

Санкт-Петербургский государственный университет

ЗАХАРОВ Дмитрий Васильевич

Выпускная квалификационная работа

**Ренормгрупповой подход к стохастической модели
турбулентности в пространствах высокой размерности:
четвертый порядок теории возмущений**

Уровень образования: магистратура

Направление: 03.04.02 «Физика»

Основная образовательная программа: ВМ.5511.2021 «Физика»

Научный руководитель:
профессор кафедры статистической физики, д.ф.-м.н., проф. **Аджемян Л.Ц.**

Рецензент:
ведущий научный сотрудник ПОМИ РАН, д.ф.-м.н. **Деркачев С.Э.**

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1	Введение	2
2	Стохастическая модель турбулентности	2
2.1	Уравнение Навье Стокса	2
2.2	Теория Колмогорова	3
2.3	Аномальный скейлинг	4
2.4	Стохастическое уравнение Навье-Стокса	5
2.5	Квантово-полевая формулировка	5
2.6	РГ уравнение	6
2.7	Вычисление РГ функций в многопетлевом приближении	7
3	Особенности расчета диаграмм при $d \rightarrow \infty$	8
3.1	Вычисление однопетлевой диаграммы	9
3.2	Вычисление двухпетлевых диаграмм	10
3.3	Вычисление трехпетлевой диаграммы	14
3.4	Получение итогового выражения для двухпетлевой диаграммы	15
3.5	Построение R' операции	17
3.6	Общие признаки значительного сокращения числа диаграмм	18
3.7	Метод вычисления	19
4	Редукция диаграмм	20
5	Аналитический ответ в 4 петлях	21
6	Заключение	22

1 Введение

В данной работе рассматривается стохастическая модель развитой однородной, изотропной турбулентности несжимаемой жидкости (газа). Рассмотрение основано на использовании метода ренормализационной группы и ε -разложения. Этот метод позволяет обосновать скейлинг с колмогоровскими размерностями, при этом основной индекс находится точно, без использования теории возмущений. Однако многие существенные вопросы при таком подходе остаются. Одному из таких вопросов – анализу устойчивости неподвижной точки ренормгруппы – посвящена настоящая работа. Проблема в том, что ответственный за определение устойчивости индекс ω удается вычислить лишь в рамках ε -разложения. Большое физическое значение этого параметра требует для обоснованной оценки ω знания по возможности большего числа членов такого разложения (с последующим их суммированием по Борелю). Однако существенные технические проблемы, связанные с векторным характером модели, привели к тому, что соответствующий расчет в настоящее время имеется лишь во втором порядке теории возмущений.

Нерешенной до настоящего времени проблемой в стохастической теории турбулентности является обоснование аномального скейлинга – наблюдаемое отличие индексов от колмогоровских значений, и вычисление этих индексов. Хотя в настоящей работе не будет предпринята попытка решения этой задачи, отметим, что именно исследование аномального скейлинга стимулировало интерес к изучению турбулентности в пространствах высокой размерности d , чему и посвящена настоящая работа. Дело в том, что первый успех в расчетах аномальных индексов был достигнут в модели Крейчнана турбулентного перемешивания пассивной примеси именно в асимптотической области больших d . Оказалось, что аномальные индексы поля пассивной примеси $\sim 1/d$. Это означает, что аномальный скейлинг пропадает при $d \rightarrow \infty$. Высказывались предположения, что этот факт имеет место и для показателей самой турбулентности. Впоследствии аномальные индексы в модели Крейчнана были рассчитаны методом РГ в рамках ε -разложения до третьего порядка по ε . Коэффициенты этого разложения были явными функциями d . Оказалось, что уже первый член этого разложения дает точную асимптотику по $1/d$, а старшие слагаемые $\sim 1/d^2$. Использование этого разложения для расчета аномальных показателей показало хорошее согласие с результатами численного моделирования. В работе [1] произведен аналогичный расчет константы Колмогорова.

В настоящей работе производится расчет ε -разложения индекса ω в главном порядке по $1/d$. Расчет диаграмм при этом сильно облегчается, что позволяет продвинуться до четвертого порядка теории возмущений.

2 Стохастическая модель турбулентности

2.1 Уравнение Навье Стокса

Для описания течения турбулентных течений используется уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости (газа):

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla P + \nu \Delta \vec{v}, \quad (1)$$

дополненное условием несжимаемости

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0. \quad (2)$$

Здесь $\vec{v}(\vec{x}, t)$ - скорость потока, P - давление, ν - кинематическая вязкость. Безразмерным параметром, характеризующим свойства течения, является число Рейнольдса $Re = \frac{LV}{\nu}$. В него входят характерная скорость потока V и характерная длина L , на которой происходит изменение скорости. При $Re > Re_{\text{крит}}$ течение становится турбулентным, в противном случае течение является ламинарным. Дальнейшие рассуждения будут посвящены модели однородной и изотропной развитой турбулентности при $Re \gg Re_{\text{крит}}$.

Ключевая проблема описания турбулентного потока заключается в неустойчивость решения уравнения Навье-Стокса. Это приводит к тому, что даже при стационарных граничных условиях скорость потока является некоторой периодической функцией времени, имеющей вид суммы большого числа колебательных мод с широким набором частот. Об этом говорят как о появлении в системе большого числа степеней свободы (фазы колебаний) [2].

Поле скорости $\vec{v}(\vec{x}, t)$ в режиме развитой турбулентности является нерегулярной функцией координаты и времени. Устойчивую картину можно получить, усреднив ее по некоторому интервалу времени. Тогда в случае стационарных граничных условий зависимость от времени исчезает, а зависимость от координат становится плавной, но не совпадающей с ламинарным решением. При статфизическом подходе поле скорости предполагается случайным, а усреднение производится с соответствующим весом различных конфигураций. Поле скорости разбивается на среднюю скорость и пульсационную составляющую

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{V}(\vec{x}, t) + \vec{\phi}(\vec{x}, t) \quad (3)$$

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = \overline{\vec{v}(\vec{x}, t)} - \text{средняя скорость потока}$$

$$\vec{\phi} - \text{пульсационная составляющая скорости} : \overline{\vec{\phi}(\vec{x}, t)} = 0.$$

Интерес представляет как нахождение средней скорости, так и статистических характеристик пульсаций.

2.2 Теория Колмогорова

Значительным успехом статистического подхода к описанию развитой турбулентности является теория Колмогорова [3][4][5]. Это феноменологическая теория, описывающая свойства пульсаций в модели однородной, изотропной турбулентности, основана на предположении о некотором универсальном поведении любого турбулентного потока. Это предположение базируется на трех гипотезах:

1. Вихри ϕ , соответствующие внешнему масштабу L (характерный размер обтекаемого тела) дробятся, пока не доходят до диссипативного масштаба l_{diss} , после чего диссипируют за счет вязкости.

2. После некоторого числа дроблений система забывает о всех деталях внешних условий, тогда статистика пульсаций зависит только от поступающей в систему энергии в единицу времени на единицу массы – "мощности накачки" W , в стационарном состоянии она равна $\bar{\varepsilon}$ – средней скорости диссипации энергии на единицу массы и времени $W = \bar{\varepsilon}$.

3. Размер диссипативных вихрей l_{diss} определяется вязкостью ν и скоростью диссипации $\bar{\varepsilon}$. Для развитой турбулентности l_{diss} намного меньше внешнего масштаба турбулентности L : $L/l_{diss} \sim Re^{3/4}$, так что можно ввести понятие **инерционного интервала** l , который соответствует условию $l_{diss} < l < L$. Это область в которой внешний масштаб "забывается" вихрями из за большого числа дроблений, при этом эффекты диссипации на этом масштабе остаются несущественными.

2.3 Аномальный скейлинг

Несмотря на то, что теория Колмогорова во многом подтверждается экспериментально, существуют отклонения от этой теории, а именно *аномальный скейлинг* [6].

Введем понятие структурных функций:

$$\langle (\phi_{\parallel}(\vec{r}_1) - \phi_{\parallel}(\vec{r}_2))^n \rangle \equiv S_n(r), \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (4)$$

По теории Колмогорова в инерционном интервале:

$$S_n(r) = C_n \bar{\varepsilon}^{n/3} r^{n/3}. \quad (5)$$

Поправочные множители к колмогоровскому скейлингу в инерционном интервале в УФ и ИК областях имеют, соответственно, вид:

$$1 + a(l_{diss}/r)^\omega, \quad l_{diss}/r \ll 1, \quad \omega > 0,$$

$$1 + b(r/L)^{\alpha_n}, \quad r/L \ll 1, \quad \alpha_n > 0.$$

Если реализуются указанные положительные значения показателей степеней, то мы действительно имеем дело с поправками. Задача теории состоит в проверке этих условий. Расчет индекса ω является стандартной процедурой в рамках ренормгруппы, расчет индекса α_n – значительно более сложная задача, его отрицательное значение связывают с возникновением аномального скейлинга, согласно которому, как показывает эксперимент, показатели степени в структурных функциях отклоняются от предсказываемых теорией Колмогорова на величину показателя *аномального скейлинга* ξ_n :

$$S_n(r) \sim r^{n/3 - \xi_n} \quad (6)$$

Индекс ω был посчитан в трехпетлевом приближении в работе [7], результаты четырехпетлевых расчетов до сих пор не опубликованы. Целью этой работы является описание технических особенностей расчетов в высоких порядках теории возмущений, а также рассмотрение некоторых смежных задач, применение результатов которых позволило бы упростить расчет поправок для ω .

