

Санкт-Петербургский государственный университет

**ТРЕНОГИН Александр Владимирович**

**Выпускная квалификационная работа**

**РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТОВ МНОГОПЕТЛЕВЫХ  
ДИАГРАММ В ДИНАМИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ**

Уровень образования: магистратура

Направление: 03.04.02 «Физика»

Основная образовательная программа: ВМ.5511.2021 «Физика»

Научный руководитель:  
профессор, кафедра Статистической физики, д.ф.-м.н. **Налимов М.Ю.**

Рецензент:  
внс, ПОМИ РАН, д.ф.-м.н. **Деркачев С.Э.**

Санкт-Петербург

2023

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>1 Метод вычислений</b>	<b>6</b>
1.1 Модель в формализме временных функций Грина при конечной температуре	6
1.2 ИК-эффективное действие . . . . .	9
1.3 Ренормировка модели . . . . .	10
1.4 Метод вычислений в координатно-временном представлении . . . . .	12
1.5 Результаты . . . . .	16
<b>2 Развитие метода вычислений в координатно-временном представлении</b>	<b>21</b>
2.1 Преобразование звезда-треугольник . . . . .	21
2.2 Оптимизация вычислений . . . . .	25
<b>Заключение</b>	<b>28</b>
<b>A</b>	<b>29</b>
A.1 Свертка линий в общем виде . . . . .	29
A.2 Диаграммы . . . . .	30
<b>B Код</b>	<b>40</b>
B.1 operations.py . . . . .	40
B.2 define_graph.py . . . . .	42
B.3 calculate_graph.py . . . . .	42
B.4 present_graph.py . . . . .	45
B.5 launch_program.py . . . . .	46
<b>Список литературы</b>	<b>48</b>

# Введение

Известно, что в термодинамических системах могут происходить фазовые переходы первого и второго рода. Они различаются поведением параметра порядка: в случае фазового перехода первого рода он меняется скачком, второго рода - непрерывно. Точки фазового перехода, в которых параметр порядка изменяется непрерывно, называют критическими. Исследуя поведение системы при переходе через критическую точку, обнаруживается, что различные величины и характеристики ведут себя нетривиальным образом. Такие явления называют критическими и они являются предметом исследования теории критического поведения. Современное теоретическое описание критических явлений базируется на использовании метода ренормализационной группы (РГ) [1]. Метод РГ можно сформулировать различными эквивалентными подходами, из которых самым технически эффективным является квантовополевой.

Квантовополевая техника активно использует квантовополевую теорию возмущений (ТВ), представляя исходно интересующий объект в виде ряда по формально малому параметру в формализме диаграмм Фейнмана. Этот ряд содержит члены с ультрафиолетовыми (УФ) расходимостями. Для решения этой проблемы используется процедура перестройки ряда - ренормировка, позволяющая после снятия регуляризации получать конечные коэффициенты членов ряда. В теории ренормировки доказывается, что для некоторого класса моделей от УФ-расходимостей можно полностью избавиться путем переопределения параметров и мультипликативной ренормировкой полей. Эта процедура неоднозначна, но все получающиеся УФ-конечные системы функций Грина физически эквивалентны [2] и связаны между собой преобразованием конечной ренормировки. Неоднозначность связана с выбором регуляризации и схемы вычитаний.

Для начала выбирается одна из применимых регуляризаций. Ограничение на выбор регуляризации накладывает тот факт, что в задачах теории критического поведения нас интересует инфракрасная (ИК) асимптотика конечных выражений. В этом случае размерная регуляризация [3] является одной из самых удачных. Ее суть заключается в выборе размерности пространства, равной малому отклонению от логарифмической размерности пространства, то есть  $d = d_* - \epsilon$ , где  $d, d_*$  - рабочая и логарифмическая размерности пространства соответственно,  $\epsilon$  - малая величина. В этой регуляризации диаграммы представляются рядом Лорана по параметру  $\epsilon$ . Остающийся произвол фиксируется выбором схемы вычитаний. Наиболее технически удобной является схема минимальных вычитаний (Minimal Subtractions - MS) [4]. В ней обеспечение УФ-конечности функций Грина достигается учетом лишь УФ-расходящихся членов диаграмм в константах ренормировки ( $Z$ ), таким образом, в  $Z$  присутствуют только отрицательные степени ряда Лорана по параметру  $\epsilon$ . Преимуществом этой схемы является независимость  $Z$  от массы ( $\tau$ ), поэтому, для удобства вычислений, можно рассматривать "безмассовую" схему ренормировки. Дополнительно к этому, РГ-функции определяются только вычетами в простых полюсах по  $\epsilon$  соответствующих  $Z$ . Используя РГ-функции, можно найти интересующие физические величины.

Резюмируя все вышесказанное, выбор размерной регуляризации и схемы MS позволяет получать интересующие физические результаты наиболее технически удобным способом, однако, даже при таком выборе регуляризации и схемы вычитаний, количество и сложность вычислений остаются на достаточно высоком уровне. Проиллюстрируем это на примере продвижения расчетов в различных моделях, приводя соответствующие года, в которые были опубликованы новые результаты. Перед этим вкратце скажем какие модели существуют.

Теория критического поведения делится на 2 раздела: критическая статика и критическая динамика. Статикой называют задачи равновесной статфизики и термодинамики, то

есть класс задач без времени. В них исследуются как термодинамические характеристики системы, так и характеристики, связанные с одновременными корреляционными функциями. Поведение этих характеристик при приближении к критической точке описывается так называемыми критическими индексами (показателями). Например, индекс  $\alpha$  характеризует поведение теплоемкости  $C$ , индекс  $\gamma$  - поведение восприимчивости  $\chi$ . Модели в статике строятся, опираясь на постулат, допускающий возможность подмены точной микромоделю флуктуационной полевой [52]. Эту подмену можно считать эквивалентной только в том, что касается критического поведения. Примеры статических моделей: модели со взаимодействием  $\phi^3, \phi^4, \phi^6$  (далее просто модель  $\phi^{\dots}$ ).

В динамике возникает время и речь идет о случайных величинах и их статистических характеристиках. Стохастичность обычно моделируют феноменологически путем введения в динамические уравнения некоторого "шума" - случайных сил или других случайных параметров с простым (обычно гауссовым) распределением. Критическая динамика основана на стохастических уравнениях Ланжевена. Удобным оказывается перейти к квантовополевой формулировке, получив некоторую динамическую модель. Наличие произвола в уравнениях Ланжевена позволяет получить разные динамические модели из одной статической. Яркий тому пример - из модели  $\phi^4$  получаются динамические модели  $A - J$  [1, 31]. Вдобавок к этому, оказывается, что в динамической модели не нужно вычислять те критические индексы, которые есть в статической модели, так как они совпадают. Здесь имеется ввиду та статическая модель, по которой построена динамическая. Таким образом, задачей критической динамики является изучение критических сингулярностей времен релаксации и различных кинетических коэффициентов.

Напоследок, существуют другие динамические модели, активно использующие метод РГ. Они отличаются от моделей критической динамики тем, что они не основаны на уравнениях Ланжевена. У этих моделей нет соответствия некоторым статическим моделям. В качестве примера, такие модели строятся при исследовании различных явлений, связанных с турбулентностью. Упоминание наличия других динамических моделей статфизики, активно использующих РГ, было приведено для полноты обзора. В дальнейшем мы будем говорить только о теории критического поведения и соответствующих ей моделях. Перейдем к обзору продвижения расчетов в различных моделях, демонстрируя высокую сложность вычислений.

Начнем с более простого случая - статики. Рассмотрим  $O_n-\phi^4$ -модель. Вклады порядка  $\epsilon$  и  $\epsilon^2$  во всех критических индексах и порядка  $\epsilon^3$  в  $\eta$  (индекс Фишера) были получены в первой работе Вильсона [5] (1972), вклады порядка  $\epsilon^3$  и  $\epsilon^4$  в  $\eta$  получены в работе [6] (1973), вклады  $\epsilon^4$  в остальные индексы - в [7] (1979), вклад  $\epsilon^5$  в  $\eta$  - в [8, 9] (1981). Позднее в работе [10] (1983) были вычислены вклады  $\epsilon^5$  в  $\beta$ -функцию и аномальную размерность массы, а в [11] (1983) вклады  $\epsilon^5$  в остальные индексы. При независимой проверке [12, 13] (1991, 1993) оказалось, что в [10] были допущены ошибки в расчетах, так что окончательно правильные результаты были опубликованы лишь спустя 8 лет. Дальнейшее продвижение наступило спустя 25 лет, когда в работах [14, 15, 16] (2016, 2017) были вычислены соответствующие вклады порядка  $\epsilon^6$ . Наконец, в [17] (2018) были посчитаны РГ-функции, используя семипетлевые расчеты, а в [18] (2023) был получен вклад порядка  $\epsilon^8$  в аномальную размерность поля. Пока что результаты [17, 18] не были получены другими независимыми группами, так что последними подтвержденными являются результаты порядка  $\epsilon^6$ .

Приведем также результаты исторического продвижения в расчетах для двух других моделей статики:  $\phi^3$  и  $\phi^6$ . Двухпетлевой расчет в модели  $\phi^3$ , используя схему MS, был впервые выполнен в [19, 20] (1974, 1975). Вклады порядка  $\epsilon^3$  представлены в работах [21, 22, 23] (1980, 1981). Дальнейшие расчеты оказались сильно осложнены, поэтому четырехпетлевые вычисления были выполнены только спустя 35 лет и соответствующие результаты представлены в [24] (2015). Вклады порядка  $\epsilon^5$  получены в работах [25, 26]

(2021). Самым последним результатом является получение вклада следующего порядка в аномальную размерность поля, используя шестипетлевые вычисления [18] (2023). Значение представленного вклада является неожиданным в силу смены знака относительно других порядков. Результат [18] пока что не был получен другими независимыми группами, так что последними подтвержденными являются результаты пятипетлевого счета.

Перейдем к модели  $\phi^6$ , в которой посчитано меньше всего вкладов ТВ в критические индексы. Вклады порядка  $\epsilon$  и  $\epsilon^2$  приведены в [27] (1973). Вклады  $\epsilon$  и  $\epsilon^2$  в индекс  $\varphi$  (crossover index) и вклад  $\epsilon^3$  в  $\eta$  в [28] (1978). Вклад 3 порядка по  $\epsilon$  в индекс  $\nu$  получен в [29] (1999) (предыдущие 2 порядка можно получить по старым результатам, используя соотношения на критические индексы). Последним результатом является получение вклада порядка  $\epsilon^3$  в  $\varphi$  [30] (2002).

Рассмотрим теперь продвижение в вычислениях динамического критического индекса  $z$  в одной из самых простых динамических моделей - модели А. Вклад порядка  $\epsilon^2$  (первый порядок вклада не дает) был вычислен в работе [32] (1972). Вклад следующего порядка впервые был получен в [33] (1975), но из-за технической погрешности оказался неправильным. Его исправленное значение было представлено в [34] (1984). Вклад порядка  $\epsilon^4$  был посчитан только спустя 25 лет в работе [35] (2008). Еще через 10 лет, используя новую технику редукции диаграмм, вклад четвертого порядка был вычислен с большей точностью в [36] (2018). Наконец, самым последним результатом является получение вклада порядка  $\epsilon^5$  в [37] (2022).

Суммируя всю вышеприведенную информацию, основной проблемой продвижения в расчетах является высокая сложность и трудоемкость вычислений. Решение этой проблемы является актуальной задачей и является целью данной работы применительно к динамическим теориям.

Существует 2 способа дальнейшего продвижения в расчетах. Первым из них является создание новых эффективных методов вычислений и улучшение старых. Эффективные методы вычислений являются необходимостью, поэтому этот способ первостепенен. Из-за отсутствия того же множества различных эффективных способов вычислений в динамике, по сравнению со статикой, в ней продвижение идет сильно медленнее. Вторым способом является использование компьютерных программ для ускорения трудоемких вычислений. Этот способ ничуть не менее важен, ведь без него не были бы получены последние результаты вышеприведенных моделей. Это связано с тем, что количество диаграмм растет факториально с ростом числа петель и дополнительно к этому сложность вычисления каждой из них возрастает. В данной работе мы развиваем оба способа.

Основная техническая проблема состоит в вычислении многократных расходящихся в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  интегралов. Изначально были попытки применения метода Монте-Карло, не увенчавшиеся успехом из-за значительного снижения точности расчетов при вычислениях в высших порядках ТВ (стоит заметить, что со временем новые получающиеся результаты становятся более точными, благодаря непрекращающемуся улучшению данного метода). На смену ему пришел метод Sector Decomposition (SD) [38, 39], оказавшийся эффективным методом повышения точности в статике и заключающийся в выделении вычетов полюсов в явном виде. К сожалению, эффективность метода SD, адаптированного для вычислений в критической динамике [36], оказалась сильно ниже. В [34] был представлен метод вычислений в координатно-временном представлении. Его эффективность оказалась достаточно высокой как для вычислений в статике, так и в динамике.

Данная работа посвящена развитию метода вычислений многопетлевых диаграмм в координатно-временном представлении в динамике. Развитие этого подхода позволило провести вычисления в довольно сложной динамической модели [40, 41, 42], предназначенной для исследования фазового перехода в сверхтекучее состояние. Исторически сложилось, что для описания этого фазового перехода наиболее феноменологически пригодными

являются модели  $E$  или  $F$ . Чтобы определиться какая из них лучше подходит, в недавней работе [40] была построена модель на основе микроскопического описания в формализме временных функций Грина при конечной температуре. В результате этой работы было выдвинуто третье предположение, утверждающее, что соответствующее динамическое поведение описывается более простой стохастической моделью  $A$ . В [41] это предположение было подтверждено; было показано, что в ИК-фиксированной точке модель сводится к модели  $A$ ; были вычислены критические размерности полей в первом порядке ТВ, которые совпали с соответствующими критическими размерностями модели  $A$ . Подтверждение этого предположения сильно облегчает исследование фазового перехода в сверхтекучее состояние, ведь индекс  $z$  модели  $A$  уже посчитан в 5 порядке, а вычисление соответствующего индекса в моделях  $E$  и  $F$  автору не известно.

В этой работе, используя метод вычислений в координатно-временном представлении, вычисляются двух- и трехпетлевые диаграммы с целью подтверждения факта ИК-устойчивости единственной фиксированной точки модели [40]. Сложность этой модели, помимо того, что она динамическая, заключается в наличии комплексного непертурбативного заряда, входящего непосредственно в пропагаторы. Попытки использования метода SD были оставлены из-за чересчур высокой сложности расчетов.

В результате первой части работы, были численно сосчитаны двух- и трехпетлевые вклады диаграмм, вычислены  $\beta$ -функции в следующих порядках по отношению к [41], найдена ИК-фиксированная точка во 2-м порядке и подтверждена ее ИК-устойчивость. Использование метода вычислений в координатно-временном представлении позволило для одно- и двухпетлевых диаграмм получить результаты в аналитическом виде, зависящими от непертурбативного заряда. Дополнительно к этому, оказалось, что вычеты полюсов сразу выделяются удобным образом.

Во второй части работы начинается дальнейшее развитие метода вычислений в координатно-временном представлении. Было вновь получено преобразование звезда-треугольник в статике, и результат совпал с уже полученными результатами для уникальных случаев. Вдобавок к этому, было получено данное преобразование в общем случае. Параллельно велась работа по оптимизации вычислений путем написания алгоритмов. На основе существующих библиотек были написаны методы, позволяющие вычислять часть диаграмм в статической модели  $\phi^3$ .

Основная часть работы состоит из 2-х глав. В 1 главе демонстрируется применение метода вычислений диаграмм в координатно-временном представлении на примере модели [40]. Вначале в 1.1, 1.2 описывается сама ИК-эффективная модель в формализме временных функций Грина при конечной температуре, основанная на микроскопическом подходе. В 1.3 говорится о ренормировке модели, а в 1.4 представлен метод вычислений в координатно-временном представлении. Полученные с помощью него результаты приведены в 1.5. 2 глава посвящена дальнейшему развитию подхода. В 2.1 идет речь о преобразовании звезда-треугольник, а в 2.2 обсуждается написание методов для компьютерных вычислений.

# 1. Метод вычислений

## 1.1 Модель в формализме временных функций Грина при конечной температуре

Опишем динамическую модель [40, 41, 42], используемую при исследовании фазового перехода в сверхтекучее состояние.

Рассмотрим систему квантовых бозе-частиц в большом каноническом ансамбле (БКА) с локальным отталкивающим взаимодействием типа плотность-плотность. Гамильтониан системы [43] (в планковской системе единиц):

$$\hat{H} = \int dx \hat{\psi}^+(x, t) \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} - \mu \right) \hat{\psi}(x, t) + \iint dx dx' \hat{\psi}^+(x, t) \hat{\psi}(x, t) V(x - x') \hat{\psi}^+(x', t) \hat{\psi}(x', t), \quad (1)$$

где  $x$  -  $d$ -мерный вектор ( $x \in \mathbb{R}^d$ ),  $\hat{p} = -i\nabla$  - оператор импульса,  $m$  - масса частиц,  $\mu$  - химический потенциал. Операторы поля  $\hat{\psi}^+(x, t)$  и  $\hat{\psi}(x, t)$ :

$$\hat{\psi}^+(x, t) = \sum_k \varphi_k^*(x, t) \hat{a}_k^+, \quad \hat{\psi}(x, t) = \sum_k \varphi_k(x, t) \hat{a}_k.$$

Суммирование ведется по одночастичным состояниям гамильтониана свободной частицы  $\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \mu$ ,  $\hat{a}_k^+$  и  $\hat{a}_k$  - операторы рождения и уничтожения соответственно,  $\varphi_k(x, t)$  - волновая функция, удовлетворяющая уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi_k(x, t) = \hat{H}_1 \varphi_k(x, t)$$

и представляемая в виде произведения функций, зависящих только от времени и координаты

$$\varphi_k(x, t) = e^{-i\epsilon_k t} \varphi_k(x),$$

где  $\epsilon_k$  - собственные значения и  $\varphi_k(x)$  - собственные функции гамильтониана  $\hat{H}_1$ . В (1),  $V(x - x')$  - потенциал парного взаимодействия частиц. Нас интересует поведение системы вблизи критической точки. Так как в критической точке существуют флуктуации всех размеров, то простейшим приближением для Фурье-образа потенциала будет константа. Сам потенциал записывается в виде  $V(x - x') = \frac{g}{2} \delta(x - x')$ . Учитывая все вышесказанное, перепишем гамильтониан (1) в виде

$$\hat{H} = - \int dx \hat{\psi}^+(x, t) \left( \frac{\Delta}{2m} + \mu \right) \hat{\psi}(x, t) + \frac{g}{2} \int dx (\hat{\psi}^+(x, t) \hat{\psi}(x, t))^2.$$

Перейдем к функциям Грина. Общее определение  $n$ -точечных функций Грина (иначе корреляционных функций) в квантовой теории поля [44]:

$$G_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = Sp \left\{ \hat{\rho} T \left[ \hat{\phi}(x_1, t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2) \dots \hat{\phi}(x_n, t_n) \right] \right\}, \quad (2)$$

где  $Sp$  - операция взятия следа,  $\hat{\rho}$  - оператор плотности,  $T$  - оператор хронологического упорядочивания по времени,  $\hat{\phi}(x_k, t_k)$  - 2-х компонентный оператор поля в представлении Гейзенберга:

$$\hat{\phi}(x_k, t_k) = \begin{pmatrix} \hat{\psi}(x_k, t_k) \\ \hat{\psi}^+(x_k, t_k) \end{pmatrix}.$$

