параметром. Хотя на самом деле он таковым не является, простота задачи позволяет в данном случае точно просуммировать полученный ряд. В низшем порядке теории возмущений имеем

$$\partial_t G_0(\vec{x}, t) = D\Delta G_0(\vec{x}, t) + \delta(\vec{x})\delta(t). \quad (6)$$

В фурье-представлении (6) переходит в уравнение

$$\partial_t G_0(\vec{k}, t) = -Dk^2 G_0(\vec{k}, t) + \delta(t), \quad (7)$$

которое легко решается:

$$G_0(\vec{k}, t) = \theta(t)e^{-Dk^2 t}, \quad \partial_t \theta(t) = \delta(t). \quad (8)$$

Совершая обратное преобразование Фурье, получаем в  $\vec{x}, t$ -представлении:

$$G_0(\vec{x}, t) = \theta(t) \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{(4\pi Dt)^{3/2}}, \quad (9)$$

а переход в (7) к частотному представлению дает

$$G_0(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{-i\omega + Dk^2}. \quad (10)$$

В подробной записи уравнение (5) имеет вид

$$\partial_t \widehat{G}(\vec{x}, t) = D\Delta \widehat{G}(\vec{x}, t) - v_j(\vec{x}, t)\partial_j \widehat{G}(\vec{x}, t) + \delta(\vec{x})\delta(t). \quad (11)$$

Теорию возмущений удобней строить в интегральной записи этого уравнения. Используя функцию

Грина  $G_0(\vec{x}, t)$  из (11), получим

$$\hat{G}(\vec{x}, t) = G_0(\vec{x}, t) - \int dt_1 \int d\vec{x}_1 G_0(\vec{x} - \vec{x}_1, t - t_1) v_j(\vec{x}_1, t_1) \partial_{x_j} \hat{G}(\vec{x}_1, t_1). \quad (12)$$

В диаграммной записи это уравнение имеет вид

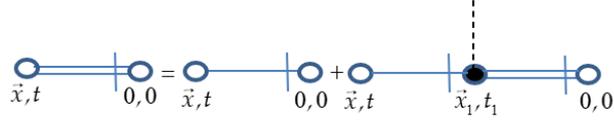


Рис. 1

Здесь введены диаграммные обозначения



Рис. 2

для функций Грина и

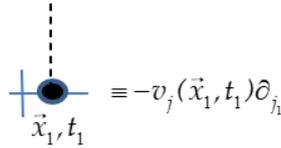


Рис. 3

– для «вершины» взаимодействия. Не зачерненные кружочки соответствуют фиксированным координате и времени, по зачерненным подразумевается интегрирование.

Первый шаг решения по теории возмущений диаграммного уравнения из рис.1 состоит в замене во втором слагаемом правой части полной функции Грина  $\hat{G}(\vec{x}, t)$  на  $G_0(\vec{x}, t)$ , т.е. на первое слагаемое правой части. На втором шаге такая замена делается с учетом найденной поправки первого порядка и т.д. В результате получаем следующий диаграммный ряд теории возмущений:

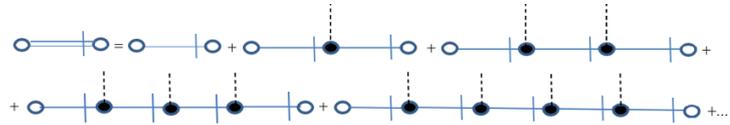


Рис. 4

Следующий шаг – усреднение полученного решения. Введем следующие диаграммные обозначения для усредненной полной функции Грина и коррелятора скоростей:

$$\langle \hat{G}(\vec{x} - \vec{x}_1, t - t_1) \rangle \equiv \text{---} \circ_{\vec{x}, t} \text{---} \circ_{\vec{x}_1, t_1} \text{---} \quad \langle v_i(\vec{x}_1, t_1) v_j(\vec{x}_2, t_2) \rangle \equiv \text{---} \circ_{\vec{x}_1, t_1, i} \text{---} \text{---} \circ_{\vec{x}_2, t_2, j} \text{---}$$

Рис. 5

Усреднение диаграммного ряда на рис.(5) проводится по правилу Вика: надо сложить диаграммы со всевозможными соединениями пунктирных хвостиков между собой, слагаемые с нечетным числом хвостиков вклада не дают. В результате получим:

$$\begin{aligned} & \text{---} \circ_{\vec{x}, t} \text{---} \circ_{\vec{x}_1, t_1} \text{---} = \text{---} \circ_{\vec{x}, t} \text{---} \circ_{\vec{x}_1, t_1} \text{---} + \text{---} \circ_{\vec{x}, t} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \circ_{\vec{x}_1, t_1} \text{---} + \\ & + \text{---} \circ_{\vec{x}, t} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \circ_{\vec{x}_1, t_1} \text{---} + \\ & + \text{---} \circ_{\vec{x}, t} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \circ_{\vec{x}_1, t_1} \text{---} + \\ & + \text{---} \circ_{\vec{x}, t} \text{---} \bullet \text{---} \circ_{\vec{x}_1, t_1} \text{---} + \dots \end{aligned}$$

Рис. 6

Приведем в качестве примера подробную расшифровку второго слагаемого правой части:

$$\begin{aligned} & \text{---} \circ_{\vec{x}, t} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \circ_{\vec{x}_1, t_1} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \circ_{\vec{x}_2, t_2} \text{---} \bullet \text{---} \circ_{0,0} \text{---} = \int d\vec{x}_1 \int dt_1 \int d\vec{x}_2 \int dt_2 G_0(\vec{x} - \vec{x}_1, t - t_1) \cdot \\ & \cdot R_{jl}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, t_1 - t_2) \partial_{x_j} G_0(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, t_1 - t_2) \partial_{x_l} G_0(\vec{x}_2, t_2) \end{aligned}$$

Рис. 7

Благодаря наличию  $\theta$ -функций  $G_0$  (см. (9)), для времен этой диаграммы справедливы неравенства  $t > t_1 > t_2 > 0$ . В то же время коррелятор скоростей содержит множитель  $\delta(t_1 - t_2)$  (см. (4)). Произведение  $\theta(t_1 - t_2) \cdot \delta(t_1 - t_2)$  нуждается в доопределении, которое обсудим ниже. Аналогичная проблема имеет место для третьего слагаемого на рис.6. В то же время наличие набора  $\theta$ -функций и  $\delta$ -функций в последних двух слагаемых приводит к тому, что они обращаются в ноль. В результате остаются следующие ненулевые диаграммы:

Покажем, что в  $\vec{k}, \omega$ -представлении этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию. Перепишем правую часть рисунка 7 в виде

$$\delta G(\vec{x}, t) = \int d\vec{x}_1 \int dt_1 \int d\vec{x}_2 \int dt_2 G_0(\vec{x} - \vec{x}_1, t - t_1) \Sigma_l(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, t_1 - t_2) \psi_l(\vec{x}_2, t_2), \quad (13)$$

где

$$\Sigma_l(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, t_1 - t_2) = R_{jl}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, t_1 - t_2) \partial_{x_j} G_0(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, t_1 - t_2), \quad \psi_l(\vec{x}_2, t_2) = \partial_{x_l} G_0(\vec{x}_2, t_2). \quad (14)$$

Правая часть (13) представляет собой двойную свертку по  $\vec{x}, t$ , поэтому в  $\vec{k}, \omega$ -представлении переходит в произведение:

$$\delta G(\vec{k}, \omega) = G_0(\vec{k}, \omega) \Sigma_l(\vec{k}, \omega) \psi_l(\vec{k}, \omega). \quad (15)$$

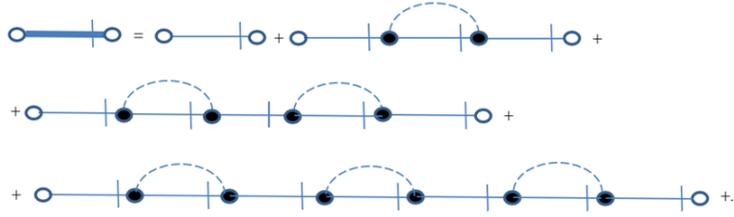


Рис. 8

С учетом того, что  $\psi_l(\vec{k}, \omega) = ik_l G_0(\vec{k}, \omega)$ , из (15) получаем

$$\delta G(\vec{k}, \omega) = G_0^2(\vec{k}, \omega) \Sigma(\vec{k}, \omega), \quad (16)$$

где

$$\Sigma(\vec{k}, \omega) = ik_l \Sigma_l(\vec{k}, \omega). \quad (17)$$

Переходя аналогичным образом к  $\vec{k}, \omega$ -представлению в старших диаграммах рисунка (8), получаем для усредненной функции  $G(\vec{k}, \omega) = \langle \widehat{G}(\vec{k}, \omega) \rangle$ :

$$\begin{aligned} G(\vec{k}, \omega) &= G_0(\vec{k}, \omega) + G_0^2(\vec{k}, \omega) \Sigma(\vec{k}, \omega) + G_0^3(\vec{k}, \omega) \Sigma^2(\vec{k}, \omega) + \dots = \\ &= G_0(\vec{k}, \omega) \left[ 1 + G_0(\vec{k}, \omega) \Sigma(\vec{k}, \omega) + \left( G_0(\vec{k}, \omega) \Sigma(\vec{k}, \omega) \right)^2 + \dots \right] = \frac{G_0(\vec{k}, \omega)}{1 - G_0(\vec{k}, \omega) \Sigma(\vec{k}, \omega)}, \end{aligned} \quad (18)$$