2.4 Стохастическое уравнение Навье-Стокса

Перепишем уравнение Навье-Стокса на пульсационную составляющую поля скорости $\vec{\phi}$, для удобства изложения оставив прежнее обозначение поля \vec{v} :

$$\partial_t v_i + (v_i \nabla_i) v_i = -\nabla P + \nu \Delta \vec{v}_i + f_i. \quad (7)$$

Здесь f_i – случайная поперечная внешняя сила, моделирующая стохастичность из-за неустойчивости ламинарного течения, и поступление энергии в систему за счет взаимодействия с крупномасштабными вихрями – "накачку". Жидкость (газ) по-прежнему предполагаются несжимаемыми, так что поле \vec{v} является поперечным и удовлетворяет условию несжимаемости $\partial_i v_i = 0$. Для случайной силы f предполагается гауссово распределение с нулевым средним и коррелятором следующего вида [8]:

$$\langle f_i(t_1, \vec{x}_1) f_j(t_2, \vec{x}_2) \rangle \equiv D_{ij}(t_1 - t_2, \vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \frac{\delta(t_1 - t_2)}{(2\pi)^d} \int d\vec{k} P_{ij}(\vec{k}) d_f(k) \exp[i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)]; \quad (8)$$

$$P_{ij}(k) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad - \quad \text{поперечный проектор.} \quad (9)$$

Функция накачки d_f связана со средней мощностью накачки энергии W соотношением:

$$W = \frac{d-1}{2(2\pi)^d} \int d\vec{k} d_f(\vec{k}). \quad (10)$$

Переход к стохастической задаче позволяет уйти от необходимости учета конкретных начальных и граничных условий, тем самым обеспечивая модель именно однородной турбулентности.

2.5 Квантово-полевая формулировка

Чтобы использовать метод ренормализационной группы, перейдем к квантово-полевой формулировке стохастической модели турбулентности [8],[9]. Для перехода к данной формулировке используется MSR формализм, позволяющий сопоставить дифференциальному уравнению со случайной силой действие с двумя полями $\{v, v'\}$.

$$S(v, v') = \frac{v' D_v v}{2} + v' [-\partial_t - (v \partial) v + \nu_0 \partial^2] v, \quad (11)$$

где D_v - коррелятор случайной силы. Поле v' является вспомогательным и также удовлетворяет условию поперечности:

$$\partial_i v'_i = 0.$$

Для использования метода РГ функцию накачки d_f выбирают в виде

$$d_f(k) = D_0 k^{4-d-2\varepsilon} \Theta(k-m), \quad (12)$$

множитель с функцией Хевисайда $\Theta(k-m)$ обеспечивает инфракрасную регуляризацию, величина $m = 1/L$, где L - характерный внешний масштаб. Параметр ε аналогичен параметру $\varepsilon = 4-d$ в моделях критических явлений, однако не является его полным аналогом,

так как не связан с отклонением размерности пространства от критической размерности. Физическое значение $\varepsilon = 2$. Амплитуда D_0 в (12) записывается в виде

$$D_0 = g_0 \nu_0^3, \quad (13)$$

где временная размерность величины D_0 реализуется множителем ν_0^3 и введен "заряд" g_0 , играющий в дальнейшем роль параметра теории возмущений.

Диаграммы теории возмущений модели (11) имеют при $\varepsilon = 0$ УФ-расходимости, которые при $\varepsilon \rightarrow +0$ проявляются в виде полюсов по ε . Эти полюса устраняются процедурой мультипликативной перенормировки. Подробный РГ анализ рассматриваемой модели можно найти в работе [8]. При $d > 2$ для устранения УФ расходимости необходимо ввести только один контрчлен вида $\nu' \Delta \nu$, который воспроизводится мультипликативной перенормировкой вязкости

$$\nu_0 = \nu Z_\nu. \quad (14)$$

Вследствие отсутствия контрчлена $\nu' \nu'$ параметр D_0 не ренормируется, с учетом 13 это означает необходимость перенормировки заряда g_0 , которая записывается в виде

$$g_0 = g \mu^{2\varepsilon} Z_g \quad (15)$$

с константой ренормировки

$$Z_g = Z_\nu^{-3}, \quad (16)$$

где введена "ренормировочная масса" μ – дополнительный произвольный параметр ренормированной теории, и безразмерный заряд g . Поля ν и ν' не ренормируются. Таким образом, ренормированное действие имеет вид:

$$S_R(\nu, \nu') = g \mu^{2\varepsilon} \nu^3 \frac{\nu' k^{4-d-2\varepsilon} \nu'}{2} + \nu' [-\partial_t - (\nu \partial) \nu + \nu Z_\nu \partial^2] \nu. \quad (17)$$

Конкретный вид констант ренормировок определяется "схемой вычитания".

2.6 РГ уравнение

Для удобства будем работать не с полными функциями Грина $G_n \equiv \langle \Phi \dots \Phi \rangle$, а с 1-неприводимыми функциями $\Gamma_n \equiv \langle \Phi \dots \Phi \rangle_{1-ir}$. Ренормированная 1-неприводимая функция связана с неренормированной соотношением:

$$\Gamma_n^R(g, \nu, \mu \dots) = \Gamma_n(g_0, \nu_0, \dots). \quad (18)$$

В качестве аргумента правой части равенства указаны затравочные параметры $e_0 = g_0, \nu_0$ неренормированного действия. В силу того, что параметр μ выбирается произвольно, можно ввести *основное РГ уравнение*. Обозначая \tilde{D}_μ операцию $\mu \partial_\mu$ при фиксированных затравочных параметрах g_0, ν_0 и действуя ею на равенство (18), в терминах ренормированных переменных получаем

$$(\mu \partial_\mu + \beta(g) \partial_g - \gamma_\nu(g) \nu \partial_\nu) \Gamma^R = 0, \quad (19)$$

где РГ-функции $\beta(g)$ и $\gamma_\nu(g)$ определены соотношениями

$$\beta(g, \varepsilon) = \tilde{D}_\mu g, \quad (20)$$

$$\gamma_\nu(g, \varepsilon) = \tilde{D}_\mu \ln Z_\nu = \beta(g, \varepsilon) \partial_g \ln Z_\nu. \quad (21)$$

Вводя также РГ-функцию

$$\gamma_g(g, \varepsilon) = \tilde{D}_\mu \ln Z_g, \quad (22)$$

из (15), (20) получаем

$$\beta = -g(2\varepsilon + \gamma_g). \quad (23)$$

Неподвижная точка ренормгруппы определяется условием

$$\beta(g_*) = 0 \quad (24)$$

Эта точка ИК-устойчива, если

$$\omega = \partial_g \beta(g) \Big|_{g=g_*} > 0 \quad (25)$$

Тривиальная точка $g_* = 0$ не устойчива. Координата нетривиальной точки определяется условием

$$\gamma(g_*) = -2\varepsilon, \quad (26)$$

ее можно рассчитывать в виде ε -разложения, вычисляя $\gamma(g)$ по теории возмущений. Значение g_* не универсально – зависит от схемы ренормировки, тогда как значение индекса ω от этого выбора не зависит. Объективной характеристикой является также значение $\gamma_\nu(g_*)$, определяющая показатели ИК-скейлинга. Благодаря соотношению

$$\gamma_g = -3\gamma_\nu, \quad (27)$$

вытекающему из (16), (21), (22), значение $\gamma_\nu(g_*)$ находится из (26) точно (без использования теории возмущений):

$$\gamma_{nu}(g_*) = 2\varepsilon/3, \quad (28)$$

что приводит при физическом значении $\varepsilon = 2$ к колмогоровскому скейлингу (см., напр., [8]. В настоящей работе проводится анализ устойчивости этого результата путем расчета поправочного индекса ω .

2.7 Вычисление РГ функций в многопетлевом приближении

Основываясь на работах [10], [11], перейдем к вычислению РГ функции γ_ν . Согласно (21), она определяется константой ренормировки Z_ν , ответственной за устранение расходимостей в 1-неприводимой функции

$$\Gamma_{i,j}(k, \omega) = \langle v_i v_j' \rangle_{1-ir}, \quad (29)$$

эта функция пропорциональна поперечному проектору (9):

$$\Gamma_{i,j}(k, \omega) = P_{ij}(k) \Gamma(k, \omega); \quad \Gamma(k, \omega) = \frac{\Gamma_{ii}(k, \omega)}{d-1}. \quad (30)$$

Введем также нормированную функцию, равную единице в низшем порядке теории возмущений (беспетлевом приближении):

$$\bar{\Gamma}(p, \omega) = \frac{\Gamma(k, \omega)}{-\nu p^2}. \quad (31)$$

Ряд теории возмущений для $\bar{\Gamma}(p, \omega)$ имеет вид

$$\bar{\Gamma}(k, \omega, m, \mu) = 1 + \sum_{n \geq 1} u^n \mu^{2n\varepsilon} \sum_i \chi_n^i(k, \omega, m); \quad u \equiv \frac{S_d g}{(2\pi)^d}, \quad (32)$$

где S_d – площадь d -мерной сферы единичного радиуса, сумма по i учитывает все n петлевые диаграммы функции $\bar{\Gamma}$.