В функции Грина мы можем выбирать любую из компонент оператора поля  $\hat{\phi}$ , но ненулевыми будут только случаи одинакового количества вхождения полей  $\psi$  и  $\psi^+$ . Явно это будет видно дальше. Представляя оператор в представлении Гейзенберга  $\hat{\psi}(x_k, t_k)$  через оператор в представлении Шредингера  $\hat{\psi}(x_k)$  и оператор эволюции  $e^{-i\hat{H}(t_k-t_0)}$

$$\hat{\psi}(x_k, t_k) = e^{i\hat{H}(t_k-t_0)}\hat{\psi}(x_k)e^{-i\hat{H}(t_k-t_0)},$$

а оператор плотности в виде

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta\hat{H}}}{Sp\{e^{-\beta\hat{H}}\}}, \quad \beta = \frac{1}{T},$$

перепишем (2):

$$G_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = Sp \left\{ \frac{e^{-\beta\hat{H}}}{Z} T \left[ \hat{\psi}(x_1) e^{i\hat{H}(t_2-t_1)} \hat{\psi}(x_2) \dots e^{i\hat{H}(t_n-t_{n-1})} \hat{\psi}(x_n) e^{-i\hat{H}(t_n-t_1)} \right] \right\}. \quad (3)$$

В знаменателе  $\hat{\rho}$  стоит статсумма, так что здесь мы ее обозначили за  $Z$ , а также использовали свойство  $Sp : Sp(AB) = Sp(BA)$  и учли коммутацию  $\rho$  и оператора эволюции. Используя формулу Фейнмана-Каца [45], где  $\hat{p} = i\hat{\psi}^+$  и  $\hat{q} = \hat{\psi}$ , перепишем (3):

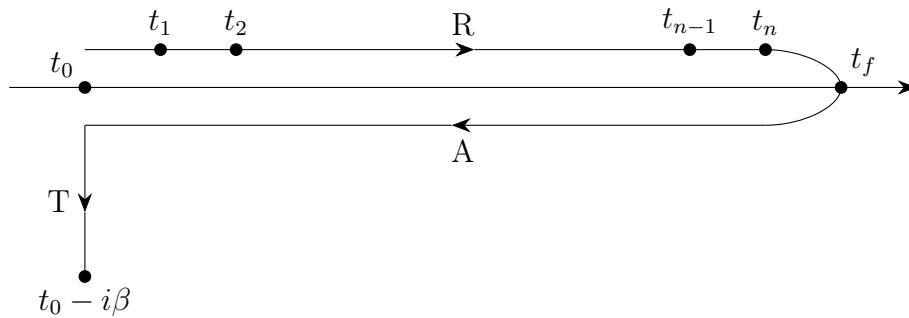
$$G_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = \frac{1}{Z} \int_{\psi_f=\psi_0} D\psi \int D\psi^+ \psi(x_1)\psi(x_2) \dots \psi(x_n) e^{iS},$$

$$Z = \int D\psi \int D\psi^+ e^{iS}. \quad (4)$$

Здесь  $\psi$  и  $\psi^+$  - комплексно-сопряженные поля, заменяющие операторы поля.  $\psi_0$  и  $\psi_f$  - поля в начальный и конечный момент времени соответственно. Действие  $S$ :

$$S = \int dx \int_C dt \left( \psi^+ \left( i\partial_t + \frac{\Delta}{2m} + \mu \right) \psi - \frac{g}{2} (\psi^+ \psi)^2 \right). \quad (5)$$

Интегрирование по времени ведется по контуру Келдыша-Швингера [46, 47]:



$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n < t_f$$

Поле  $\psi(t)$  представляется суммой 3-х полей  $\psi_i(t)$ , где индекс  $i \in (R, A, T)$  и зависит от того на каком из участков контура находится время  $t$ . Носитель каждого из полей не может



быть больше соответствующего участка контура. Поля непрерывны на границах ветвей, поэтому необходимы условия сшивания

$$\psi_R(t_f) = \psi_A(t_f), \quad \psi_A(t_0) = \psi_T(t_0), \quad \psi_T(t_0 - i\beta) = \psi_R(t_0).$$

Перейдем к более естественной записи действия в (4) через замену  $S = iS'$ , получая  $e^{-S'}$ , где

$$S' = \int dx \int_C dt \left( \psi^+ \left( \partial_t - i \left( \frac{\Delta}{2m} + \mu \right) \right) \psi + \frac{ig}{2} (\psi^+ \psi)^2 \right).$$

Найдем свободные пропагаторы модели (5). По квадратичной форме видно, что пропагаторы  $\langle \psi_i \psi_j \rangle$  и  $\langle \psi_i^+ \psi_j^+ \rangle$  равны нулю. Это наглядно демонстрирует почему несогласованное (разное) количество полей  $\psi$  и  $\psi^+$  в (4) зануляет выражение. Остается найти пропагаторы вида  $G_{ij} \equiv \langle \psi_i(t) \psi_j^+(t') \rangle_0$ . Используя уравнение Швингера, получаем

$$\left( \partial_t - i \left( \frac{\Delta}{2m} + \mu \right) \right) G_{ij}(x - x', t - t') = \delta_{ij} \delta(x - x') \delta(t - t').$$

Применяя преобразование Фурье по координате

$$\left( \partial_t + i \left( \frac{k^2}{2m} - \mu \right) \right) G_{ij}(k, t - t') = \delta_{ij} \delta(t - t')$$

и используя условия сшивания

$$G_{Rj}(t_f - t') = G_{Aj}(t_f - t'), \quad G_{Aj}(t_0 - t') = G_{Tj}(t_0 - t'), \quad G_{Tj}(t_0 - i\beta - t') = G_{Rj}(t_0 - t'),$$

получаем в импульсно-временном представлении

$$\begin{aligned} G_{RR} &= e^{-i\varepsilon(t-t')}(\theta(t-t') + n), & G_{RA} &= e^{-i\varepsilon(t-t')}n, & G_{AR} &= e^{-i\varepsilon(t-t')(1+n)}, \\ G_{AA} &= e^{-i\varepsilon(t-t')}(\theta(t'-t) + n), & G_{RT} &= e^{-i\varepsilon(t-t_0+i\tau')}n, & G_{TR} &= e^{-i\varepsilon(t_0-i\tau-t')(1+n)}, \\ G_{TT} &= e^{-\varepsilon(\tau-\tau')}(\theta(\tau-\tau') + n), & G_{AT} &= e^{-i\varepsilon(t-t_0+i\tau')}n, & G_{TA} &= e^{-i\varepsilon(t_0-i\tau-t')(1+n)}, \end{aligned}$$

где  $\theta$  - функция Хевисайда,  $\tau \equiv -\text{Im } t \in (0, \beta)$ ,  $n \equiv n(\varepsilon(k)) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$  - средние значения чисел заполнения,  $\varepsilon = \frac{k^2}{2m} - \mu$ ,  $k$  - импульс.

Далее удобно перейти к новым полям  $\xi, \xi^+, \eta, \eta^+$  [47]:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_R + \psi_A), \quad \xi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_R^+ + \psi_A^+), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_R - \psi_A), \quad \eta^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_R^+ - \psi_A^+).$$

В этих полях пропагаторы переписываются как

$$\begin{aligned} \langle \xi \xi^+ \rangle_0 &= e^{-i\varepsilon(t-t') - \gamma|t-t'|}(1 + 2n), & \langle \eta \eta^+ \rangle_0 &= 0, \\ \langle \psi_T \psi_T^+ \rangle_0 &= e^{-\varepsilon(\tau-\tau')}(\theta(\tau-\tau') + n), \\ \langle \xi \eta^+ \rangle_0 &= \theta(t-t') e^{-i\varepsilon(t-t') - \gamma|t-t'|}, & \langle \eta \xi^+ \rangle_0 &= -\theta(t'-t) e^{-i\varepsilon(t-t') - \gamma|t-t'|}, \\ \langle \xi \psi_T^+ \rangle_0 &= \sqrt{2} e^{-i\varepsilon(t-t_0+i\tau') - \gamma|t-t_0|} n, & \langle \psi_T \xi^+ \rangle_0 &= \sqrt{2} e^{-i\varepsilon(t_0-i\tau-t') - \gamma|t'-t_0|} (1+n), \\ \langle \eta \psi_T^+ \rangle_0 &= 0, & \langle \psi_T \eta^+ \rangle_0 &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\gamma$  - параметр затухания, регуляризирующий пропагаторы. Введение этого параметра позволяет устранить "пинчевые" сингулярности [40, 48] и имеет физическую природу, связанную с частичным суммированием вкладов петлевых диаграмм. В [40] также было показано, что при использовании размерной регуляризации и схемы MS ренормировки,

параметр затухания принимает вид  $\gamma = \alpha k^2/m + \mu f(\mu m/k^2)$ , где  $f$  - некоторая функция,  $\alpha$  - безразмерный вещественный параметр.

Для облегчения дальнейшего анализа устремим  $t_0$  к  $-\infty$ , а  $t_f$  к  $\infty$ . Так как оператор плотности отвечает времени  $t_0$  (начальное время, на котором предполагается установление равновесия в системе), устремление его к  $-\infty$  приводит к "забыванию" всех корреляций в начальном распределении частиц, возникающих вследствие внешнего возмущения, к моменту времени  $t_1$ . Это в свою очередь означает, что система станет однородной и придет к состоянию, которое нас и интересует. С технической стороны, данное облегчение позволяет использовать преобразование Фурье. Наконец, в пределе  $t_0 \rightarrow -\infty$ , модель упрощается из-за зануления пропагаторов  $\langle \xi \psi_T^+ \rangle_0$  и  $\langle \psi_T \xi^+ \rangle_0$ , что приводит к расщеплению температурных и динамических полей.

Взаимодействие в этих полях принимает вид

$$\begin{aligned} S_{int} &= \frac{ig}{2} \left( \int dx \int_{-\infty}^{\infty} dt (\psi_R^+ \psi_R)^2 + \int dx \int_{-\infty}^{\infty} dt (\psi_A^+ \psi_A)^2 \right) = \frac{ig}{2} \int dx \int_{-\infty}^{\infty} dt ((\psi_R^+ \psi_R)^2 - (\psi_A^+ \psi_A)^2) = \\ &= \frac{ig}{2} \int dx \int_{-\infty}^{\infty} dt (\eta^+ \xi^2 \xi^+ + \eta \xi \xi^{+2} + \eta \eta^{+2} \xi + \eta^2 \eta^+ \xi^+). \end{aligned}$$

Здесь не приведен вклад температурных полей, так как из-за расщепления он нам не интересен.

## 1.2 ИК-эффективное действие

Для получения ИК-эффективного действия, из него нужно убрать все ИК-несущественные члены.

Будем использовать "безмассовую" схему ренормировки, в которой  $\mu = 0$ . В ИК-асимптотике  $n$  преобразуется в

$$n = \frac{1}{\exp\left(\frac{\beta k^2}{2m}\right) - 1} \rightarrow \frac{2m}{\beta k^2}.$$

Константы  $2m/\beta$  в  $n$ ,  $1/m$  в  $\gamma$  и  $1/2m$  в  $\varepsilon$  можно убрать растяжением координат, времени, полей и заряда. Тогда ИК-существенные пропагаторы динамических полей будут иметь вид

$$\begin{aligned} \langle \xi \xi^+ \rangle_0 &= \frac{2}{k^2} e^{-ik^2(t-t') - \alpha k^2 |t-t'|}, & \langle \xi \eta^+ \rangle_0 &= \theta(t-t') e^{-ik^2(t-t') - \alpha k^2 |t-t'|}, \\ \langle \eta \xi^+ \rangle_0 &= -\theta(t' - t) e^{-ik^2(t-t') - \alpha k^2 |t-t'|}, & \langle \eta \eta^+ \rangle_0 &= 0, \end{aligned}$$

$\langle \xi^+ \xi \rangle$ ,  $\langle \eta^+ \xi \rangle$ ,  $\langle \xi^+ \eta \rangle$ , получаются заменой  $t \leftrightarrow t'$ . Заметим, что данные пропагаторы отличаются от таковых в модели  $A$ , за счет того, что в экспоненте присутствует комплексная составляющая. Переводя пропагаторы в  $(k, \omega)$  представление

$$\begin{aligned} \langle \xi \xi^+ \rangle_0 &= \frac{4\alpha}{((\alpha + i)k^2 - i\omega)((\alpha - i)k^2 + i\omega)}, & \langle \xi \eta^+ \rangle_0 &= \frac{1}{(\alpha + i)k^2 - i\omega}, \\ \langle \eta \xi^+ \rangle_0 &= -\frac{1}{(\alpha - i)k^2 + i\omega}, & \langle \eta \eta^+ \rangle_0 &= 0, \end{aligned}$$

и обращая матрицу пропагаторов

$$KG = \begin{pmatrix} K_{\xi+\xi} & K_{\xi+\eta} \\ K_{\eta+\xi} & K_{\eta+\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \xi \xi^+ \rangle_0 & \langle \xi \eta^+ \rangle_0 \\ \langle \eta \xi^+ \rangle_0 & \langle \eta \eta^+ \rangle_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
K_{\xi+\xi} &= 0, & K_{\xi+\eta} &= -((\alpha - i)k^2 + i\omega), \\
K_{\eta+\xi} &= (\alpha + i)k^2 - i\omega, & K_{\eta+\eta} &= 4\alpha,
\end{aligned}$$

получаем свободную часть действия

$$S_0 = 4\eta\alpha\eta^+ + \eta^+(\partial_t - (\alpha + i)\Delta)\xi + \xi^+(\partial_t + (\alpha - i)\Delta)\eta. \quad (7)$$

Взаимодействие имеет вид

$$S_{int} = \frac{ig_a}{2}\eta^+\xi^2\xi^+ + \frac{ig_b}{2}\eta\xi\xi^{+2} + \frac{ig_c}{2}\eta\eta^{+2}\xi + \frac{ig_d}{2}\eta^2\eta^+\xi^+,$$

где различные заряды  $g_a, g_b, g_c, g_d$  введены для удобства и равны в физическом случае. После определения канонических размерностей полей по (7) ( $d[\alpha]$  положим нулем, так как ее можно убрать растяжением полей)

$$d[\eta] = d/2 + 1, \quad d[\xi] = d/2 - 1,$$

найдем канонические размерности зарядов:

$$d[g_a] = 4 - d, \quad d[g_b] = 4 - d, \quad d[g_c] = -d, \quad d[g_d] = -d. \quad (8)$$

$d[g_c] = d[g_d] = -d < 0$ , следовательно вклады во взаимодействия, отвечающие этим зарядам, ИК-несущественны и их нужно отбросить.

Окончательный вид ИК-эффективного действия:

$$S = 4\eta\alpha\eta^+ + \eta^+(\partial_t - \alpha(1 + iu)\Delta)\xi + \xi^+(\partial_t + \alpha(1 - iu)\Delta)\eta + \frac{i\alpha g_{01}\mu^{4-d}}{2}\eta^+\xi^2\xi^+ + \frac{i\alpha g_{02}\mu^{4-d}}{2}\eta\xi\xi^{+2}, \quad (9)$$

где был введен параметр  $u \equiv 1/\alpha$  для выделения  $\alpha$  при других операторах Лапласа,  $\mu$  - ренормировочная масса, обезразмеривающая заряды  $g_{01}$  и  $g_{02}$ . Введенный параметр  $u$  является комплексным непертурбативным зарядом, как мы это увидим при подсчете  $\beta$ -функций, и ренормируется по-другому, нежели  $\alpha$ . Также для удобства  $\alpha$  был выделен из зарядов. Дополнительное обоснование введения различных зарядов заключается в их различной ренормировке.

Из (8) видно, что наша модель логарифмична в четырехмерном пространстве, поэтому ренормировка будет проводиться с помощью размерной регуляризации в  $d = 4 - \epsilon$ .

### 1.3 Ренормировка модели

По (9) получаем ренормированное действие, содержащее 7 комплексных множителей  $Z_i$ , соответствующих учету всех возможных контрчленов (дополнительные в результате ренормировки не получаются):

$$S_R = Z_0\eta_R\eta_R^+ + \eta_R^+(Z_1\partial_t - Z_2\Delta)\xi_R + \xi_R^+(Z_3\partial_t - Z_4\Delta)\eta_R + Z_5\mu^{4-d}\eta_R^+\xi_R^2\xi_R^+ + Z_6\mu^{4-d}\eta_R\xi_R\xi_R^{+2}, \quad (10)$$

где  $Z_0 \dots Z_6$  - обозначения для произведений констант ренормировки и параметров. Константы ренормировки вводятся как

$$\begin{aligned}
\xi &= Z_\xi\xi_R, & \eta &= Z_\eta\eta_R, & u &= Z_u u_R, & g_{01} &= Z_{g_1}g_1, \\
\xi^+ &= Z_{\xi^+}\xi_R^+, & \eta^+ &= Z_{\eta^+}\eta_R^+, & \alpha &= Z_\alpha\alpha_R, & g_{02} &= Z_{g_2}g_2,
\end{aligned}$$

отсюда получаем уравнения на  $Z_i$ :

$$\begin{aligned}
Z_0 &= 4\alpha_R Z_\alpha Z_\eta Z_{\eta^+}, \\
Z_1 &= Z_{\eta^+} Z_\xi, \quad Z_2 = \alpha_R Z_\alpha Z_{\eta^+} Z_\xi + i\alpha_R u_R Z_\alpha Z_u Z_{\eta^+} Z_\xi, \\
Z_3 &= Z_{\xi^+} Z_\eta, \quad Z_4 = -\alpha_R Z_\alpha Z_{\xi^+} Z_\eta + i\alpha_R u_R Z_\alpha Z_u Z_{\xi^+} Z_\eta, \\
Z_5 &= \frac{i\alpha_R g_1}{2} Z_\alpha Z_{g_1} Z_{\eta^+} Z_\xi^2 Z_{\xi^+}, \quad Z_6 = \frac{i\alpha_R g_2}{2} Z_\alpha Z_{g_2} Z_\eta Z_\xi Z_{\xi^+}^2.
\end{aligned} \tag{11}$$

Неренормированное действие (27) содержит девять независимых членов, когда полей и параметров в нем всего восемь и их недостаточно для мультипликативной ренормировки. Оказывается, что действие (27) обладает симметрией

$$S(\eta^+, \eta, \xi^+, \xi, g_{01}, g_{02}) = S^*(-\eta, -\eta^+, \xi, \xi^+, g_{02}^*, g_{01}^*) = S^*(\eta, \eta^+, -\xi, -\xi^+, g_{02}^*, g_{01}^*), \tag{12}$$

где учтено, что  $\alpha$  и  $u$  вещественны,  $*$  - комплексное сопряжение параметров. Эта симметрия накладывает определенные связи на константы ренормировки

$$\begin{aligned}
Z_0(g_{01}, g_{02}) &= Z_0^*(g_{02}^*, g_{01}^*), & Z_1(g_{01}, g_{02}) &= Z_3^*(g_{02}^*, g_{01}^*), \\
Z_2(g_{01}, g_{02}) &= -Z_4^*(g_{02}^*, g_{01}^*), & Z_5(g_{01}, g_{02}) &= -Z_6^*(g_{02}^*, g_{01}^*).
\end{aligned}$$

С учетом этих связей наша модель мультипликативно-ренормируемая. Физическое условие на вещественные заряды  $g_{01} = g_{02}$  будет также соответствовать этой симметрии, если считать, что  $g_{02} = g_{01}^*$ .

Дополнительно к симметрии (12), действие (27) обладает глобальной симметрией:

$$\xi \rightarrow \xi e^{ic}, \quad \xi^+ \rightarrow \xi^+ e^{-ic}, \quad \eta \rightarrow \eta e^{ic}, \quad \eta^+ \rightarrow \eta^+ e^{-ic},$$

где  $c$  - некоторая постоянная. Учитывая этот произвол, мы можем выбрать константы ренормировки  $\eta, \eta^+$  вещественными, что и будем делать.

