

Санкт-Петербургский государственный университет

ЕВДОКИМОВ Даниил Александрович

Выпускная квалификационная работа

**ИССЛЕДОВАНИЕ РЕДУКЦИИ ДИАГРАММ
ФЕЙНМАНА В ЗАДАЧЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ
ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЫСОКОЙ
РАЗМЕРНОСТИ**

Уровень образования: магистратура

Направление: 03.04.02 «Физика»

Основная образовательная программа: ВМ.5511.2021 «Физика»

Научный руководитель:
профессор, кафедра Статистической физики, д.ф.-м.н., проф. **Аджемян Л.Ц.**

Рецензент:
ведущий научный сотрудник ПОМИ РАН, д.ф.-м.н. **Деркачев С.Э.**

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1	Введение	2
2	Постановка задачи о стохастической модели турбулентности	3
2.1	Общие сведения о турбулентности	3
2.2	Теория Колмогорова (K41)	5
2.3	Структурные функции и аномальный скейлинг	6
2.4	Стохастическое уравнение Навье-Стокса	8
3	Квантово-полевая формулировка. Перенормировка модели.	9
3.1	Действие и вид функции накачки	9
3.2	РГ-анализ модели	11
3.3	Определение РГ-функций без констант ренормировки	15
4	Диаграммная техника	17
4.1	Построение диаграмм и правила их отбора при $d \rightarrow \infty$	17
4.2	Анализ подынтегральных выражений	20
4.3	Параметрическое представление Фейнмана	22
5	Аналитическое интегрирование	25
6	Заключение	26

1 Введение

Данная работа посвящена разработке аналитического метода расчета диаграмм Фейнмана, возникающих при применении метода ренормализационной группы (РГ) в исследовании стохастической модели развитой, однородной и изотропной турбулентности несжимаемой жидкости в пространствах высокой размерности. Первая работа [1], в которой была предпринята попытка теоретического описания турбулентности с помощью РГ-метода, относится к 1979, и с тех пор в этом направлении были достигнуты большие успехи. В частности, этот подход позволил без ссылок на феноменологические гипотезы строго обосновать колмогоровский скейлинг, основной индекс которого был найден точно. Однако поправочный индекс ω , отвечающий за устойчивость неподвижной точки ренормгруппы, поддается вычислению только в рамках ε -разложения. Получение наиболее точного значения ω , расчету которого во многом и посвящена данная работа, представляет большой интерес, однако оно сопряжено с принципиальными трудностями, из-за которых рекордный результат на данный момент ограничивается вторым порядком теории возмущений.

В данной работе поправочный индекс будет рассчитываться в виде двойного разложения $(1/d, \varepsilon)$, а именно в главном порядке по $1/d$, что соответствует пределу $d \rightarrow \infty$. Перспективность такого подхода обоснована результатами изучения аномального скейлинга в модели Крейчнана турбулентного перемешивания пассивной примеси, где первые успехи были достигнуты именно в асимптотике больших d . Оказалось, что аномальные индексы поля пассивной примеси $\sim 1/d$. Это означает, что аномальный скейлинг пропадает в пределе $d \rightarrow \infty$. В дальнейшем аномальные индексы модели Крейчнана были рассчитаны РГ-методом в рамках ε -разложения до третьего порядка по ε . Коэффициенты этого разложения имеют явную зависимость от d , причем уже первый член дает точную асимптотику по $1/d$. Использование этого подхода позволило рассчитать аномальные индексы в модели Крейчнана, что дает надежду на его успешное применение уже в модели стохастической турбулентности.

К данному моменту лучшим результатом для индекса ω в главном приближении по $1/d$ является неопубликованный численный четырехпетлевой расчет Ю.Кириенко [personal communication]. Многопетлевые расчеты в динамических задачах, к которым относится модель стохастической турбулентности, сопряжены с большими техническими сложностями. Зачастую огромное число диаграмм является непреодолимым вычислительным препятствием, что делает особенно актуальным поиск механизмов, сокращающих количество необходимых для вычисления диаграмм. Как оказалось, при рассмотрении предела $d \rightarrow \infty$ большинство диаграмм зануляются, и их можно вообще не учитывать. В работе было сформулированы правила [2], по которым уже на этапе построения диаграмм можно определить, являются ли они значимыми. Это значительное упрощение в свое время позволило получить трех- и четырехпетлевые результаты. В работе [3] и вовсе было показано, что даже среди оставшихся ненулевых диаграмм большинство из них не дают вклад в конечный ответ, так как они зануляются суммой комбинаций. Так, среди исходных 4080 трехпетлевых диаграмм конечный ответ определяют только 9 из них. Такое явление *редукции диаграмм* предстает большой интерес для исследования, так как, если удастся понять ее механизм, можно было бы сразу выделять и вычислять только значащие диаграммы, незначительное количество которых позволило бы продвинуться в старшие порядки теории возмущения.

Первым шагом на пути изучения явления редукции является поиск нулевых комбинаций среди уже посчитанных диаграмм. Численные ответы для этого подходят плохо, т.к. используемый алгоритм перебора в этом случае оказывается слишком времязатратным. Это является мотивацией разработки способа получения аналитических ответов, что, во-первых, представляет интерес само по себе, а, во-вторых, позволило бы продвинуться в понимании причин редукции.

Целью данной работы является получение аналитического значения поправочного индекса ω в главном порядке по $1/d$. Для этого решаются следующие **задачи**:

1. Применение новой для этой модели ренормировочной схемы с вычитаниями на единичном импульсе.
2. Формулирование правил отбора диаграмм с учетом предела $d \rightarrow \infty$ и выбранной ренормировочной схемы.
3. Применение метода интегрирования с помощью гиперлогарифмов для получения аналитических ответов для диаграмм.

2 Постановка задачи о стохастической модели турбулентности

В этой главе пойдет речь об общепринятой на данный момент теории развитой турбулентности Колмогорова (К41). В свое время она позволила получить ряд результатов для важных турбулентных характеристик (например, спектральную плотность энергии), получивших экспериментальную проверку. Однако наблюдались и расхождения в поведении реальных систем с ее теоретическими предсказаниями. В частности, это проявляется в явлении *аномального скейлинга* при изучении структурных функций. Основная задача теории на данном этапе - строгое обоснование феноменологической теории Колмогорова и описание возможных отклонений от нее.

2.1 Общие сведения о турбулентности

Турбулентные течения несжимаемой жидкости (газа) описываются уравнением Навье-Стокса

$$\partial_t v_i = -\partial_i P - \partial_j v_i v_j + \nu \Delta v_i, \quad (1)$$

дополненным уравнением несжимаемости, эквивалентным условию поперечности поля скорости,

$$\partial_i v_i = 0. \quad (2)$$

Здесь v_i - компонента поля скорости, $\partial_j = \partial_{r_j}$, P - давление, ν - кинематическая вязкость. После проведения обезразмеривания в уравнении выделяется параметр Re , названный числом Рейнольдса. Он зависит от внешних параметров конкретной системы, таких как характерная величина изменения скорости в системе U (порядка скорости натекающего потока жидкости или газа), характерный размер L , на котором происходит изменение

скорости на величину U (порядка размера обтекающего тела), а также от кинематической вязкости ν :

$$\tilde{\partial}_i \tilde{v}_i = -\tilde{\partial}_i \tilde{P} - \tilde{\partial}_j \tilde{v}_i \tilde{v}_j + \frac{1}{Re} \tilde{\Delta} \tilde{v}_i, \quad (3)$$

$$Re = \frac{LU}{\nu}. \quad (4)$$

Значок тильды обозначает обезразмеренную величину. Значение числа Рейнольдса определяет режим течения - при малых Re поток ламинарный, а при больших Re он становится турбулентным. Объектом дальнейшего рассмотрения будет система с достаточно большим числом Рейнольдса - в режиме так называемой *развитой* турбулентности.