Зафиксируем схему ренормировки, наложив на ренормированную функцию условие $\bar{\Gamma}^R|_{k=0, \omega=0, m=\mu} = 1$ и будем считать это условием на Z_ν , определяющим выбор схемы ренормировки. В работе [11] предложен способ расчета функции γ_ν непосредственно по диаграммам функции $\bar{\Gamma}$, минуя вычисление константы ренормировки Z_ν . Для этого записывают уравнение (19) для $\bar{\Gamma}^R$ и переходят в нем в точку нормировки. Это дает

$$\gamma_\nu(u) = -R'(m\partial_m \bar{\Gamma}) \Big|_{k=0, \omega=0, m=\mu}, \quad (33)$$

где R' – неполная R -операция Боголюбова-Парасюка, вычитающая расходимости из подграфов в диаграмме. Определяемая этим соотношением функция $\gamma_\nu(g)$ не содержит полюсов по ε – все УФ расходимости в подграфах устраняются за счет R' , а операция $m\partial_m$ устраняет поверхностную расходимость. Вычитание из расходящихся подграфов происходит в точке нормировки $m = \mu$ и на нулевых втекающих импульсах и частотах. Отметим, что операции R' и $m\partial_m$ в (33) коммутируют.

3 Особенности расчета диаграмм при $d \rightarrow \infty$

В данном разделе будут представлены некоторые признаки на основе которых, количество ненулевых диаграмм сильно сокращается. На основе этих признаков был реализован компьютерный расчет диаграмм в трех и четырех петлях. Основная работа была проделана Ю.В. Кириенко [12], но результат четырехпетлевого расчета так и не был опубликован. Задача автора данной работы заключалась в ускорении некоторых элементов расчета, отлаживания программы на новой версии Python и проверки полученных результатов.

Теперь перейдем к расчету диаграмм. Пропагаторы в импульсно-временном представлении имеют вид:

$$\langle v_i(t) v'_j(t') \rangle_0 = \Theta(t - t') \exp(-\nu_0 k^2 (t - t')) P_{ij}(k) = \text{---}+ \quad (34)$$

$$\langle v_i(t) v_j(t') \rangle_0 = \frac{d_f(k)}{2\nu_0 k^2} \exp(-\nu_0 k^2 |t - t'|) P_{ij}(k) = \text{---} \quad (35)$$

$$\langle v'_i(t) v'_j(t') \rangle_0 = 0 \quad (36)$$

Взаимодействие представляется в виде тройной вершины $-v'(v\partial)v = v'_j V_{jst} v_s v_l$ с множителем

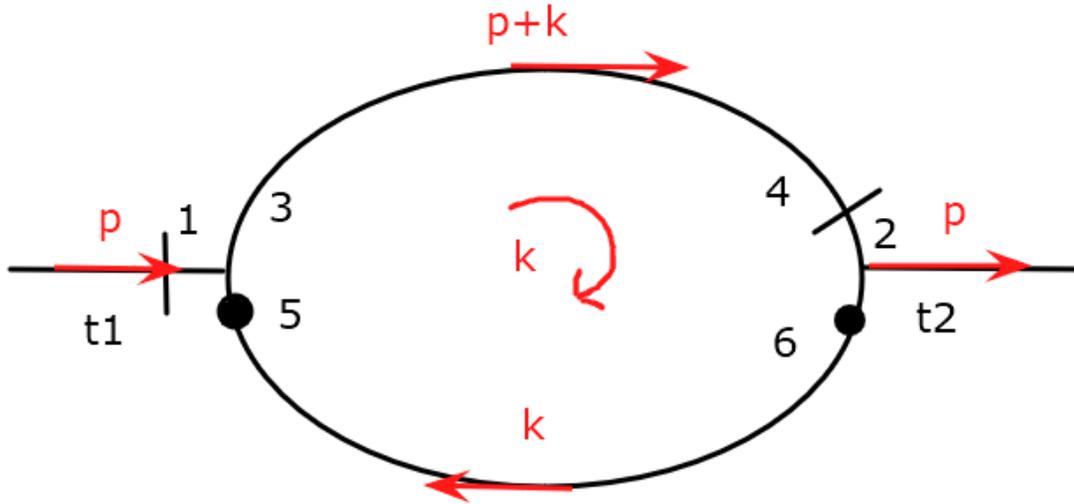
$$V_{jst} = ik_s \delta_{jl} = \text{---}+ \bullet \begin{array}{l} \diagup \\ \diagdown \end{array} \quad (37)$$

Здесь k_s – импульсный аргумент поля v' , перечеркнутая линия – поле v'_j , линия с жирной точкой – поле v , свергнутое с ik_s , линия без отметок – поле v_l .

В любой диаграмме функции $\bar{\Gamma}(p, \omega)$ число петель равно числу пропагаторов $\nu\nu$, поэтому импульсы интегрирования можно приписать этим линиям. Расставляя "простые" импульсы на линии $\nu\nu$, получаем согласно (35), (12) множитель k^{-d} в каждой петле, который будет в сферической системе координат сокращаться с множителем k^{d-1} из элемента объема. Входящий в элемент объема множитель $\sin(\theta)^{d-1}$ имеет при $d \rightarrow \infty$ резкий максимум при $\theta = \pi/2$ и любые скалярные произведения в подынтегральном выражении будут обращаться в ноль, а интеграл по углам даст S_d – площадь поверхности d -мерной сферы единичного радиуса, этот множитель будет в дальнейшем включаться в переопределенный согласно (32) параметр разложения u .

3.1 Вычисление однопетлевой диаграммы

Для получения общих причин сокращения части диаграмм рассмотрим в качестве примера следующую диаграмму с пронумерованными вершинами и расставленными импульсами:



Интеграл, соответствующий этой диаграмме, имеет вид:

$$\int_0^\infty dt \int d\vec{k} \quad \Theta(t_1 - t_2) \cdot \exp(-\nu(p+k)^2(t_1 - t_2)) \cdot P_{34}(\vec{p} + \vec{k}) \quad [\text{Вклад от линии 34}]$$

$$\frac{d_f(k)}{2\nu k^2} \cdot \exp(-\nu(k)^2|t_1 - t_2|) \cdot P_{56}(\vec{k}) \quad [\text{Вклад от линии 56}]$$

$$i \cdot \vec{p}_5 \cdot \delta_{13} \quad [\text{Вклад от вершины 135}]$$

$$i \cdot (\vec{p} + \vec{k})_6 \cdot \delta_{42} \quad [\text{Вклад от вершины 462}] \quad (38)$$

Интеграл по времени с учетом замены $t = t_1 - t_2$ принимает вид:

$$\int_0^{\infty} dt \Theta(t) \exp(-\nu t(k^2 + (p+k)^2)) = \int_0^{\infty} dt \exp(-\nu t(k^2 + (p+k)^2)) = \frac{1}{2\nu(k^2 + (p+k)^2)} \quad (39)$$

Множитель, содержащий все индексы, после преобразований будет иметь вид:

$$-\delta_{13}\delta_{24}P_{34}(\vec{p} + \vec{k})P_{56}(\vec{k})\vec{p}_5(\vec{p} + \vec{k})_6 = -p^2\delta_{13}\delta_{24}P_{34}(\vec{p} + \vec{k}) \quad (40)$$

Полученное выражение необходимо свернуть с $P_{12}(\vec{p})$ и разделить на $d - 1$. Из всех слагаемых останется только произведение дельта символов δ_{ij} , которое равно $d - 1$.

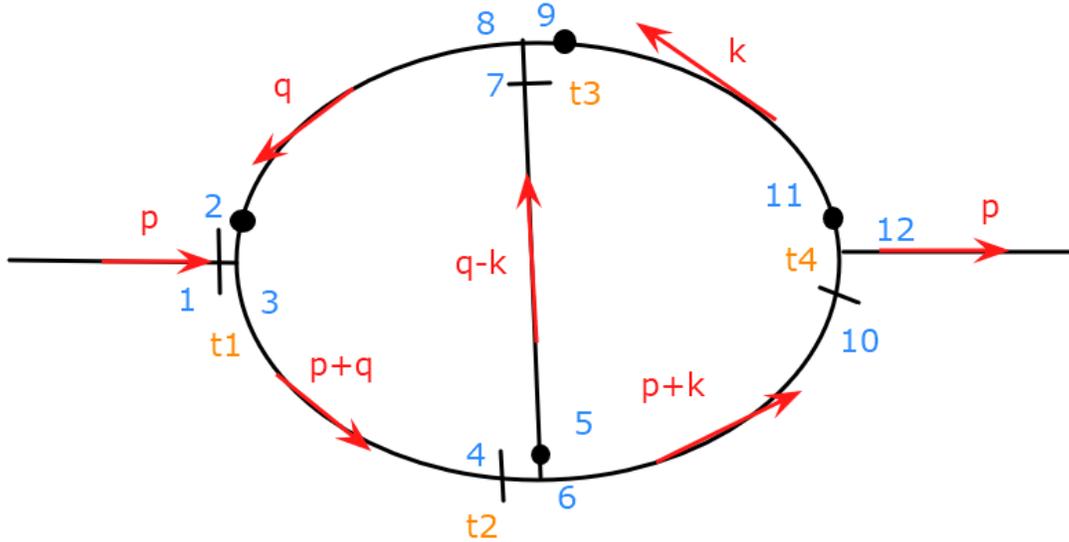
$$\frac{1}{d-1}P_{12}(\vec{p})[-p^2\delta_{13}\delta_{24}P_{34}(\vec{p} + \vec{k})] = -p^2 \quad (41)$$

Исходя из этого приходим к важному следствию – ненулевой диаграммой является только та, у которой есть такая последовательность дельта-символов - **хребет**.