В этой работе мы используем схему ренормировки, не нарушающую каких-либо начальных симметрий, поэтому, если у нас по построению было  $\xi = \xi^{+*}, \eta = \eta^{+*}$ , то соответствующие соотношения переносятся и на ренормированные поля. Учитывая как это, так и то, что система (11) совместно однозначно разрешима на гиперповерхности  $g_{01} = g_{02}^*$  (тогда и  $g_1 = g_2^*$ ), получаем:

$$\begin{aligned}
Z_\xi &= Z_{\xi^+}^*, \quad Z_\eta = Z_{\eta^+}^*, \quad Z_{g_1} = Z_{g_2}^*, \\
Z_\xi Z_{\eta^+} &= Z_1, \quad Z_\alpha = \frac{1}{\alpha_R} \operatorname{Re} (Z_2 Z_1^{-1}), \quad Z_u = \frac{1}{\alpha_R u_R} \operatorname{Im} (Z_2 Z_1^{-1}) Z_\alpha^{-1}, \\
Z_\eta Z_{\eta^+} &= \frac{1}{4\alpha_R} Z_0 Z_\alpha^{-1}, \quad Z_{g_1} = -\frac{i}{2g_1 \alpha_R^2} Z_5 Z_0 Z_\alpha^{-2} Z_1^{-2} (Z_1^{-1})^*.
\end{aligned} \tag{13}$$

У нас остается некоторый произвол в выборе констант ренормировок, поэтому мы будем считать  $Z_\alpha$  и  $Z_u$  вещественными.

Удобно переписать заряды  $g_1$  и  $g_2$  через мнимую и вещественную части:  $g_1 = g_r + ig_i$ ,  $g_2 = g_r - ig_i$ . В схеме минимальных вычитаний,  $\beta$ -функции для зарядов  $g_i, g_r$  и непертурбативного заряда  $u_R$  выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
\beta_{g_n} &= -\epsilon g_n + \epsilon g_n \sum_{m=r,i} g_m \frac{\partial [Z_{g_n}]}{\partial g_m}, \\
\beta_{u_R} &= \epsilon u_R \sum_{m=r,i} g_m \frac{\partial [Z_u]}{\partial g_m},
\end{aligned} \tag{14}$$

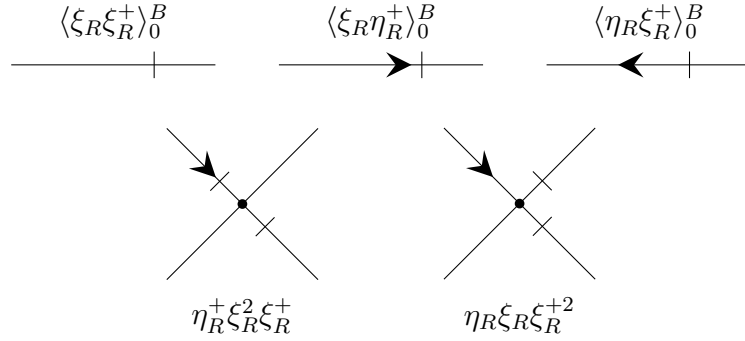
где  $n = r, i$ ,  $[Z]$  - вычеты в простых полюсах по  $\epsilon$ .

## 1.4 Метод вычислений в координатно-временном представлении

Как уже было показано (13), константы ренормировки находятся через контрчлены, которые в свою очередь удобно вычислять по диаграммам базовой теории. Определим базовое действие:

$$S_B = 4\alpha_R \eta_R \eta_R^+ + \eta_R^+ (\partial_t - \alpha_R (1 + iu_R) \Delta) \xi_R + \xi_R^+ (\partial_t + \alpha_R (1 - iu_R) \Delta) \eta_R + \frac{i\alpha_R g_1 \mu^{4-d}}{2} \eta_R^+ \xi_R^2 \xi_R^+ + \frac{i\alpha_R g_2 \mu^{4-d}}{2} \eta_R \xi_R \xi_R^{+2}. \quad (15)$$

Введем соответствующие обозначения для пропагаторов и вершин базовой теории:



В каждой вершине находится множитель вида  $-i\alpha_R g_1 \mu^{4-d}/2$  или  $-i\alpha_R g_2 \mu^{4-d}/2$ .

Приведем для полноты  $n$ -точечную функцию Грина базовой теории:

$$G_n^B(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = \frac{1}{Z} \int D\xi_R D\xi_R^+ D\eta_R D\eta_R^+ \dots e^{-S_B},$$

где ... - произведение  $n$  внешних полей,  $S_B$  - (15). Использование квантовополевой теории возмущений позволяет представить функцию Грина в виде бесконечного ряда диаграмм. Чтобы узнать какие диаграммы поверхностно расходящиеся (ПР) и нам интересны, приведем УФ-индекс модели:

$$\delta = d + 2 - N_\eta \left( \frac{d}{2} + 1 \right) - N_\xi \left( \frac{d}{2} - 1 \right),$$

где под  $N_\eta$  и  $N_\xi$  подразумевается  $N_\eta = N_\eta + N_{\eta^+}$ ,  $N_\xi = N_\xi + N_{\xi^+}$ , так как у комплексно-сопряженных полей одинаковые канонические размерности и различие вкладов в индекс нет. Определим все ПР-диаграммы:

$$\begin{aligned} N_\xi = 2, N_\eta = 0 : \quad \delta = 4, & & N_\xi = 4, N_\eta = 0 : \quad \delta = 2 + \epsilon, \\ N_\xi = 1, N_\eta = 1 : \quad \delta = 2, & & N_\xi = 3, N_\eta = 1 : \quad \delta = \epsilon, \\ N_\xi = 0, N_\eta = 2 : \quad \delta = 0. & & \end{aligned}$$

Сразу стоит сказать, что диаграммы случая  $N_\xi = 4$  обращаются в нуль, так как в них будет создаваться цикл из пропагаторов со стрелочками, который из-за  $\theta$ -функций будет занулять выражение. Остальные диаграммы приходится вычислять.

Рассмотрим метод вычислений в координатно-временном представлении, позволяющий это делать эффективно. Он базируется на возможности представления зависимости пропагаторов от импульса и времени, используя функции

$$\frac{\theta(t-t')}{(t-t')^a} e^{-k^2(t-t')b} \quad \text{и} \quad \frac{\theta(t'-t)}{(t'-t)^a} e^{-k^2(t'-t)b},$$

где  $a, b$  - не зависят от координат (импульса) и времени (частоты),  $\text{Re } b > 0$ . Дополнительно к этому, эксплуатируется возможность преобразования Фурье этих функций как по импульсу, получая  $(x, t)$  представление, так и по времени, получая  $(k, \omega)$  представление. Используя преобразование Фурье

$$\int d(x - x')e^{-ik(x-x')}, \int dt e^{i\omega(t-t')}, \frac{1}{(2\pi)^d} \int dk e^{ik(x-x')}, \frac{1}{(2\pi)} \int d\omega e^{-i\omega(t-t')},$$

получаем для  $\text{Re } b > 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\theta(t-t')}{(t-t')^a} e^{-k^2(t-t')b} &\xrightarrow{F} A_1 \frac{\theta(t-t')}{(t-t')^{a_1}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{t-t'} b_1\right) \xrightarrow{F} A_1 \left(\frac{\pi}{b_1}\right)^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1 - a_1\right)}{\left(\frac{k^2}{4b_1} - i\omega\right)^{\frac{d}{2} + 1 - a_1}}, \\ \frac{\theta(t'-t)}{(t'-t)^a} e^{-k^2(t'-t)b} &\xrightarrow{F} A_1 \frac{\theta(t'-t)}{(t'-t)^{a_1}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{t'-t} b_1\right) \xrightarrow{F} A_1 \left(\frac{\pi}{b_1}\right)^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1 - a_1\right)}{\left(\frac{k^2}{4b_1} + i\omega\right)^{\frac{d}{2} + 1 - a_1}}. \end{aligned} \quad (16)$$

где  $A_1, a_1, b_1$  не зависят от координат (импульса) и времени (частоты),  $\text{Re } b_1 > 0$ .

Метод использует две операции - произведение и свертку линий в  $(x, t)$  представлении, промежуточно эксплуатируя  $(k, \omega)$  представление. Произведение заключается в сведении двух линий с общими вершинами в  $(x, t)$  представлении к одной, просто перемножая их. Так как изначально наши линии представляются функциями (16), то их произведение будет иметь такой же вид, где новые показатели будут суммой старых. Свертка более сложная и заключается в сведении двух линий, имеющих только одну общую вершину, к некоторой другой одной линии. Остановимся на этой операции поподробнее, считая, что наши линии также выражаются через (16). Воспользуемся свойством свертки  $F[f * g] = F[f] \cdot F[g]$ , тогда, переведя каждую из линий в  $(k, \omega)$  представление и перемножив их, получаем одно из четырех выражений

$$\frac{A_1}{\left(\frac{k^2}{4b_1} \pm i\omega\right)^{a_1}} \cdot \frac{A_2}{\left(\frac{k^2}{4b_2} \pm i\omega\right)^{a_2}}. \quad (17)$$

Воспользовавшись формулой Фейнмана

$$\frac{1}{A_1^{\lambda_1} \dots A_n^{\lambda_n}} = \frac{\Gamma(\sum \lambda_i)}{\prod \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 dz_1 \dots \int_0^1 dz_n \delta\left(\sum z_i - 1\right) \frac{\prod z_i^{\lambda_i - 1}}{[\sum A_i z_i]^{\sum \lambda_i}},$$

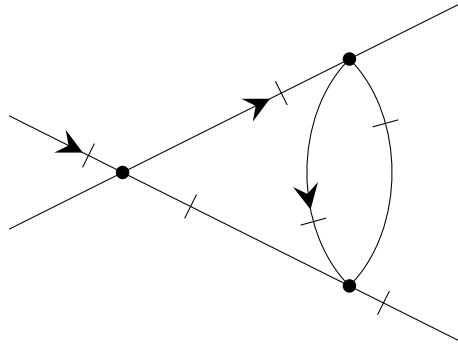
перепишем (17):

$$A_1 A_2 \frac{\Gamma(a_1 + a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^1 dz \frac{z^{a_1-1} (1-z)^{a_2-1}}{\left[\frac{k^2}{4b_1} z + \frac{k^2}{4b_2} (1-z) + i\omega(\pm z \pm (1-z))\right]^{a_1+a_2}}.$$

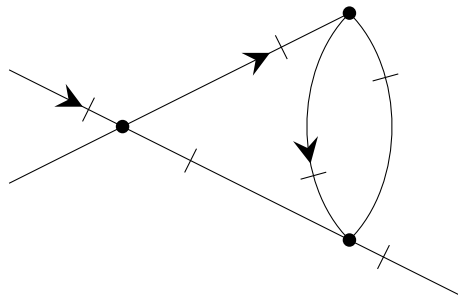
В случае одинаковых знаков, в знаменателе будет  $\pm i\omega$ , так что подынтегральная функция новой линии в  $(x, t)$  представлении будет такой же как в (16). В другом случае будем иметь  $\pm(2z-1)$ , поэтому давайте разобьем интеграл на сумму двух с пределами интегрирования:  $0 < z < 1/2$  и  $1/2 < z < 1$ . Приводя каждый из интегралов к старым пределам интегрирования (для удобства) и масштабируя частоту, получаем в результате сумму заинтегрированных вкладов типа (16). Точные формулы свертки приведены в приложении A.1.

Резюмируя, свертка, как и произведение, могут быть использованы как промежуточные шаги в расчетах, позволяющие преобразовывать начальные линии к сумме вкладов или к сумме интегрированных вкладов вида (16). Такая особенность этих операций позволяет сводить заданную диаграмму к линии, если возникающие в процессе интегрирования вычислять в самом конце.

Рассмотрим применение данного метода вычислений в координатно-временном представлении на примере диаграммы типа "глаз", перед этим предварительно подготовив ее. Диаграмма:



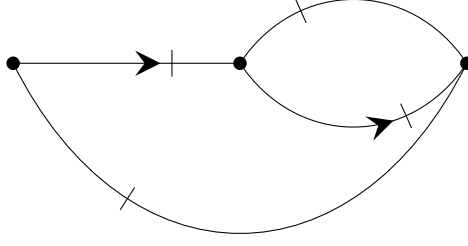
Для начала занулим импульс и частоту верхней правой внешней линии, что эквивалентно ее "обрезанию":



Этот шаг опирается на свойство  $KR'$ -операции [49, 50, 51], заключающееся в том, что результат применения данной операции к диаграмме без ИК-расходимостей в статике представляет собой полином по внешним импульсам и массам, соответствующим внутренним линиям (у нас масс нет, так как используем "безмассовую" схему ренормировки). В частности, для логарифмически расходящихся диаграмм результатом будет константа, не зависящая ни от масс, ни от импульсов. Поэтому, в логарифмически расходящихся диаграммах можно положить все массы равными нулю, а внешние линии (соответствующие внешним импульсам) переставлять различным образом, удовлетворяя 2-м условиям: 1 - должно оставаться минимум две внешние линии (втекающий и вытекающий импульсы - для предотвращения инфракрасных трудностей), 2 - получающаяся диаграмма не должна иметь ИК-расходимостей. Результат применения  $KR'$ -операции ко всем получающимся таким образом диаграммам из начальной логарифмически расходящейся будет одинаков. В динамике, в общем случае, результат будет полиномом по внешним импульсам, частотам и массам. Для логарифмически расходящихся диаграмм все будет тоже самое, но появится третье условие - должно оставаться минимум два внешних импульса или частоты.

Будем рассматривать ампутированную диаграмму. Это разрешено делать, так как в  $(k, \omega)$  представлении внешние линии факторизуются. Дополнительно к этому, они не содержат расходимостей, поэтому не интересны. Стоит отметить, что факторизация происходит только в  $(k, \omega)$  представлении, поэтому, перед выделением нужных вкладов диа-

грамм, их конечные выражения нужно также переводить в  $(k, \omega)$  представление.



Теперь мы можем вычислить данную диаграмму. Для начала представим пропагаторы в виде (16). Приведем их:

$$\begin{aligned}\langle \xi_R \xi_R^+ \rangle_0^B &= \frac{2}{k^2} e^{-i\alpha_R u_R k^2 (t-t') - \alpha_R k^2 |t-t'|}, & \langle \xi_R \eta_R^+ \rangle_0^B &= \theta(t-t') e^{-i\alpha_R u_R k^2 (t-t') - \alpha_R k^2 |t-t'|}, \\ \langle \eta_R \xi_R^+ \rangle_0^B &= -\theta(t'-t) e^{-i\alpha_R u_R k^2 (t-t') - \alpha_R k^2 |t-t'|}, & \langle \eta_R \eta_R^+ \rangle_0^B &= 0.\end{aligned}$$

Видно, что  $\langle \xi_R \eta_R^+ \rangle_0^B$  и  $\langle \eta_R \xi_R^+ \rangle_0^B$  уже имеют надлежащий вид, поэтому остается только  $\langle \xi_R \xi_R^+ \rangle_0^B$ . Используя функции Хевисайда

$$\langle \xi_R \xi_R^+ \rangle_0^B = \frac{2}{k^2} e^{-\alpha_R k^2 (1+iu_R)(t-t')} \theta(t-t') + \frac{2}{k^2} e^{-\alpha_R k^2 (1-iu_R)(t'-t)} \theta(t'-t)$$

и равенство

$$\frac{e^{-\beta k^2}}{k^2} = \int_0^1 \frac{\beta \exp(-\frac{\beta k^2}{s})}{s^2} ds, \quad \text{Re } \beta \geq 0,$$

получаем:

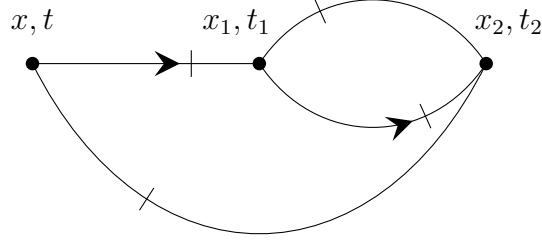
$$\begin{aligned}\langle \xi_R \xi_R^+ \rangle_0^B &= 2\alpha_R (1+iu_R) (t-t') \theta(t-t') \int_0^1 \frac{\exp(-\alpha_R (1+iu_R) s^{-1} k^2 (t-t'))}{s^2} ds + \\ & 2\alpha_R (1-iu_R) (t'-t) \theta(t'-t) \int_0^1 \frac{\exp(-\alpha_R (1-iu_R) s^{-1} (t'-t))}{s^2} ds.\end{aligned}$$

Теперь переведем все пропагаторы в  $(x, t)$  представление:

$$\begin{aligned}\langle \xi_R \xi_R^+ \rangle_0^B &= \frac{2\pi^{\frac{d}{2}} \alpha_R^{1-\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d} \int_0^1 ds s^{\frac{d}{2}-2} \left[ (1+iu_R)^{1-\frac{d}{2}} (t-t')^{1-\frac{d}{2}} \theta(t-t') \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{t-t'} \frac{s}{4\alpha_R(1+iu_R)}\right) + \right. \\ & \left. + (1-iu_R)^{1-\frac{d}{2}} (t'-t)^{1-\frac{d}{2}} \theta(t'-t) \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{t'-t} \frac{s}{4\alpha_R(1-iu_R)}\right) \right], \\ \langle \xi_R \eta_R^+ \rangle_0^B &= \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \alpha_R^{-\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d} (1+iu_R)^{-\frac{d}{2}} (t-t')^{-\frac{d}{2}} \theta(t-t') \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{t-t'} \frac{1}{4\alpha_R(1+iu_R)}\right), \\ \langle \eta_R \xi_R^+ \rangle_0^B &= -\frac{\pi^{\frac{d}{2}} \alpha_R^{-\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d} (1-iu_R)^{-\frac{d}{2}} (t'-t)^{-\frac{d}{2}} \theta(t'-t) \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{t'-t} \frac{1}{4\alpha_R(1-iu_R)}\right).\end{aligned}$$



У нас все готово к использованию метода вычислений в координатно-временном представлении. Приведем еще раз диаграмму для удобства:



Применение метода к этой диаграмме заключается в выполнении 3-х операций. Вначале мы берем произведение линий с общими вершинами  $(x_1, t_1)$  и  $(x_2, t_2)$ , затем следует свертка по вершине  $(x_1, t_1)$  (A.1), в конце - произведение линий с вершинами  $(x, t)$  и  $(x_2, t_2)$ . Используя (16), получаем в  $(k, \omega)$  представлении:

$$\frac{4\pi^{3d}\alpha_R^{2-2d}}{(2\pi)^{4d}}(1-iu_R)^{2-d}(1+iu_R)^{-d} \int_0^1 \frac{ds_1}{s_1^{\frac{2-d}{2}}} \int_0^1 \frac{ds_2}{s_2^{\frac{2-d}{2}}} \int_0^1 ds_3 (1-s_3)^{1-\frac{d}{2}} (b_1 b_2)^{-\frac{d}{2}} \left( \frac{s_3}{b_1} + \frac{(1-s_3)}{b_2} \right)^{-\frac{d}{2}} A_3^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(4-d)}{\left( \frac{p^2}{4A_3} - i\Omega \right)^{4-d}},$$

где  $b_1 = \frac{1}{4\alpha_R(1+iu_R)}$ ,  $b_2 = \frac{s_1}{4\alpha_R(1-iu_R)} + \frac{1}{4\alpha_R(1+iu_R)}$ ,  $A_3 = \frac{s_2}{4\alpha_R(1-iu_R)} + \left( \frac{s_3}{b_1} + \frac{1-s_3}{b_2} \right)^{-1}$ ,  $p$  и  $\Omega$  - внешние импульс и частота.

Подставив  $d = 4 - \epsilon$ , видно наличие особенности на границе:

$$\int_0^1 ds_3 (1-s_3)^{\frac{\epsilon}{2}-1} f(s_3, \epsilon, \dots).$$

Явно выделим ее с помощью  $\pm f(s_3 = 1, \dots)$ . Так как диаграмма логарифмически расходящаяся, то результатом применения  $KR'$ -операции будет константа, не зависящая от внешних импульсов и частот, поэтому положим  $p = 1, \Omega = 0$ . Выделяя вклад при  $\epsilon^{-1}$  и проводя все интегрирования, получаем некоторое аналитическое выражение. Выражение получается громоздким, поэтому здесь оно приведено не будет.