Понимание механизма смены режима при достижении некоторого критического значения Re до сих пор остается открытым вопросом. Одна из основных гипотез была независимо выдвинута Л. Д. Ландау [4] и Е. Хопфом [5]. Их идея заключалась в том, что турбулентность рождается при изменении числа Рейнольдса благодаря переходу стационарного ламинарного течения в периодический режим с некоторой частотой. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса и достижении им второго порога неустойчивости этот периодический режим, в свою очередь, теряет устойчивость. В результате дальнейшей дестабилизации все большего числа колебательных мод возникает нетривиальный квазипериодический режим движения жидкости с большим набором частот. Однако, несмотря на всю сложность полученной системы, в подходе Ландау-Хопфа настоящую хаотизацию движения система будет проявлять только при бесконечном числе таких частот, что соответствует $Re = \infty$. Ответом на это являются наблюдения, сформулированные в работе [6], говорящие о том, что хаотический турбулентный режим движения вязкой жидкости наступает уже после появления двух основных частот, что связано с наличием в фазовом пространстве системы странного аттрактора. В связи с этим поиск детерминированного решения для поля скорости, соответствующего полному описанию системы, не представляется возможным.

Более подходящим оказывается статфизический подход, в котором хаотичные турбулентные колебания (пульсации) скорости рассматриваются в качестве случайного поля, разные конфигурации которого реализуются с разной вероятностью. Введем среднюю $\vec{V}(\vec{x}, t)$ и пульсационную $\vec{\phi}(\vec{x}, t)$ составляющие скорости:

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{V}(\vec{x}, t) + \vec{\phi}(\vec{x}, t) \quad (5)$$

$$\overline{\vec{\phi}(\vec{x}, t)} = 0 \quad (6)$$

$$\overline{v(\vec{x}, t)} = V(\vec{x}, t). \quad (7)$$

Пульсационная компонента $\vec{\phi}(\vec{x}, t)$ при усреднении по достаточно большому временному интервалу зануляется, то есть на больших временных масштабах скорость определяется некоторой ненулевой усредненной составляющей. Усредненное поле скорости, как и ламинарное решение \vec{V}_0 , является гладкой функцией координат, однако будет существенно от него отличаться. Ее поиск является одной из основных нерешенных задач в теории турбулентности.

Достигнутые успехи в этой области связаны с изучением средних значений произведений пульсационной составляющей в идеализированной модели *однородной, изотропной*

турбулентности, которая в лучшем случае может быть применима к локальным участкам турбулентного потока. Для проверки выводов такой теории были созданы наиболее подходящие экспериментальные условия. Исторически первая и крайне успешная теория, описывающая развитую турбулентность исходя из наиболее общих соображений, принадлежит А.Н. Колмогорову.

2.2 Теория Колмогорова (К41)

В 1941 году А.Н. Колмогоров в серии статей [7][8][9] сформулировал теорию развитой турбулентности, которая до сих пор задает вектор направления исследований в этой области (современный обзор см. в [10]). Его идея заключалась в попытке описать универсальное характерное поведение турбулентной системы, которое бы не зависело от ее конкретной реализации и внешних параметров. Определим величины, которые являются объектами рассмотрения в данной теории. Важнейшей характеристикой пульсационной скорости является *средняя энергия пульсаций* на единицу массы:

$$E = \frac{1}{2} \overline{(\phi)^2}. \quad (8)$$

Более детальной характеристикой является так называемая *спектральная плотность* пульсационной энергии $E(k)$, определяющая распределение энергии по обратным размерам пульсаций k . Величина $E(k)dk$ представляет собой среднее значение пульсационной энергии в интервале dk , интеграл от которой дает полную энергию пульсаций:

$$\int_0^{\infty} E(k)dk = E. \quad (9)$$

Важно отметить, что величина $E(k)$ с хорошей точностью измеряется экспериментально, что дает хорошую возможность проверки применимости всей теории.

В основу теории Колмогорова легли следующие гипотезы:

1. В системе с сильно развитой турбулентностью рождаются вихри с характерным размером обтекаемых тел L (так называемый “внешний масштаб турбулентности”). Эти вихри начинают дробиться до тех пор, пока не достигают некоторого достаточно малого размера l_{diss} , при котором они эффективно диссипируют за счет вязкости (чем вихрь меньше, тем эффективней он диссипирует) - так называемый *каскад Ричардсона*.
2. После некоторого количества дроблений система “забывает” обо всех деталях внешних условий (геометрии системы, размера максимальных вихрей L и т.д.). Тогда спектр пульсационной энергии $E(k)$ и другие усредненные величины зависят от единственной “внешней” характеристики – количества поступающей в систему энергии в единицу времени на единицу массы W , компенсирующей потери кинетической энергии за счет превращения ее в тепло. В стационарном состоянии $W = \bar{\epsilon}$, где $\bar{\epsilon}$ – средняя скорость диссипации энергии в единицу времени на единицу массы.
3. Размер диссипирующих вихрей l_{diss} определяется вязкостью ν и скоростью диссипации $\bar{\epsilon}$.

Проводя размерный анализ упомянутых выше величин, можно получить соотношение между внешним масштабом и диссипативной длиной:

$$\frac{L}{l_{diss}} = Re^{3/4} . \quad (10)$$

При рассмотрении развитой турбулентности числа Рейнольдса настолько велики, что справедливо сильное неравенство $l_{diss} \ll L$. Это неравенство настолько сильное, что существует так называемый *инерционный интервал* размеров вихрей $l_{diss} \ll l \ll L$, в котором эффекты диссипации еще не существенны, но и накачка вихрей за счет обтекания внешних тел уже отсутствует.

Продолжая размерный анализ, который заключается в подборе оптимального набора параметров, от которых зависит спектральная плотность $E(k)$, для диссипативного и инерционного интервала был получен знаменитый "закон 5/3":

$$E(k) = \frac{\bar{\varepsilon}^{2/3} f(kl_{diss})}{k^{5/3}} , \quad Re \gg 1 , \quad kL \gg 1 . \quad (11)$$

Функция $f(kl_{diss})$ является универсальной для всех турбулентных течений, т.е. не зависит ни от внешнего масштаба турбулентности L , ни от геометрии обтекаемых тел. Более конкретное предсказание для спектра было сделано для инерционного интервала, в котором пропадает зависимость от диссипационной длины:

$$E(k) = C_k \frac{\bar{\varepsilon}^{2/3}}{k^{5/3}} , \quad l_{diss} \ll k^{-1} \ll L . \quad (12)$$

Величина C_k называется *константой Колмогорова*, она с хорошей точностью измеряется в экспериментах.