Полученный множитель p^2 будет сокращаться с импульсом в знаменателе из (31). Соответственно в данной схеме ренормировки на нулевом втекающем импульсе (33) эта диаграмма выживает, так как втекающий импульс сокращается.

3.2 Вычисление двухпетлевых диаграмм

Для получения следующего признака, по которому можно отбрасывать нулевые диаграммы, рассмотрим две двухпетлевые диаграммы.



Интеграл соответствующий этой диаграмме выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \int dt_1 \int dt_2 \int dt_3 \int d\vec{k} \int d\vec{q} \quad \Theta(t_1 - t_2) \cdot \exp(-\nu(p+q)^2(t_1 - t_2)) \cdot P_{34}(\vec{p} + \vec{q}) \quad [\text{Вклад от линии 34}] \\
& \quad \Theta(t_2 - t_3) \cdot \exp(-\nu(q-k)^2(t_2 - t_3)) \cdot P_{57}(\vec{q} - \vec{k}) \quad [\text{Вклад от линии 57}] \\
& \quad \Theta(t_2 - t_4) \cdot \exp(-\nu(p+k)^2(t_2 - t_4)) \cdot P_{610}(\vec{p} + \vec{k}) \quad [\text{Вклад от линии 610}] \\
& \quad \frac{df(q)}{2\nu q^2} \cdot \exp(-\nu(q)^2|t_1 - t_3|) \cdot P_{28}(\vec{q}) \quad [\text{Вклад от линии 28}] \\
& \quad \frac{df(k)}{2\nu k^2} \cdot \exp(-\nu(k)^2|t_3 - t_4|) \cdot P_{911}(\vec{k}) \quad [\text{Вклад от линии 911}] \\
& \quad i \cdot \vec{p}_2 \cdot \delta_{13} \quad [\text{Вклад от вершины 123}] \\
& \quad i \cdot (\vec{p} + \vec{q})_5 \cdot \delta_{46} \quad [\text{Вклад от вершины 456}] \\
& \quad i \cdot (\vec{q} - \vec{k})_9 \cdot \delta_{78} \quad [\text{Вклад от вершины 789}] \\
& \quad i \cdot (\vec{p} + \vec{k})_{11} \cdot \delta_{1012} \quad [\text{Вклад от вершины 101112}]
\end{aligned}$$

(42)

Три функции-Хевисайда с временным аргументом в интеграле позволяют ввести понятие **временной версии** - упорядоченное расположение времен каждой вершины. Из выражения выше видно, что должны выполняться следующие условия: $t_1 > t_2$, $t_2 > t_3$, $t_2 > t_4$, следовательно возможны два варианта:

$$t_1 > t_2 > t_3 > t_4$$

$$t_1 > t_2 > t_4 > t_3$$

Для того чтобы взять интегралы по времени введем следующие замены:

$$t_1 - t_2 = \tau_1$$

$$t_3 - t_4 = \tau_2$$

$$t_2 - t_3 = \tau_3$$

Тогда для первой временной версии получим выражение:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^\infty d\tau_3 \quad \exp(-\nu[(p+q)^2\tau_1 + q^2(\tau_1 + \tau_3) + k^2\tau_2 + (q^2 + k^2)\tau_3 + (p^2 + k^2)(\tau_3 + \tau_2)]) = \\
& \quad = \frac{1}{\nu^3} \frac{1}{p^2 + 2q^2} \frac{1}{p^2 + 2k^2} \frac{1}{p^2 + 2k^2 + 2q^2} \quad (43)
\end{aligned}$$

Для второй временной версии будут введем следующие замены:

$$t_1 - t_2 = \tau_1$$

$$t_2 - t_4 = \tau_2$$

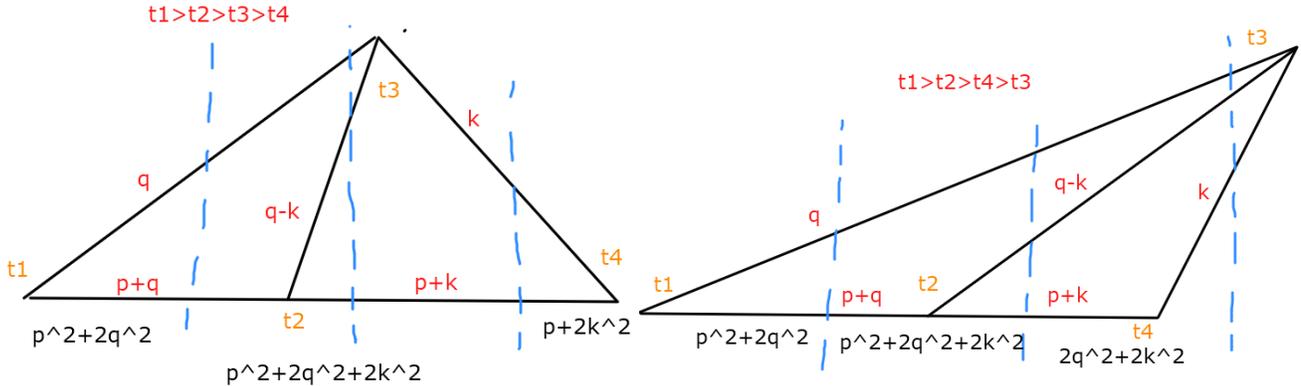
$$t_4 - t_3 = \tau_3$$

$$\int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^\infty d\tau_3 \exp(-\nu[(p+q)^2\tau_1 + q^2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) + k^2\tau_3 + (q^2 + k^2)(\tau_2 + \tau_3) + (p^2 + k^2)(\tau_2)]) =$$

$$= \frac{1}{\nu^3} \frac{1}{p^2 + 2q^2} \frac{1}{2q^2 + 2k^2} \frac{1}{p^2 + 2k^2 + 2q^2} \quad (44)$$

Таким образом, интегрирование по времени примет вид суммы временных версий. Причем очевидно, что для любого количество петель это будут простые интегралы от экспоненты, которые будут давать произведение множителей, содержащих комбинации импульсов в знаменателе в квадрате. Поэтому вместо интегрирования по времени каждой диаграммы введем правило построение сечений:

В соответствие с временной версией вводим **сечение** каждого временного отрезка в диаграмме, сечение будет иметь вид дроби со знаменателем в виде суммы квадратов импульсов, даже если импульс входит со знаком минус (так как скалярное произведение равно 0), для получение временной версии нужно перемножить эти сечение и далее сложить полученные временные версии. Это и будет результатом интегрирования по времени. Ниже пример сечений для данной диаграммы:



Как видно результат сечений совпал с расчетом интегралов выше. Отдельно отметим сокращение коэффициента вязкости ν . Для любой двухпетлевой диаграммы интегрирование по времени дает $\frac{1}{\nu^3}$ (43), (44). Условие нормировки (31) дает также множитель $\frac{1}{\nu}$. Также множитель $\frac{1}{\nu}$ будет из (35) соответствующего каждой линии $\nu\nu$, в двухпетлевой диаграмме таких линий две. Причем в числителе также будет из каждой линии $\nu\nu$ множитель ν^3 на каждое g в разложении, что следует из определения d_f через D_0 (17), (13). В данной диаграмме две петли, поэтому итоговый множитель с вязкостью $\frac{\nu^{2 \cdot 3}}{\nu \cdot \nu^2 \cdot \nu^3}$. Таким

образом, вязкость сокращается и мы получаем, как и ожидалось, безразмерное выражение для диаграммы.