## 1.5 Результаты

Результаты диаграмм приведены в A.2. Так как мы используем схему минимальных вычитаний, то нас интересуют только вычеты в простых полюсах в контрчленах. Поэтому в двух- и трехпетлевых вычислениях нужная часть  $Z_i$  представима в виде

$$Z_0(g_1, g_2, u_R) = 4\alpha_R - \frac{\alpha_R g_1 g_2 M_1(u_R)}{2 \cdot 16^2 \pi^4 \epsilon} + \frac{(-i) g_1 g_2^2 \alpha_R Q_{10}(u_R)}{16^3 \pi^6 \epsilon} + \frac{(-i) g_1^2 g_2 \alpha_R Q_{11}(u_R)}{16^3 \pi^6 \epsilon},$$

$$Z_1(g_1, g_2, u_R) = 1 + \frac{g_1^2 M_3(u_R)}{16^2 \pi^4 \epsilon} - \frac{g_1 g_2 M_2(u_R)}{2 \cdot 16^2 \pi^4 \epsilon} + \frac{(-i) g_1^3 Q_4(u_R)}{16^3 \pi^6 \epsilon} + \frac{(-i) g_1^2 g_2 Q_5(u_R)}{16^3 \pi^6 \epsilon} + \frac{(-i) g_1 g_2^2 Q_6(u_R)}{16^3 \pi^6 \epsilon},$$

$$\begin{aligned}
Z_2(g_1, g_2, u_R) &= (1 + iu_R)\alpha_R + \frac{g_1^2\alpha_R(2 - iu_R)}{16^2\pi^4(3 - iu_R)\epsilon} - \frac{g_1g_2\alpha_R(1 - iu_R)}{16^2\pi^4(3 - iu_R)\epsilon} + \frac{(-i)g_1^3\alpha_R Q_7(u_R)}{16^3\pi^6\epsilon} + \\
&\quad + \frac{(-i)g_1^2g_2\alpha_R Q_8(u_R)}{16^3\pi^6\epsilon} + \frac{(-i)g_1g_2^2\alpha_R Q_9(u_R)}{16^3\pi^6\epsilon}, \\
Z_5(g_1, g_2, u_R) &= \frac{ig_1\alpha_R}{2} - \frac{g_1^2\alpha_R}{16(1 + iu_R)\pi^2\epsilon} - \frac{g_1^2\alpha_R}{8\pi^2\epsilon} + \frac{g_1g_2\alpha_R}{8\pi^2\epsilon} - \frac{ig_1^3\alpha_R}{64\pi^4\epsilon} Q_1(u_R) - \\
&\quad - \frac{ig_1^2g_2\alpha_R}{128\pi^4\epsilon} Q_2(u_R) - \frac{ig_1g_2^2\alpha_R}{128\pi^4\epsilon} Q_3(u_R),
\end{aligned}$$

где  $M_i(u_R)$  были сосчитаны в [40], а также в этой работе пересчитаны и сверены:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{A + 3B - \pi u_R - 2u_R \arctan C_-}{u_R^2 + 1}, \\
M_2 &= \frac{(u_R - i)^2(2i \arctan(2C_+) - \pi i - A - B)}{(u_R^2 + 1)^2}, \\
M_3 &= \frac{(u_R + i)^2(B - 2i \arctan(u_R/3))}{(u_R^2 + 1)^2}, \\
A &= \ln(u_R^2 + 1), \quad B = \ln\left(\frac{u_R^2 + 9}{16}\right), \quad C_{\pm} = \frac{u_R^2 \pm 3}{4u_R}.
\end{aligned}$$

В [41] была найдена единственная ИК-фиксированная точка, в которой значение непертурбативного заряда  $u_R$  равно нулю. Так как в этой части работы исследуется ее устойчивость в следующем порядке ТВ, то нам необходимы  $Q_i$  и  $\partial Q_i/\partial u_R$  только при  $u_R = 0$ . Приведем соответствующие результаты:

$$\begin{aligned}
Q_1(0) &= -\log\left(\frac{4}{3}\right) - 3, \quad Q_2(0) = -7 + 18 \coth^{-1}(7), \\
Q_3(0) &= 3 - 14 \coth^{-1}(7), \\
Q_4(0) &= -\frac{40\pi^2}{9} + \frac{4B_1}{3} - 8\left(\log\left(\frac{4}{3}\right) - 26 \log^2(2)\right) + \frac{4}{3} \log(3)(49 \log(3) - 160 \log(2)), \\
Q_5(0) &= \frac{B_2}{3} + \frac{8\pi^2}{3} - \frac{4}{3} \log(2)(23 + 83 \log(2)) + \frac{1}{3}(54 + 296 \log(2) - 79 \log(3)) \log(3), \\
Q_6(0) &= \frac{B_3}{3} - \frac{35\pi^2}{18} + \frac{2}{3} \log(2)(163 \log(2) - 58) + \frac{1}{3} \log(3)(66 - 344 \log(2) + 97 \log(3)), \\
Q_7(0) &= -\frac{32\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right)}{3} - \frac{64\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right)}{3} - \frac{2}{3} + \frac{16\pi^2}{9} - \frac{64 \log^2(2)}{3} + \frac{64}{3} \log(3) \coth^{-1}(7), \\
Q_8(0) &= -\frac{16\pi^2}{9} + 64 \log^2(2) - \frac{4}{9} \log(2)(83 + 144 \log(3)) + \\
&\quad + \frac{1}{6}(B_4 + 7 + 4 \log(3)(33 + 32 \log(3))), \\
Q_9(0) &= \frac{1}{18}(-1 + 16\pi^2 - 8 \log(2)(73 + 48 \coth^{-1}(5))) + \frac{1}{18}\left(-192\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - \right. \\
&\quad \left. - 96\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) + 356 \log(3)\right), \\
Q_{10}(0) &= -Q_{11}(0) = \frac{20\pi^2}{3} - \frac{160\text{Li}_2\left(\frac{3}{4}\right)}{3} + \frac{20}{3} \log\left(\frac{4}{3}\right)(-6 + 26 \log(2) - 21 \log(3)),
\end{aligned}$$

где

$$B_1 = -4\text{Li}_2(1/16) + 6\text{Li}_2(1/9) - 4\text{Li}_2(1/6) + 34\text{Li}_2(1/4) + 12\text{Li}_2(3/8) + 8\text{Li}_2(4/9) + 4\text{Li}_2(2/3),$$

$$B_2 = 4(4\text{Li}_2(1/16) - \text{Li}_2(1/9) + 4\text{Li}_2(1/6) - 33\text{Li}_2(1/4) - 12\text{Li}_2(3/8) - 8\text{Li}_2(4/9) + 9\text{Li}_2(2/3)),$$

$$B_3 = -8\text{Li}_2(1/16) + 12\text{Li}_2(1/9) - 8\text{Li}_2(1/6) + 29\text{Li}_2(1/4) + 8(\text{Li}_2(1/3) + 3\text{Li}_2(3/8) + 2\text{Li}_2(4/9)),$$

$$B_4 = 32\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + 160\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right).$$

$$\left. \partial_{u_R} Q_1(u_R) \right|_{u_R=0} = \frac{i(72 \coth^{-1}(7) - 25)}{6}, \quad \left. \partial_{u_R} Q_2(u_R) \right|_{u_R=0} = \frac{2i(2 + 9 \coth^{-1}(7))}{3},$$

$$\left. \partial_{u_R} Q_3(u_R) \right|_{u_R=0} = \frac{i(11 - 114 \coth^{-1}(7))}{3},$$

$$\left. \partial_{u_R} Q_4(u_R) \right|_{u_R=0} = -\frac{4}{3}i(368 \log(2) - 89 \log(3)) \log(3) - \frac{32}{3}i(\log(2)(49 \log(2) - 12) + \log(729)) + \frac{4}{9}i(-3C_1 + 19\pi^2 - 18),$$

$$\left. \partial_{u_R} Q_5(u_R) \right|_{u_R=0} = \frac{1}{9}i(C_2 + \pi^2 - 87(\log^2(3) + \log(9))) - \frac{4}{9}i \log(2)(-83 + 66 \log(2) - 87 \log(3)),$$

$$\left. \partial_{u_R} Q_6(u_R) \right|_{u_R=0} = \frac{2}{9}i(319 \log(3) + (576 \log(2) - 299) \log(4)) - \frac{1}{9}i(C_3 + 46\pi^2 + 21(136 \log(2) - 47 \log(3)) \log(3)),$$

$$\left. \partial_{u_R} Q_7(u_R) \right|_{u_R=0} = -\frac{1}{9}i(C_4 + 8\pi^2 + 29) - \frac{4}{9}i \log(2)(-101 + 312 \log(2) - 288 \log(3)),$$

$$\left. \partial_{u_R} Q_8(u_R) \right|_{u_R=0} = -\frac{2}{9}i(C_5 + 8 \log(3)(17 + \log(729))) + \frac{2}{27}i(3 + 24\pi^2 + 16 \log(2)(41 + 63 \coth^{-1}(5))),$$

$$\left. \partial_{u_R} Q_9(u_R) \right|_{u_R=0} = \frac{1}{54}i(C_6 + 72\pi^2 + 195) + \frac{2}{27}i \log(2)(-665 + 1944 \log(2) - 1728 \log(3)),$$

где

$$\begin{aligned}
C_1 &= -10\text{Li}_2(1/9) + 32\text{Li}_2(2/3) + 28\text{Li}_2(3/4), \\
C_2 &= 84\text{Li}_2(-2) - 18\text{Li}_2(1/9) + 114\text{Li}_2(1/4), \\
C_3 &= -6\left(5\text{Li}_2(1/9) - 44\text{Li}_2(1/4) + 94\text{Li}_2(2/3) + \text{Li}_2(3/4) + 10\right), \\
C_4 &= 48\text{Li}_2(1/4) - 96\text{Li}_2(2/3) + 101\log(9) + 120\log(3)\log(9), \\
C_5 &= 72\text{Li}_2(-1/3) + 72\text{Li}_2(2/3) + 36\text{Li}_2(3/4), \\
C_6 &= 432\text{Li}_2(1/4) - 864\text{Li}_2(2/3) + (697 + 648\log(3))\log(9).
\end{aligned}$$

Используя эти выражения и (14), можем вычислить  $\beta_{g_r}, \beta_{g_i}, \beta_{u_R}$ :

$$\begin{aligned}
\beta_{g_r}(g_r, g_i, 0) &= 0.00433538g_i^2g_r - 0.0759909g_i g_r - \epsilon g_r + 0.000271762g_r^3, \\
\beta_{g_i}(g_r, g_i, 0) &= -0.00133672g_i g_r^2 - \epsilon g_i + 0.0027269g_i^3 - 0.0633257g_i^2 + 0.0126651g_r^2, \\
\beta_{u_R}(g_r, g_i, 0) &= -0.000077646g_i g_r + 2.76732716 \cdot 10^{-6}g_i^2g_r + 1.80092145 \cdot 10^{-7}g_r^3.
\end{aligned} \tag{18}$$

В [41] ИК-фиксированная точка была найдена в низшем порядке ТВ:

$$g_{r*} = 0, g_{i*} = -\frac{8\pi^2\epsilon}{5}, u_{R*} = 0.$$

Собственные числа  $\omega$ -матрицы:

$$\epsilon, \quad \frac{\epsilon}{5}, \quad 2\frac{\epsilon^2}{25}\log\left(\frac{4}{3}\right).$$

Положительная определенность  $\omega$ -матрицы означает ИК-устойчивость фиксированной точки. Из (18) найдем вклад следующего порядка ТВ в ИК-фиксированную точку, решая уравнение  $\beta_{g_i}(0, g_{i*}, 0) = 0$ :

$$g_{i*} = -\frac{8\pi^2\epsilon}{5} + \frac{136\pi^2\epsilon^2}{125}.$$

Исследуем  $\omega$ -матрицу:

$$\omega = \begin{pmatrix} \frac{\partial\beta_{g_r}}{\partial g_r} & \frac{\partial\beta_{g_r}}{\partial g_i} & \frac{\partial\beta_{g_r}}{\partial u_R} \\ \frac{\partial\beta_{g_i}}{\partial g_r} & \frac{\partial\beta_{g_i}}{\partial g_i} & \frac{\partial\beta_{g_i}}{\partial u_R} \\ \frac{\partial\beta_{u_R}}{\partial g_r} & \frac{\partial\beta_{u_R}}{\partial g_i} & \frac{\partial\beta_{u_R}}{\partial u_R} \end{pmatrix}_{g_r=g_{r*}, g_i=g_{i*}, u_R=u_{R*}}$$

Собственные числа этой матрицы равны

$$\begin{aligned}
&\epsilon + 0.68\epsilon^2, \\
&0.2\epsilon + 0.245739\epsilon^2, \\
&0.0230146\epsilon^2 - 0.0258336\epsilon^3.
\end{aligned}$$

При распространении  $\epsilon$  в физическую область:  $\epsilon = 1$ , третье собственное число становится отрицательным. Это связано с тем, что наши ряды асимптотически расходящиеся, и конечным "куском" ряда можно пользоваться только в том случае, пока следующий член ряда меньше предыдущего. В нашем случае второй член ряда больше первого. Для того,

чтобы можно было использовать полученный ряд, нужно провести борелевское пересуммирование [57]. После борелевского пересуммирования собственные числа  $\omega$ -матрицы при  $\epsilon = 1$  будут иметь следующие значения:

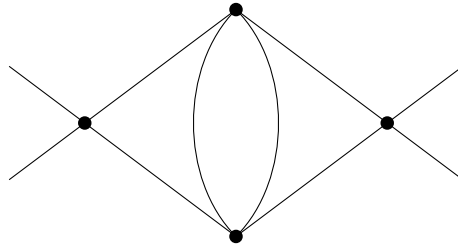
$$\begin{aligned}\omega_1 &= 0.2116697531, \\ \omega_2 &= 1.078902843, \\ \omega_3 &= 0.003120033385.\end{aligned}$$

Таким образом, была подтверждена ИК-устойчивость единственной фиксированной точки во втором порядке ТВ.

## 2. Развитие метода вычислений в координатно-временном представлении

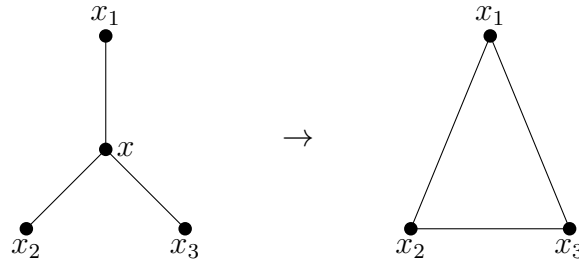
### 2.1 Преобразование звезда-треугольник

Представленный в 1.4 метод является сильным средством вычисления диаграмм, но он имеет существенное ограничение на применимость. С помощью этого метода нельзя посчитать все диаграммы. К примеру, мы бы не смогли посчитать диаграммы типа "глаз" без использования свойства  $KR'$ -операции. Использование этого свойства позволило расширить область применимости данного метода, однако все равно остаются диаграммы неподвластные счету. Например, диаграмма в теории  $\phi^4$

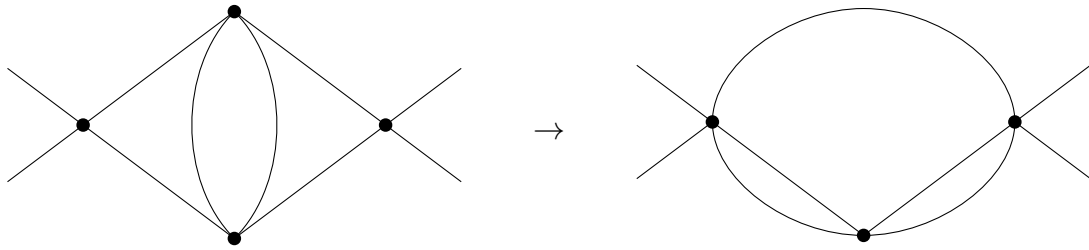


(19)

Одно из возможных решений этой проблемы - преобразование звезда-треугольник:



С помощью него мы бы смогли преобразовать диаграмму (19)



Преобразованную диаграмму уже можно посчитать методом 1.4.

Попытаемся получить преобразование звезда-треугольник в статике (мы начинаем со статики, потому что в ней работать проще, а также, если мы не сможем получить такое преобразование в статике, не будет и смысла подобным попыткам в динамике). Математически данное преобразование заключается в сведении

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(x_1 - x)^{2\alpha_1} (x_2 - x)^{2\alpha_2} (x_3 - x)^{2\alpha_3}} \quad (20)$$

к выражению через функции

$$\frac{1}{(x_1 - x_2)^{2\beta_1}} \frac{1}{(x_1 - x_3)^{2\beta_2}} \frac{1}{(x_2 - x_3)^{2\beta_3}}.$$

Воспользуемся частным случаем формулы Фейнмана -  $\alpha$ -представлением

$$\frac{1}{A^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dt t^{\alpha-1} e^{-At},$$

тогда перепишем (20) в виде

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx \int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty dt_2 \int_0^\infty dt_3 \left( \prod_i \frac{t_i^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} \right) \exp(-(x_1-x)^2 t_1 - (x_2-x)^2 t_2 - (x_3-x)^2 t_3).$$

Интегрируя по  $x$ , получаем

$$\int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty dt_2 \int_0^\infty dt_3 \left( \prod_i \frac{t_i^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} \right) \left( \frac{\pi}{t_1+t_2+t_3} \right)^{\frac{d}{2}} \exp(-x_1^2 t_1 - x_2^2 t_2 - x_3^2 t_3) \exp\left(\frac{(x_1 t_1 + x_2 t_2 + x_3 t_3)^2}{t_1+t_2+t_3}\right).$$

Собирая показатели экспонент

$$\begin{aligned} -x_1^2 t_1 - x_2^2 t_2 - x_3^2 t_3 + \frac{(x_1 t_1 + x_2 t_2 + x_3 t_3)^2}{t_1+t_2+t_3} &= \\ &= \frac{1}{t_1+t_2+t_3} (-(x_1-x_2)^2 t_1 t_2 - (x_1-x_3)^2 t_1 t_3 - (x_2-x_3)^2 t_2 t_3) \end{aligned}$$

и производя замену переменных

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{t_1 t_2}{t_1+t_2+t_3}, & t_1 &= \frac{\tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_1 \tau_3}{\tau_2}, \\ \tau_2 &= \frac{t_2 t_3}{t_1+t_2+t_3}, & t_2 &= \frac{\tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_1 \tau_3}{\tau_3}, \\ \tau_3 &= \frac{t_1 t_3}{t_1+t_2+t_3}, & t_3 &= \frac{\tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_1 \tau_3}{\tau_1}, \end{aligned}$$

получаем

$$\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)} \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^\infty d\tau_3 J \frac{1}{\tau_1^{\alpha_3-1-\frac{d}{2}}} \frac{1}{\tau_2^{\alpha_1-1-\frac{d}{2}}} \frac{1}{\tau_3^{\alpha_2-1-\frac{d}{2}}} (\tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_1 \tau_3)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-3-d} \exp(-(x_1-x_2)^2 \tau_1 - (x_1-x_3)^2 \tau_3 - (x_2-x_3)^2 \tau_2),$$