Универсальность "закона 5/3" для спектральной плотности энергии была подтверждена для таких разных турбулентных систем, как атмосферное движение воздуха и морское течение (подробный обзор см. в [11]), лабораторная установка с направленной струей воздуха [12] и даже межзвездный газ [13]. Во всех этих случаях турбулентный режим порождается совершенно различными внешними источниками, а отдельные параметры, такие как величина пульсационной энергии и диссипативная длина, могут отличаться на несколько порядков. Это свидетельствует в пользу высокой степени достоверности результатов теории. Однако, несмотря на свою успешность, теория Колмогорова не может считаться полной и законченной, в первую очередь из-за своего феноменологического начала. Написанные выше гипотезы следуют из интуитивной интерпретации эмпирических наблюдений, поэтому их строгое формальное обоснование является еще одной важной задачей теории.

2.3 Структурные функции и аномальный скейлинг

Важную информацию о статистическом поведении турбулентной системы можно получить из рассмотренных Колмогоровым *структурных функций*:

$$S_n(r) = \langle (\phi_r(\vec{x}_1) - \phi_r(\vec{x}_2))^n \rangle , \quad \vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 , \quad (13)$$

где $\phi_r = (\vec{\phi}, \vec{r})/r$ - проекция скорости $\vec{\phi}$ на направление \vec{r} . Из соображений размерности следует формула

$$S_n(r) = F_n(r/L, r/l_{diss}) (\bar{\epsilon} r)^{n/3} . \quad (14)$$

Принимая гипотезы Колмогорова, можно утверждать, что в инерционном интервале существует конечный предел $F_n(r/L \rightarrow 0, r/l_{diss} \rightarrow \infty) = c_n \neq \infty$. Числовые коэффициенты c_n , предположительно, являются универсальными. Таким образом, для инерционного интервала получаем простой степенной колмогоровский скейлинг:

$$S_n(r) = c_n (\bar{\epsilon} r)^{n/3} . \quad (15)$$

Важно отметить, что этот результат является следствием феноменологических гипотез, получить его напрямую из уравнения Навье-Стокса (1) до сих пор не получилось. Единственным исключением, где это сделать удалось, является случай $n = 3$ (в работе [14] это доказано даже без требования изотропности): здесь колмогоровский скейлинг (15) является точным, соответствующий коэффициент для d -мерного пространства равен $c_n = 12/d(d+2)$.

К настоящему моменту имеется большое количество теоретических и экспериментальных работ, указывающих на наличие отклонений от колмогоровского скейлинга (см. обзор в [15]). Известно, что при увеличении значения n в (15), отклонения усиливаются ([16] [17] [18] [19]). В работе [20] исследовались структурные функции с дробным порядком n в интервале от -1 до 2 - для них также было обнаружено отклонение показателя от $n/3$. Таким образом, в реальных турбулентных системах структурные функции имеют зависимость от r вида

$$S_n(r) \propto (r)^{n/3 - \zeta_n} , \quad (16)$$

где ζ_n - показатели *аномального скейлинга*. Появления отклонений от колмогоровской формулы (15) связана с зависимостью поведения системы в инерционном интервале от деталей устройства на внешнем и диссипативном масштабах. Это противоречит колмогоровским гипотезам в их первоначальной формулировке (которая и была приведена выше) и делает невозможным предельный переход функции F_n в (14) к константе c_n . Причина расхождений заключается в следующем: в гипотезах для выполнения уравнения баланса энергии величина средней мощности притока энергии W из области накачки $k \sim 1/L$ принимается равной средней скорости диссипации кинетической энергии вихрей в тепло $\bar{\epsilon}$ в области $k \sim 1/l_{diss}$ (см. гипотезу 2). Однако на деле, в силу так называемого явления *перемежаемости*, эти величины испытывают редкие, но аномально большие флуктуации, что дает вклад в их средние и корреляционные функции. Здесь оказывается уместным провести аналогию с теорией критических явлений, где флуктуации параметра порядка приводят к отклонениям критических индексов от их значений, предсказанных теорией среднего поля. В данном случае аналогом теории среднего поля выступает теория Колмогорова.

Конкретизируя уравнение (16), влияние значений границ диссипативной области l_{diss} и области накачки L на поведение структурных функций в инерционном интервале проявляется в виде поправочных множителей вида

$$1 + a \left(\frac{l_{diss}}{r} \right)^\omega , \quad l_{diss}/r \ll 1 , \quad (17)$$

$$1 + b \left(\frac{r}{L} \right)^{\alpha_n}, \quad r/L \ll 1. \quad (18)$$

Условия $\omega, \alpha_n > 0$ необходимы, чтобы эти добавки были именно поправками. Теоретическое обоснование аномального скейлинга и расчет его показателей является одной из основных задач теории. Значения индексов α_n в основной модели турбулентности Навье-Стокса неизвестны, так как попытки их расчета встретили непреодолимые на данный момент трудности. Индекса ω был посчитан в бесконечномерной модели турбулентности в трехпетлевом приближении [2] (четырёхпетлевой результат не опубликован), и именно его расчету во многом и посвящена данная работа.

Стоит отметить, что первые успехи в теоретическом обосновании аномального скейлинга были достигнуты в упрощенной модели Крейчнан для турбулентного переноса пассивной примеси. В рамках такой модели были рассчитаны показатели аномального скейлинга в пространствах высокой размерности d , они оказались $\sim 1/d$ ([21] [22]). Таким образом, теория Колмогорова становится точной при $d \rightarrow \infty$. По упомянутому выше сравнению с теорией критических явлений, это аналогично наличию в ней критической размерности $d = 4$, выше которой справедлива теория среднего поля. Это дает надежду на возможность получения аналогичных результатов для модели Навье-Стокса реальной турбулентности.

2.4 Стохастическое уравнение Навье-Стокса

Явление аномального скейлинга является прямым следствием неточности феноменологических гипотез Колмогорова. Вскоре после обнаружения отклонений были предприняты многочисленные попытки модифицировать теорию К41 (например, модификация самого Колмогорова и Обухова - теория К62 [23]) или сформулировать иные подходы, основывающиеся на более специфичных предположениях о процессе переноса энергии по спектру (обзор моделей см. в [10],[11]). Однако все эти теории основываются на феноменологических предположениях, которые не следуют из исходного уравнения Навье-Стокса(1). Глобальной задачей теоретического исследования турбулентности является построение теории, которая основывалась бы исключительно на исходных динамических уравнениях без каких-либо дополнительных предположений. И уже в рамках этой теории представляет интерес строго обосновать отклонения от теории Колмогорова и рассчитать показатели аномального скейлинга.