Теперь рассмотрим множитель, содержащий все индексы:

$$\delta_{13}\delta_{46}\delta_{78}\delta_{1012}P_{34}(\vec{p} + \vec{q})P_{28}(\vec{q})P_{57}(\vec{q} - \vec{k})P_{610}(\vec{p} + \vec{k})P_{911}(\vec{k})\vec{p}_2(\vec{p} + \vec{q})_5(\vec{p} + \vec{k})_{11}(\vec{q} - \vec{k})_9 \quad (45)$$

В данном множителе рассмотрим следующий вклад, который равен 0 в силу того, что любое скалярное произведение при $d \rightarrow \infty$ зануляется:

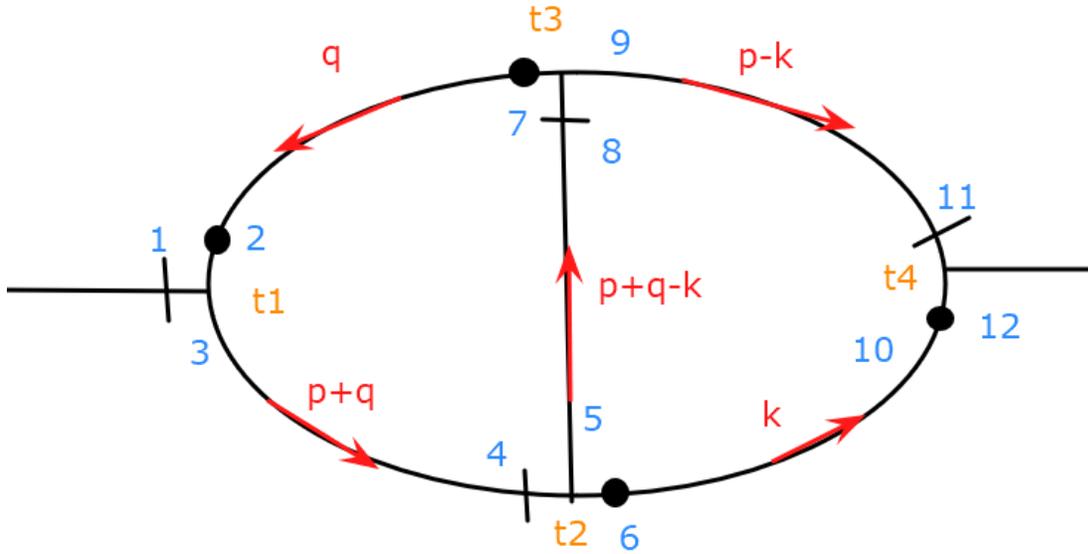
$$P_{911}(\vec{k})(\vec{p} + \vec{k})_{11}(\vec{q} - \vec{k})_9 = (\delta_{911} - \frac{k_9 k_{11}}{k^2})(\vec{p} + \vec{k})_{11}(\vec{q} - \vec{k})_9 = (\vec{p} + \vec{k})_9 - \vec{k}_9)(\vec{q} - \vec{k})_9 = 0 \quad (46)$$

Соответственно вся диаграмма равна 0, несмотря на наличие хребта, таким образом можно ввести понятие - **полухребет** как следующую последовательность линий:

$$\langle vv' \rangle_0 \dots \langle vv \rangle_0 \dots \langle v'v \rangle_0 \quad (47)$$

Таким образом, полухребет состоит из последовательности пропагаторов $\langle vv' \rangle_0$ и $\langle v'v \rangle_0$, между которыми находится пропагатор $\langle vv \rangle_0$

Далее рассмотрим еще одну двухпетлевую диаграмму:



Интеграл соответствующий этой диаграмме:

$$\begin{aligned}
& \int dt_1 \int dt_2 \int dt_3 \int d\vec{k} \int d\vec{q} \quad \Theta(t_1 - t_2) \cdot \exp(-\nu(p+q)^2(t_1 - t_2)) \cdot P_{34}(\vec{p} + \vec{q}) \quad [\text{Вклад от линии 34}] \\
& \quad \Theta(t_2 - t_3) \cdot \exp(-\nu(p+q-k)^2(t_2 - t_3)) \cdot P_{58}(\vec{p} + \vec{q} - \vec{k}) \quad [\text{Вклад от линии 58}] \\
& \quad \Theta(t_2 - t_4) \cdot \exp(-\nu(p-k)^2(t_2 - t_4)) \cdot P_{911}(\vec{p} - \vec{k}) \quad [\text{Вклад от линии 911}] \\
& \quad \frac{df(q)}{2\nu q^2} \cdot \exp(-\nu(q)^2|t_1 - t_3|) \cdot P_{27}(\vec{q}) \quad [\text{Вклад от линии 27}] \\
& \quad \frac{df(k)}{2\nu k^2} \cdot \exp(-\nu(k)^2|t_2 - t_4|) \cdot P_{610}(\vec{k}) \quad [\text{Вклад от линии 610}] \\
& \quad i \cdot \vec{p}_2 \cdot \delta_{13} \quad [\text{Вклад от вершины 123}] \\
& \quad i \cdot (\vec{p} + \vec{q})_5 \cdot \delta_{46} \quad [\text{Вклад от вершины 456}] \\
& \quad i \cdot (\vec{p} + \vec{q} - \vec{k})_7 \cdot \delta_{89} \quad [\text{Вклад от вершины 789}] \\
& \quad i \cdot (\vec{p} - \vec{k})_{10} \cdot \delta_{1112} \quad [\text{Вклад от вершины 101112}] (48)
\end{aligned}$$

Выпишем множитель содержащий все индексы

$$\delta_{13}\delta_{45}\delta_{89}\delta_{1112}P_{34}(\vec{p} + \vec{q})P_{58}(\vec{p} + \vec{q} - \vec{k})_9P_{911}(\vec{p} - \vec{k})P_{27}(\vec{q})P_{610}(\vec{k})\vec{p}_2(\vec{p} + \vec{q})_6(\vec{p} + \vec{q} - \vec{k})_7(\vec{p} - \vec{k})_{10} \quad (49)$$

Рассмотрим два произведения из этого множителя:

$$\vec{p}_2 P_{27}(\vec{q})(\vec{p} + \vec{q} - \vec{k})_7 = \vec{p}_2(\delta_{27} - \frac{\vec{q}_2 \vec{q}_7}{q^2})(\vec{p} + \vec{q} - \vec{k})_7 = \vec{p}_7(\vec{p} + \vec{q} - \vec{k})_7 = p^2 \quad (50)$$

$$(\vec{p} + \vec{q})_6 P_{610}(\vec{k})(\vec{p} - \vec{k})_{10} = (\vec{p} + \vec{q})_6 \delta_{610}(\vec{p} - \vec{k})_{10} = p^2 \quad (51)$$

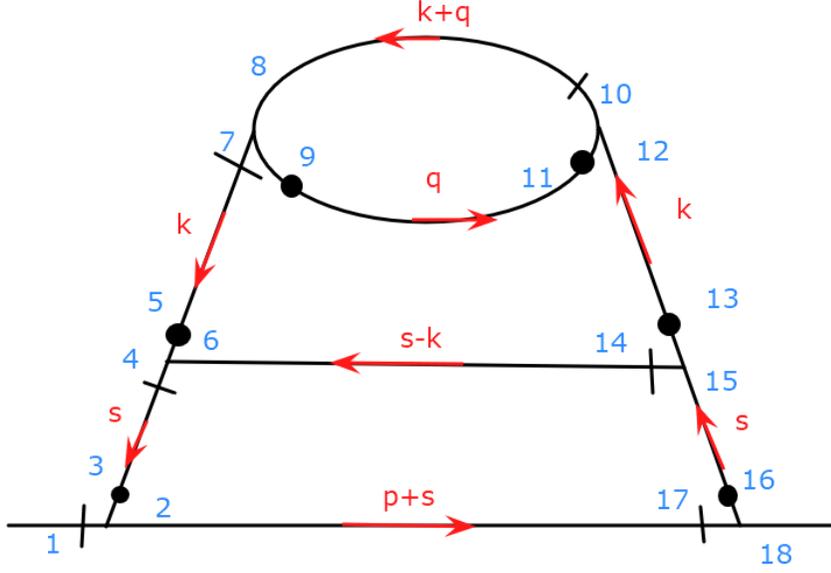
Остальные множители:

$$\delta_{13}\delta_{45}\delta_{89}\delta_{1112}P_{34}(\vec{p} + \vec{q})P_{58}(\vec{p} + \vec{q} - \vec{k})P_{911}(\vec{p} - \vec{k}) \quad (52)$$

Как видно из формул выше в данной диаграмме остается последовательность дельта-символов и множитель p^4 , который в отличие от однопетлевой диаграммы, уже будет зануляться, так как после сокращения p^2 (31), остается p^2 который будет равен нулю из-за выбранной схемы ренормировки на нулевом втекающем импульсе (33).