где  $J = \frac{(\tau_2 \tau_3 + \tau_1(\tau_2 + \tau_3))^3}{\tau_1^2 \tau_2^2 \tau_3^2}$  - якобиан. Переписывая выражение с учетом вида якобиана, получаем

$$\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)} \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^\infty d\tau_3 \frac{1}{\tau_1^{\alpha_3+1-\frac{d}{2}}} \frac{1}{\tau_2^{\alpha_1+1-\frac{d}{2}}} \frac{1}{\tau_3^{\alpha_2+1-\frac{d}{2}}} (\tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_1 \tau_3)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-d} \exp(-(x_1-x_2)^2 \tau_1 - (x_1-x_3)^2 \tau_3 - (x_2-x_3)^2 \tau_2). \quad (21)$$

Из этого выражения получаются соотношения, связывающие уникальную вершину с уникальными треугольниками. В случае  $d=3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = d$ , мы получаем результат [53]:

$$\pi^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \alpha_1\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \alpha_2\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \alpha_3\right)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)} \frac{1}{(x_1-x_2)^{2\left(\frac{3}{2}-\alpha_3\right)}} \frac{1}{(x_1-x_3)^{2\left(\frac{3}{2}-\alpha_2\right)}} \frac{1}{(x_2-x_3)^{2\left(\frac{3}{2}-\alpha_1\right)}}.$$

Формула для других уникальных случаев:  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = d + m, m \in \mathbb{N}$ , приведена в [1] и получается из (21) с помощью разложения в полином Ньютона степени  $(\tau_1\tau_2 + \tau_2\tau_3 + \tau_1\tau_3)^m$  и использования определения для гамма-функции:

$$\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)} \sum_{\substack{0 \leq m_i \leq m \\ m_1+m_2+m_3=m}} \frac{m!}{m_1!m_2!m_3!} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - \alpha_3 + m - m_3\right)}{(x_1 - x_2)^{2\left(\frac{d}{2} - \alpha_3 + m - m_3\right)}} \\ \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - \alpha_2 + m - m_2\right)}{(x_1 - x_3)^{2\left(\frac{d}{2} - \alpha_2 + m - m_2\right)}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - \alpha_1 + m - m_1\right)}{(x_2 - x_3)^{2\left(\frac{d}{2} - \alpha_1 + m - m_1\right)}}.$$

Попытаемся найти преобразование звезда-треугольник в общем виде. Перепишем (21):

$$\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)} \frac{1}{(x_1 - x_2)^{2\left(\frac{d}{2} - \alpha_3\right)}} \frac{1}{(x_1 - x_3)^{2\left(\frac{d}{2} - \alpha_2\right)}} \frac{1}{(x_2 - x_3)^{2\left(\frac{d}{2} - \alpha_1\right)}} \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^\infty d\tau_3 \\ \left( \frac{\tau_1\tau_2}{(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2} + \frac{\tau_2\tau_3}{(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2} + \frac{\tau_1\tau_3}{(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d} \\ \frac{1}{\tau_1^{\alpha_3 + 1 - \frac{d}{2}}} \frac{1}{\tau_2^{\alpha_1 + 1 - \frac{d}{2}}} \frac{1}{\tau_3^{\alpha_2 + 1 - \frac{d}{2}}} \exp(-\tau_1 - \tau_2 - \tau_3). \quad (22)$$

Рассмотрим выражение

$$\left( \frac{\tau_1\tau_2}{X_1} + \frac{\tau_2\tau_3}{X_2} + \frac{\tau_1\tau_3}{X_3} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d}. \quad (23)$$

Вынося первое слагаемое за скобки

$$\left( \frac{\tau_1\tau_2}{X_1} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d} \left( 1 + \frac{\tau_3}{\tau_1} \frac{X_1}{X_2} + \frac{\tau_3}{\tau_2} \frac{X_1}{X_3} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d}$$

и раскладывая в ряд Тейлора по переменной  $\tau_3$  около нуля, получаем:

$$\left( \frac{\tau_1\tau_2}{X_1} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d) \cdots (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d - n + 1)}{n!} \right. \\ \left. \left( \frac{1}{\tau_1} \frac{X_1}{X_2} + \frac{1}{\tau_2} \frac{X_1}{X_3} \right)^n \tau_3^n \right). \quad (24)$$

Разложим скобку внутри суммы в бином Ньютона:

$$\left( \frac{\tau_1\tau_2}{X_1} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d) \cdots (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d - n + 1)}{n!} \right. \\ \left. C_n^k \frac{X_1^n}{X_2^{n-k} X_3^k} \frac{1}{\tau_1^{n-k}} \frac{1}{\tau_2^k} \tau_3^n \right).$$



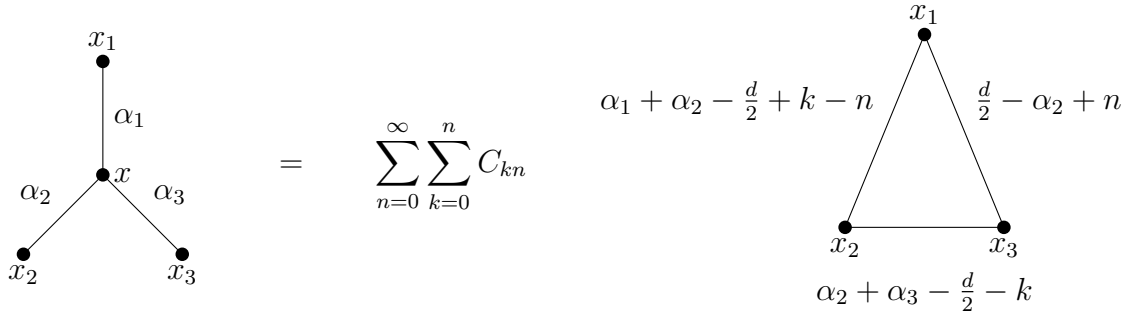
Теперь применим полученное выражение в (22):

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)} \frac{1}{(x_1 - x_2)^{2(\frac{d}{2}-\alpha_3)}} \frac{1}{(x_1 - x_3)^{2(\frac{d}{2}-\alpha_2)}} \frac{1}{(x_2 - x_3)^{2(\frac{d}{2}-\alpha_1)}} \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^\infty d\tau_3 \\ & \left( 1 + \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d) \cdots (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d - n + 1)}{n!} \right. \\ & \quad \left. \frac{((x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2)^n}{((x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2)^{n-k} ((x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2)^k} \frac{1}{\tau_1^{n-k}} \frac{1}{\tau_2^k} \tau_3^n \right) \\ & \left( \frac{\tau_1 \tau_2}{(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d} \frac{1}{\tau_1^{\alpha_3 + 1 - \frac{d}{2}}} \frac{1}{\tau_2^{\alpha_1 + 1 - \frac{d}{2}}} \frac{1}{\tau_3^{\alpha_2 + 1 - \frac{d}{2}}} \exp(-\tau_1 - \tau_2 - \tau_3). \end{aligned}$$

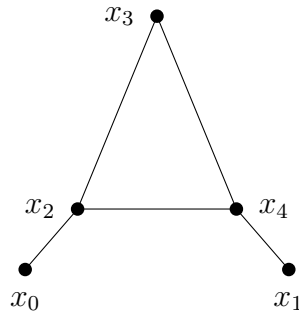
Объединяя множители и пользуясь определением гамма-функции, получаем конечный результат:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n C_{kn} \frac{1}{(x_1 - x_2)^{2(\alpha_1 + \alpha_2 - \frac{d}{2} + k - n)}} \frac{1}{(x_1 - x_3)^{2(\frac{d}{2} - \alpha_2 + n)}} \frac{1}{(x_2 - x_3)^{2(\alpha_2 + \alpha_3 - \frac{d}{2} - k)}}, \\ C_{kn} &= \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d + 1) \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 - \frac{d}{2} + k - n) \Gamma(\alpha_2 + \alpha_3 - \frac{d}{2} - k) \Gamma(\frac{d}{2} - \alpha_2 + n)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d - n + 1) \Gamma(k + 1) \Gamma(n - k + 1) \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \Gamma(\alpha_3)}. \end{aligned}$$

Таким образом, преобразование звезда-треугольник в общем виде выглядит следующим образом:



Попытаемся что-нибудь посчитать с помощью этой формулы. Возьмем диаграмму модели  $\phi^3$ :

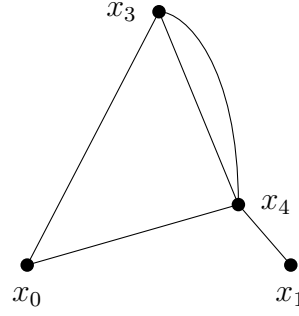


Мы отрезали внешнюю верхнюю линию, т.к. диаграмма логарифмически расходящаяся. Если ее посчитать методом 1.4, то получим:

$$\bar{C}(1)\bar{C}(2)C(d-3) \frac{1}{p^{2(5-\frac{d}{2})}}, \quad (25)$$

где  $C(\alpha) = (2\pi)^d \bar{C}(\alpha) = 4^{\frac{d}{2}-\alpha} \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma^{-1}(\alpha) \Gamma\left(\frac{d}{2} - \alpha\right)$ .

Теперь посчитаем, используя преобразование звезда-треугольник в вершине  $x_2$ . Диаграмма преобразуется к



Снова, используя метод 1.4, получаем:

$$\bar{C}^4(1)C(d-4)\frac{1}{p^{2(5-\frac{d}{2})}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^n C_{kn}C\left(\frac{d}{2}-2-k\right)C(d-3+k-n)\bar{C}\left(5+n-\frac{d}{2}\right), \quad (26)$$

$$C_{kn} = \pi^{\frac{d}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}-2-n\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-2+k-n\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-2-k\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)\Gamma^3\left(\frac{d}{2}-1\right)}.$$

Вообще, с помощью преобразования звезда-треугольник, можно получить 6 выражений. Это связано с тем, что в (23) мы могли разложить в ряд Тейлора по любой из 3-х переменных, а в (24) - 2-мя способами расписать бином Ньютона. Из-за возможности расписать бином Ньютона 2-мя способами, в этих 6-ти выражениях будут 3 пары, в которых каждое выражение получается из другого с помощью замены  $k \rightarrow n - k$ , поэтому, действительно различных выражений можно получить только 3. Другие 2 выражения здесь не приведены, так как в них мы натываемся на полюса гамма-функции и их использовать нельзя.

Оказывается, что в (26) обе суммы берущиеся, поэтому, после всех упрощений, конечный ответ имеет вид

$$\frac{1}{d-5}\bar{C}(1)\bar{C}(2)C(d-3)\frac{1}{p^{2(5-\frac{d}{2})}}.$$

Полученный результат отличается от точного ответа (25) на множитель  $\frac{1}{d-5}$ . Это связано с тем, что преобразование звезда-треугольник представляет изначально хороший объект через сумму других, в которых присутствует ИК-расходимость. Самым необычным здесь является то, что заведомо неправильные промежуточные выкладки, в конечном итоге, приводят к результату, который отличается от точного ответа всего лишь на множитель.

Дальнейшие планы по развитию этого преобразования заключаются в решении проблемы появления ИК-расходимостей, а также в получении подобного преобразования в динамике, где на данный момент не получено никаких результатов даже для частных случаев.

## 2.2 Оптимизация вычислений

Как уже было показано во введении, продвижение в расчетах является сложной и трудоемкой задачей. Это хорошо видно по длительным периодам застоя. Появление компьютерных мощностей и создание компьютерных программ сильно поспособствовало дальнейшему продвижению в вычислениях. В задачах динамики наличие компьютерных программ играет еще более существенную роль, поэтому написание соответствующих программ является актуальной задачей.

На данный момент существуют различные библиотеки, помогающие написать желаемый код. Мы будем активно использовать [GraphState](#) и [Graphine](#) [54]. Эти библиотеки

являются открытыми. GraphState позволяет задавать любую структуру диаграмм, определять различные свойства линий и вершин, узнавать информацию о линиях и вершинах. Запись диаграмм основана на нотации Никеля [55]. Graphine позволяет работать с графами, имеющими структуру заданную через GraphState.

Для начала, как и в прошлом параграфе, будем писать программы для статики. Во-первых, это проще, во-вторых, написание кода даст определенный опыт и некоторое понимание реализации, ну и в-третьих, мы получим некоторую начальную структуру, которую впоследствии адаптируем для динамики. Будем работать с моделью  $\phi^3$ , ее логарифмическая размерность равняется 6. Сразу стоит сказать, что здесь, в отличие от 1.4, вычисления будут проводиться в импульсном представлении, а не в координатном. Операции используются те же самые, но для импульсного представления. Свертка (операция произведения в координатном представлении) выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int dk \frac{1}{k^{2\alpha}(k-p)^{2\beta}} = (4\pi)^{-\frac{d}{2}} p^{d-2\alpha-2\beta} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-\alpha) \Gamma(\frac{d}{2}-\beta) \Gamma(\alpha+\beta-\frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(d-\alpha-\beta)}.$$

Перепишем через переменную  $\lambda = \frac{d}{2} - 1$ :

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int dk \frac{1}{k^{2\alpha}(k-p)^{2\beta}} = (4\pi)^{-\lambda-1} \frac{1}{p^{2(\alpha+\beta-\lambda-1)}} \frac{\Gamma(\lambda+1-\alpha) \Gamma(\lambda+1-\beta) \Gamma(\alpha+\beta-\lambda-1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(2\lambda+2-\alpha-\beta)}.$$

Вводя

$$G(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\lambda+1-\alpha) \Gamma(\lambda+1-\beta) \Gamma(\alpha+\beta-\lambda-1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(2\lambda+2-\alpha-\beta)},$$

получаем:

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int dk \frac{1}{k^{2\alpha}(k-p)^{2\beta}} = (4\pi)^{-\lambda-1} \frac{1}{p^{2(\alpha+\beta-\lambda-1)}} G(\alpha, \beta). \quad (27)$$

Таким образом, в результате свертки получаем 2 сомножителя. Один из них - импульс с некоторым новым показателем, другой - некий множитель. Результаты будем приводить только через  $G$ -функции; нужный множитель  $(4\pi)^{\dots}$  всегда можно восстановить по количеству петель в начальной диаграмме.

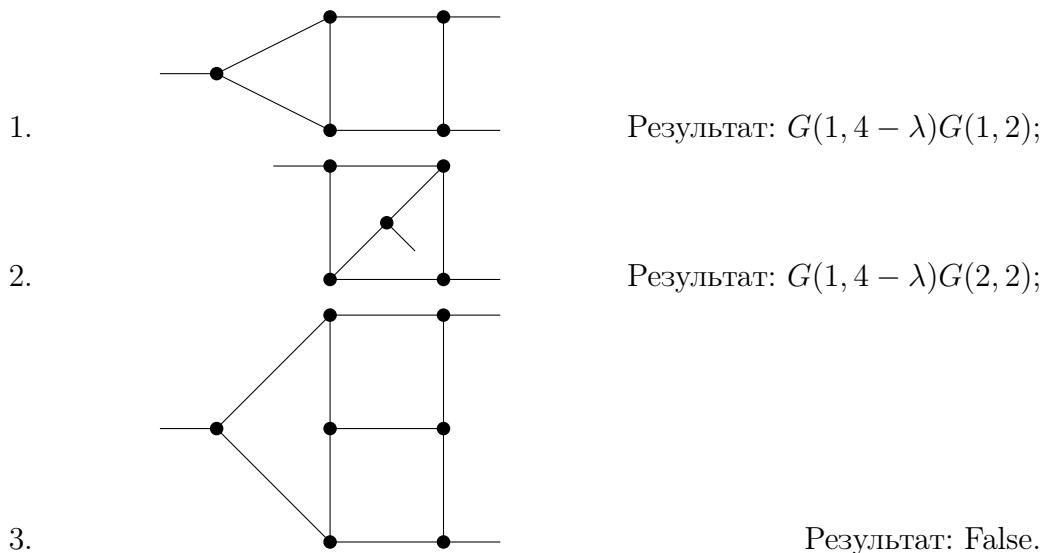
Начнем написание программы. Будем использовать Python 2.7. В B.1 приведены две базовые операции - операция произведения и свертка. Условимся здесь с названием методов. Мы всегда рисуем диаграммы в "координатном представлении". Это значит, что в вершинах диаграмм у нас находятся координаты, а по линиям "текут" импульсы. В этом случае, когда у нас есть две линии с общими вершинами, нам нужно применять операцию произведения в координатном представлении или свертку (27) в импульсном. Все названия будут "связаны" с координатным представлением, поэтому свертке (27) соответствует метод с названием `multiply_two_edges`. Метод `convolution_edges` соответствует операции произведения.

В самом начале вычисления диаграммы, мы должны задать ее. Для этого предназначены методы B.2. `define_properties_config` задает структуру графа. С помощью него мы определяем свойства линий и вершин. В нашем случае все вершины одинаковы, а в линиях должна быть информация, связанная с показателем импульса. Из-за этого нам достаточно добавить 1 свойство для линий, которое мы назовем `power`. В `define_edge_properties_values` мы определяем значение `power` для каждой линии в виде кортежа с 2-мя числами. Второе число будет связано с  $\lambda$  в степени (27), а первое - со всем остальным. Наконец, в `define_new_graph_attributes` мы определяем дополнительный атрибут графа, в котором будет содержаться информация, связанная со всеми получаемыми в процессе  $G$ -функциями.

В **В.3** приведены методы, позволяющие сворачивать все начальные петли в графе - `multiply_graph_edges`; считать "хороший" граф (имеет только две внешних линии и считается с помощью метода **1.4**) - `calculate_good_graph`; считать логарифмически УФ-расходящийся граф, который имеет только логарифмически УФ-расходящиеся подграфы, дополнительно используя свойство  $KR'$ -операции - `calculate_log_graph_with_triangular_divergences`.

В **В.4** содержатся методы, представляющие конечный результат в удобочитаемом виде через  $G$ -функции; **В.5** предназначен для запуска счета диаграмм.

Посчитаем несколько примеров, используя написанные методы.



Последняя диаграмма не может быть посчитана этим методом.

Дальнейшие планы заключаются в написании оставшихся методов, позволяющих считать не только логарифмически расходящиеся диаграммы с логарифмически расходящимися подграфами, а также планируется адаптация программы для задач динамики.

## Заключение

В данной работе были численно сосчитаны двух- и трехпетлевые вклады диаграмм в модели, предназначенной для исследования фазового перехода в сверхтекучее состояние [40] (она также была описана в 1.1, 1.2). Вдобавок к этому, были вычислены  $\beta$ -функции зарядов  $g_i$  и  $g_r$  в двухпетлевом приближении и заряда  $u$  в трехпетлевом; был вычислен вклад 2-го порядка ТВ в ИК-фиксированную точку и подтверждена ее ИК-устойчивость.

Дальше в работе развивался метод вычислений в координатно-временном представлении. Было вновь получено преобразование звезда-треугольник в статике, которое совпало с уже полученными результатами в уникальных случаях. Вдобавок к этому, было получено данное преобразование в общем случае. Параллельно велась работа по оптимизации вычислений путем написания алгоритмов. На основе существующих библиотек были написаны методы, позволяющие вычислять часть диаграмм в статической модели  $\phi^3$ .

В дальнейшем планируются попытки применения метода Компанийца-Панзера [56], который в недавнее время показал свою высокую эффективность, вместе с методом вычислений в координатно-временном представлении. Существуют надежды, что использование этих методов в совокупности позволит ускорить продвижение в расчетах в различных динамических задачах.