откуда, с учетом (10),

$$G^{-1}(\vec{k}, \omega) = G_0^{-1}(\vec{k}, \omega) - \Sigma(\vec{k}, \omega) = -i\omega + Dk^2 - \Sigma(\vec{k}, \omega). \quad (19)$$

Вычислим величину  $\Sigma(\vec{k}, \omega)$ . Запишем ее вначале в  $\vec{k}, t$ -представлении, исходя из (17), (14):

$$\Sigma(\vec{k}, t) = ik_l \int d\vec{x} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} R_{jl}(\vec{x}, t) F_j(\vec{x}, t), \quad F_j(\vec{x}, t) \equiv \partial_j G_0(\vec{x}, t). \quad (20)$$

Воспользуемся теоремой о свертке (Фурье от произведения = свертке):

$$\Sigma(\vec{k}, t) = ik_l \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} R_{jl}(\vec{q}, t) F_j(\vec{k} - \vec{q}, t). \quad (21)$$

Согласно (4), (8), (20), здесь

$$R_{ij}(\vec{q}, t) = R_{ij}(\vec{q}) \delta(t) = P_{ij}(\vec{q}) R(q) \delta(t), \quad P_{ij}(\vec{q}) \equiv \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2}, \quad (22)$$

$$F_j(\vec{k} - \vec{q}, t) = i(\vec{k} - \vec{q})_j G_0(\vec{k} - \vec{q}, t) = i(\vec{k} - \vec{q})_j \theta(t) e^{-D(\vec{k} - \vec{q})^2 t}. \quad (23)$$

Переходя в (21) к  $\omega$ -представлению, с учетом (21)–(23) получаем:

$$\Sigma(\vec{k}, \omega) = ik_l \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \delta(t) \theta(t) \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} P_{jl}(\vec{q}) R(q) i(k_j - q_j) e^{-D(\vec{k} - \vec{q})^2 t}. \quad (24)$$

Учитывая, что  $\delta(t) e^{i\omega t} e^{-D(\vec{k} - \vec{q})^2 t} = \delta(t)$ , интеграл по времени в (24) сводится к  $\int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t) \theta(t)$ . Здесь мы сталкиваемся с упомянутой выше неопределенностью. Она раскрывается с учетом того, что вхо-

дающая в (4) функция  $\delta(t_1 - t_2) = \delta(t)$  по происхождению должна пониматься как предел четных по  $t$  функций, поэтому в нашем случае

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t) \theta(t) = \frac{1}{2} \quad (25)$$

С учетом этого, сворачивая в (24) значки, получаем

$$\Sigma(\vec{k}, \omega) = \frac{-1}{2} k^2 \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \left[ 1 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{q})^2}{k^2 q^2} \right] R(q). \quad (26)$$

Переходя к сферической системе координат с полярной осью вдоль  $\vec{k}$ , в которой  $\frac{(\vec{k} \cdot \vec{q})^2}{k^2 q^2} = (\cos \theta)^2$  и интегрируя по углам, имеем

$$\Sigma(\vec{k}, \omega) = \frac{-k^2}{6\pi^2} \int_0^{\infty} dq q^2 R(q). \quad (27)$$

Получили очень простой ответ, не зависящий от частоты и квадратичный по импульсу. Подстановка его в (19) показывает, что влияние турбулентности свелось к переопределению коэффициента диффузии:

$$G^{-1}(k, \omega) = -i\omega + D_{\text{эфф}} k^2, \quad (28)$$

где эффективный коэффициент диффузии  $D_{\text{эфф}} = D + D_{\text{турб}}$ , а турбулентный коэффициент диффузии  $D_{\text{турб}}$  дается выражением

$$D_{\text{турб}} = \frac{1}{6\pi^2} \int_0^{\infty} dq q^2 R(q). \quad (29)$$

В  $\vec{k}, t$ -представлении теперь получаем

$$G(k, t) = \theta(t) e^{-D_{\text{эфф}} k^2 t}. \quad (30)$$

Для явного вычисления  $D_{\text{турб}}$  можно воспользоваться экспериментальными данными о парном корреляторе скорости. Существенно то, что он на несколько порядков превышает обычный коэффициент диффузии  $D$ . Это видно из следующих оценок. Из соображений размерности  $D_{\text{турб}} \sim V \cdot L$ , где  $V$  и  $L$  – характерные масштабы турбулентных пульсаций скорости. Тогда  $\frac{D_{\text{турб}}}{D} \sim \frac{VL}{D} = \frac{VL}{\nu} \cdot \frac{\nu}{D} = Re \cdot \frac{\nu}{D}$ . Число Шмидта  $\frac{\nu}{D}$  – величина порядка единицы, в то время как для развитой турбулентности число Рейнольдса  $Re \gg 1$ . Таким образом,  $\frac{D_{\text{турб}}}{D} \gg 1$  и турбулентное перемешивание пассивной примеси многократно ускоряет процесс.

### 3 Квантово-полевая формулировка модели Крейчнана

Мы рассмотрели релаксацию поля примеси после внесения начального возмущения. Для изучения стационарного состояния в уравнение (3) добавляют источник – «случайную силу»  $f$

$$\partial_t \psi + v_j \partial_j \psi - D \Delta \psi - f = 0, \quad (31)$$

для которой принимается гауссово распределение с нулевым средним и парной функцией

$$\langle f(\vec{x}_1, t_1) f(\vec{x}_2, t_2) \rangle_f = \delta(t_1 - t_2) C(x/L), \quad x = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|, \quad (32)$$



имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i\omega + Dk^2 \\ -i\omega + Dk^2 & -d_f \end{pmatrix}, \quad (42)$$

ей соответствует обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{-\omega^2 - D^2k^4} \begin{pmatrix} -d_f & -i\omega - Dk^2 \\ i\omega - Dk^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

С её помощью находятся пропагаторы в  $\omega, \vec{k}$ -представлении:

$$\langle \psi\psi \rangle_0(k, \omega) = \frac{d_f(k)}{\omega^2 + D^2k^4}, \quad (44)$$

$$\langle \psi\psi' \rangle_0(k, \omega) = \frac{1}{-i\omega + Dk^2}, \quad (45)$$

$$\langle \psi'\psi \rangle_0(k, \omega) = \frac{1}{i\omega + Dk^2}, \quad (46)$$

$$\langle \psi'\psi' \rangle_0(k, \omega) = 0 \quad (47)$$

Пропагаторы в  $\vec{k}, t$ -представлении соответственно имеют вид:

$$\langle \psi(t_1)\psi(t_2) \rangle_0(k) = \frac{d_f(k)}{2Dk^2} e^{-Dk^2|t|} = \begin{array}{c} t_1 \text{-----} t_2 \\ | \\ \text{-----} \end{array}, \quad t = t_1 - t_2, \quad (48)$$

$$\langle \psi(t_1)\psi'(t_2) \rangle_0(k) = \theta(t) e^{-Dk^2t} = \begin{array}{c} t_1 \text{-----} | \text{-----} t_2 \\ | \\ \text{-----} \end{array}, \quad t = t_1 - t_2, \quad (49)$$

$$\langle \psi'(t_1)\psi(t_2) \rangle_0(k) = \theta(-t) e^{Dk^2t} = \begin{array}{c} t_1 \text{-----} | \text{-----} t_2 \\ | \\ \text{-----} \end{array}, \quad t = t_1 - t_2, \quad (50)$$

$$\langle \psi'(t_1)\psi'(t_2) \rangle_0(k) = 0 \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \langle v_i(t_1)v_j(t_2) \rangle_0(\vec{k}) &= P_{ij}(\vec{k})R(k)\delta(t_1 - t_2) = (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2})\theta(k - m)k^{-d-\varepsilon}g_0D_0\delta(t_1 - t_2) = \\ &= \begin{array}{c} t_1 \text{-----} j \text{-----} i \text{-----} t_2 \\ | \\ \text{-----} \end{array} \end{aligned} \quad (52)$$

## 4 Структурные функции, аномальный скейлинг

В рассматриваемой модели объектом изучения выступают структурные функции, зависящие от расстояния. Особенность задачи состоит в том, что есть несколько характерных размеров: размер диссипирующих вихрей  $l$ , размер самых крупных вихрей  $L$  и инерционный интервал между ними  $l \ll r \ll L$ , который существует, так как для развитой турбулентности  $l \ll L$ . В работе рассматривались структурные функции в инерционном интервале

$$S_{2n}(r) = \langle [\psi(t, \vec{x}) - \psi(t, \vec{x}')]^{2n} \rangle. \quad (53)$$

В этом случае можно упростить вид функции  $R(k)$  из уравнения (4), которая моделирует турбулентность, и выбрать ее в степенном виде

$$R(k) = A_0 k^{-d-\varepsilon}. \quad (54)$$

Слагаемое  $-d$  в показателе степени выделено для удобства, вклад  $-\varepsilon$  выбирается в соответствии с теорией, предложенной Колмогоровым. Параметром, управляющим статистикой турбулентности, является средняя скорость диссипации энергии на единицу массы  $\bar{\varepsilon}$ , имеющая размерность  $sm^2/s^3$ . Согласно соотношению (4) размерность величины  $R(k)$  равна  $sm^{d+2}/s$ . Чтобы приравнять в (54) степени секунд, надо положить  $A_0 \sim \bar{\varepsilon}^{1/3}$ , после чего из баланса сантиметров находим  $\varepsilon = 4/3$ .