3.3 Вычисление трехпетлевой диаграммы

Рассмотрим трехпетлевую диаграмму, в которой будет виден очередной признак зануления диаграмм:



Линия 1-2-17-18 является хребтом, линия 1-3-4-6-14-15-16-18 является полухребтом. Поэтому рассмотрим множитель, содержащий индексы из двух верхних петель. Интегрирование по времени здесь можно опустить, так как в данном случае оно не приведет к занулению:

$$P_{57}(k)P_{810}(q+k)\frac{1}{q^2}P_{911}(q)\frac{1}{k^2}P_{1213}(k)k_9\delta_{78}k_{12}\delta_{1011} \quad (53)$$

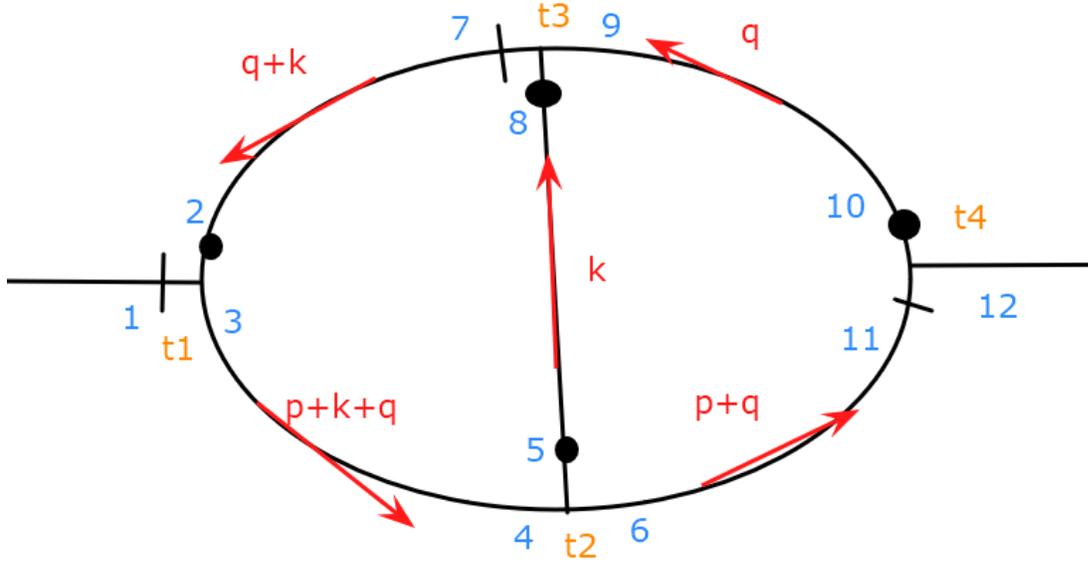
Выделим линию 1213:

$$P_{1213}(k)k_{12} = \left(\delta_{1213} - \frac{k_{12}k_{13}}{k^2}\right)k_{12} = k_{13} - \frac{k^2k_{13}}{k^2} = 0 \quad (54)$$

Соответственно эта диаграмма также равна 0. Получается это из за того, что импульс q втекающий в вершину 10-11-12, дальше не идет по линии 12-13, и из нее уже вытекает импульс $s - k$.

3.4 Получение итогового выражения для двухпетлевой диаграммы

Теперь получим итоговое выражение для ненулевой двухпетлевой диаграммы:

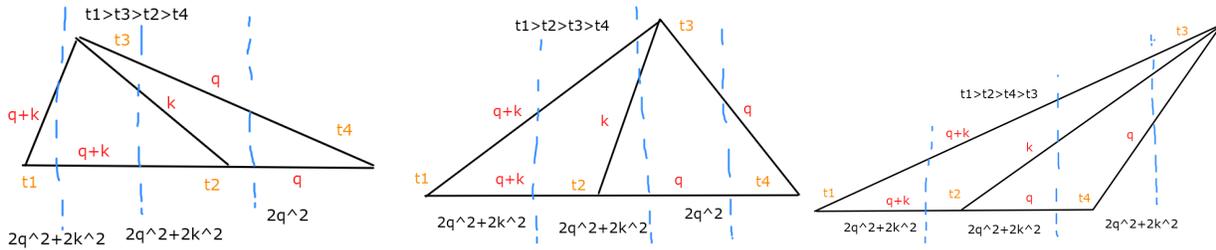


Линия 1-3-4-6-11-12 - хребет, линия 1-2-7-9-10-12 - полухребет. Рассмотрим линию 58:

$$P_{58}(k) \cdot -i(p+q+k)_5 i(q+k)_8 = (\delta_{58} - \frac{k_5 k_8}{k^2})(p+q+k)_5 (q+k)_8 = q^2 + k^2 - \frac{k^4}{k^2} = q^2 \quad (55)$$

В отличие от предыдущей диаграммы эта линия дает не нулевой вклад, так как импульс q втекает в нее и вытекает. Знак $-$ в выражении из за того, что импульс $p+q+k$ втекает в линию, а импульс $q+k$ вытекает.

Теперь рассмотрим временные версии:



С учетом вида функции накачки (12) функция-Хевисайда обрезает интеграл по импульсам снизу, тем самым устраняя ИК расходимость, также будет квадрат каждого импульса в знаменателе из вида пропатора $\nu\nu$ (35). Аналогично в каждой диаграмме будет множитель $\frac{1}{2^n}$, для краткости его не будем писать. Из каждой линии $\nu\nu$ будет $\frac{1}{2}$, каждое временное сечение также содержит $\frac{1}{2}$. Таким образом, для двухпетлевой диаграммы будет множитель $\frac{1}{2^5}$. Для диаграммы с n петлями будет $\frac{1}{2^n}$ из линии $\nu\nu$ и $\frac{1}{2^{m-1}}$ из временных версий, где m - число вершин. Однако внешний импульс в соответствии с условием нормировки (33) равен 0. Тогда выражение для данной диаграммы имеет вид:

$$\int d\vec{k} \int d\vec{q} \frac{k^{4-d-2\varepsilon}}{k^2} \frac{q^{4-d-2\varepsilon}}{q^2} q^2 \left(\frac{1}{q^2(q^2+k^2)^2} + \frac{1}{q^2(q^2+k^2)^2} + \frac{1}{(q^2+k^2)^3} \right) = \quad (56)$$

$$= \int_m^\infty dk \int_m^\infty dq \quad k^{1-2\varepsilon} q^{1-2\varepsilon} \left(\frac{2}{(q^2+k^2)^2} + \frac{q^2}{(q^2+k^2)^3} \right)$$

При переходе в сферическую систему координат площадь поверхности d мерной сферы автоматически выносятся для каждой петли в переменную u (32). Теперь применим к ней операцию $m\partial_m$ в соответствии с формулой (33), и сделав замену $q = m \cdot q$, вынесем множитель с m за интеграл:

$$-m \int_m^\infty dq \quad m^{1-2\varepsilon} q^{1-2\varepsilon} \frac{1}{(q^2+m^2)^2} \left(2 + \frac{q^2}{(q^2+m^2)} \right) - m \int_m^\infty dk \quad m^{1-2\varepsilon} k^{1-2\varepsilon} \frac{1}{(k^2+m^2)^2} \left(2 + \frac{m^2}{(k^2+m^2)} \right) = \quad (57)$$

$$= -\frac{1}{m^{4\varepsilon}} \left[\int_1^\infty dq \quad q^{1-2\varepsilon} \frac{1}{(q^2+1)^2} \left(2 + \frac{q^2}{(q^2+1)} \right) + \int_1^\infty dk \quad k^{1-2\varepsilon} \frac{1}{(k^2+1)^2} \left(2 + \frac{1}{(k^2+1)} \right) \right] =$$

$$= -\frac{1}{2m^{4\varepsilon}} \left[\int_1^\infty dq \quad q^{-\varepsilon} \frac{1}{(q+1)^2} \left(2 + \frac{q}{(q+1)} \right) + \int_1^\infty dk \quad k^{-\varepsilon} \frac{1}{(k+1)^2} \left(2 + \frac{1}{(k+1)} \right) \right]$$

Множитель $\frac{1}{m^{4\varepsilon}}$ сокращается с $\mu^{2n\varepsilon}$ из (32), так как в (33) $m = \mu$. Для вычисления диаграммы множитель с параметром ε в числителе разлагается в ряд, количество членов разложения определяется требуемым порядком ε для расчета индекса ω . Данное разложение возможно, так как γ_ν не содержит полюсов:

$$k^{-\varepsilon} = 1 - \ln(k)\varepsilon + \frac{1}{2}(\ln(k)\varepsilon)^2 - \frac{1}{6}(\ln(k)\varepsilon)^3 + \dots \quad (58)$$

3.5 Построение R' операции

Операцию R' можно записать в виде

$$R'\Gamma = \prod_j (1 - K)_j \Gamma \quad (59)$$

где произведение берется по всем расходящимся подграфам диаграмм, входящих в Γ , K – операция вычитания. В нашем случае расходятся только двухвостки $v'v$, а операция вычитания в принятой схеме ренормировки сводится к вычитанию из подграфа его значения на нулевых втекающих импульсе и частоте ω (выделение множителя k^2 происходит автоматически):

$$(1 - K)f(k, \omega) = f(k, \omega) - f(0, 0). \quad (60)$$

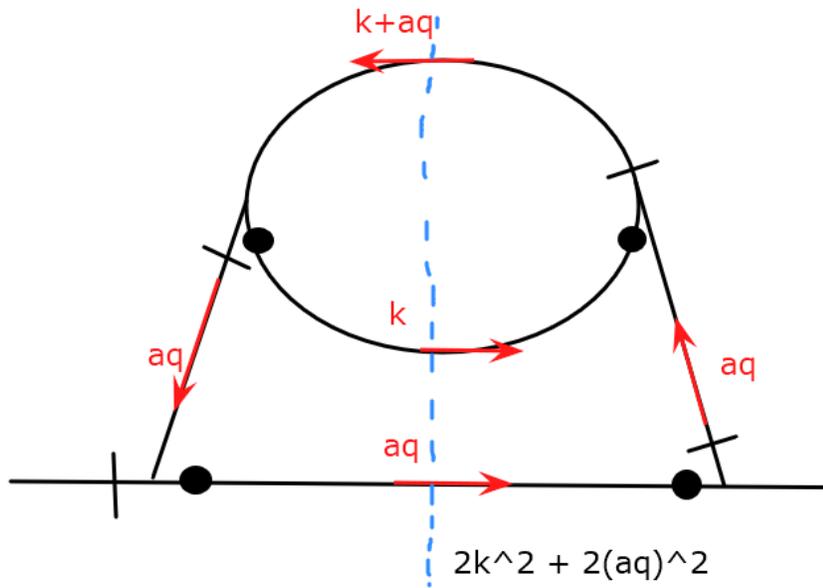
Как уже отмечалось, определенная согласно (33) величина γ_ν не содержит полюсов по ε , но если мы будем вычислять порознь диаграмму и контрчлены, то будем вынуждены