## A.

### A.1 Свертка линий в общем виде

Стрелочки связаны с  $\theta$ -функциями.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 x, t & \xrightarrow{\quad} & x_1, t_1 & \xrightarrow{\quad} & x_2, t_2 \\
 & & \bullet & & 
 \end{array} \\
 A_1 \frac{\theta(t-t_1)}{(t-t_1)^{a_1}} \exp\left(-\frac{(x-x_1)^2}{t-t_1} b_1\right) * A_2 \frac{\theta(t_1-t_2)}{(t_1-t_2)^{a_2}} \exp\left(-\frac{(x_1-x_2)^2}{t_1-t_2} b_2\right) = \\
 A_1 A_2 \left(\frac{\pi}{b_1 b_2}\right)^{\frac{d}{2}} \int_0^1 dz z^{\frac{d}{2}-a_1} (1-z)^{\frac{d}{2}-a_2} \left(\frac{z}{b_1} + \frac{1-z}{b_2}\right)^{-\frac{d}{2}} \frac{\theta(t-t_2)}{(t-t_2)^{a_1+a_2-\frac{d}{2}-1}} \\
 \exp\left(-\frac{(x-x_2)^2}{t-t_2} \left(\frac{z}{b_1} + \frac{1-z}{b_2}\right)^{-1}\right),
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 x, t & \xrightarrow{\quad} & x_1, t_1 & \xleftarrow{\quad} & x_2, t_2 \\
 & & \bullet & & 
 \end{array} \\
 A_1 \frac{\theta(t-t_1)}{(t-t_1)^{a_1}} \exp\left(-\frac{(x-x_1)^2}{t-t_1} b_1\right) * A_2 \frac{\theta(t_2-t_1)}{(t_2-t_1)^{a_2}} \exp\left(-\frac{(x_1-x_2)^2}{t_2-t_1} b_2\right) = \\
 \frac{A_1 A_2}{2^{\frac{d}{2}+1-a_1-a_2}} \left(\frac{\pi}{b_1 b_2}\right)^{\frac{d}{2}} \int_0^1 dz z^{a_1+a_2-\frac{d}{2}-2} \left[ (1-z)^{\frac{d}{2}-a_1} (1+z)^{\frac{d}{2}-a_2} \left(\frac{1-z}{b_1} + \frac{1+z}{b_2}\right)^{-\frac{d}{2}} \right. \\
 \left. \frac{\theta(t_2-t)}{(t_2-t)^{a_1+a_2-\frac{d}{2}-1}} \exp\left(-2z \frac{(x-x_2)^2}{t_2-t} \left(\frac{1-z}{b_1} + \frac{1+z}{b_2}\right)^{-1}\right) + (1+z)^{\frac{d}{2}-a_1} (1-z)^{\frac{d}{2}-a_2} \right. \\
 \left. \left(\frac{1+z}{b_1} + \frac{1-z}{b_2}\right)^{-\frac{d}{2}} \frac{\theta(t-t_2)}{(t-t_2)^{a_1+a_2-\frac{d}{2}-1}} \exp\left(-2z \frac{(x-x_2)^2}{t-t_2} \left(\frac{1+z}{b_1} + \frac{1-z}{b_2}\right)^{-1}\right) \right],
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 x, t & \xleftarrow{\quad} & x_1, t_1 & \xrightarrow{\quad} & x_2, t_2 \\
 & & \bullet & & 
 \end{array} \\
 A_1 \frac{\theta(t_1-t)}{(t_1-t)^{a_1}} \exp\left(-\frac{(x-x_1)^2}{t_1-t} b_1\right) * A_2 \frac{\theta(t_1-t_2)}{(t_1-t_2)^{a_2}} \exp\left(-\frac{(x_1-x_2)^2}{t_1-t_2} b_2\right) = \\
 \frac{A_1 A_2}{2^{\frac{d}{2}+1-a_1-a_2}} \left(\frac{\pi}{b_1 b_2}\right)^{\frac{d}{2}} \int_0^1 dz z^{a_1+a_2-\frac{d}{2}-2} \left[ (1+z)^{\frac{d}{2}-a_1} (1-z)^{\frac{d}{2}-a_2} \left(\frac{1+z}{b_1} + \frac{1-z}{b_2}\right)^{-\frac{d}{2}} \right. \\
 \left. \frac{\theta(t_2-t)}{(t_2-t)^{a_1+a_2-\frac{d}{2}-1}} \exp\left(-2z \frac{(x-x_2)^2}{t_2-t} \left(\frac{1+z}{b_1} + \frac{1-z}{b_2}\right)^{-1}\right) + (1-z)^{\frac{d}{2}-a_1} (1+z)^{\frac{d}{2}-a_2} \right. \\
 \left. \left(\frac{1-z}{b_1} + \frac{1+z}{b_2}\right)^{-\frac{d}{2}} \frac{\theta(t-t_2)}{(t-t_2)^{a_1+a_2-\frac{d}{2}-1}} \exp\left(-2z \frac{(x-x_2)^2}{t-t_2} \left(\frac{1-z}{b_1} + \frac{1+z}{b_2}\right)^{-1}\right) \right],
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 x, t & \xleftarrow{\quad} & x_1, t_1 & \xleftarrow{\quad} & x_2, t_2 \\
 & & \bullet & & 
 \end{array}$$

$$A_1 \frac{\theta(t_1 - t)}{(t_1 - t)^{a_1}} \exp\left(-\frac{(x - x_1)^2}{t_1 - t} b_1\right) * A_2 \frac{\theta(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1)^{a_2}} \exp\left(-\frac{(x_1 - x_2)^2}{t_2 - t_1} b_2\right) =$$

$$A_1 A_2 \left(\frac{\pi}{b_1 b_2}\right)^{\frac{d}{2}} \int_0^1 dz z^{\frac{d}{2} - a_1} (1 - z)^{\frac{d}{2} - a_2} \left(\frac{z}{b_1} + \frac{1 - z}{b_2}\right)^{-\frac{d}{2}} \frac{\theta(t_2 - t)}{(t_2 - t)^{a_1 + a_2 - \frac{d}{2} - 1}}$$

$$\exp\left(-\frac{(x - x_2)^2}{t_2 - t} \left(\frac{z}{b_1} + \frac{1 - z}{b_2}\right)^{-1}\right).$$

## А.2 Диаграммы

Вначале приведены однопетлевые диаграммы, вносящие вклад в  $Z_5$  и двухпетлевые, вносящие вклад в  $Z_0, Z_1$  и  $Z_2$  при  $u_R \neq 0$ . Везде  $\alpha_R$  положен 1, т.к. в каждой диаграмме он входит как множитель в первой степени и легко восстанавливается. Результаты остальных диаграмм будут приведены при  $u_R = 0$ .

Таблица 1: Однопетлевые диаграммы, вносящие вклад в  $Z_5$ .

№	Диаграмма	С.к.	$Z_5$
1		$\frac{1}{2}$	$-\frac{g_1^2}{(1 + iu_R)8\pi^2\epsilon}$
2		1	$-\frac{g_1^2}{8\pi^2\epsilon}$
3		1	$\frac{g_1 g_2}{8\pi^2\epsilon}$

Таблица 2: Двухпетлевые диаграммы, вносящие вклад в  $Z_0, Z_1$  и  $Z_2$ .

№	Диаграмма	С.к.	$Z_i$
1		$\frac{1}{2}$	$Z_0 : -\frac{2g_1 g_2}{(1 + u_R^2)^2 (8\pi^2)^2 \epsilon} \left( \pi u_R + 2u_R \arctan\left(\frac{u_R}{4} - \frac{3}{4u_R}\right) + \log \frac{2^{12}}{(1 + u_R^2)(9 + u_R^2)^3} \right)$

*Продолжение на следующей странице*

Таблица 2 – Продолжение предыдущей страницы

№	Диаграмма	С.к.	$Z_i$
2		1	$Z_1 : \frac{g_1^2}{2(1+u_R^2)^2(8\pi^2)^2\epsilon} \left( 4u_R \arctan \frac{u_R}{3} - \right.$ $\left. - (u_R^2 - 1) \log \frac{16}{u_R^2 + 9} - 2i \left[ (u_R^2 - 1) \arctan \frac{u_R}{3} + \right. \right.$ $\left. \left. + u_R \log \frac{16}{u_R^2 + 9} \right] \right)$
			$Z_2 : \frac{g_1^2}{(8\pi^2)^2\epsilon} \left( \frac{u_R^2 + 6 - iu_R}{u_R^2 + 9} \right)$
3		$\frac{1}{2}$	$Z_1 : \frac{g_1 g_2}{2(1+u_R^2)^2(8\pi^2)^2\epsilon} \left( 2u_R \left[ -\pi + \right. \right.$ $\left. \left. + 2 \arctan \left( \frac{u_R}{2} + \frac{3}{2u_R} \right) \right] + \right.$ $\left. + (u_R^2 - 1) \log \frac{16}{(u_R^2 + 1)(u_R^2 + 9)} - \right.$ $\left. - i \left[ (u_R^2 - 1) \left( \pi - 2 \arctan \left( \frac{u_R}{2} + \frac{3}{2u_R} \right) \right) + \right. \right.$ $\left. \left. + 2u_R \log \frac{16}{(u_R^2 + 1)(u_R^2 + 9)} \right] \right)$
			$Z_2 : -\frac{g_1 g_2}{(8\pi^2)^2\epsilon} \left( \frac{2(u_R^2 + 3 - 2iu_R)}{u_R^2 + 9} \right)$



Таблица 3: Двухпетлевые диаграммы, вносящие вклад в  $Z_5$ .

№	Диаграмма	С.к.	$Z_5$	$\partial_{u_R} Z_5(u_R = 0)$
1		$\frac{1}{2}$	$-\frac{3ig_1^3 \log(\frac{4}{3})}{64\pi^4\epsilon}$	$-\frac{g_1^3 \log(\frac{4}{3})}{16\pi^4\epsilon}$
2		1	$\frac{ig_1^3(\log(\frac{64}{27})-1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^3(-1+14\log(2)-7\log(3))}{256\pi^4\epsilon}$
3		1	$\frac{ig_1^3(\log(\frac{64}{27})-1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^3(\log(\frac{256}{81})-1)}{128\pi^4\epsilon}$
4		1	$\frac{ig_1^3(\log(\frac{64}{27})-1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^3(-3+14\log(2)-7\log(3))}{256\pi^4\epsilon}$
5		1	$-\frac{ig_1^3 \log(\frac{4}{3})}{64\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^3(1-6\log(\frac{4}{3}))}{192\pi^4\epsilon}$
6		1	$-\frac{ig_1^3(1+\log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4\epsilon}$	$-\frac{g_1^3(1+\log(\frac{4096}{729}))}{384\pi^4\epsilon}$
7		$\frac{1}{2}$	$-\frac{ig_1^3(1+\log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4\epsilon}$	$-\frac{g_1^3(1+\log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4\epsilon}$

Продолжение на следующей странице

Таблица 3 – Продолжение предыдущей страницы

№	Диаграмма	С.к.	$Z_5$	$\partial_{u_R} Z_5(u_R = 0)$
8		1	$\frac{ig_1^3(\log(\frac{64}{27})-1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^3(-1+14\log(2)-7\log(3))}{256\pi^4\epsilon}$
9		$\frac{1}{2}$	$\frac{ig_1^3(\log(\frac{64}{27})-1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^3(-3+14\log(2)-7\log(3))}{256\pi^4\epsilon}$
10		1	$\frac{ig_1g_2^2(\log(\frac{64}{27})-1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1g_2^2(1-14\log(2)+7\log(3))}{256\pi^4\epsilon}$
11		1	$\frac{ig_1g_2^2(\log(\frac{64}{27})-1)}{256\pi^4\epsilon}$	$-\frac{g_1g_2^2(\log(\frac{256}{81})-1)}{128\pi^4\epsilon}$
12		$\frac{1}{2}$	$-\frac{ig_1g_2^2\log(\frac{4}{3})}{64\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1g_2^2(\log(\frac{64}{27})-1)}{96\pi^4\epsilon}$
13		1	$\frac{ig_1^2g_2(1+\log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^2g_2(\log(\frac{64}{27})-1)}{768\pi^4\epsilon}$
14		1	$\frac{ig_1^2g_2(1+\log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^2g_2}{384\pi^4\epsilon}$

Продолжение на следующей странице

Таблица 3 – Продолжение предыдущей страницы

№	Диаграмма	С.к.	$Z_5$	$\partial_{u_R} Z_5(u_R = 0)$
15		$\frac{1}{2}$	$-\frac{ig_1^2 g_2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$\frac{g_1^2 g_2 (\log(\frac{1024}{243}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$
16		$\frac{1}{2}$	$\frac{3ig_1^2 g_2 \log(\frac{4}{3})}{64\pi^4 \epsilon}$	0
17		1	$\frac{3ig_1^2 g_2 \log(\frac{4}{3})}{64\pi^4 \epsilon}$	0
18		1	$-\frac{ig_1^2 g_2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$\frac{g_1^2 g_2 (\log(\frac{16}{9}) - 1)}{128\pi^4 \epsilon}$
19		1	$-\frac{ig_1^2 g_2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$\frac{g_1^2 g_2 (\log(\frac{1024}{243}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$
20		1	$-\frac{ig_1^2 g_2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$-\frac{g_1^2 g_2 (\log(\frac{16}{9}) - 1)}{128\pi^4 \epsilon}$
21		$\frac{1}{2}$	$\frac{ig_1^2 g_2 (1 + \log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4 \epsilon}$	$-\frac{g_1^2 g_2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$

Продолжение на следующей странице

Таблица 3 – Продолжение предыдущей страницы

№	Диаграмма	С.к.	$Z_5$	$\partial_{u_R} Z_5(u_R = 0)$
22		1	$-\frac{ig_1^2 g_2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$-\frac{g_1^2 g_2 (\log(\frac{16}{9}) - 1)}{128\pi^4 \epsilon}$
23		$\frac{1}{2}$	$\frac{ig_1^2 g_2 \log(\frac{4}{3})}{64\pi^4 \epsilon}$	0
24		1	$\frac{ig_1 g_2^2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$-\frac{g_1 g_2^2 (\log(\frac{256}{81}) - 1)}{128\pi^4 \epsilon}$

Введем обозначения:  $v_{1i} = v_{2i} = v_{3i} = v_{9i} = v_{11i}$ ,  $v_{4i} = v_{5i} = v_{6i}$  и  $v_{7i} = v_{8i} = v_{10i}$ , где  $i = t, p$ ,

$$\Upsilon_0 = 8\text{Li}_2\left(\frac{3}{4}\right) - \pi^2 + \log\left(\frac{4}{3}\right) (6 - 26\log(2) + 21\log(3)),$$

$$v_{1t} = 3 \left( -4 \left( \text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) \right) - 3\log(3)(2 + \log(243)) + 4\log(2) (3 + 28\coth^{-1}(5)) \right) + \pi^2,$$

$$v_{1p} = 1 + 2\log\left(\frac{4}{3}\right) (-5 + 24\log(2) - 12\log(3)),$$

$$v_{4t} = -32\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + 12\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{10\pi^2}{3} + 7\log^2(3) - 54\log(3) + 4\log(2)(23 - 7\log(2) + \log(81)),$$

$$v_{4p} = -96\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + 96\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) + 5 + 384\log^2(2) + 4\log(3)(89 + 24\log(3)) - 8\log(2)(73 + 48\log(3)),$$

$$v_{7t} = 4 \left( -2\text{Li}_2\left(\frac{1}{16}\right) + 3\text{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) - 2\text{Li}_2\left(\frac{1}{6}\right) + 5\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + 6\text{Li}_2\left(\frac{3}{8}\right) + 4\text{Li}_2\left(\frac{4}{9}\right) + 3\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) \right) - \frac{14\pi^2}{3} + 116\log^2(2) - 4\log(2)(17 + 32\log(3)) + \log(3)(42 + 47\log(3)),$$

$$v_{7p} = -192\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + 96\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) + 5 - 16\pi^2 + 4\log(3)(24\log(3) - 79) + 24\log(2)(21 - 8\log(3) + \log(256)),$$

$$\begin{aligned}
\chi_{1t} &= - \left( 24\text{Li}_2 \left( \frac{1}{4} \right) - 84\text{Li}_2 \left( \frac{2}{3} \right) - 6 + 7\pi^2 - 576 \log^2(2) + 20 \log(2)(8 + 33 \log(3)) - \right. \\
&\quad \left. - \log(3)(80 + 207 \log(3)) \right), \\
\chi_{1p} &= - \left( 216\text{Li}_2 \left( \frac{1}{4} \right) - 432\text{Li}_2 \left( \frac{2}{3} \right) + 69 + 36\pi^2 + 4 \log(2)(-221 + 972 \log(2) - \right. \\
&\quad \left. - 864 \log(3)) + 221 \log(9) + 324 \log(3) \log(9) \right), \\
\chi_{2t} &= - \left( 12\text{Li}_2(-2) + 6\text{Li}_2 \left( \frac{1}{4} \right) - 6 + \pi^2 - 180 \log^2(2) + (26 + 96 \log(3)) \log(4) - \right. \\
&\quad \left. - (13 + 24 \log(3)) \log(9) \right), \\
\chi_{2p} &= \left( 144\text{Li}_2 \left( \frac{1}{4} \right) - 288\text{Li}_2 \left( \frac{2}{3} \right) + 57 + 24\pi^2 + 2592 \log^2(2) + 432 \log^2(3) + 322 \log(3) - \right. \\
&\quad \left. - 4 \log(2)(161 + 576 \log(3)) \right), \\
\chi_{3t} &= - \left( 13\pi^2 - 2 \left( -33\text{Li}_2 \left( \frac{1}{4} \right) + 78\text{Li}_2 \left( \frac{2}{3} \right) + 6 + 270 \log^2(2) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 4 \log(2)(25 + 87 \log(3)) + (25 + 63 \log(3)) \log(9) \right) \right), \\
\chi_{3p} &= \left( 54\text{Li}_2 \left( \frac{1}{4} \right) - 108\text{Li}_2 \left( \frac{2}{3} \right) + 15 + 9\pi^2 + 972 \log^2(2) + \log(3)(113 + 162 \log(3)) - \right. \\
&\quad \left. - 2 \log(2)(113 + 432 \log(3)) \right), \\
\chi_{4t} &= - \left( -30\text{Li}_2 \left( \frac{1}{9} \right) + 30\text{Li}_2 \left( \frac{1}{3} \right) - 63\text{Li}_2 \left( \frac{3}{4} \right) + 3 + 5\pi^2 - 366 \log^2(2) + 97 \log(4) + \right. \\
&\quad \left. + \log(3)(-113 - 18 \log(3) + 120 \log(4)) \right), \\
\chi_{4p} &= \left( -864\text{Li}_2 \left( \frac{1}{4} \right) - 3 + 48\pi^2 + 288 \log^2(3) + 1651 \log(9) - \right. \\
&\quad \left. - 4 \log(2) (1331 + 864 \coth^{-1}(5)) \right), \\
\chi_{5t} &= - \left( -18\text{Li}_2 \left( \frac{1}{9} \right) + 6\text{Li}_2 \left( \frac{1}{4} \right) - 60\text{Li}_2 \left( \frac{2}{3} \right) - 12 + 7\pi^2 - 672 \log^2(2) + \right. \\
&\quad \left. + 4 \log(2)(37 + 183 \log(3)) - \log(3)(82 + 213 \log(3)) \right), \\
\chi_{5p} &= - \left( -9 \left( 32\text{Li}_2 \left( -\frac{1}{3} \right) + 64\text{Li}_2 \left( \frac{3}{4} \right) + 1 \right) + 48\pi^2 - 6912 \log^2(2) + \right. \\
&\quad \left. + 20 \log(2)(173 + 288 \log(3)) - 2 \log(3)(1025 + 504 \log(3)) \right), \\
\chi_{6t} &= - \left( -126\text{Li}_2 \left( \frac{1}{4} \right) - 36\text{Li}_2 \left( \frac{1}{3} \right) + 6 + 7\pi^2 + 276 \log^2(2) + 36 \log^2(3) + 302 \log(3) - \right. \\
&\quad \left. - 4 \log(2)(119 + 69 \log(3)) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{6p} &= \left( -1152\text{Li}_2\left(-\frac{1}{3}\right) - 1440\text{Li}_2\left(\frac{3}{4}\right) + 189 + 96\pi^2 - 13248\log^2(2) - 2\log(3)(2381 + \right. \\
&\quad \left. + 720\log(3)) + 4\log(2)(1933 + 2592\log(3)) \right), \\
\chi_{7t} &= \left( -117\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + 6\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) + 3 + \frac{11\pi^2}{2} - 90\log^2(2) + (103 - 36\log(3))\log(3) + \right. \\
&\quad \left. + 6\log(2)(14\log(3) - 29) \right), \\
\chi_{7p} &= - \left( -3 \left( -384\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + 192\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) + 9 + \log(729) \right) + \right. \\
&\quad \left. + 12\log(2) \left( 455 + 16\log\left(\frac{64}{27}\right) \right) - 3352\log(3) \right), \\
\chi_{8t} &= - \left( 87\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - 18\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) + 3 - \frac{5\pi^2}{2} - \left( 161 + 12\log\left(\frac{8}{3}\right) \right) \log(3) + \right. \\
&\quad \left. + 6\log(2)(43 + \log(512)) \right), \\
\chi_{8p} &= \left( 3 \left( 960\text{Li}_2\left(-\frac{1}{2}\right) - 576\text{Li}_2\left(-\frac{1}{3}\right) - 384\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) + 89 \right) + 192\pi^2 + \right. \\
&\quad \left. + 12(521 - 168\log(2))\log(2) + \left( 288\log\left(\frac{8}{3}\right) - 2011 \right) \log(9) \right), \\
\chi_{9t} &= - \left( 12\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - 24\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) - 3 + 2\pi^2 - 72\log^2(2) - \log(3)(13 + 36\log(3)) + \right. \\
&\quad \left. + \log(2)(26 + 96\log(3)) \right), \\
\chi_{9p} &= \left( 144\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - 288\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) + 57 + 24\pi^2 + 2592\log^2(2) + 432\log^2(3) + 322\log(3) - \right. \\
&\quad \left. - 4\log(2)(161 + 576\log(3)) \right), \\
\chi_{10t} &= \left( 6 \left( 5\text{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) - 10\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{3}{4}\right) + 2 \right) + 6\pi^2 + 36 \left( \log\left(\frac{16}{9}\right) - 11 \right) \log(2) + \right. \\
&\quad \left. + 7(34 - 3\log(3))\log(3) \right), \\
\chi_{10p} &= (75 - 852\log(2) + 490\log(3)), \\
\chi_{11t} &= - \left( -6\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - 36\text{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) + 6 + 3\pi^2 + 108\log^2(3) + 37\log(9) - \right. \\
&\quad \left. - 4\log(2)(37 + 234\coth^{-1}(5)) \right), \\
\chi_{11p} &= - \left( 72\text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - 144\text{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right) + 3 + 12\pi^2 + 4\log(2)(-65 + 324\log(2) - 288\log(3)) + \right. \\
&\quad \left. + 65\log(9) + 108\log(3)\log(9) \right).
\end{aligned}$$

Таблица 4: Трехпетлевые диаграммы, вносящие вклад в  $Z_0$ .