Из подобных соображений можно написать ответ и для структурных функций. Из (31), (32) следует, что размерность поля  $\psi$  равна  $s^{1/2}$ , поэтому размерность структурной функции (53) равна  $s^n$ , отсюда

$$S_{2n}(r) \sim \bar{\varepsilon}^{-n/3} r^{2n/3}. \quad (55)$$

Эксперимент и численное моделирование показывают, что существует отклонение показателя степени от колмогоровского значения (55), так что

$$S_{2n}(r) \sim \bar{\varepsilon}^{-n/3} r^{2n/3} (L/r)^{\zeta_n}. \quad (56)$$

Обоснование этого соотношения аномального скейлинга и расчет аномальных показателей  $\zeta_n$  является сложной проблемой. Эффективный способ ее решения – метод ренормгруппы. В рамках этого метода при использовании теории возмущений параметр  $\varepsilon$  в (54) считается произвольным, а  $\varepsilon = 4/3$  – его физическим значением. "Стартовое" значение параметра  $\varepsilon$  выбирается так, чтобы при нем эффективный параметр разложения

$$g_0 = A_0/D_0 \quad (57)$$

был безразмерным. Таковым оказывается значение  $\varepsilon = 0$ . Метод ренормгруппы позволяет находить критические индексы в виде рядов по формально малому параметру, в окончательных выражениях полагается  $\varepsilon = 4/3$ . Здесь и далее исходное (неренормированное) значение коэффициента диффузии будет обозначаться  $D_0$ .

## 5 Метод ренормгруппы

Диаграммы теории возмущений содержат при  $\varepsilon = 0$  ультрафиолетовые (УФ) расходимости, проявляющиеся при  $\varepsilon \rightarrow +0$  в виде полюсов по  $\varepsilon$ . Расходимости сосредоточены в 1-неприводимых подграфах диаграмм. В модели с действием (37)-(39) имеется единственный такой подграф  $\langle \psi\psi' \rangle_{1-ir}$ . Для устранения расходимостей путем ренормировки вводится контрчлен вида  $\psi\Delta\psi'$ . Таким образом, для исключения УФ-расходимостей достаточно произвести мультипликативную перенормировку параметров  $D_0$  и  $g_0$  с единственной независимой константой ренормировки  $Z_D$ :

$$D_0 = DZ_D, \quad g_0 = g\mu^\varepsilon Z_g, \quad Z_g = Z_D^{-1} \quad (A_0 = g_0 D_0 = g\mu^\varepsilon D). \quad (58)$$

Здесь  $\mu$  – "ренормализационная масса" в схеме минимальных вычитаний (MS),  $g$  и  $D$  – ренормированные аналоги величин  $g_0$  и  $D_0$ ,  $Z = Z(g, \varepsilon, d)$  – ренормировочные константы. В схеме MS они имеют вид "1+только полюса по  $\varepsilon$ ". Последнее равенство в (58) – следствие отсутствия ренормировки величины  $A_0$ . При вычислении констант ренормировки необходимо регуляризовать диаграммы в инфракрасной (ИК) области. В схеме MS константы ренормировки не зависят от вида такой регуляризации. Мы реализуем ее путем введения в функцию (54) дополнительного множителя  $\theta(k-m)$ , где  $m = 1/L$ .

Главный член ряда теории возмущений для полной функции отклика  $\langle \psi\psi' \rangle$  (пропагатор) (49) совпадает с невозмущенной функцией Грина (8). Нетрудно убедиться, что и весь ряд совпадает с рядом на рис.6 для полной функции Грина. Поэтому можно воспользоваться для полной функции отклика

$\langle \psi \psi' \rangle$  решением (30). При этом надо учесть, что соотношение (26) в  $d$ -мерном случае приобретает вид

$$\Sigma(\vec{k}, \omega) = \frac{-1}{2} k^2 \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^d} \left[ 1 - \frac{(\vec{k} \vec{q})^2}{k^2 q^2} \right] R(q) = \frac{-k^2}{2} \frac{S_d}{(2\pi)^d} \left(1 - \frac{1}{d}\right) \int_0^\infty dq q^{d-1} R(q). \quad (59)$$

Поставляя в это выражение  $R(q)$  из (54) и выполняя интегрирование с учетом множителя  $\theta(k-m)$ , получаем

$$\Sigma(\vec{k}, \omega) = -k^2 \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{d-1}{2d\varepsilon} A_0 m^{-\varepsilon}. \quad (60)$$

Подставляя это выражение в (19), находим

$$D_{\text{эфф}} = D_0 + \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{d-1}{2d\varepsilon} A_0 m^{-\varepsilon}. \quad (61)$$

Переходя к ренормированным переменным согласно (58), получаем отсюда

$$D_{\text{эфф}} = D \left[ Z_D + u \frac{d-1}{2d\varepsilon} \left( \frac{\mu}{m} \right)^\varepsilon \right], \quad (62)$$

где введен заряд  $u = \frac{S_d g}{(2\pi)^d}$ . Выбирая константу ренормировки  $Z_D$  из условия отсутствия полюсов в  $D_{\text{эфф}}$ , находим в схеме MS:

$$Z_D = 1 - u \frac{d-1}{2d\varepsilon}. \quad (63)$$

Этот результат является точным – не содержит поправок со старшими степенями  $u^n$ . Подстановка (63) в (62) дает

$$D_{\text{эфф}} = D \left[ 1 + u \frac{d-1}{2d\varepsilon} \left( \left( \mu/m \right)^\varepsilon - 1 \right) \right]. \quad (64)$$

Уравнение ренормгруппы для мультипликативно ренормируемой корреляционной функции  $F = Z_F F_R$  получается из условия ее независимости от  $\mu$  в терминах неренормированных параметров. Будучи выраженным в ренормированных параметрах, это уравнение становится нетривиальным и имеет вид уравнения в частных производных

$$(\mu \partial_\mu + \beta \partial_u - \gamma_D D \partial_D + \gamma_F) F_R = 0. \quad (65)$$

Здесь

$$\beta \equiv \tilde{D}_\mu u, \quad \gamma \equiv \tilde{D}_\mu \ln Z = \beta \partial_u \ln Z \quad (66)$$

для любого  $Z$  и использована операция

$$\tilde{D}_\mu \equiv \mu \partial_\mu \Big|_0, \quad (67)$$

где  $\partial_\mu|_0$  – производная при фиксированных неренормированных параметрах. Из (65) и формулы ренормировки (58) находим

$$\beta = -g(\varepsilon + \gamma_g). \quad (68)$$

Совместно с (66) это дает

$$\beta = \frac{-g\varepsilon}{1 + g\partial_g \ln Z_g}, \quad \gamma = \frac{-\varepsilon g \partial_g \ln Z}{1 + g\partial_g \ln Z_g}. \quad (69)$$

Ренормгрупповые функции  $\gamma$  не содержат полюсов по  $\varepsilon$ , в схеме MS они вообще от  $\varepsilon$  не зависят. Это позволяет упростить формулу (69) для  $\gamma$ :

$$\gamma = -g\partial_g Z^{(1)}, \quad (70)$$

где  $Z^{(1)}$  – коэффициент при первом полюсе в  $Z$ . Отсюда из (63) сразу получаем

$$\gamma_D = u \frac{d-1}{2d}, \quad (71)$$

после чего связь констант ренормировок (58) дает

$$\gamma_g = -u \frac{d-1}{2d}, \quad \beta = -u \left( \varepsilon - u \frac{d-1}{2d} \right). \quad (72)$$

В (72) подразумевается переход к  $\beta$ -функции заряда  $u$ .

Неподвижная точка  $u_*$  ренормгруппы определяется условием  $\beta(u_*) = 0$ . Точка устойчива, если  $\omega(u_*) > 0$ , где  $\omega(u) = \partial_u \beta$ . Для  $\beta$ -функции (72) устойчивой точкой является

$$u_* = \frac{2d\varepsilon}{d-1}. \quad (73)$$

В неподвижной точке уравнение (65) ренормгруппы принимает вид

$$(\mu \partial_\mu - \gamma_D^* D \partial_D + \gamma_F^*) F_R = 0, \quad \gamma^* \equiv \gamma(u_*) \quad (74)$$

и определяет показатели  $\gamma^*$  критического скейлинга.

## 6 Вычисление показателей аномального скейлинга

Ренормгрупповой анализ показывает, что в инфракрасной области  $r \gg l$  структурные функции имеют скейлинговую форму

$$S_{2n}(r) = A_0^{-n} r^{n(2-\varepsilon)} \xi(mr). \quad (75)$$

В инерционном интервале  $mr \ll 1$  функция  $\xi(mr)$  имеет согласно гипотезе Колмогорова конечный предел и при физическом значении  $\varepsilon = 4/3$  соотношение (75) переходит в (55). Аномальный скейлинг возникает, если функция  $\xi(mr)$  имеет асимптотику

$$\xi(mr) \sim (mr)^{\Delta_n}, \quad (76)$$

значения показателя  $\Delta_n$  при  $\varepsilon = 4/3$  определяют показатели аномального скейлинга  $\zeta_n$  в (56).

Впервые обоснование асимптотики (76) и вычисление показателей  $\Delta_n$  проведено в работах [1, 2, 3, 4] с помощью анализа нетривиальных нулевых мод соответствующих дифференциальных операторов. В качестве малых параметров рассматривалась величина  $\varepsilon$  в работах [1, 2] и  $1/d$  в работах [3, 4]. Было получено

$$\Delta_n = -2n(n-1)\varepsilon/(d+2) + O(\varepsilon^2) = -2n(n-1)\varepsilon/d + O(1/d^2). \quad (77)$$

Отметим, что главный асимптотический член по  $1/d$  содержится в первом члене  $\varepsilon$ -разложения. Уточнить  $1/d$  разложение до сих пор не удалось.