выделять полюса в каждом из них, а затем убеждаться в сокращении полюсов. Чтобы избежать этого, желательно представить весь объект в виде единого сходящегося интеграла. Это достигается записью процедуры вычитания (60) в виде

$$(1 - K)f(k, \omega) = f(k, \omega) - f(0, 0) = \int_0^1 da \partial_a f(ap, a\omega). \quad (61)$$

Использование этого представления в (59) решает поставленную задачу, однако требует использования при вычислениях частотного представления. Правило вычитаний (61) удастся сформулировать на диаграммах, в которых проведено интегрирование по временным версиям. Подробное доказательство представлено в диссертации [13].

В качестве примера рассмотрим следующую диаграмму с одной временной версией:



В данной диаграмме процедура растяжения после интегрирования по времени имеет вид $q \rightarrow aq$, где растягиваются все импульсы q втекающие в расходящийся подграф. Таким образом после применения операции $m\partial_m$ выражение для данной диаграммы будет иметь вид:

$$-m\partial_m \int_0^1 da \int_m^\infty dk \int_m^\infty dq \frac{k^{1-2\varepsilon} (aq)^{1-2\varepsilon} (aq)^2}{(aq)^4 ((aq)^2 + k^2)} = \frac{1}{2m^{4\varepsilon}} \int_0^1 da \int_1^\infty dk \partial_a \left[\frac{k^{-\varepsilon}}{(k + a^2)} \right] + \frac{1}{2m^{4\varepsilon}} \int_1^\infty dq \frac{q^{-\varepsilon}}{q(1 + q)} \quad (62)$$

3.6 Общие признаки значительного сокращения числа диаграмм

На основе диаграмм, разобранных выше, сформулируем признаки отбора диаграмм, который удалось успешно реализовать при компьютерных расчетах:

1. Общие признаки диаграмм для динамических моделей
 - (а) Диаграмма равна нулю, если есть линия $v'v'$ (36).
 - (б) Диаграмма равна нулю, если есть цикл из функций Хевисайда из (34).
2. Признаки, связанные с пределом $d \rightarrow \infty$
 - (а) Диаграмма равна нулю, если ее линии не образуют хребет (3.1).
 - (б) Диаграмма равна нулю, если ее линии не образуют полухребет (3.2).
 - (с) Диаграмма равна нулю, если образуются скалярные произведения разных импульсов в множителе, содержащем индексы (3.3).
3. Диаграмма равна нулю, если она пропорциональна втекающему импульсы со степенью выше 2. Это связано с особенностью нормировки (33).

Таким образом, с учетом всех условий перечисленных выше получается следующее количество ненулевых диаграмм:

1. Для двух петель - 6 из 60 диаграмм
2. Для трех петель - 83 из 4080 диаграмм
3. Для четырех петель - 1692 из 417872 диаграмм

3.7 Метод вычисления

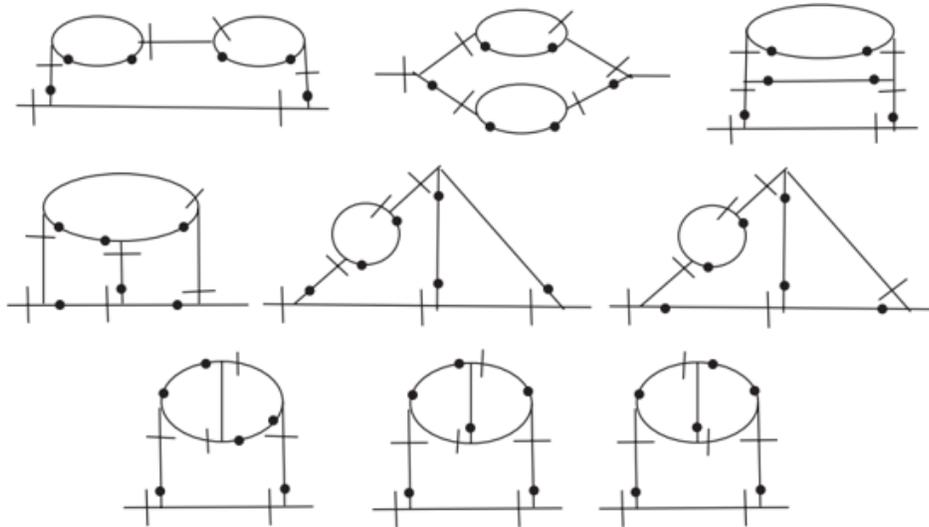
Построение диаграмм, отбор ненулевых диаграмм по правилам, обозначенным выше, составление подынтегрального выражения и применение R' операции проводились в программах, написанных на языке Python. Однако сам расчет интегралов производился в Maple. Этот процесс был автоматизирован, то есть в Python выводилось подынтегральное выражение и затем автоматически запускался расчет этого интеграла в Maple. Написанием данных программ занимался Ю.В. Кириенко, основным результатом которого являлось получение трехпетлевого ответа [12] и четырехпетлевого ответа, ранее неопубликованного. Отдельно стоит отметить использование библиотеки Graphstate для построения диаграмм <https://pypi.org/project/GraphState/>.

Программы были написаны более 5 лет назад на версии Python 2. Первостепенной задачей было научиться пользоваться данными программами и проверить полученные результаты для четырех петель. Так как Python 2 сейчас уже не поддерживается, программы были переведены в новую версию Python 3.8. Далее были обновлены функции, используемой библиотеки networkx, которые также не поддерживались в новой версии Python. Были устранены опечатки, связанные с вычислением диаграмм в первом и втором порядках разложения (58). Также в исходной версии программы интегрирования по параметрам растяжения, вводимых для реализации R' операции (60), проводились с помощью библиотеки sympy в Python. Данный способ приводил к существенно более долгим расчетом, особенно в четырехпетлевых диаграммах, где расходящихся подграфов больше. Соответственно для ускорения вычислений интегрирование и дифференцирование по растяжением было также переведено в Maple.

Впрочем стоит заметить что результаты для 3 петель выше нулевого порядка по ε и четырех петель удается вычислить только численно. Однако получить "условно" аналитические выражения также возможно, что будет рассмотрено в следующих главах.

4 Редукция диаграмм

На примере трехпетлевых диаграмм было замечено, что существует большой набор разнообразных комбинаций диаграмм, которые в сумме дают ноль. К сожалению, эти комбинации содержат некоторые общие диаграммы, поэтому их вклады в общий ответ не независимы. Поставленная задача найти минимальный набор диаграмм, дающий в сумме правильный ответ, была все же решена. Оказалось, что в главном по ε приближении такой набор состоит из 6 диаграмм, однако в линейном по ε приближении сумма этих диаграмм не давала правильного значения. Правильные значения в трех порядках по ε (с точностью до 7 значащих цифр) дает сумма следующих 9 диаграмм:



Для этих диаграмм удалось получить аналитический ответ в первых двух порядках теории возмущений, их сумму можно считать аналитическим ответом для всей совокупности диаграмм, хотя было бы желательно проводить аналитические расчеты в полном объеме. Надежду на это дает использование техники гиперлогарифмов, однако это требует перехода к другой схеме ренормировки.

Отдельного внимания заслуживает вопрос реализации процедуры поиска этих 9 диаграмм в трех петлях. Данная задача сводится к задаче о сумме подмножеств, алгоритмы решения которой подробно разобраны в статье [14]. На основе данной статьи можно выделить два ключевых метода: перебор всех комбинаций, включая его разнообразные модификации, и метод динамического программирования. Перебор является трудоемким методом, сложность которого лежит в пределах от $O(n2^n)$ до $O(n2^{\frac{n}{2}})$, где n это количество элементов множества, в нашем случае для трех петель $n = 83$. Преимущество этого метода состоит в возможности получать все суммы, однако начиная с $n = 10$ для трех петель

время счета становится слишком большим. Для четырех петель, где число диаграмм уже 1692, получить минимальный набор перебором становится невозможно. В связи с этим были попытки использовать метод динамического программирования, который позволяет переводить временную сложность в затраты памяти. Однако данный способ работает только для множества, содержащего положительные целые числа. Значения диаграмм можно сделать целыми за счет домножения на нужную степень 10 (в зависимости от точности используемых значений), а неотрицательность можно обеспечить добавлением к каждой диаграмме наибольшей по модулю отрицательной диаграммы взятой с другим знаком. Но в таком случае возникает проблема перехода к исходному набору диаграмм. В силу линейной зависимости диаграмм сумма положительных значений однозначно не переходит в исходную сумму. Также стоит отметить, что даже при решении данной проблемы уже в трех петлях данный алгоритм требует десятки гигабайт оперативной памяти, что также приводит к невозможности его использования для поиска минимального набора в четырех петлях.