№	Диаграмма	С.к.	$Z_0$
1		1	$-\frac{\Upsilon_0}{1536\pi^6\epsilon} ig_1^2 g_2$
2		1	$\frac{\Upsilon_0}{1536\pi^6\epsilon} ig_1 g_2^2$
3		$\frac{1}{2}$	$\frac{\Upsilon_0}{1536\pi^6\epsilon} ig_1 g_2^2$
4		1	$-\frac{\Upsilon_0}{1536\pi^6\epsilon} ig_1^2 g_2$
5		$\frac{1}{2}$	$-\frac{\Upsilon_0}{1536\pi^6\epsilon} ig_1^2 g_2$
6		1	$\frac{\Upsilon_0}{1536\pi^6\epsilon} ig_2^2 g_1$

Таблица 5: Трехпетлевые диаграммы, вносящие вклад в  $Z_0, Z_1$  и  $Z_2$ .

№	Диаграмма	С.к.	$Z_i$	$\partial_{u_R} Z_i(u_R = 0)$
1		1	$Z_1 : \frac{v_{1t}}{9216\pi^6\epsilon} ig_1^3$ $Z_2 : -\frac{v_{1p}}{18432\pi^6\epsilon} ig_1^3$	$-\frac{\chi_{1t}}{9216\pi^6\epsilon} g_1^3$ $-\frac{\chi_{1p}}{110592\pi^6\epsilon} g_1^3$

Продолжение на следующей странице

Таблица 5 – Продолжение предыдущей страницы

№	Диаграмма	С.к.	$Z_i$	$\partial_{u_R} Z_i (u_R = 0)$
2		1	$Z_1 : -\frac{v_{2t}}{36864\pi^6\epsilon} i g_1^2 g_2$ $Z_2 : \frac{v_{2p}}{18432\pi^6\epsilon} i g_1^2 g_2$	$-\frac{\chi_{2t}}{18432\pi^6\epsilon} g_1^2 g_2$ $-\frac{\chi_{2p}}{221184\pi^6\epsilon} g_1^2 g_2$
3		1	$Z_1 : \frac{v_{3t}}{9216\pi^6\epsilon} i g_1 g_2^2$ $Z_2 : -\frac{v_{3p}}{18432\pi^6\epsilon} i g_1 g_2^2$	$\frac{\chi_{3t}}{9216\pi^6\epsilon} g_1 g_2^2$ $\frac{\chi_{3p}}{27648\pi^6\epsilon} g_1 g_2^2$
4		1	$Z_1 : \frac{v_{4t}}{6144\pi^6\epsilon} i g_1^3$ $Z_2 : \frac{v_{4p}}{36864\pi^6\epsilon} i g_1^3$	$\frac{\chi_{4t}}{9216\pi^6\epsilon} g_1^3$ $\frac{\chi_{4p}}{221184\pi^6\epsilon} g_1^3$
5		$\frac{1}{2}$	$Z_1 : -\frac{v_{5t}}{18432\pi^6\epsilon} i g_1^2 g_2$ $Z_2 : -\frac{v_{5p}}{36864\pi^6\epsilon} i g_1^2 g_2$	$-\frac{\chi_{5t}}{18432\pi^6\epsilon} g_1^2 g_2$ $-\frac{\chi_{5p}}{110592\pi^6\epsilon} g_1^2 g_2$
6		1	$Z_1 : -\frac{v_{6t}}{18432\pi^6\epsilon} i g_1^2 g_2$ $Z_2 : -\frac{\chi_{6p}}{36864\pi^6\epsilon} i g_1^2 g_2$	$-\frac{\chi_{6t}}{18432\pi^6\epsilon} g_1^2 g_2$ $-\frac{\chi_{6p}}{221184\pi^6\epsilon} g_1^2 g_2$
7		1	$Z_1 : -\frac{v_{7t}}{6144\pi^6\epsilon} i g_1^3$ $Z_2 : -\frac{v_{7p}}{36864\pi^6\epsilon} i g_1^3$	$-\frac{\chi_{7t}}{9216\pi^6\epsilon} g_1^3$ $-\frac{\chi_{7p}}{221184\pi^6\epsilon} g_1^3$
8		1	$Z_1 : \frac{v_{8t}}{18432\pi^6\epsilon} i g_1^2 g_2$ $Z_2 : \frac{v_{8p}}{36864\pi^6\epsilon} i g_1^2 g_2$	$\frac{\chi_{8t}}{9216\pi^6\epsilon} g_1^2 g_2$ $\frac{\chi_{8p}}{221184\pi^6\epsilon} g_1^2 g_2$
9		1	$Z_1 : -\frac{v_{9t}}{36864\pi^6\epsilon} i g_1^2 g_2$ $Z_2 : \frac{v_{9p}}{18432\pi^6\epsilon} i g_1^2 g_2$	$-\frac{\chi_{9t}}{9216\pi^6\epsilon} g_1^2 g_2$ $-\frac{\chi_{9p}}{221184\pi^6\epsilon} g_1^2 g_2$

Продолжение на следующей странице



Таблица 5 – Продолжение предыдущей страницы

№	Диаграмма	С.к.	$Z_i$	$\partial_{u_R} Z_i(u_R = 0)$
10		$\frac{1}{2}$	$Z_1 : -\frac{v_{10t}}{36864\pi^6\epsilon} i g_2^2 g_1$ $Z_2 : -\frac{v_{10p}}{36864\pi^6\epsilon} i g_2^2 g_1$	$\frac{\chi_{10t}}{18432\pi^6\epsilon} g_2^2 g_1$ $\frac{\chi_{10p}}{110592\pi^6\epsilon} g_2^2 g_1$
11		1	$Z_1 : \frac{v_{11t}}{9216\pi^6\epsilon} i g_1^3$ $Z_2 : -\frac{v_{11p}}{18432\pi^6\epsilon} i g_1^3$	$\frac{\chi_{11t}}{9216\pi^6\epsilon} g_1^3$ $\frac{\chi_{11p}}{110592\pi^6\epsilon} g_1^3$

## В. Код

### В.1 operations.py

```

1 # -*- coding: utf-8 -*-
2
3 import copy
4
5 indexes = {"0": u"\u2070",
6           "1": u"\u00B9",
7           "2": u"\u00B2",
8           "3": u"\u00B3",
9           "4": u"\u2074",
10          "5": u"\u2075",
11          "6": u"\u2076",
12          "7": u"\u2077",
13          "8": u"\u2078",
14          "9": u"\u2079",
15          "lamb": u"\u03BB",
16          "gamma": u"\u03B3"}
17
18
19
20 def power(number):
21     power_str = ""
22     temp = str(number)
23
24     for char in temp:
25         power_str += indexes[char]
26
27     return power_str
28
29
30 def multiply_two_edges(graph, e1, e2, properties_config):
31     new_index = e1.power[0] + e2.power[0] - 1
32     new_lambda = e1.power[1] + e2.power[1] + 1

```

```

33 new_edge = properties_config.new_edge(e1.nodes, power=(new_index,
    new_lambda))
34
35 new_graph = graph.change(edges_to_remove=(e1, e2), edges_to_add=(
    new_edge,), renumbering=False)
36 new_graph.g_arguments = copy.copy(graph.g_arguments)
37
38 if e1.power[1] == 0 and e2.power[1] == 0:
39     new_graph.g_arguments.append(str(e1.power[0]) + "," + str(e2.power
    [0]))
40 elif e1.power[1] == 1 and e2.power[1] == 0:
41     new_graph.g_arguments.append(str(e1.power[0]) + "-" + indexes["
    lamb"] + "," + str(e2.power[0]))
42 elif e1.power[1] > 1 and e2.power[1] == 0:
43     new_graph.g_arguments.append(str(e1.power[0]) + "-" + str(e1.power
    [1]) + indexes["lamb"] + "," +
44         str(e2.power[0]))
45 elif e1.power[1] == 0 and e2.power[1] == 1:
46     new_graph.g_arguments.append(str(e1.power[0]) + "," + str(e2.power
    [0]) + "-" + indexes["lamb"])
47 elif e1.power[1] == 0 and e2.power[1] > 1:
48     new_graph.g_arguments.append(str(e1.power[0]) + "," +
49         str(e2.power[0]) + "-" + str(e2.power
    [1]) + indexes["lamb"])
50 elif e1.power[1] == 1 and e2.power[1] == 1:
51     new_graph.g_arguments.append(str(e1.power[0]) + "-" + indexes["
    lamb"] + "," +
52         str(e2.power[0]) + "-" + indexes["
    lamb"])
53 elif e1.power[1] == 1 and e2.power[1] > 1:
54     new_graph.g_arguments.append(str(e1.power[0]) + "-" + indexes["
    lamb"] + "," +
55         str(e2.power[0]) + "-" + str(e2.power
    [1]) + indexes["lamb"])
56 elif e1.power[1] > 1 and e2.power[1] == 1:
57     new_graph.g_arguments.append(str(e1.power[0]) + "-" + str(e1.power
    [1]) + indexes["lamb"] + "," +
58         str(e2.power[0]) + "-" + indexes["
    lamb"])
59 else:
60     new_graph.g_arguments.append(str(e1.power[0]) + "-" + str(e1.power
    [1]) + indexes["lamb"] + "," +
61         str(e2.power[0]) + "-" + str(e2.power
    [1]) + indexes["lamb"])
62
63 return new_graph
64
65
66 def convolution_edges(graph, e1, e2, properties_config):
67     common_e1_and_e2_node = set(e1.nodes) & set(e2.nodes)
68     different_e1_and_e2_nodes = tuple((set(e1.nodes) | set(e2.nodes)) -
    common_e1_and_e2_node)
69

```

```

70     new_index = e1.power[0] + e2.power[0]
71     new_lambda = e1.power[1] + e2.power[1]
72     new_edge = properties_config.new_edge(different_e1_and_e2_nodes, power
      =(new_index, new_lambda))
73
74     new_graph = graph.change(edges_to_remove=(e1, e2), edges_to_add=(
      new_edge,), renumbering=False)
75     new_graph.g_arguments = copy.copy(graph.g_arguments)
76
77     return new_graph

```

---

## B.2 define\_graph.py

---

```

1  #!/usr/bin/env python3
2
3  import graph_state
4
5
6  def define_properties_config():
7      property_key = graph_state.PropertyKey(name="power", externalizer=
      graph_state.PropertyExternalizer())
8      properties_config = graph_state.PropertiesConfig.create(property_key)
9
10     return properties_config
11
12
13  def define_edge_properties_values(graph, properties_config):
14     new_graph = graph
15     edges = graph.edges()
16
17     for e in edges:
18         if e.is_external():
19             new_e = properties_config.new_edge(e.nodes, power=-1)
20             new_graph = new_graph.change(edges_to_remove=(e,),
      edges_to_add=(new_e,), renumbering=False)
21         else:
22             new_e = properties_config.new_edge(e.nodes, power=(1, 0))
23             new_graph = new_graph.change(edges_to_remove=(e,),
      edges_to_add=(new_e,), renumbering=False)
24
25     return new_graph
26
27
28  def define_new_graph_attributes(graph):
29     graph.g_arguments = list()
30     return graph

```

---

## B.3 calculate\_graph.py

---

```

1  #!/usr/bin/env python3
2

```

```

3 import graphine
4 import operations
5 import copy
6
7
8 def multiply_graph_edges(graph, properties_config):
9     new_graph = graph
10
11     i = 0
12     while i < len(set(new_graph.internal_edges)):
13         edge_nodes = new_graph.internal_edges[i].nodes
14
15         if len(new_graph.edges(*edge_nodes)) > 1:
16             new_graph = operations.multiply_two_edges(new_graph, new_graph
17                 .edges(*edge_nodes)[0], new_graph.edges(*edge_nodes)[1],
18                 properties_config)
19             continue
20
21         i += 1
22
23     return new_graph
24
25 def calculate_good_graph(graph, properties_config):
26     new_graph = multiply_graph_edges(graph, properties_config)
27     external_node = new_graph.external_vertex
28     checker_old = 1
29
30     while new_graph.internal_edges_count != 1:
31         checker_new = new_graph.internal_edges_count
32
33         if checker_old == checker_new:
34             return False
35
36         checker_old = checker_new
37         internal_graph_nodes = list(set(new_graph.vertices) - {
38             external_node})
39
40         i = 0
41         while internal_graph_nodes[i] in list(set(new_graph.vertices) - {
42             external_node}):
43             edges_of_node = new_graph.edges(internal_graph_nodes[i])
44             external_edges_of_node = new_graph.edges(internal_graph_nodes[
45                 i], external_node)
46
47             if len(edges_of_node) == 2 and len(external_edges_of_node) ==
48                 0:
49                 new_graph = operations.convolution_edges(new_graph,
50                     edges_of_node[0], edges_of_node[1], properties_config)
51
52                 different_nodes = tuple((set(edges_of_node[0].nodes) | set
53                     (edges_of_node[1].nodes)) - {internal_graph_nodes[i]})

```

```

48         if len(new_graph.edges(*different_nodes)) == 2:
49             new_graph = operations.multiply_two_edges(new_graph,
                new_graph.edges(*different_nodes)[0], new_graph.
                edges(*different_nodes)[1], properties_config)
50
51         if internal_graph_nodes[i] == internal_graph_nodes[-1]:
52             break
53
54         i += 1
55
56     return new_graph
57
58
59 def calculate_log_graph_with_triangular_divergences(graph,
    properties_config):
60     my_filters = graphine.filters.connected + graphine.filters.
        one_irreducible
61     sub_graphs = graph.x_relevant_sub_graphs(filters=my_filters,
        cut_edges_to_external=False)
62     uf_graphs = list()
63
64     for graph_i in sub_graphs:
65         if graph_i.loops_count * 3 - graph_i.internal_edges_count == 0:
66             uf_graphs.append(graph_i)
67
68     i = 0
69     j = 1
70     while i < len(uf_graphs) - 1:
71         graph_i = uf_graphs[i]
72
73         while j < len(uf_graphs):
74             graph_j = uf_graphs[j]
75
76             if graph_j.contains(graph_i):
77                 uf_graphs.remove(graph_i)
78                 break
79
80             j = j + 1
81
82         if j == len(uf_graphs):
83             i = i + 1
84             j = i + 1
85
86     external_vertex = graph.external_vertex
87     internal_vertices = list(set(graph.vertices) - {external_vertex})
88
89     i = 0
90     j = 1
91     while i < len(internal_vertices):
92         vertex_i = internal_vertices[i]
93
94         while j < len(internal_vertices):
95             vertex_j = internal_vertices[j]

```

```

96         j = j + 1
97
98         k = 0
99         while k < len(uf_graphs):
100             graph_k = uf_graphs[k]
101             both_vertices_in_graph = vertex_i in graph_k.vertices and
102                 vertex_j in graph_k.vertices
103
104             if both_vertices_in_graph:
105                 break
106
107             k = k + 1
108
109         if k == len(uf_graphs):
110             final_graph = graph.change(edges_to_remove=graph.
111                 external_edges, edges_to_add=(properties_config.
112                 new_edge((vertex_i, external_vertex), power=-1),
113                 properties_config.new_edge((vertex_j, external_vertex),
114                 power=-1)), renumbering=False)
115
116             final_graph.g_arguments = copy.copy(graph.g_arguments)
117
118             result = calculate_good_graph(final_graph,
119                 properties_config)
120
121             if result:
122                 return result
123
124         i = i + 1
125         j = i + 1
126
127     return False

```

---

## B.4 present\_graph.py

---

```

1 # -*- coding: utf-8 -*-
2
3 import operations
4 from collections import Counter
5
6
7 def sort_g_arguments(g_arguments):
8     sorted_g_arguments = Counter(g_arguments)
9
10     i = 0
11     while i < len(sorted_g_arguments.keys()) - 1:
12         value1 = sorted_g_arguments.keys()[i].split(",")
13
14         j = i + 1
15         while j < len(sorted_g_arguments.keys()):
16             value2 = sorted_g_arguments.keys()[j].split(",")
17

```

```

18         if sorted(value1) == sorted(value2):
19             sorted_g_arguments[sorted_g_arguments.keys()[i]] +=
20                 sorted_g_arguments[sorted_g_arguments.keys()[j]]
21             del sorted_g_arguments[sorted_g_arguments.keys()[j]]
22             continue
23
24         j += 1
25
26         i += 1
27
28     return sorted_g_arguments
29
30 def result_via_g_functions(sorted_g_arguments):
31     result = ""
32
33     i = 0
34     while i < len(sorted_g_arguments):
35         element_i = sorted_g_arguments.keys()[i]
36
37         if sorted_g_arguments[element_i] == 1:
38             result += "G" + "(" + element_i.split(",")[0].encode('utf-8')
39                 + "," + element_i.split(",")[1].encode('utf-8') + ")"
40         else:
41             result += "G" + operations.power(sorted_g_arguments[element_i]
42                 ).encode('utf-8') + "(" + element_i.split(",")[0].encode('
43                 utf-8') + "," + element_i.split(",")[1].encode('utf-8') + "
44                 )"
45
46         i += 1
47
48     return result