Точность расчета аномальных показателей в рамках  $\varepsilon$ -разложения была значительно увеличена в работах [5, 6, 7]. Было показано, что в рамках РГ-подхода показатели  $\Delta_n$  в асимптотике (76) определяются критическими размерностями некоторых составных операторов. В модели (32) такими операторами являются

$$F_n = (\partial_i \psi \partial_i \psi)^n. \quad (78)$$

Включение в модель составных операторов приводит к дополнительным УФ-расходимостям. Опре-

деляя константу ренормировки из условия  $F_n = Z_n F_n^R$  и вычисляя соответствующие ей величины  $\gamma_n(u) = \beta \partial_u \ln Z$  и  $\gamma_n^* = \gamma_n(u_*)$ , можно найти выражение для показателя главного асимптотического вклада в (76) в виде

$$\Delta_n = n\varepsilon/2 + \gamma_n^*. \quad (79)$$

В работе [5] произведен расчет  $\gamma_n^*$  во втором порядке по  $\varepsilon$ . При учете в (32) возможных анизотропных вкладов требуется рассмотреть ренормировку составных операторов более общего вида [6]

$$F_{n,l} = IRP[\partial_{i_1}\psi \dots \partial_{i_l}\psi (\partial_i\psi \partial_i\psi)^p], \quad (80)$$

где  $l$  – число свободных векторных индексов,  $n = l + 2p$  – общее число полей  $\psi$ . Символ  $IRP$  означает неприводимую часть (свертка по любой паре индексов равна нулю), в частности,

$$F_{2,2} = \partial_i\psi \partial_j\psi - \delta_{ij}(\partial_k\psi \partial_k\psi)/d. \quad (81)$$

Формула (79) приобретает в этом случае вид

$$\Delta_{n,l} = n\varepsilon/2 + \gamma_{n,l}^*. \quad (82)$$

В работе [7] результаты обобщены на третий порядок  $\varepsilon$ -разложения.

В работе [8] удалось в замкнутом виде рассчитать показатель  $\Delta_{2,2}$  при любых  $d$  и  $\varepsilon$ . В работе [7] показано, что результаты  $\varepsilon$ -разложения этой величины согласуются с результатами работы [8] при  $d = 2$  и  $d = 3$ . В настоящей работе проводится более детальный, чем в [7], анализ ренормировки оператора (82) и сравнение результатов с [8].

## 7 Ренормировка оператора $F_{22}$

Результат работы [8] для  $\Delta_{2,2}$ , выраженный через  $\gamma_{2,2}^*$  с помощью (82), имеет вид

$$\gamma_{22}^*(\varepsilon) = -\frac{d}{2} - 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{(2d^2 + 2d + 4)\varepsilon}{d-1} + (d+2)^2}. \quad (83)$$

В рамках РГ это соответствует подстановке  $u = u_*$  в функцию  $\gamma_{2,2}(u)$ . Учитывая линейную связь (73)  $u_*$  и  $\varepsilon$ , из (83) получаем

$$\gamma_{22}(u) = \frac{d}{2} - 1 - \frac{(d-1)u}{4d} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(d-1)^2 u^2}{4d^2} + \frac{(2d^2 + 2d + 4)u}{2d} + (d+2)^2}. \quad (84)$$

С использованием (66) константу ренормировки  $Z_{2,2}$  можно выразить через  $\gamma_{22}(u)$ :

$$Z_{22} = \exp \left[ \int_0^u \frac{\gamma_{22}(u')}{\beta(u')} du' \right], \quad (85)$$

откуда

$$\begin{aligned} Z_{22} = & 1 - \frac{u}{d(d+2)\varepsilon} - \frac{(d^2 + d - 4)u^2}{4(d+2)^2 d^2 \varepsilon^2} + \frac{(d+1)u^2}{4d(d+2)^3 \varepsilon} \\ & - \frac{(d^2 + d - 4)(d^2 + d - 3)u^3}{12d^3(d+2)^3 \varepsilon^3} + \frac{(d+1)(d^2 + d - 5)u^3}{12d^2(d+2)^4 \varepsilon^2} - \frac{(d+1)(d^2 + d + 2)u^3}{12d^2(d+2)^5 \varepsilon} + O(u^4). \end{aligned} \quad (86)$$

Далее константа  $Z_{22}$  будет вычисляться по диаграммам и результат сравниваться с (86).

Прежде чем переходить к конкретным расчетам, сделаем замечания по поводу вклада в диа-

граммы вставку в линию  $\psi\psi'$ . Сумма таких вставок дает полное среднее  $\langle\psi\psi'\rangle$ , для которого найден точный результат. В терминах ренормированных переменных он имеет, согласно (64), вид

$$\langle\psi\psi'\rangle(k, t) = \theta(t)\exp\left[-D_{\text{эфф}}k^2t\right] = \theta(t)\exp\left[-Dk^2t\left(1 + u\frac{d-1}{2d\varepsilon}\left((\mu/m)^\varepsilon - 1\right)\right)\right]. \quad (87)$$

В схеме MS константы ренормировки не зависят от  $\mu/m$ , поэтому при их вычислении можно в (86) положить  $\mu/m = 1$  и, используя линии  $\psi\psi'$  в виде  $\theta(t)\exp[-Dk^2t]$ , не учитывать вставки в линии.

Константа ренормировки  $Z_{22}$  оператора  $F_{22}$  определяется лестничными диаграммами вида

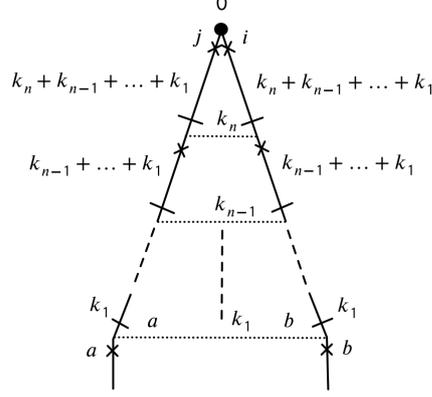


Рис. 9

Вычисления будем проводить в  $\vec{k}, t$ -представлении. Введем удобные обозначения для суммы импульсов от  $\vec{k}_1$  до  $\vec{k}_s$ :  $\vec{k}_{1s} \equiv \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \dots + \vec{k}_s$ . В этих обозначениях зависимость от индексов  $i$  и  $j$  в вершине, соответствующая составному оператору  $F_{22}$ , дается выражением

$$(k_{1n})_i(k_{1n})_j - \delta_{ij}k_{1n}^2/d. \quad (88)$$

Нижние индексы  $a$  и  $b$  определяют производные от внешних полей  $\partial_a\psi\partial_b\psi$ , которые могут считаться взятыми в одной и той же точке, поскольку расходящейся части диаграммы соответствует стягивание ее в точку. Произведение  $\partial_a\psi\partial_b\psi$  сворачивается по значкам с поперечным проектором

$$\delta_{ab} - (\hat{k}_1)_a(\hat{k}_1)_b, \quad (89)$$

соответствующим нижнему коррелятору скорости. После всех интегрирований получаем выражение вида

$$D_{ijab}\partial_a\psi\partial_b\psi. \quad (90)$$

Тензор  $D_{ijab}$  в отсутствие выделенного направления имеет структуру

$$D_{ijab} = c_1\delta_{ij}\delta_{ab} + c_2\delta_{ia}\delta_{jb} + c_3\delta_{ib}\delta_{ja}. \quad (91)$$

Коэффициенты  $c_i$  не являются независимыми, учитывая симметрию по  $i, j$  и условие  $D_{iiaa} = 0$ , (91) сводится к соотношению

$$D_{ijab} = C[(\delta_{ia}\delta_{jb} + \delta_{ib}\delta_{ja})/2 - \delta_{ij}\delta_{ab}/d], \quad (92)$$

откуда

$$D_{ijab}w_a w_b = C(w_i w_j - \delta_{ij}w_a w_a/d) = CF_{22}, \quad (93)$$

где  $C = \frac{2D_{ijab}\delta_{ia}\delta_{jb}}{(d-1)(d+2)}$ . Определяющее зависимость от  $i, j, a, b$  произведение величин (88) и (89) после

сворачивания значков дает

$$[(k_{1n})_i(k_{1n})_j - \delta_{ij}k_{1n}^2/d] [\delta_{ab} - (\hat{k}_1)_a(\hat{k}_1)_b] \delta_{ia}\delta_{jb} = k_{2n}^2 - \left(k_{2n}\hat{k}_1\right)^2 - \frac{d-1}{d}k_{1n}^2. \quad (94)$$

Интегрирование по времени обсуждается в Приложении 1. Оно дает множитель

$$\frac{1}{2^n D^n k_1^2 k_{12}^2 \dots k_{1n}^2}. \quad (95)$$

Свертка поперечных проекторов корреляторов скоростей с соответствующими импульсами дает множитель

$$k_1^2 [1 - (\hat{k}_1 \hat{k}_2)^2] k_{12}^2 [1 - (\hat{k}_{12} \hat{k}_3)^2] \dots k_{1,n-1}^2 [1 - (\hat{k}_{1,n-1} \hat{k}_n)^2]. \quad (96)$$

Произведение множителей (94)-(96) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{k_{2n}^2}{2^n D^n k_{1n}^2} [1 - (\hat{k}_{2n} \hat{k}_1)^2] [1 - (\hat{k}_1 \hat{k}_2)^2] [1 - (\hat{k}_{12} \hat{k}_3)^2] \dots [1 - (\hat{k}_{1,n-1} \hat{k}_n)^2] - \\ & - \frac{1}{2^n D^n} \frac{d-1}{d} [1 - (\hat{k}_1 \hat{k}_2)^2] [1 - (\hat{k}_{12} \hat{k}_3)^2] \dots [1 - (\hat{k}_{1,n-1} \hat{k}_n)^2] \end{aligned} \quad (97)$$

Интегрирование по импульсам будет проводиться в сферической системе координат. Множитель  $k_s^{d-1} dk_s$  из элемента объема  $s$ -того импульса, умноженный на множитель  $\theta(k_s - m)k_s^{-d-\varepsilon} g \mu^\varepsilon D$  из коррелятора скоростей (52) (учтено (58)), дает  $g \mu^\varepsilon D \theta(k_s - m)k_s^{-1-\varepsilon} dk_s$ . Таким образом, получаем

$$g \mu^\varepsilon D \int_m^\infty \frac{dk_s}{k_s^{1+\varepsilon}} \dots \quad (98)$$

Совокупность множителей  $D$  во всех интегралах по модулям сокращается с множителем  $D^n$  в (97).