В качестве микроскопической динамической модели развитой однородной изотропной турбулентности несжимаемой вязкой жидкости обычно выбирается *стохастическое уравнение Навье-Стокса*

$$\partial_t \phi_i = -\partial_i P - \partial_j \phi_i \phi_j + \nu \Delta \phi_i + f_i, \quad (19)$$

где ϕ - пульсационная составляющая реальной скорости, $f_i(\vec{x}, t)$ - поперечная случайная внешняя сила, моделирующая поступление энергии в систему за счет взаимодействия с крупномасштабными вихрями (на практике они возникают, например, при обтекании препятствий). Использование именно случайной величины моделирует хаотичность, которая в реальных системах возникает при переходе в турбулентный режим, а также является следствием рассмотрения непосредственно *однородной* турбулентности без привязки к конкретным начальным и граничным условиям [24]. Для случайной силы принимается простая гауссова статистика с нулевым средним и заданным в фурье-представлении кор-

релятором

$$\langle f_i(\vec{x}, t) f_j(\vec{x}', t') \rangle = \frac{\delta(t - t')}{(2\pi)^d} \int d\vec{k} P_{ij}(\vec{k}) d_f(k) e^{i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')}, \quad (20)$$

где $P_{ij}(\vec{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ - поперечный проектор, $d_f(k)$ - функция накачки, зависящая от $k \equiv |\vec{k}|$ и параметров конкретной модели, d - размерность пространства. Отсутствие корреляций по времени необходимо для сохранения галилеевой инвариантности уравнения относительно временного сдвига - в случае задания конкретной неслучайной силы f она нарушается [15]. Функция накачки непосредственно определяет уже упомянутую среднюю мощность накачки энергии в систему W :

$$W = \frac{d-1}{2(2\pi)^d} \int d\vec{k} d_f(k). \quad (21)$$

3 Квантово-полевая формулировка. Перенормировка модели.

В данной главе будет сформулирован квантово-полевой подход с применением ренорм-группы (РГ) в решении задачи о стохастической модели турбулентности. Впервые он предложен в работе [1], с его помощью было получено строгое теоретическое обоснование колмогоровского спектра (12) и доказано существование инфракрасного скейлинга. Подробное изложение результатов применения РГ-подхода можно найти в работах [24], [25], [26].

3.1 Действие и вид функции накачки

Предложенный в работе [27] MSR-формализм позволяет свести стохастическое дифференциальное уравнение с заданной гауссовой статистикой вида

$$\partial_t \phi(t, \vec{x}) = V(t, \vec{x}; \phi) + \xi(t, \vec{x}), \quad \langle \xi(t, \vec{x}) \xi(t', \vec{x}') \rangle = D_\xi(\vec{x}, \vec{x}') \quad (22)$$

к квантово-полевой модели критической динамики с удвоенным набором полей $\{\phi, \phi'\}$, определяемой действием

$$S(\phi, \phi') = \phi' D_\xi \phi' / 2 + \phi' (-\partial_t \phi + V) \equiv \frac{1}{2} \int d\vec{x} dt \int d\vec{x}' dt' \phi'(t, \vec{x}) D_\xi(t, \vec{x}, t', \vec{x}') \phi'(t', \vec{x}') + \int d\vec{x} dt \phi'(t, \vec{x}) (-\partial_t \phi(t, \vec{x}) + V(t, \vec{x}; \phi)). \quad (23)$$

Для стохастического уравнения Навье-Стокса (19) таким образом получится теория двух поперечных векторных полей с функционалом действия

$$S(\phi, \phi') = \phi' D_f \phi' / 2 + \phi' (-\partial_t \phi - (\phi \partial) \phi + \nu_0 \Delta \phi), \quad (24)$$

где D_f - это коррелятор случайной силы из (20), интегрирования по всем аргументам подразумеваются. Отсутствие продольного вклада ∇P в (24) объясняется поперечностью вспомогательного поля ϕ' .

Далее необходимо конкретизировать вид коррелятора случайной силы D_f , а именно задать явное выражение для функции накачки $d_f(k)$ из (20). Этот выбор неоднозначен, в

работам разных авторов использовались различные представления для нее, выбираемые в зависимости от характера решаемых ими задач. Однако можно выделить два необходимых условия - физическое и техническое, которые необходимо удовлетворить [26]. Физическое соображение состоит в обеспечении инфракрасной накачки энергии в систему, что в духе колмогоровской теории означает поступление энергии за счет взаимодействия с крупномасштабными вихрями. Это означает, что основной вклад в интеграл (21) должен идти от области малых импульсов. При анализе поведения системы в инерционном и диссипационном интервалах $1/L \ll k$ идеализированной накачке бесконечно большими вихрями будет отвечать функция вида

$$d_f(k) = D_0 \delta(\vec{k}) , \quad D_0 = \frac{g_0}{\nu_0^3} , \quad (25)$$

где g_0 - заряд (константа связи), который впоследствии будет являться параметром разложения в теории возмущений. Причина такой записи амплитудного множителя D_0 будет пояснена подробнее в следующей главе. С другой стороны, для применения квантово-полевой РГ-техники необходима *степенная асимптотика* функции накачки в области больших k . Для этого можно воспользоваться степенным представлением дельта-функции

$$\delta(\vec{k}) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} (2\pi)^{-d} \int d\vec{x} e^{-i\vec{k}\vec{x}} x^{-\alpha} . \quad (26)$$

Интеграл в (26) степенным образом зависит от k :

$$\delta(\vec{k}) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} c(\alpha) k^{\alpha-d} . \quad (27)$$

Коэффициент $c(\alpha)$ стремится к 0 при $\alpha \rightarrow 0$, таким образом написанное представление обладает необходимыми свойствами дельта-функции: (27) равно нулю при любых $k \neq 0$, при этом интеграл от него конечен.

Введенный искусственно параметр α является свободным, его физическое значение равно нулю $\alpha_{real} = 0$ (соответствует идеальной ИК-накачке). В теории стохастической турбулентности он аналогичен размерности пространства в теории критических явлений, где $d_{real} = 3$. Там результаты получаются в виде ε -разложений, где ε - отклонение от критической размерности пространства $d_c = 4$: $\varepsilon = 4 - d$. В рассматриваемой теории критическое значение параметра α так же находится из условия обезразмеривания заряда g и равно $\alpha_c = 4$ - при $\alpha < 4$ возникает ИК-проблема. Аналогично вводится параметр ε (двойка выбрана для удобства):

$$4 - \alpha \equiv 2\varepsilon . \quad (28)$$

Подставляя (27)(28) в (25), получаем часто используемый вид функции накачки:

$$d_f(k) = D_0 k^{4-d-2\varepsilon} . \quad (29)$$

Для нее реальным является значение $\varepsilon = 2$, так как для $\varepsilon > 2$ интеграл (21) с (29) не существует из-за ИК-расходимости, а при $\varepsilon < 2$ накачка ультрафиолетовая. Стоит отметить, что в литературе используются и другие представления для функции накачки. Например, в работах [1][28][2] использовались выражения, куда явно входил обратный внешний масштаб $m = 1/L$:

$$d_f(k) = D_0 k^{4-d} (k^2 + m^2)^{-\varepsilon} , \quad (30)$$

$$d_f(k) = D_0 k^{4-d-2\varepsilon} \theta(k - m). \quad (31)$$

Несмотря на то, что подобные представления обеспечивают удобную ИК-регуляризацию, в получающейся таким образом массивной теории крайне затруднен расчет диаграмм методом гиперлогафримова, что и является главной целью данной работы. Поэтому нами использовалась функция накачки вида (29), а регуляризация на малых импульсах обеспечивалась учетом внешнего импульса.