Возможным решением является переход к похожей задаче - задаче о рюкзаке:

Формулировка задачи: Дано N предметов, n_i предмет имеет массу $w_i > 0$ и стоимость $p_i > 0$. Необходимо выбрать такой набор, чтобы суммарная масса не превосходила заданной величины W (емкость рюкзака), а суммарная стоимость была максимальной. Задача сводится к задаче о сумме подмножеств, если стоимость предмета совпадает с его весом.

Алгоритмы решения этой задачи схожи с алгоритмами для задачи о сумме подмножеств. Однако если взять в качестве стоимости значение диаграмм в нулевом приближении по ε , а в качестве веса в первом порядке, то есть надежда на меньшее время счета методом перебора. Данная идея пока находится в стадии проверки, но в случае успеха, можно попытаться таким образом получить минимальный набор в четырех петлях. Численные значения четырех петель в первом порядке разложения по ε уже получены. Проблема попрежнему связана с наличием отрицательных значений диаграмм, а также необходимостью вводить ограничения на оба набора: и вес, и стоимость. На данный момент пока еще ведется поиск алгоритма с таким специфическим условием.

5 Аналитический ответ в 4 петлях

На основе методов, описанных в главе 3, была получена функция γ_ν в четвертом порядке теории возмущений по u :

$$\gamma_\nu = \frac{u}{4} + \frac{u^2}{32}(1 - 2 \ln(2))\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}\varepsilon^2 + \frac{u^3}{512}(7 + 6 \ln(2) + a_3\varepsilon) + \frac{a_4 u^4}{2048} \quad (63)$$

$$a_4 = 52.8590280 - \text{численный четырехпетлевой результат} \quad (64)$$

$$a_3 = -\pi^2/2 + 8 - 45 \ln(3) + 24 \ln(2) - 18(\ln(2))^2 - 9 \text{dilog}\left(\frac{3}{4}\right) \quad (65)$$

В выражении для γ_ν во втором и третьем порядке по u все слагаемые получены аналитически. Выражение для a_3 это аналитический ответ, полученный на основе результатов главы 3. Уравнение (23) переписывается с учетом замены g на u в формуле (32) следующим образом:

$$\beta = u(-2\varepsilon + 3\gamma_u) \quad (66)$$

Для нахождения индекса ω необходимо найти неподвижную точку u^* , соответствующую (24), решая (28) и далее подставляя в (25), получим данное выражение для ω :

$$\omega = 2\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon^2 + \frac{10}{9}\varepsilon^3 + 2.0740695\varepsilon^4 \quad (67)$$

Коэффициент в последнем порядке по ε с точностью до 6 знака после запятой можно заменить на $\frac{56}{27}$. Далее перепишем ω в следующем виде:

$$\omega = 6 \left[\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^2}{9} + \frac{5\varepsilon^3}{27} + \frac{28\varepsilon^4}{81} \right] \quad (68)$$

В таком виде мы получаем числовую последовательность 1, 1, 5, 28, которую можно найти в известной энциклопедии числовых последовательностей, встречающихся в разных науках: <https://oeis.org/search?q=1%2C+1%2C+5%2C+28&fmt=short&go=Search>. Последовательностей с такими первыми членами известно всего 22, безусловно это не является точной гарантией ответа в четвертом порядке в виде рациональной дроби, но в очередной раз наводит на мысль о том, что в данной задаче существуют некоторые скрытые симметрии и для их выявления необходим другой подход, позволяющий получить аналитический пятипетлевой результат.

Более того можно предположить, что аналитический ответ в четвертом порядке не будет содержать вкладов пропорциональных $\ln(2)$, $\ln(3)$, dilog , $(\ln(2))^2$, π^2 . Из этого следует, что такие вклады должны сократиться за счет коэффициента a_3 (65). Тогда можно заново решить уравнение (66) с предположением, что a_4 неизвестная константа. Тогда выражение для ω будет иметь вид:

$$\omega = 2\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon^2 + \frac{10}{9}\varepsilon^3 + \left[-4(\ln(2))^2 - 2\text{dilog}\left(\frac{3}{4}\right) + 10\frac{\ln\left(\frac{27}{4}\right)}{3} + 2a_4 + \frac{2}{27} + 12\ln(2) - 20\ln(3) \right] \varepsilon^4 \quad (69)$$

Приравнивая это выражение к $\frac{56}{27}$ из (68), получаем аналитическое выражение для вклада четырехпетлевых диаграмм в нулевом приближении по ε :

$$a_4 = 9\left(1 + 5\ln(3) - \frac{8}{3}\ln(2) + 2(\ln(2))^2 + \text{dilog}\left(\frac{3}{4}\right)\right) \quad (70)$$

Данное выражение с точностью до 5 знака согласуется с полученным в (68) численным ответом.

6 Заключение

Главной целью этой работы была перепроверка и повторное получение четырехпетлевого результата для индекса ω , характеризующего зависимость структурных функций от

диссипативного масштаба в модели развитой турбулентности. Были обновлены и модернизированы основные программы для построения диаграмм, выделения нулевых диаграмм до их вычисления, а также применения операций, устраняющих УФ расходимости в диаграммах. Также результаты трехпетлевого счета были исследованы на предмет наличия признаков рекудукции диаграмм, несмотря на то что эти признаки не были выявлены, была установлена необходимость изменения методики вычислений диаграмм для получения аналитических выражения во всех порядках теории возмущений. Также основываясь на уникальных особенностях данной модели было получено аналитического выражение для четвертого порядка по ε . Аналитичность этого ответа во многом условна, однако в очередной раз подтверждает вырожденную не независимость диаграмм в старших порядках.

Список литературы

- [1] Adzhemyan L. Ts. Antonov N. V. Kompaniets M. V., Vasil'ev A. N. Renormalizationgroup approach to the stochastic navier-stokes equation: Two-loop approximation. *Phys. B*, 17:2137–2170, 2003.
- [2] Л.Д Ландау Е.М.Лившиц. *Теоретическая физика том 6; Гидродинамика*. Москва "Наука 1986.
- [3] Колмогоров А. Н. Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности. *Докл. АН СССР*, 32:19–121, 1941.
- [4] Колмогоров А. Н. К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости. *Докл. АН СССР*, 31:538–541, 1941.
- [5] Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. *Докл. АН СССР*, 30:299–303, 1941.
- [6] Перекалин М. М. Антонов Н.В. Аномальный скейлинг в теории развитой турбулентности. *Вестник СПбГУ*, 4, 2005.
- [7] Goldin P.V. Kim. T. L. Kompaniets M. V. Adzhemyan L. Ts., Antonov N. V. Renormalization group in the theory of turbulence: Three-loop approximation as $d \rightarrow \infty$. *Theoret. and Math. Phys.*, 158:391–405, 2009.
- [8] Васильев А.Н. Аджемян Л.Ц., Антонов Н.В. Метод ренормализационной группы в теории развитой турбулентности. *Издательство Санкт-Петербургского Университета*, 32, 1998.
- [9] Martin P. C. DeDominicis C. Energy spectra of certain randomly-stirred fluids. *Phys. Rev. A*, 19:419, 1962.
- [10] Novikov S.V. Sazonov V.K. Adzhemyan L.Ts., Kompaniets M.V. Representation of the β -function and anomalous dimensions by nonsingular integrals: Proof of the main relation. *Theor. Math. Phys.*, 175:717–726., 2013.

- [11] Kompaniets M.V. Sazonov V.K. Adzhemyan L.Ts., Kim T. L. Renormalization group in the infinite-dimensional turbulence: determination of the rg-functions without renormalization constants. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics.*, 6 N 4.:461–469, 2015.
- [12] T. L. Kim Yu.V. Kirienko. The stochastic model of turbulence: Simplification of the diagram technique in high dimensions. *Вестник СПбГУ*, Сер. 4. Т. 3:151–157, 2016.
- [13] Воробьева Светлана Евгеньевна. *Многочетлевые расчеты в модели А критической динамики*. PhD thesis, Санкт-Петербургский Государственный Университет, Санкт-Петербург, 2018.
- [14] ЗЫКИНА М.В. СЕЛИВАНОВА И.А. ОБЗОР АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАХОЖДЕНИИ СУММЫ ЭЛЕМЕНТОВ ПОДМНОЖЕСТВА. *ВЕСТНИК УРАЛЬСКОГО ИНСТИТУТА ЭКОНОМИКИ, УПРАВЛЕНИЯ И ПРАВА*, Сер. 4. Т. 3:86–93, 2016.