Интеграл по ориентациям импульса представим в виде

$$\int d\hat{k} \dots = S_d \langle \dots \rangle_{\hat{k}} \quad (99)$$

где операция  $\langle \dots \rangle_{\hat{k}}$  имеет смысл усреднения по ориентациям. Множитель  $S_d$  вместе с множителем  $\frac{1}{(2\pi)^d}$  объединяем с зарядом  $g$  в (98), что дает ранее введенный заряд  $u = \frac{S_d g}{(2\pi)^d}$ . Окончательно вклад  $n$ -петлевой диаграммы определяется выражением  $u^n \Gamma_n$ , где

$$\Gamma_n = \frac{\mu^{n\varepsilon}}{2^{n-1}(d-1)(d+2)} J_n, \quad (100)$$

$$\begin{aligned} J_n = & \int_m^\infty \frac{dk_1}{k_1^{1+\varepsilon}} \int_m^\infty \frac{dk_2}{k_2^{1+\varepsilon}} \dots \int_m^\infty \frac{dk_n}{k_n^{1+\varepsilon}} \left\langle [1 - (\hat{k}_{2n} \hat{k}_1)^2] \times \right. \\ & \left. \times [1 - (\hat{k}_1 \hat{k}_2)^2] [1 - (\hat{k}_{12} \hat{k}_3)^2] \dots [1 - (\hat{k}_{1,n-1} \hat{k}_n)^2] \frac{k_{2n}^2}{k_{1n}^2} \right\rangle_{\hat{k}} - \frac{(d-1)^n}{d^n \varepsilon^n}, \end{aligned} \quad (101)$$

усреднение проводится по ориентациям всех импульсов, в последнем вкладе усреднение удаётся провести в явном виде по формуле (7п) из Приложения 2.

Константа ренормировки  $Z_{22}$  определяется из требования сокращения всех полюсов по  $\varepsilon$  в выражении

$$Z_{22}^{-1} [1 + u\Gamma_1 + u^2\Gamma_2 + u^3\Gamma_3 + \dots]. \quad (102)$$

Константа ренормировки не зависит от  $\mu/m$ , поэтому можно в (100) положить  $\mu = m$ , тогда  $\Gamma_n$  не зависит от  $\mu$  и  $m$ .

## 7.1 Вычисление $\Gamma_1$

Подставляя в (101)  $n = 1$ , получаем

$$J_1 = \int_m^\infty \frac{dk}{k^{1+\varepsilon}} (1/d - 1) = \frac{m^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{1-d}{d}, \quad (103)$$

откуда с учетом (100) находим

$$\Gamma_1 = - \left( \frac{\mu}{m} \right)^\varepsilon \frac{1}{d(d+2)\varepsilon}. \quad (104)$$

Важно, что в  $\Gamma_1$  нет поправок по  $\varepsilon$ . Это наблюдение существенно упрощает дальнейший расчет в  $1/d$ -разложении.

## 7.2 Вычисление $\Gamma_2$

Заменяя в (101) переменную интегрирования  $k_1$  на  $k$ , а  $k_2$  на  $q$ , имеем

$$J_2 = J_2^{(1)} - \frac{(d-1)^2}{d^2 \varepsilon^2}, \quad (105)$$

где

$$J_2^{(1)} = \int_m^\infty \frac{dk}{k^{1+\varepsilon}} \int_m^\infty \frac{dq}{q^{1+\varepsilon}} \left\langle [1 - (\widehat{k\hat{q}})^2]^2 \frac{q^2}{(\vec{k} + \vec{q})^2} \right\rangle_{\widehat{q}}, \quad (106)$$

где оставлено усреднение только по ориентациям  $\widehat{q}$ , так как подынтегральное выражение зависит только от взаимной ориентации векторов. В  $J_2^{(1)}$  проведем симметризацию по  $\vec{k}$  и  $\vec{q}$ :

$$J_2^{(1)} = \frac{1}{2} \int_m^\infty \frac{dk}{k^{1+\varepsilon}} \int_m^\infty \frac{dq}{q^{1+\varepsilon}} \left\langle [1 - (\widehat{k\hat{q}})^2]^2 \frac{k^2 + q^2}{(\vec{k} + \vec{q})^2} \right\rangle_{\widehat{q}}. \quad (107)$$

Выделяя полный квадрат, и разделив на  $(\vec{k} + \vec{q})^2$ , запишем

$$\frac{k^2 + q^2}{(\vec{k} + \vec{q})^2} = 1 - \frac{2(\vec{k} \vec{q})}{(\vec{k} + \vec{q})^2}.$$

Используя это соотношение, разобьем  $J_2^{(1)}$  на два вклада

$$J_2^{(1)} = J_2'^{(1)} + J_2''^{(1)}, \quad (108)$$

где

$$J_2'^{(1)} = \frac{1}{2} \int_m^\infty \frac{dk}{k^{1+\varepsilon}} \int_m^\infty \frac{dq}{q^{1+\varepsilon}} \left\langle [1 - (\widehat{k\hat{q}})^2]^2 \right\rangle_{\widehat{q}}, \quad (109)$$

$$J_2''^{(1)} = - \int_m^\infty \frac{dk}{k^{1+\varepsilon}} \int_m^\infty \frac{dq}{q^{1+\varepsilon}} \left\langle [1 - (\widehat{k\hat{q}})^2]^2 \frac{(\vec{k} \vec{q})}{(\vec{k} + \vec{q})^2} \right\rangle_{\widehat{q}}. \quad (110)$$

Проведя в (109) угловые усреднения с помощью формул (7п), (9п) Приложения, получаем

$$J_2'^{(1)} = \frac{m^{-2\varepsilon}}{2\varepsilon^2} \left[ 1 - \frac{2}{d} + \frac{3}{d(d+2)} \right]. \quad (111)$$

Остался последний вклад (110). Перейдём в нём к сферическим координатам, обозначив, как

раньше  $(\widehat{q}, \widehat{k}) = \cos \theta$ :

$$J_2''(1) = -S_d S_{d-1} \int_m^\infty \frac{dk}{k^{1+\varepsilon}} \int_m^\infty \frac{dq}{q^{1+\varepsilon}} \int_0^\pi d\theta kq \sin^{d-2} \theta \cos \theta \frac{\sin^4 \theta}{k^2 + q^2 + 2kq \cos \theta}. \quad (112)$$

Для дальнейших вычислений будет полезна следующая формула

$$I_n(m) = -\frac{1}{n\varepsilon} m \frac{\partial}{\partial m} I_n(m), \quad (113)$$

где  $n$  – кратность интеграла по модулям и

$$I_n(m) = \int_m^\infty \frac{dk_1}{k_1^{1+\varepsilon}} \int_m^\infty \frac{dk_2}{k_2^{1+\varepsilon}} \cdots \int_m^\infty \frac{dk_n}{k_n^{1+\varepsilon}} f(k_1, k_2, \dots, k_n), \quad (114)$$

где  $f(k_1, k_2, \dots, k_n)$  – безразмерная по совокупности импульсов функция. В нашем случае  $n = 2$  и  $f(k_1, k_2) = kq \cos \theta \frac{\sin^4 \theta}{k^2 + q^2 + 2kq \cos \theta}$  – симметричная по  $k$  и  $q$  функция. Пользуясь операцией « $m \frac{\partial}{\partial m}$ », получаем 2 одинаковых интеграла и, делая масштабирование в них  $k \rightarrow mk$ , приходим к выражению

$$J_2''(1) = -\frac{S_d S_{d-1} m^{-2\varepsilon}}{\varepsilon} \int_0^\pi d\theta \int_1^\infty \frac{dk}{k^{1+\varepsilon}} \sin^{d+2} \theta \cos \theta \frac{k}{k^2 + 2k \cos \theta + 1}. \quad (115)$$

В последнем интеграле можно положить  $\varepsilon = 0$ , так как выражение уже будет сходиться. Рассмотрим сначала интеграл по модулю  $k$

$$\int_1^\infty dk \frac{1}{k^2 + 2ka + 1} = \int_1^\infty dk \frac{1}{(k+a)^2 + 1 - a^2} = \int_1^\infty dk \frac{1}{\left(\left(\frac{k+a}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2 + 1\right)(1-a^2)}, \quad (116)$$

где за  $a$  обозначен  $\cos \theta$ . Делая замену  $\frac{k+a}{\sqrt{1-a^2}} = x$ , приходим к выражению

$$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \int_{\frac{1+a}{\sqrt{1-a^2}}}^\infty dx \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \arctan \left( \frac{k+a}{\sqrt{1-a^2}} \right) \Big|_1^\infty = \frac{1}{\sin \theta} \arctan \left( \frac{k + \cos \theta}{\sin \theta} \right) \Big|_1^\infty = \frac{\theta}{2 \sin \theta}. \quad (117)$$