```

---

## B.5 launch\_program.py

---

```

1 # -*- coding: utf-8 -*-
2
3 import graphine
4 import define_graph
5 import operations
6 import calculate_graph
7 import present_graph
8
9 properties_config = define_graph.define_properties_config()
10
11 graph = graphine.Graph.from_str("e12|e3|34|4|e|", properties_config)
12
13 graph = define_graph.define_edge_properties_values(graph,
14     properties_config)
15 graph = define_graph.define_new_graph_attributes(graph)
16

```

```
16 new_graph = calculate_graph.  
    calculate_log_graph_with_triangular_divergences(graph,  
    properties_config)  
17  
18 if new_graph:  
19     new_graph.sorted_g_arguments = present_graph.sort_g_arguments(  
    new_graph.g_arguments)  
20     gamma = present_graph.result_via_g_functions(new_graph.  
    sorted_g_arguments)  
21  
22     print operations.indexes["gamma"].encode("utf-8") + " = " + gamma  
23 else:  
24     print False
```

---



## Список литературы

- [1] *Васильев А.Н.*, Квантовополе́вая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике, СПб., Петербургский институт ядерной физики (ПИЯФ), 773 (1998) (*Vasil'ev A.N.*, The Field Theoretic Renormalization Group in Critical Behavior Theory and Stochastic Dynamics, Chapman and Hall/CRC, 704 (2004)).
- [2] *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.*, Введение в теорию квантованных полей, М., Наука (1957, 1973, 1976, 1984).
- [3] *Wilson K.G., Fisher M.E.*, Critical Exponents in 3.99 Dimensions // Phys. Rev. Lett., **28**, 240 (1972). DOI: [10.1103/PhysRevLett.28.240](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.28.240).
- [4] *'t Hooft G.*, Dimensional regularization and the renormalization group // Nucl. Phys. B, V. 61, 455-468 (1973). DOI: [10.1016/0550-3213\(73\)90376-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(73)90376-3).
- [5] *Wilson K.G.*, Feynman-Graph Expansion for Critical Exponents // Phys. Rev. Lett., **28**, 548 (1972). DOI: [10.1103/PhysRevLett.28.548](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.28.548).
- [6] *Brezin E., Le Guillou J.C., Zinn-Justin J., Nickel B.G.*, Higher order contributions to critical exponents // Phys. Lett. A, V. 44, 227-228 (1973). DOI: [10.1016/0375-9601\(73\)90894-3](https://doi.org/10.1016/0375-9601(73)90894-3).
- [7] *Vladimirov A.A., Kazakov D.I., Tarasov O.V.*, Calculation of critical exponents by quantum field theory methods // JETP, V. 50, 521-526 (1979).
- [8] *Chetyrkin K.G., Kataev A.L., Tkachov F.V.*, Five-loop calculations in the  $g\phi^4$  model and the critical index  $\eta$  // Phys. Lett. B, V. 99, 147-150 (1981). Erratum: [9]. DOI: [10.1016/0370-2693\(81\)90968-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(81)90968-0).
- [9] Errata // Phys. Lett. B, V. 101, 457-458 (1981). DOI: [10.1016/0370-2693\(81\)90176-3](https://doi.org/10.1016/0370-2693(81)90176-3).
- [10] *Chetyrkin K.G., Gorishny S.G., Larin S.A., Tkachov F.V.*, Five-loop renormalization group calculations in the  $g\phi^4$  theory // Phys. Lett. B, V. 132, 351-354 (1983). DOI: [10.1016/0370-2693\(83\)90324-6](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90324-6).
- [11] *Gorishny S.G., Larin S.A., Tkachov F.V.*,  $\epsilon$ -Expansion for critical exponents: The  $O(\epsilon^5)$  approximation // Phys. Lett. A, V. 101, 120-123 (1984). DOI: [10.1016/0375-9601\(84\)90503-6](https://doi.org/10.1016/0375-9601(84)90503-6).
- [12] *Kleinert H., Neu J., Schulte-Frohlinde N., Chetyrkin K.G., Larin S.A.*, Five-loop renormalization group functions of  $O(n)$ -symmetric  $\varphi^4$ -theory and  $\epsilon$ -expansions of critical exponents up to  $\epsilon^5$  // Phys. Lett. B, V. 272, 39-44 (1991). Erratum: [13]. DOI: [10.1016/0370-2693\(91\)91009-K](https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)91009-K).
- [13] *Kleinert H., Neu J., Schulte-Frohlinde N., Chetyrkin K.G., Larin S.A.*, Five-loop renormalization group functions of  $O(n)$ -symmetric  $\varphi^4$ -theory and  $\epsilon^5$ : (Phys. Lett. B 272 (1991) 39) // Phys. Lett. B, V. 319, 545 (1993). DOI: [10.1016/0370-2693\(93\)91768-I](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)91768-I) ([10.48550/arXiv.hep-th/9503230](https://arxiv.org/abs/10.48550/arXiv.hep-th/9503230)).
- [14] *Batkovich D.V., Chetyrkin K.G., Kompaniets M.V.*, Six loop analytical calculation of the field anomalous dimension and the critical exponent  $\eta$  in  $O(n)$ -symmetric  $\varphi^4$  model // Nucl. Phys. B, V. 906, 147-167 (2016). DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2016.03.009](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2016.03.009) ([10.48550/arXiv.1601.01960](https://arxiv.org/abs/10.48550/arXiv.1601.01960)).
- [15] *Kompaniets M.V., Panzer E.*, Renormalization group functions of  $\phi^4$  theory in the MS-scheme to six loops // Proc. Sci. LL2016 038 (2016). DOI: [10.48550/arXiv.1606.09210](https://doi.org/10.48550/arXiv.1606.09210).
- [16] *Kompaniets M.V., Panzer E.*, Minimally subtracted six-loop renormalization of  $O(n)$ -symmetric  $\phi^4$  theory and critical exponents // Phys. Rev. D, **96**, 036016 (2017). DOI: [10.1103/PhysRevD.96.036016](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.036016) ([10.48550/arXiv.1705.06483](https://arxiv.org/abs/10.48550/arXiv.1705.06483)).

- [17] Schnetz O., Numbers and functions in quantum field theory // Phys. Rev. D, **97**, 085018 (2018). DOI: [10.1103/PhysRevD.97.085018](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.085018) ([10.48550/arXiv.1606.08598](https://arxiv.org/abs/10.48550/arXiv.1606.08598)).
- [18] Schnetz O.,  $\phi^4$  theory at seven loops // Phys. Rev. D, **107**, 036002 (2023). DOI: [10.1103/PhysRevD.107.036002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.107.036002).
- [19] Macfarlane A.J., Woo G.,  $\Phi^3$  theory in six dimensions and the renormalization group // Nucl. Phys. B, V. 77, 91-108 (1974). Erratum: [20]. DOI: [10.1016/0550-3213\(74\)90306-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90306-X).
- [20] Erratum // Nucl. Phys. B, V. 86, 548 (1975). DOI: [10.1016/0550-3213\(75\)90361-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(75)90361-2).
- [21] Bonfim de Alcantara O.F., Kirkham J.E., McKane A.J., Critical exponents to order  $\epsilon^3$  for  $\phi^3$  models of critical phenomena in  $6-\epsilon$  dimensions // J. Phys. A, V. 13, L247-L251 (1980). Corrigendum: [22]. DOI: [10.1088/0305-4470/13/7/006](https://doi.org/10.1088/0305-4470/13/7/006).
- [22] Bonfim de Alcantara O.F., Kirkham J.E., McKane A.J., Critical exponents to order  $\epsilon^3$  for  $\phi^3$  models of critical phenomena in  $6-\epsilon$  dimensions // J. Phys. A, V. 13, 3785 (1980). DOI: [10.1088/0305-4470/13/12/529](https://doi.org/10.1088/0305-4470/13/12/529).
- [23] Bonfim de Alcantara O.F., Kirkham J.E., McKane A.J., Critical exponents for the percolation problem and the Yang-Lee edge singularity // J. Phys. A, V. 14, 2391-2413 (1981). DOI: [10.1088/0305-4470/14/9/034](https://doi.org/10.1088/0305-4470/14/9/034).
- [24] Gracey J.A., Four loop renormalization of  $\phi^3$  theory in six dimensions // Phys. Rev. D, **92**, 025012 (2015). DOI: [10.1103/PhysRevD.92.025012](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.025012).
- [25] Kompaniets M.V., Pikelner A., Critical exponents from five-loop scalar theory renormalization near six-dimensions // Phys. Lett. B, V. 817, 136331 (2021). DOI: [10.1016/j.physletb.2021.136331](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2021.136331) ([10.48550/arXiv.2101.10018](https://arxiv.org/abs/10.48550/arXiv.2101.10018)).
- [26] Borinsky M., Gracey J.A., Kompaniets M.V., Schnetz O., Five-loop renormalization of  $\phi^3$  theory with applications to the Lee-Yang edge singularity and percolation theory // Phys. Rev. D, **103**, 116024 (2021). DOI: [10.1103/PhysRevD.103.116024](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.116024) ([10.48550/arXiv.2103.16224](https://arxiv.org/abs/10.48550/arXiv.2103.16224)).
- [27] Stephen M.J., McCauley J.L., Feynman graph expansion for tricritical exponents // Phys. Lett. A, V. 44, 89-90 (1973). DOI: [10.1016/0375-9601\(73\)90799-8](https://doi.org/10.1016/0375-9601(73)90799-8).
- [28] Lewis A.L., Adams F.W., Tricritical behavior in two dimensions. II. Universal quantities from the  $\epsilon$  expansion // Phys. Rev. B, **18**, 5099 (1978). DOI: [10.1103/PhysRevB.18.5099](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.18.5099).
- [29] Hager J.S., Schäfer L.,  $\Theta$ -point behavior of diluted polymer solutions: Can one observe the universal logarithmic corrections predicted by field theory? // Phys. Rev. E, **60**, 2071 (1999). DOI: [10.1103/PhysRevE.60.2071](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.60.2071) ([10.48550/arXiv.cond-mat/9908474](https://arxiv.org/abs/10.48550/arXiv.cond-mat/9908474)).
- [30] Hager J.S., Six-loop renormalization group functions of  $O(n)$ -symmetric  $\phi^6$ -theory and  $\epsilon$ -expansions of tricritical exponents up to  $\epsilon^3$  // J. Phys. A, V. 35, 2703 (2002). DOI: [10.1088/0305-4470/35/12/301](https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/12/301).
- [31] Hohenberg P.C., Halperin B.I., Theory of dynamic critical phenomena // Rev. Mod. Phys., **49**, 435 (1977). DOI: [10.1103/RevModPhys.49.435](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.49.435).
- [32] Halperin B.I., Hohenberg P.C., Ma S., Calculation of Dynamic Critical Properties Using Wilson's Expansion Methods // Phys. Rev. Lett., **29**, 1548 (1972). DOI: [10.1103/PhysRevLett.29.1548](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.29.1548).

- [33] *De Dominicis C., Brezin E., Zinn-Justin J.*, Field-theoretic techniques and critical dynamics. I. Ginzburg-Landau stochastic models without energy conservation // *Phys. Rev. B*, **12**, 4945 (1975). DOI: [10.1103/PhysRevB.12.4945](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.12.4945).
- [34] *Антонов Н.В., Васильев А.Н.*, Критическая динамика как теория поля // *ТМФ*, **60**:1, 59–71 (1984) (*Antonov N.V., Vasil'ev A.N.*, Critical dynamics as a field theory // *Theoret. and Math. Phys.*, **60**, 671–679 (1984)). DOI: [10.1007/BF01018251](https://doi.org/10.1007/BF01018251).
- [35] *Аджемьян Л.Ц., Новиков С.В., Сладкофф Л.*, Расчет динамического индекса модели А критической динамики в порядке  $\varepsilon^4$  // *Вестник СПбГУ*, **4**:4, 110–114 (2008) (*Adzhemyan L.Ts., Novikov S.V., Sladkoff L.*, Calculation of the dynamical critical exponent in the model A of critical dynamics to order  $\varepsilon^4$  // *Vestnik SPbSU Phys. Chem.*, **4**, 110–114 (2008)). DOI: [10.48550/arXiv.0808.1347](https://doi.org/10.48550/arXiv.0808.1347).
- [36] *Adzhemyan L.Ts., Ivanova E.V., Kompaniets M.V., Vorobyeva S.Ye.*, Diagram reduction in problem of critical dynamics of ferromagnets: 4-loop approximation // *J. Phys. A*, V. 51, 155003 (2018). DOI: [10.1088/1751-8121/aab20f](https://doi.org/10.1088/1751-8121/aab20f) ([10.48550/arXiv.1712.05917](https://doi.org/10.48550/arXiv.1712.05917)).
- [37] *Adzhemyan L.Ts., Evdokimov D.A., Hnatič M., Ivanova E.V., Kompaniets M.V., Kudlis A., Zakharov D.V.*, The dynamic critical exponent  $z$  for 2d and 3d Ising models from five-loop  $\varepsilon$  expansion // *Phys. Lett. A*, V. 425, 127870 (2022). DOI: [10.1016/j.physleta.2021.127870](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2021.127870) ([10.48550/arXiv.2111.04719](https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.04719)).
- [38] *Binoth T., Heinrich G.*, Numerical evaluation of multi-loop integrals by sector decomposition // *Nucl. Phys. B*, V. 680, 375–388 (2004). DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2003.12.023](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2003.12.023) ([10.48550/arXiv.hep-ph/0305234](https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-ph/0305234)).
- [39] *Heinrich G.*, SECTOR DECOMPOSITION // *Int. J. Mod. Phys. A*, V. 23, 1457–1486 (2008). DOI: [10.1142/S0217751X08040263](https://doi.org/10.1142/S0217751X08040263) ([10.48550/arXiv.0803.4177](https://doi.org/10.48550/arXiv.0803.4177)).
- [40] *Honkonen J., Komarova M.V., Molotkov Yu.G., Nalimov M.Yu.*, Effective large-scale model of boson gas from microscopic theory // *Nucl. Phys. B*, V. 939, 105–129 (2019). DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2018.12.015](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2018.12.015).
- [41] *Жаворонков Ю.А., Комарова М.В., Молотков Ю.Г., Налимов М.Ю., Хонконен Ю.*, Критическая динамика фазового перехода в сверхтекучее состояние // *ТМФ*, **200**:2, 361–377 (2019) (*Zhavoronkov Yu.A., Komarova M.V., Molotkov Yu.G., Nalimov M.Yu., Honkonen J.*, Critical Dynamics of the Phase Transition to the Superfluid State // *Theoret. and Math. Phys.*, **200**, 1237–1251 (2019)). DOI: [10.4213/tmf9674](https://doi.org/10.4213/tmf9674) ([10.1134/S0040577919080142](https://doi.org/10.1134/S0040577919080142)).
- [42] *Honkonen J., Komarova M., Molotkov Yu., Nalimov M., Trenogin A.*, Critical dynamics of the superfluid phase transition: Multiloop calculation of the microscopic model // *Phys. Rev. E*, **106**, 014126 (2022). DOI: [10.1103/PhysRevE.106.014126](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.106.014126).
- [43] *Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е.*, Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., Физматгиз. (1963), Добросвет (1998) (*Abrikosov A.A., Gorkov L.P., Dzyaloshinski I.E.*, *Methods Of Quantum Field Theory In Statistical Physics*, Prentice Hall (1963)).
- [44] *Хонконен Ю.*, Контурно упорядоченные функции Грина в стохастической теории поля // *ТМФ*, **175**:3, 455–464 (2013) (*Honkonen J.*, Contour-ordered Green's functions in stochastic field theory // *Theoret. and Math. Phys.*, **175**, 827–834 (2013)). DOI: [10.4213/tmf8483](https://doi.org/10.4213/tmf8483) ([10.1007/s11232-013-0069-2](https://doi.org/10.1007/s11232-013-0069-2)).

- [45] *Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.*, Введение в квантовую теорию калибровочных полей, М., Наука (1988) (*Slavnov A.A., Faddeev L.D.*, Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory, Benjamin-Cummings Publishing (1990)).
- [46] *Schwinger J.*, Brownian Motion of a Quantum Oscillator // J. Math. Phys., 2, 407-432 (1961). DOI: [10.1063/1.1703727](https://doi.org/10.1063/1.1703727).
- [47] *Keldysh L.V.*, Diagram technique for nonequilibrium processes // Zh.Eksp.Teor.Fiz., 47, 1515-1527 (1964); Sov.Phys.JETP, 20, 1018-1026 (1965).
- [48] *Кривороль В.А., Налимов М.Ю.*, Кинетические коэффициенты в формализме временных функций Грина при конечной температуре // ТМФ, **213**:3, 538–554 (2022) (*Krivorol V.A., Nalimov M.Yu.*, Kinetic coefficients in a time-dependent Green’s function formalism at finite temperature // Theoret. and Math. Phys., **213**, 1774–1788 (2022)). DOI: [10.4213/tmf10327](https://doi.org/10.4213/tmf10327) ([10.1134/S0040577922120108](https://doi.org/10.1134/S0040577922120108), [10.48550/arXiv.2210.14281](https://doi.org/10.48550/arXiv.2210.14281)).
- [49] *Collins J.C.*, Structure of counterterms in dimensional regularization // Nucl. Phys. B, V. 80, 341-348 (1974). DOI: [10.1016/0550-3213\(74\)90521-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90521-5).
- [50] *Speer E.R.*, Renormalization and Ward identities using complex space-time dimension // J. Math. Phys., 15, 1-6 (1974). DOI: [10.1063/1.1666485](https://doi.org/10.1063/1.1666485).
- [51] *Breitenlohner P., Maison D.*, Dimensionally renormalized Green’s functions for theories with massless particles. II // Commun. Math. Phys., 52, 55-75 (1977). DOI: [10.1007/BF01609071](https://doi.org/10.1007/BF01609071).
- [52] *Паташинский А.З., Покровский В.Л.*, Фазовый переход второго рода в бозе-жидкости // ЖЭТФ, 46(3), 994–1016 (1964) (*Patashinskii A.Z., Pokrovskii V.L.*, 2nd order phase transitions in a Bose fluid // JETP, V. 19(3), 677-691 (1964)).
- [53] *D’eramo M., Peliti L., Parisi G.*, Theoretical predictions for critical exponents at the  $\lambda$ -point of bose liquids // Lett. Nuovo Cim. (1971-1985), 2, 878-880 (1971). DOI: [10.1007/BF02774121](https://doi.org/10.1007/BF02774121).
- [54] *Batkovich D., Kirienko Yu., Kompaniets M., Novikov S.*, GraphState - a tool for graph identification and labelling (2014). DOI: [10.48550/arXiv.1409.8227](https://doi.org/10.48550/arXiv.1409.8227).
- [55] *Nickel B.G., Meiron D.I., Baker G.A. Jr.*, Compilation of 2-pt. and 4-pt. graphs for continuous spin models, Guelph, University of Guelph Report (1977).
- [56] *Kompaniets M., Panzer E.*, Renormalization group functions of  $\phi^4$  theory in the MS-scheme to six loops // PoS, V. LL2016, 038 (2016). DOI: [10.22323/1.260.0038](https://doi.org/10.22323/1.260.0038) ([10.48550/arXiv.1606.09210](https://doi.org/10.48550/arXiv.1606.09210)).
- [57] *Налимов М.Ю., Сергеев В.А., Сладкофф Л.*, Борелевское пересуммирование  $\varepsilon$ -разложения динамического индекса  $z$  модели А  $\phi^4(O(n))$ -теории // ТМФ, **159**:1, 96–108 (2009) (*Nalimov M.Yu., Sergeev V.A., Sladkoff L.*, Borel resummation of the  $\varepsilon$ -expansion of the dynamical exponent  $z$  in model a of the  $\phi^4(O(n))$  theory // Theoret. and Math. Phys., **159**, 499–508 (2009)). DOI: [10.4213/tmf6335](https://doi.org/10.4213/tmf6335) ([10.1007/s11232-009-0040-4](https://doi.org/10.1007/s11232-009-0040-4)).