Стоит еще раз отдельно подчеркнуть, что если в теории фазовых переходов параметром разложения является отклонения от критической размерность пространства, при которой перестает работать теория среднего поля, то в теории турбулентности параметр α никакого отношения к размерности пространства не имеет. Он вводится "вручную" для обеспечения степенной асимптотики функции накачки и избавления от ИК-проблемы.

3.2 РГ-анализ модели

Для начала отметим тот факт, что ИК- и УФ-сингулярности (расходимости на малых и больших импульсах соответственно), возникающие при расчете диаграмм, не связаны с характером накачки [24]. Рассмотрим ИК-асимптотику безразмерного параметра разложения $g_0/k^{2\varepsilon}$ для разных значений ε в (29). В интервале $0 < \varepsilon < 2$ накачка является ультрафиолетовой, а при $\varepsilon > 2$ - инфракрасной. Для УФ накачки из (21) имеем $W \simeq D_0 \Lambda^{4-2\varepsilon}$, где $\Lambda = 1/l_{diss}$ - верхний параметр обрезания в импульсном интеграле. Учитывая $\Lambda = W^{1/4} \nu_0^{-3/4}$ (следует из соображений размерности) и определение заряда $g_0 = D_0/\nu_0^3$ (25), получим

$$g_0 \simeq \Lambda^{2\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 2. \quad (32)$$

Для ИК-области накачки по аналогичным соображениям имеем $W \simeq D_0 m^{4-2\varepsilon}$, где $m = 1/L$ - нижний параметр обрезания, откуда следует

$$g_0 = (\Lambda/m)^4 m^{2\varepsilon}, \quad \varepsilon > 2. \quad (33)$$

Параметр разложения $g_0/k^{2\varepsilon}$ в обоих случаях не мал, что говорит о наличии ИК-проблемы. Причем она возникает для любых $\varepsilon > 0$, независимо от того, является ли накачка инфракрасной или ультрафиолетовой. При стремлении $\varepsilon \rightarrow 0$ ИК-проблема ослабляется и при $\varepsilon = 0$ исчезает вовсе. Однако в этот момент теория становится логарифмической, и возникают УФ-сингулярности в виде полюсов по ε . Процедура их устранения является хорошо разработанная техника *мультипликативной ренормировки*, заключающаяся в добавлении в действие контрчленов, устраняющих сингулярности в функциях Грина.

Подставляя (29) в (24), получим исходное неренормированное действие

$$S_0 = g_0 \nu_0^3 \phi' k^{4-d-2\varepsilon} \phi' / 2 + \phi' (-\partial_t \phi - (\phi \partial) \phi + \nu_0 \Delta \phi), \quad (34)$$

где g_0 и ν_0 - затравочные заряд и вязкость соответственно. На его основе можно написать *базовое действие*, где все затравочные параметры заменены на их ренормированные аналоги:

$$S_B = g \mu^{2\varepsilon} \nu^3 \phi' k^{4-d-2\varepsilon} \phi' / 2 + \phi' (-\partial_t \phi - (\phi \partial) \phi + \nu \Delta \phi). \quad (35)$$

Здесь введена *ренормировочная масса* μ - произвольный параметр для обезразмеривания заряда. Известно [26], что анализ УФ-сингулярностей сводится к определению канонических размерностей всех величин, входящих в действие. В моделях критической динамики,

к которой относится и рассматриваемая модель турбулентности, существуют два независимых масштаба: временной масштаб $[T]$ и пространственный масштаб $[L]$. Каноническая размерность произвольного параметра F определяется частотной размерностью d_F^ω и импульсной размерностью d_F^k :

$$[F] \sim [T]^{-d_F^\omega} [L]^{-d_F^k}. \quad (36)$$

Размерности величин определяются из условия безразмерности всех слагаемых в действии с учетом нормировочных соотношений:

$$d_k^k = -d_x^k = 1, \quad d_k^\omega = d_x^\omega = 0, \quad d_\omega^k = d_t^k = 0, \quad d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 0. \quad (37)$$

Зная d_F^ω и d_F^k , можно ввести *полную каноническую размерность*, определяемую как

$$d_F = d_F^k + 2d_F^\omega. \quad (38)$$

Двойка идет от комбинации производной по времени и пространственного лапласиана $\partial_t + \Delta$ в действии. Отметим, что полная размерность в динамической модели соответствует обычной импульсной размерности в статических моделях. Канонические размерности всех параметров и полей в базовом действии (35) приведены в таблице:

F	ϕ	ϕ'	μ	ν_0, ν	g_0	g
d_F^k	-1	$d + 1$	1	-2	2ε	0
d_F^ω	1	-1	0	1	0	0
d_F	1	$d - 1$	1	0	2ε	0

Таблица 1: Полные канонические размерности параметров базового действия

Аналогично можно определить каноническую размерность произвольной 1-неприводимой функции Грина $\Gamma(\Phi) = \langle \Phi \dots \Phi \rangle_{1-irr}$ в произвольной размерности пространства d :

$$d_\Gamma^k = d - \sum_\Phi d_\Phi^k, \quad d_\Gamma^\omega = 1 - \sum_\Phi d_\Phi^\omega, \quad (39)$$

$$d_\Gamma = d_F^k + 2d_F^\omega = d + 2 - \sum_\Phi d_\Phi. \quad (40)$$

Здесь Φ - набор всех полей, входящих в функцию Грина Γ . Значение полной размерности d_Γ при $\varepsilon = 0$ определяет *индекс поверхностной расходимости* δ диаграмм, возникающих в теории возмущений для конкретной Γ :

$$\delta \equiv d_\Gamma \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (41)$$

Поверхностные УФ-расходимости, для избавления от которых в действие вводятся контрчлены, могут присутствовать только в диаграммах с $\delta \geq 0$ [29]. Следует отметить, что

если из всех диаграмм некоторой функции Грина множителями выделяется некоторое число внешних импульсов и частот, то реальный индекс расходимости δ' оказывается меньше δ на соответствующее число.

С учетом приведенных рассуждений, из вида базового действия (35) и Таблицы (1) для рассматриваемой модели можно написать

$$\delta = d + 2 - n_\phi - (d - 1)n_{\phi'} , \quad \delta' = \delta - n_{\phi'} = d + 2 - n_\phi - dn_{\phi'} . \quad (42)$$

Из (42) следует, что поверхностные расходимости есть в трех 1-неприводимых функциях Грина, индексы и соответствующие контрчлены для которых приведены в таблице:

	δ	δ'	контрчлен	наличие в действии	причина
$\langle \phi' \phi \rangle$	2	1	$\phi' \Delta \phi$	да	
			$\phi' \partial_t \phi$	нет	отсутствие ∂
$\langle \phi' \phi \phi \rangle$	1	0	$\phi' (\phi \partial) \phi$	нет	галлилеева инвариантность
$\langle \phi' \phi' \rangle$	2	0	$\phi' \Delta \phi'$	нет	рассматриваем $d > 2$

Таблица 2: УФ-опасные функции Грина и соответствующие контрчлены

Поясним результаты, приведенные в Таблице 2. Контрчлены для каждой расходящейся функции Грина пишутся из условия, что в них содержится столько же полей, сколько в самой этой функции. Также по виду действия (35) заметим, что на каждое ϕ' в диаграммах выделяется ∂ . Из соотношений (42) следует, что разность $\delta - \delta'$ определяет количество производных ∂ в контрчлене. Этот факт запрещает наличие контрчлена $\phi' \partial_t \phi$ для функции $\langle \phi' \phi \rangle$, хотя он и разрешен по соображениям размерности. Также необходимо требовать сохранение исходных симметрий в модели при введении контрчленов в действие. В частности, контрчлен $\phi' (\phi \partial) \phi$ запрещен требованием сохранения галлилеевой инвариантности, которой обладает исходное стохастическое уравнение Навье-Стокса (19), т.к. для этого необходимо одновременное наличие операций ∂_t и $(\phi \partial)$ в контрчленах. Поэтому из отсутствия $\phi' \partial_t \phi$ следует отсутствие $\phi' (\phi \partial) \phi$. Наконец, функция Грина $\langle \phi' \phi' \rangle$ является расходящейся только в случае $d \leq 2$, что не является объектом рассмотрения данной работы.