Остался интеграл по  $\theta$ , который можно взять по частям:

$$J_2''(1) = -\frac{AS_d^2 m^{-2\varepsilon}}{2\varepsilon} \frac{S_{d-1}}{S_d} \int_0^\pi d\theta \theta \cos \theta \sin^{d+1} \theta, \quad (118)$$

$$\int_0^\pi d\theta \theta \cos \theta \sin^{d+1} \theta = -\frac{1}{d+2} \int_0^\pi d\theta \sin^{d+2} \theta = -\frac{1}{d+2} \frac{S_{d+4}}{S_{d+3}}. \quad (119)$$

Здесь было использовано равенство  $S_d = S_{d-1} \int_0^\pi d\theta \sin^{d-2} \theta$ . Используя явное выражение для площади единичной сферы в  $d$ -мерном пространстве

$$S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}, \quad (120)$$

получаем окончательный ответ для  $J_2''(1)$ :

$$J_2''(1) = \frac{S_d^2 m^{-2\varepsilon}}{2\varepsilon} \frac{(d+1)(d-1)}{d(d+2)^2} \quad (121)$$

Суммируя вклады (111) и (121) и подставив в выражение (105), получаем окончательно

$$J_2 = m^{-2\varepsilon} \left[ \frac{(d^2 + d - 4)(d - 1)}{2(d + 2)d^2\varepsilon^2} + \frac{(d^2 - 1)}{2d(d + 2)^2\varepsilon} \right], \quad (122)$$

откуда, с учетом (100),

$$\Gamma_2 = \left( \frac{\mu}{m} \right)^{2\varepsilon} \left[ \frac{(d^2 + d - 4)}{4(d + 2)^2d^2\varepsilon^2} + \frac{(d + 1)}{4d(d + 2)^3\varepsilon} \right]. \quad (123)$$

Аналитические ответы (104) и (123) позволяют определить из (102) константу ренормировки  $Z_{22}$  во втором порядке теории возмущений. Полагая в (104) и (113)  $m = \mu$  и учитывая, что однопетлевой вклад не содержит поправок по  $\varepsilon$ , приходим к выражения  $Z_{22} = 1 + u\Gamma_1 + u^2\Gamma_2 + O(u^3)$ , совпадающему с точным ответом (86).

### 7.3 Вычисление $\Gamma_3$

Получить аналитический ответ для  $\Gamma_3$  не удалось. Мы проведем его вычисления в рамках  $1/d$  разложения с точностью до  $O(1/d^5)$  включительно и сравним результат с точным выражением (86). Учитывая, что в формуле (100) перед  $\Gamma_3$  стоит множитель порядка  $1/d^2$ , интегралы (101) надо вычислять с точностью до  $1/d^3$ . Получение  $1/d$ -разложения достигается путём перехода в сферическую систему координат, затем проводится разложение подынтегрального выражения (101) в ряд Тейлора по косинусам углов между векторами  $\hat{k}_1, \hat{k}_2, \hat{k}_3$ , считая косинусы формально малыми параметрами. После этого проводится усреднение по ориентациям с помощью формул (10п), (17п)–(23п) из Приложения 2. Оставшиеся интегрирования по модулям импульсов проводятся с использованием формул (25п)–(31п) из Приложения 3. При этом для получения точности  $O(1/d^5)$  достаточно учитывать лишь часть ряда до шестых степеней косинуса.

Из формулы 101 имеем

$$J_3 = J_3^{(1)} - \frac{(d - 1)^3}{d^3\varepsilon^3}, \quad (124)$$

где

$$J_3^{(1)} = \int_m^\infty \frac{dk_1}{k_1^{1+\varepsilon}} \int_m^\infty \frac{dk_2}{k_2^{1+\varepsilon}} \int_m^\infty \frac{dk_3}{k_3^{1+\varepsilon}} \left[ 1 - (\hat{k}_1, \hat{k}_2)^2 \right] \left[ 1 - (\hat{k}_{12}, \hat{k}_3)^2 \right] \left[ 1 - (\hat{k}_{23}, \hat{k}_1)^2 \right] \frac{k_{23}^2}{k_{13}^2}. \quad (125)$$

Для значительного упрощения вычислений  $J_3^{(1)}$  имеет смысл рассматривать отдельно каждый из 8 вкладов, которые могут быть получены при перемножении единиц и скалярных произведений из каждой квадратной скобки. Для них будут использованы обозначения  $A_{ijk}$ , где  $i, j, k$  равны либо 1, либо 2 в зависимости от того, взята ли единица из соответствующей скобки или скалярное произведение. Например,  $A_{122}$  соответствует вкладу

$$\int_m^\infty \frac{dk_1}{k_1^{1+\varepsilon}} \int_m^\infty \frac{dk_2}{k_2^{1+\varepsilon}} \int_m^\infty \frac{dk_3}{k_3^{1+\varepsilon}} (\hat{k}_{12}, \hat{k}_3)^2 (\hat{k}_{23}, \hat{k}_1)^2 \frac{k_{23}^2}{k_{13}^2}. \quad (126)$$

Интеграл (125) будет рассчитываться с точностью до  $1/d^3$ . Для этого надо провести разложение по косинусам до шестых степеней. Следующим этапом идёт усреднение полиномов по косинусам с помощью формул 10п), (17п)–(23п), приведённых в Приложении 2. После выполнения всех вышеописанных процедур останется взять интегралы по модулям векторов  $k_{1,2,3}$ . На этом этапе были использованы формулы (25п)–(31п), приведенные в Приложении 3, из статьи [7]. В Приложении 4 приведен список полученных вкладов  $A_{ijk}$ . С учётом формулы 100 окончательным ответом будет являться следующее выражение

$$\Gamma_3 = \frac{\left(\frac{\mu}{m}\right)^{3\varepsilon}}{4(d-1)(d+2)} \left( -\frac{(d-1)^3}{d^3\varepsilon^3} + \sum_{i,j,k=1}^2 A_{ijk} \right). \quad (127)$$

В отличие от однопетлевого вклада, двухпетлевой вклад содержит, помимо полюсного вклада  $\Gamma^2$  (123), конечный вклад  $\Gamma_2^{(0)}$ , который необходимо учитывать при нахождении коэффициента при  $u^3$  в  $Z_{22}$ . Этот вклад был рассчитан в главном порядке по  $1/d$ :

$$\Gamma_2^{(0)} = -\frac{u^2 \left(\frac{\mu}{m}\right)^{2\varepsilon} \ln 2}{4d(d-1)(d+2)}. \quad (128)$$

Для нахождения константы  $Z_{22}$  запишем ее в виде

$$Z_{22} = 1 + u\Gamma_1 + u^2\Gamma_2 + u^3(\Gamma_3 + a) \quad (129)$$

и найдем параметр  $a$  из требования отсутствия полюсов в разложении отношения (102) при учете вклада с  $\Gamma_2^{(0)}$ :

$$\frac{1 + u\Gamma_1 + u^2(\Gamma_2 + \Gamma_2^{(0)}) + u^3\Gamma_3}{1 + u\Gamma_1 + u^2\Gamma_2 + u^3(\Gamma_3 + a)} = 1 + u^2\Gamma_2^{(0)} - u^3(\Gamma_2^{(0)}\Gamma_1 + a) + O(u^4). \quad (130)$$

Слагаемое  $u^2\Gamma_2^{(0)}$  не содержит полюсов, а из требования их сокращения при  $u^3$  находим

$$a = -\Gamma_2^{(0)}\Gamma_1. \quad (131)$$

Расчет константы ренормировки  $Z_{22}$  по формуле (129) с учетом (127) и (131) приводит к выражению, которое совпадает в членах  $\sim u$  и  $\sim u^2$  с точным выражением (86) и совпадающим с этим выражением в слагаемом  $\sim u^3$  с точностью до вклада  $1/d^5$  в  $1/d$  разложении.

## 8 Заключение

В работе проведено сравнение точного выражения для разложения аномального показателя  $\Delta_{22}$  с результатами РГ подхода. Простой вид точного разложения наводит на мысль, что в лестничных диаграммах можно обнаружить некоторую простоту. Однако аналитически удалось рассчитать путем прямого интегрирования лишь двухпетлевой вклад (в работе [7] этот вклад рассчитан несколько более сложным способом с использованием гипергеометрических функций). Трехпетлевой вклад в константу ренормировки  $Z_{22}$  был рассчитан в рамках  $1/d$  разложения с точностью до  $1/d^5$  включительно. Результат совпал с точным. С учетом (70) это дает правильные вклады  $\sim 1/d^4$  и  $\sim 1/d^5$  в  $\Delta_{22}$  (в работе [7] рассчитан только вклад  $\sim 1/d^4$ ). Отметим особенность  $\varepsilon$  разложения индекса  $\Delta_{22}$ : каждый последующий член разложения полностью включает в себя следующий член  $1/d$  разложения – первый член  $\varepsilon$  разложения включает в себя все вклады  $\sim 1/d^2$ , второй – все вклады  $\sim 1/d^3$ , третий – все вклады  $\sim 1/d^4$ .

Коэффициенты точного разложения (86) представляют собой рациональные дроби, в то же время в ходе расчета диаграмм в отдельных вкладах  $\sim u^3/d^4$  появляются слагаемые с  $\ln 2$ , которые взаимно сокращаются. Однако, в порядке  $\sim u^3/d^5$  сокращение таких вкладов происходит лишь на уровне расчета константы ренормировки, более конкретно – при вычислении коэффициента  $\Gamma_3 + a$  в (129) с параметром  $a$  из (131). Из этого можно сделать вывод, что надеяться получить аналитические ответы в старших порядках можно, лишь сменив объект вычислений, например, вычислять по диаграммам непосредственно РГ функцию  $\gamma_{22}$ , как это делается в методе "теории без расходимостей"[9].

## 9 Приложение

### 9.1 Интегрирование по времени

Рациональным методом интегрирования по времени в задачах критической динамики является метод интегрирования по временным версиям, использованный, в частности, в работе [7]. Каждой диаграмме сопоставляется сумма временных версий, каждой из которых соответствует упорядоченный по времени набор вершин, совместимый с  $\theta$  функциями  $\theta(t_i - t_j)$  в функциях отклика. В линии, не содержащих такие множители, вводится  $1 = \theta(t_i - t_j) + \theta(t_j - t_i)$ . Рассмотрим в качестве примера символическую диаграмму

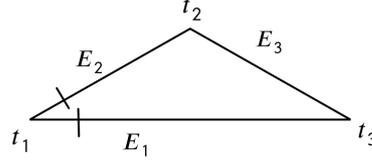


Рис. 10

в которой зависимость линий от времени определяется множителями  $\theta(t_3 - t_1)e^{-E_1(t_3-t_1)}$ ,  $\theta(t_2 - t_1)e^{-E_2(t_2-t_1)}$  и  $e^{-E_3|t_2-t_3|}$ . Считая время  $t_1$  фиксированным, требуется взять интегралы  $\int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_3$ . Записывая  $e^{-E_3|t_2-t_3|} = \theta(t_2 - t_3)e^{-E_3(t_2-t_3)} + \theta(t_3 - t_2)e^{-E_3(t_3-t_2)}$ , можно диаграмму 10 представить в виде суммы временных версий



Рис. 11: Временные версии диаграммы на рисунке 10

В диаграмме а) времена упорядочены согласно  $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ . Записывая  $e^{-E_1(t_3-t_1)} = e^{-E_1(t_3-t_2)}e^{-E_1(t_2-t_1)}$  и переходя к интегрированию по относительным временам  $t' = t_3 - t_2$ ,  $t'' = t_2 - t_1$ , приходим к факторизованным интегралам в пределах  $0 < t' < \infty$ ,  $0 < t'' < \infty$ . Интегрирование дает

$$\frac{1}{(E_1 + E_2)(E_1 + E_3)}. \quad (1\text{п})$$

Аналогичным образом для диаграммы б) получаем

$$\frac{1}{(E_1 + E_2)(E_2 + E_3)}. \quad (2\text{п})$$

Оба эти результата могут быть получены по следующему правилу. В каждой временной версии проводим вертикальные пунктиры (сечения) между всеми парами ближайших вершин и сопоставляем каждому сечению величину  $Q_i$ , равную сумме энергий линий, пересекаемых в этом сечении. Результат интегрирования дается выражением  $\frac{1}{\prod_i Q_i}$ , в котором произведение берется по всем сечениям. Это правило носит общий характер.

В рассмотренной модели коррелятору скоростей (52) соответствует  $\delta(t_1 - t_2)$ , поэтому при

построении временных версий времени  $t_1$  и  $t_2$  надо считать совпадающими, в результате в лестничной диаграмме на рисунке 9 имеется единственная временная версия, что и дает результат (95).

## 9.2 Угловое усреднение

После перехода к сферической системе координат для каждой переменной интегрирования сперва вычисляются вклады, связанные с углами, а потом выполняется интегрирование по модулям. Существует способ, описываемый в этом разделе, позволяющий свести угловое интегрирование к усреднению по всем возможным направлениям интегрируемых векторов.

Для каждого рассматриваемого интеграла для каждой переменной после перехода в сферические координаты получаются выражения вида

$$I \{ F(k), T(\hat{k}) \} = \int_m^\infty \frac{dk F(k)}{k^{1+\varepsilon}} \int d\hat{k} T(\hat{k}) = S_d \int_m^\infty \frac{dk}{k^{1+\varepsilon}} \langle T(\hat{k}) \rangle_{\hat{k}} \quad (3\text{п})$$

Рассмотрим сначала усреднение квадрата косинуса. Для единичного вектора  $\vec{n}$  справедливо равенство

$$\langle n_i n_j \rangle = C \delta_{ij}, \quad (4\text{п})$$

где усреднение происходит по всевозможным направлениям вектора  $\vec{n}$ . Чтобы найти константу  $C$ , надо положить  $i = j$ . С учетом того, что дельта-символ с одинаковыми значками равен размерности пространства  $d$ , получаем

$$\begin{aligned} 1 &= C d, \\ C &= \frac{1}{d}. \end{aligned} \quad (5\text{п})$$

После домножения уравнения 4п на  $\langle m_i m_j \rangle$ , где  $\vec{m}$  тоже является единичным вектором, и сворачивания с  $\delta_{ij}$ , получается

$$\langle n_i m_i n_j m_j \rangle = \frac{1}{d}. \quad (6\text{п})$$

Принимая во внимание  $n_i m_i = (\vec{n}, \vec{m}) = \cos \theta$ , где  $\theta$ -угол между единичными векторами, получаем желаемый результат

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{d}. \quad (7\text{п})$$

Аналогично уравнению (4п), можно записать

$$\langle n_i n_j n_k n_l \rangle = C (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (8\text{п})$$

где  $C$  может быть найдена как  $\frac{1}{d^2+2d}$ . Выполняя дальше аналогичные преобразования, можно получить в итоге

$$\langle \cos^4 \theta \rangle = \frac{3}{d^2 + 2d} = \frac{3}{d(d+2)}. \quad (9\text{п})$$

Для произвольной четной степени косинуса может быть доказана таким образом следующая формула:

$$\langle \cos^{2n} \theta \rangle = \frac{(2n-1)!!}{d(d+2) \dots (d+2n-2)}, \quad (10\text{п})$$

где  $n$ -произвольное натуральное число.

При вычислении диаграмм в  $\frac{1}{d}$ -разложении возникают и другие усреднения. В общем случае

интересуют следующие конструкции:

$$\langle (\widehat{k\hat{q}})^{n_1} (\widehat{q\hat{l}})^{n_2} (\widehat{k\hat{l}})^{n_3} \rangle, \quad (11\text{п})$$

где  $\widehat{\mathbf{k}} = \frac{\vec{k}}{k}$ . Рассматриваемое усреднение отличается от 0, только если все  $n_{1,2,3}$  одновременно четные или нечетные.

Общая схема расчёта таких выражений может быть описана следующим образом на примере вычисления  $\langle (\widehat{k\hat{q}})^2 (\widehat{k\hat{l}})^2 \rangle$ . Первым шагом запишем выражение в виде

$$\langle (\widehat{k\hat{q}})^2 (\widehat{k\hat{l}})^2 \rangle = \langle \widehat{k_1\hat{q}_1\widehat{k_2\hat{q}_2}\widehat{k_3\hat{l}_3}\widehat{k_4\hat{l}_4} \rangle. \quad (12\text{п})$$

Следующим шагом произведем усреднение по  $\widehat{k}$ :

$$\langle \widehat{k_1\hat{q}_1\widehat{k_2\hat{q}_2}\widehat{k_3\hat{l}_3}\widehat{k_4\hat{l}_4} \rangle_{\widehat{k}} = \widehat{q_1\hat{q}_2\widehat{l_3\hat{l}_4}} \langle \widehat{k_1\widehat{k_2\hat{k}_3}\widehat{k_4} \rangle_{\widehat{k}}. \quad (13\text{п})$$

С учетом выражения 8п и  $C = \frac{1}{d(d+2)}$

$$\langle \widehat{k_1\hat{q}_1\widehat{k_2\hat{q}_2}\widehat{k_3\hat{l}_3}\widehat{k_4\hat{l}_4} \rangle_{\widehat{k}} = \frac{\widehat{q_1\hat{q}_2\widehat{l_3\hat{l}_4}}}{d(d+2)} (\delta_{12}\delta_{34} + \delta_{13}\delta_{24} + \delta_{14}\delta_{23}). \quad (14\text{п})$$

После сворачивания значков получаем:

$$\langle \widehat{k_1\hat{q}_1\widehat{k_2\hat{q}_2}\widehat{k_3\hat{l}_3}\widehat{k_4\hat{l}_4} \rangle_{\widehat{k}} = \frac{\widehat{q_1^2\widehat{l_3^2}} + \widehat{q_1\hat{q}_2\widehat{l_1\hat{l}_2}} + \widehat{q_1\hat{q}_2\widehat{l_2\hat{l}_1}}}{d(d+2)} = \frac{\widehat{q_1^2\widehat{l_3^2}} + 2\widehat{q_1\hat{q}_2\widehat{l_1\hat{l}_2}}}{d(d+2)}. \quad (15\text{п})$$

Теперь можно провести усреднение по  $q$  с учетом 4п и 5п

$$\langle \widehat{q_1^2\widehat{l_3^2}} + 2\widehat{q_1\hat{q}_2\widehat{l_1\hat{l}_2}} \rangle_{\widehat{q}} = \widehat{l_3^2} + 2\frac{\delta_{12}\widehat{l_1\hat{l}_2}}{d}. \quad (16\text{п})$$

И, наконец, усреднение по  $l$

$$\langle \widehat{l_3^2} + 2\frac{\delta_{12}\widehat{l_1\hat{l}_2}}{d} \rangle_{\widehat{l}} = 1 + \frac{2}{d}. \quad (17\text{п})$$

Собирая все вместе, получаем результат

$$\langle (\widehat{k\hat{q}})^2 (\widehat{k\hat{l}})^2 \rangle = \frac{1}{d^2}. \quad (18\text{п})$$