Таким образом, при $d > 2$ для ренормирования модели необходим только один контрчлен $\phi' \Delta \phi$, добавление которого приводит к *ренормированному действию*

$$S_R = g\mu^{2\varepsilon} \nu^3 \phi' k^{4-d-2\varepsilon} \phi' / 2 + \phi' (-\partial_t \phi - (\phi \partial) \phi + Z_\nu \nu \Delta \phi) , \quad (43)$$

где $Z_\nu = Z_\nu(g, \varepsilon, d)$ - константа ренормировки. Затравочные параметры связаны со своими ренормируемыми аналогами следующим образом:

$$D_0 = g_0 \nu_0^3 = g \mu^{2\varepsilon} \nu^3 , \quad \nu_0 = Z_\nu \nu , \quad g_0 = Z_g g \mu^{2\varepsilon} , \quad Z_g = Z_\nu^{-3} . \quad (44)$$

Поля не ренормируются, то есть $Z_\Phi = 1$. Ренормировка амплитудного множителя D_0 также не требуется из-за отсутствия контрчлена, соответствующего нелокальному вкладу коррелятора случайной силы. Поэтому константа Z_g однозначно выражается через Z_ν . Явный вид константы Z_ν неоднозначен и зависит от выбора схемы вычитаний. В работах [2][30][31] использовалась стандартная схема *минимальных вычитаний* (MS), в которой контрчлены состоят только из полюсных по ε вкладов.

Далее введем ренормированную функцию Грина, которая в общем случае имеет вид

$$\Gamma^R(\{e\}, \mu, \dots) = Z_\Phi^n(\{e\}, \mu) \Gamma(\{e_0\} \dots), \quad (45)$$

где $\{e_0\}$ - набор всех затравочных параметров в действии, а $\{e\}$ - их ренормированные аналоги. Теория ренормировки утверждает, что в перенормируемых моделях константы ренормировки полей Z_Φ и затравочные параметры $\{e_0\}$ (в которые входят соответствующие им константы ренормировки) можно выбрать таким образом, чтобы обеспечить УФ-конечность ренормированной функции W^R при $\varepsilon \rightarrow 0$. В рассматриваемой модели ренормировка полей отсутствует, поэтому ренормированная функция Грина равна исходной с другим выбором аргументов:

$$\Gamma^R(g, \nu, \mu, \dots) = \Gamma(g_0, \nu_0, \dots). \quad (46)$$

Как уже было сказано, константы ренормировки определены неоднозначно, что проявляется в возможности введения размерной ренормировочной массы μ . Обозначим за \tilde{D}_μ операцию $\mu \partial_\mu$ при фиксированных затравочных параметрах g_0, ν_0 и подействуем ею на равенство (46), что даст *основное РГ-уравнение*

$$(\mu \partial_\mu + \beta(g) \partial_g - \gamma_\nu(g) \nu \partial_\nu) \Gamma^R = 0, \quad (47)$$

где РГ-функции (аномальная размерность γ_ν и β -функция) определены как

$$\beta(g, \varepsilon) = \tilde{D}_\mu g, \quad (48)$$

$$\gamma_\nu(g) = \tilde{D}_\mu \ln Z_\nu = \beta(g, \varepsilon) \partial_g \ln Z_\nu. \quad (49)$$

Из тривиальной связи констант ренормировок заряда и вязкости (44) следует простое соотношение

$$\beta(g, \varepsilon) = g(-2\varepsilon + 3\gamma_\nu(g)). \quad (50)$$

РГ-функции уже не содержат УФ-расходимостей и вычисляются через константу Z_ν . Дальнейшая задача заключается в нахождении неподвижных точек, анализируя которые можно предсказать наличие скейлинга в теории. Это было сделано в работе [25], где рассчитанные таким образом критические размерности совпали с феноменологическими предсказаниями теории Колмогорова. Таким образом, РГ-подход позволил обосновать гипотезы теории К41 (в частности, следующий из нее "закон 5/3"(12), основываясь лишь на стохастическом уравнении Навье-Стокса. Важно отметить, что этот результат относится только в главному члену асимптотики функций Грина.

Расчет константы Z_ν , особенно в старших порядках, представляет собой нетривиальную вычислительную задачу, сопряженную с выделением из диаграмм полюсов по ε в явном виде. Поэтому в данной работе использовался описанный в следующей главе подход, позволяющий не вводить константы ренормировок вовсе.

3.3 Определение РГ-функций без констант ренормировки

В работах [32][33] был предложен и успешно применен в модели ϕ^4 метод расчета РГ-функций без введения констант ренормировки. Особенно удобный в численных расчетах, он позволяет вычислять аномальные размерности в виде суммы конечных по ε интегралов. Несмотря на то, что в данной работе диаграммы Фейнмана считаются аналитически, этот подход можно использовать и здесь, так как он избавляет от необходимости выделения в интегралах полюсных частей для расчета констант ренормировки. Следуя работе [34], далее будет описан алгоритм применения этого метода в модели стохастической турбулентности.

Как было показано в Главе 3.2, единственная константа ренормировки Z_ν определяется 1-неприводимой функцией Грина

$$\Gamma_{ij}(\omega, \vec{p}) = \langle \phi'_i \phi_j \rangle_{1-irr} = \Gamma(\omega, p) P_{ij}(\vec{p}), \quad (51)$$

пропорциональной проектору $P_{ij}(\vec{p}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ в силу поперечности полей ϕ и ϕ' . Тогда в силу $P_{ii}(\vec{p}) = d - 1$ для скалярного коэффициента справедливо

$$\Gamma(\omega, p) = \frac{\Gamma_{ii}(\omega, \vec{p})}{d - 1}. \quad (52)$$

Также определим нормированную функцию Грина, равную единице в беспетлевом приближении:

$$\bar{\Gamma}(\omega, p) = \frac{\Gamma(\omega, \vec{p})}{-\nu p^2}. \quad (53)$$

Она представима в виде ряда теории возмущений по переобозначенному заряду u

$$\bar{\Gamma}(\omega, p, \mu) = 1 + \sum_{n \geq 1} u^n \mu^{n\varepsilon} \sum_i \chi_n^{(i)}(\omega, p, \mu), \quad u \equiv \frac{S_d}{(2\pi)^d} g, \quad (54)$$

где суммирование по индексу i ведется по всем n -петлевым диаграммам функции $\bar{\Gamma}$. S_d в выражении для заряда u обозначает площадь единичной d -мерной сферы.

Для ренормированной функции потребуем выполнение равенства

$$\bar{\Gamma}^R \Big|_{\omega=0, p=\mu} = 1, \quad (55)$$

что означает сокращение всех диаграммных вкладов в ренормировочной точке $\omega = 0, p = \mu$ за счет введения контрчленов. Иными словами, это условие однозначно определяет вид константы ренормировки Z_ν и дальнейшую схему вычитаний. Получим основное РГ-уравнение для нормированной функции $\bar{\Gamma}^R$:

$$(\mu \partial_\mu + \beta(g) \partial_g - \gamma_\nu(g) \nu \partial_\nu) \bar{\Gamma}^R = \gamma_\nu(g) \bar{\Gamma}^R. \quad (56)$$

Рассматривая это уравнение в ренормировочной точке (55) и учитывая равенства

$$\partial_\nu \bar{\Gamma}^R \Big|_{\omega=0, p=\mu} = 0, \quad \partial_g \bar{\Gamma}^R \Big|_{\omega=0, p=\mu} = 0, \quad (57)$$

можно получить выражение для аномальной размерности:

$$\gamma_\nu = (\mu \partial_\mu \bar{\Gamma}^R) \Big|_{\omega=0, p=\mu}, \quad (58)$$

Введенный в действие для устранения УФ-расходимостей контрчлен можно учесть с помощью R -операции Боголюбова, которая действует на неренормированную функцию Грина:

$$\bar{\Gamma}^R = R\bar{\Gamma} = (1 - K)R'\bar{\Gamma}. \quad (59)$$

Здесь операция $(1 - K)$ устраняет поверхностные расходимости диаграмм, входящих в $\bar{\Gamma}$, и соответствует вычитанию расходящейся части объекта, к которому она применяется. В общем случае она определена неоднозначно, но условие (55) фиксирует ее явный вид:

$$(1 - K)\bar{\Gamma}(\omega, p, \mu) = \bar{\Gamma}(\omega, p, \mu) - \bar{\Gamma} \Big|_{\omega=0, \mu=p}. \quad (60)$$

Операция R' (неполная R -операция) в (59) устраняет расходимости в подграфах и может быть представлена как

$$R'\bar{\Gamma} = \prod_i (1 - K)_i \bar{\Gamma}, \quad (61)$$

где произведение идет по всем расходящимся подграфам для каждой диаграммы в $\bar{\Gamma}$. Функция $\bar{\Gamma}^R$, получившаяся путем действия R -операции на неренормированную $\bar{\Gamma}$, полностью свободна от расходимостей, что, соответственно, справедливо и для каждой входящей в нее диаграммы по отдельности.

Сделаем несколько замечаний по формуле (58). В силу безразмерности функция $\bar{\Gamma}$ при $\omega = 0$ может зависеть только от безразмерной комбинации p/μ , поэтому операцию $\mu \partial_\mu$ можно заменить на $-p \partial_p$. Обезразмеривание импульсов интегрирования убирает зависимость от p и μ , что позволяет после дифференцирования положить в подинтегральных выражениях $p = 1$. Вычитательный член $\partial_\mu K \bar{\Gamma} = \bar{\Gamma} \Big|_{\omega=0, \mu=p}$ также безразмерен и не зависит от μ , поэтому из (59) следует равенство операций $R = R'$. Тогда формулу (58) можно уточнить:

$$\gamma_\nu = -(p \partial_p R' \bar{\Gamma}) \Big|_{\omega=0, p=1}. \quad (62)$$

Подставляя в полученное выражение разложение функции Грина (54), получим

$$\gamma_\nu = \sum_{n \geq 1} (\gamma_\nu)_n u^n, \quad (\gamma_\nu)_n = p^{-2n\varepsilon} \sum_i (p \partial_p R' \chi_n^{(i)}) \Big|_{\omega=0, p=1}. \quad (63)$$

Данный результат позволяет вычислять аномальную размерность в нужном порядке по u без предварительного расчета константы ренормировки. Все УФ-сингулярности устраняются на уровне отдельных диаграмм путем последовательного добавления в них нужного количества вычитательных вкладов, устраняющих расходимости в подграфах. Отметим, что в данной схеме ренормировки, в отличие от (49), γ_ν зависит от ε . Однако конечный искомый поправочный индекс ω инвариантен относительно выбора ренормировочной схемы.

4 Диаграммная техника

Расчет аномальной размерности (63) предполагает ренормировку и вычисление диаграмм, являющихся коэффициентами в теории возмущения для функции Грина (54). Увеличение точности конечных результатов соответствует вычислению более сложных многопетлевых диаграмм, количество которых растет факториально. Для решения этой задачи необходимо построить систематическую диаграммную технику, которая бы позволила оптимальным образом сопоставлять диаграммам соответствующие им выражения. В данной главе будет приведен во многом основанный на работе [2] подробный обзор построения диаграмм в теории стохастической турбулентности, рассмотрены нетривиальные правила отбора диаграмм в пределе $d \rightarrow \infty$, когда большинство из них оказываются равны нулю, а также представлено стандартное параметрическое представление Фейнмана, необходимое для последующего интегрирования методом гиперлогарифмов.

4.1 Построение диаграмм и правила их отбора при $d \rightarrow \infty$

Введенному действию (34) соответствует набор пропагаторов, записанных во временно-импульсном представлении:

$$\langle \phi_i(t) \phi'_j(t') \rangle = \theta(t - t') \exp(-\nu_0 k^2 (t - t')) P_{ij}(\vec{k}) = \text{---} , \quad (64)$$

$$\langle \phi_i(t) \phi_j(t') \rangle = \frac{d_f(k)}{2\nu_0 k^2} \exp(-\nu_0 k^2 |t - t'|) P_{ij}(\vec{k}) = \text{---} + , \quad (65)$$

$$\langle \phi'_i(t) \phi'_j(t') \rangle = 0 . \quad (66)$$

Взаимодействию (неквадратичная часть действия) в (34) отвечает вклад

$$\phi'(\phi \partial) \phi = \int dt \int d^d x \phi'_i(\phi_j \partial_j) \phi_i = \phi'_i V_{ijs}^S \phi_j \phi_i , \quad (67)$$

что означает наличие в диаграммах вершин с тремя линиями с соответствующим вершинным множителем

$$V_{ijs}^S = i(k_j \delta_{is} + k_s \delta_{ij}) = \text{---} \begin{array}{l} / \\ | \\ \backslash \end{array} , \quad (68)$$

где k - импульсный аргумент поля ϕ' . По виду V_{ijs}^S ясно, что она симметрична по двум полям ϕ . Оказывается удобным представить ее как сумму двум несимметричных частей

$$V_{ijs}^S = V_{ijs}^A + V_{isj}^A = \text{---} \begin{array}{l} / \\ | \\ \backslash \end{array} + \text{---} \begin{array}{l} / \\ \bullet \\ \backslash \end{array} , \quad (69)$$

где перечеркнутая линия - это поле ϕ' , линия с точкой - поле ϕ , на которое действует производная, линия без обозначений - оставшееся поле ϕ . Подобное разбиение приводит к увеличению числа рассматриваемых диаграмм, однако при дальнейшем анализе подинтегральных выражений при $d \rightarrow \infty$ оно оказывается крайне полезным, так как целые

диаграммы оказываются равными нулю, в то время как при использовании симметричной вершины (68) таких упрощений не происходит. В приведенных обозначениях построение диаграмм сводится к всевозможной расстановке перечеркиваний и точек на линиях пропагаторов. Статическая топология диаграмм (соединение линий без значков) полностью эквивалентна модели ϕ^3 . На Рис. 1 приведены все однопетлевые диаграммы.