Аналогично можно получить следующие полезные формулы, которые были использованы при расчетах:

$$\langle (\widehat{k\hat{q}}) (\widehat{k\hat{l}}) (\widehat{q\hat{l}}) \rangle = \frac{1}{d^2}, \quad (19\text{п})$$

$$\langle (\widehat{k\hat{q}}) (\widehat{k\hat{l}}) (\widehat{q\hat{l}})^3 \rangle = \frac{3}{d^2(d+2)}, \quad (20\text{п})$$

$$\langle (\widehat{k\hat{q}})^2 (\widehat{k\hat{l}})^2 (\widehat{q\hat{l}})^2 \rangle = \frac{d+8}{d^2(d+2)^2}, \quad (21\text{п})$$

$$\langle (\widehat{k\hat{q}})^2 (\widehat{k\hat{l}})^4 \rangle = \frac{3}{d^2(d+2)}, \quad (22\text{п})$$

$$\langle (\widehat{k\hat{q}})^6 \rangle = \frac{15}{d(d+2)(d+4)}. \quad (23\text{п})$$

### 9.3 Формулы для интегрирования по модулям векторов в трёхпетлевой диаграмме

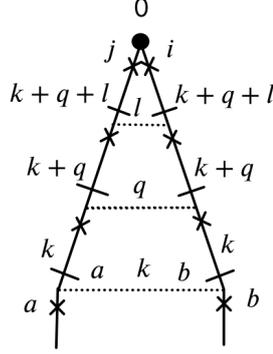


Рис. 12

Для вычисления диаграммы на рис.12 используются интегралы, полученные в статье [7]. В этом приложении используются обозначения  $k_1 \rightarrow k$ ,  $k_2 \rightarrow q$ ,  $k_3 \rightarrow l$  в соответствии со статьёй [7].

$$I\{F\} \equiv \int_1^\infty \frac{dk}{k^{1+\varepsilon}} \int_1^\infty \frac{dq}{q^{1+\varepsilon}} \int_1^\infty \frac{dl}{l^{1+\varepsilon}} F, \quad (24\text{п})$$

для  $n_1 + n_2 + n_3 = n_4 + n_5$ ,  $n_{1,2,3,4} > 0$  и  $n_5 \geq 0$ :

$$I_1 \equiv I \left\{ \frac{k^{2n_1} q^{2n_2} l^{2n_3}}{(k^2 + q^2 + l^2)^{n_4} (q^2 + l^2)^{n_5}} \right\} = \frac{(n_1 - 1)!(n_2 - 1)!(n_3 - 1)!(n_4 - n_1 - 1)!}{12\varepsilon(n_4 - 1)!(n_2 + n_3 - 1)!}, \quad (25\text{п})$$

для  $n_2 + n_3 = n_4 + n_5$ ,  $n_{2,3,4} > 0$  и  $n_5 \geq 0$ :

$$I_2 \equiv I \left\{ \frac{q^{2n_2} l^{2n_3}}{(k^2 + q^2 + l^2)^{n_4} (q^2 + l^2)^{n_5}} \right\} = \frac{(n_2 - 1)!(n_3 - 1)!}{12(n_2 + n_3 - 1)!} \times \\ \times \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \sum_{k=1}^{n_2+n_3-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n_4-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_2-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_3-1} \frac{1}{k} \right) \right], \quad (26\text{п})$$

для  $n_1 + n_2 = n_4$  и  $n_{1,2} > 0$ :

$$I_3 \equiv I \left\{ \frac{k^{2n_1} q^{2n_2}}{(k^2 + q^2 + l^2)^{n_4}} \right\} = \frac{(n_1 - 1)!(n_2 - 1)!}{12(n_4 - 1)!} \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2\varepsilon} \left( \sum_{k=1}^{n_1-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n_2-1} \frac{1}{k} \right) \right], \quad (27\text{п})$$

для  $n_1 + n_2 = n_4 + 1$ ,  $n_1 > 0$  и  $n_2 > 1$ :

$$I_4 \equiv I \left\{ \frac{k^{2n_1} q^{2n_2}}{(k^2 + q^2 + l^2)^{n_4} (q^2 + l^2)} \right\} = \frac{(n_1 - 1)!(n_2 - 1)!}{12(n_4 - 1)!} \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2\varepsilon} \left( \frac{2}{n_2 - 1} + \sum_{s=1}^{n_1-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n_2-2} \frac{1}{k} \right) \right], \quad (28\text{п})$$

$$I_7 \equiv I \left\{ \frac{k^2}{k^2 + q^2 + l^2} \right\} = \frac{1}{3\varepsilon^3}, \quad (29\text{п})$$

$$I_8 \equiv I \left\{ \frac{k^2 q^2}{(k^2 + q^2 + l^2)(q^2 + l^2)} \right\} = \frac{1}{6\varepsilon^3}, \quad (30\text{п})$$

$$I_9 \equiv I \left\{ \frac{q^4}{(k^2 + q^2 + l^2)(q^2 + l^2)} \right\} = \frac{1}{3\varepsilon^3} - \frac{1}{12\varepsilon^2} - \frac{1}{12\varepsilon}. \quad (31\text{п})$$

В статье [7] была выявлена опечатка в формуле (28п): множителя  $\varepsilon$  в знаменателе общей дроби не должно быть.

Также по ходу расчёта возникает необходимость считать интегралы только от двух переменных, также выделяя в них все полюса по  $\varepsilon$ . Например,

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_m^\infty \int_m^\infty dk_1 dk_2 \frac{k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \quad (32п)$$

после проведения операции « $m \frac{\partial}{\partial m}$ » сводится к сходящемуся интегралу от одной переменной

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_1^\infty dk \frac{k^{1-\varepsilon}}{(k^2 + 1)^2} = \frac{1}{4\varepsilon^2} - \frac{\ln 2}{4\varepsilon}. \quad (33п)$$

#### 9.4 Список вкладов $A_{ijk}$ для расчёта трёхпетлевой диаграммы

$$\begin{aligned} A_{111} &= \frac{72d + 192}{3d^2 (d+2)^2 (d+4) E} + \frac{d^4 + 10d^3 + 40d^2 + 48d}{3d^2 (d+2)^2 (d+4) E^2} + \frac{2d^5 + 16d^4 + 40d^3 + 32d^2}{3d^2 (d+2)^2 (d+4) E^3} \\ A_{112} &= -\frac{d^3 + 7d^2 + 100d + 252}{3d^2 (d+2)^2 (d+4) E} - \frac{3d^3 + 28d^2 + 44d}{3d^2 (d+2)^2 (d+4) E^2} - \frac{2d^4 + 16d^3 + 40d^2 + 32d}{3d^2 (d+2)^2 (d+4) E^3} \\ A_{121} &= \frac{d^3 + 3d^2 - 152d - 452}{6d^2 (d+2)^2 (d+4) E} - \frac{4d^3 + 38d^2 + 76d + 32}{6d^2 (d+2)^2 (d+4) E^2} - \frac{4d^4 + 32d^3 + 80d^2 + 64d}{6d^2 (d+2)^2 (d+4) E^3} \\ A_{211} &= -\frac{d^3 + 3d^2 + 32d + 84}{6d^2 (d+2)^2 (d+4) E} - \frac{4d^3 + 38d^2 + 76d + 32}{6d^2 (d+2)^2 (d+4) E^2} - \frac{4d^4 + 32d^3 + 80d^2 + 64d}{6d^2 (d+2)^2 (d+4) E^3} \\ A_{122} &= \frac{6(d+4)(d-1)\ln(2) + 5d^2 + 213d + 592}{6d^2 (d+2)^2 (d+4) E} + \frac{14d^2 + 36d + 40}{6d^2 (d+2)^2 (d+4) E^2} + \frac{6d^3 + 42d^2 + 84d + 48}{6d^2 (d+2)^2 (d+4) E^3} \\ A_{212} &= \frac{7d^2 + 69d + 104}{6d^2 (d+2)^2 (d+4) E} + \frac{16d^2 + 42d + 32}{6d^2 (d+2)^2 (d+4) E^2} + \frac{8d^3 + 52d^2 + 88d + 32}{6d^2 (d+2)^2 (d+4) E^3} \\ A_{221} &= \frac{3}{d^2 (d+2)^2 E} + \frac{3d + 6}{3d^2 (d+2)^2 E^2} + \frac{2d^2 + 8d + 8}{3d^2 (d+2)^2 E^3} \\ A_{222} &= -\frac{5d + 13}{3d^2 (d+2)^2 E^3} \end{aligned}$$

## 10 Список литературы

- [1] M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. E 52, 4924 (1995).
- [2] M. Chertkov and G. Falkovich, Phys. Rev. Lett 76, 2706 (1996).
- [3] K. Gawędzki and A. Kupiainen, Phys. Rev. Lett. 75, 3834 (1995).
- [4] D. Bernard, K. Gawędzki, and A. Kupiainen, Phys. Rev. E 54, 2564 (1996).
- [5] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, and A. N. Vasil'ev, Phys. Rev. E 58, 1823 (1998).
- [6] N. V. Antonov, Phys. Rev. E 60, 6691 (1999), Physica D 144, 370 (2000).
- [7] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, V. A. Barinov, Yu. S. Kabrits, and A. N. Vasil'ev Phys. Rev. E 64, 056306 (2001)

- [8] A. Pumir, Europhys. Lett. 34, 25 (1996); *ibid.* 37, 529 (1997); Phys. Rev. E 57, 2914 (1998).
- [9] L. Ts. Adzhemyan, M. V. Kompaniets. Renormalization group and the  $\varepsilon$ - expansion: representation of the  $\beta$ -function and anomalous dimensions by nonsingular integrals, Theoretical and Mathematical Physics, 2011. – Vol. 169, – №1. – P. 1450–1459