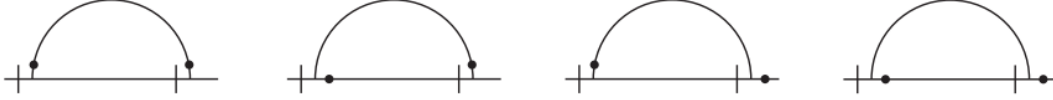


Рис. 1: Все возможные однопетлевые диаграммы. Ненулевой является только первая.

Важным оказывается тот факт, что количество линий $\langle vv \rangle_0$ совпадает с числом петель в диаграмме. Поэтому удобно принять общее правило, согласно которому простые внутренние импульсы, по которым ведется интегрирование, сопоставляются линиям $\langle vv \rangle_0$, а линиям $\langle vv' \rangle_0$ соответствуют линейные комбинации внутренних и внешнего импульса p .

При рассмотрении диаграмм в пределе $d \rightarrow \infty$ многие из них оказываются равными нулю, что существенно уменьшает количество вычислений. Поэтому разработка систематического подхода, позволяющего уже на этапе построения диаграмм определять нулевые и не учитывать их в дальнейших расчетах, является важнейшей задачей при многопетлевых расчетах в исследуемой модели. Приведенные ниже правила обращения в ноль диаграмм, использовавшиеся в данной работе, впервые были подробно исследованы в [2], однако смена ренорировочной схемы (55) приводит к необходимости учета несколько большего количества диаграмм по сравнению с указанной работой.

Из формулы (52) следует, что в пределе больших d вклад диаграммы будет конечным только при условии, что величина $\Gamma_{ij}(\omega, \vec{p})$ будет иметь асимптотику $O(d)$ при $d \rightarrow \infty$. Единственным источником вкладов такого типа является замкнутая цепочка зацепленных δ -функций вида

$$\delta_{ii_1} \delta_{i_1 i_2} \dots \delta_{i_{n-1} i_n} \delta_{i_n j} \delta_{ij}, \quad (70)$$

где δ -функции идут от поперечных проекторов в пропагаторах (65, 64) и от вершинного множителя (68). Последний символ δ_{ij} приходит от поперечной проектора в (52). Заметим, что в диаграммах с несимметричной вершиной (69) может содержаться не более одной такой цепочки. Если условиться, что символ δ_{ii_1} в (70) возникает от левой внешней вершины диаграмм, а символ $\delta_{i_n j}$ - от крайней правой, то из вида вершины (69) следует, что значку i соответствует внешнее поле ϕ без производной, значку j - внешнее поле ϕ' . Тогда второй значок i_1 в δ_{ii_1} соответствует полю ϕ' , которое должно свернуться с полем ϕ в соседней вершине в силу отсутствия пропагатора $\langle \phi' \phi \rangle_0$. Соответственно, следующий символ $\delta_{i_1 i_2}$ возникает от пропагатора $\langle \phi' \phi \rangle_0$, который, в свою очередь, свернется с символом $\delta_{i_2 i_3}$ от вершины, где i_2 соответствует полю ϕ' , а i_3 - полю ϕ без производной. Таким образом, произведение δ -функций (70) соответствует соединяющей внешние вершины цепочке линий $\langle \phi' \phi \rangle_0$, которая называется *хребтом* диаграммы. Отметим, что произведение аналогичного вида может порождаться замкнутой цепочкой пропагаторов $\langle \phi' \phi \rangle_0$, которые не связаны с внешними вершинами. Однако, в силу наличия временной θ -функции в (65),

такой замкнутый контур обнуляет диаграмму при интегрировании по времени и позволяет не учитывать ее в дальнейших расчетах. Каждая 1-неприводимая диаграмма содержит только один хребет. Однако он будет давать необходимый множитель (70) только в том случае, если ни на одно из входящих в него полей ϕ не будет действовать производная. С графической точки зрения это эквивалентно условия отсутствия точек на хребте, что однозначно фиксирует их расстановку и сокращает количество рассматриваемых диаграмм. Например, среди четырех возможных однопетлевых диаграмм на Рис.1 ненулевой является только первая из них.

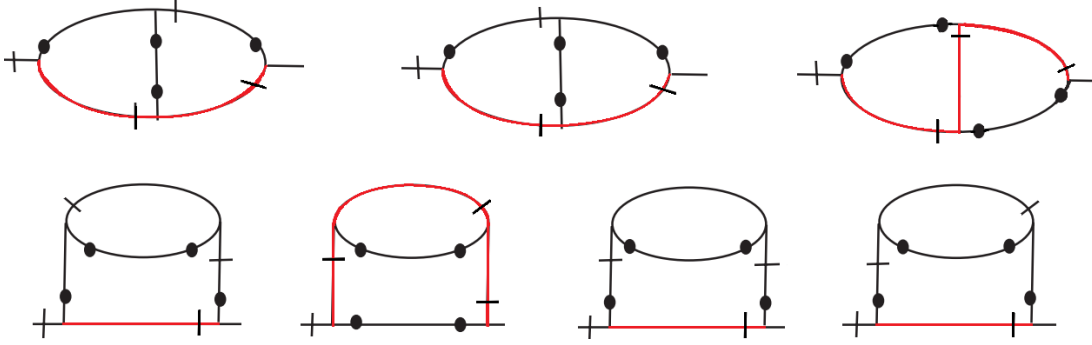


Рис. 2: Все ненулевые двухпетлевые диаграммы. Красным цветом выделен хребет.

Еще одной особенностью рассмотрения предела $d \rightarrow \infty$ является равенство нулю скалярного произведения любых двух независимых векторов при усреднении по единичной сфере, которое возникает в импульсных интегралах при переходе в сферические координаты. В двухпетлевых диаграммах с внутренними импульсами k и q и углом θ между ними будут возникать следующие объекты:

$$\langle (\vec{k}, \vec{q})^{2n} \rangle_S = (kq)^{2n} \langle \cos^{2n}(\theta) \rangle = (kq)^{2n} \frac{(2n-1)!!}{d(d+2)\dots(d+2n-2)} = O(d^{-n}), \quad (71)$$

$$\langle (\vec{k}, \vec{q})^{2n+1} \rangle = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (72)$$

Из формулы выше следует, что угловое усреднение будет вносить поправки порядка $1/d$, которые можно не учитывать при $d \rightarrow \infty$. Аналогичные соображения применимы и к более старшим порядкам теории возмущения, где усредняются комбинации из большего числа скалярных произведений. В частности, в трехпетлевых диаграммах будут возникать выражения уже с тремя импульсами вида $\langle (\vec{k}, \vec{q})^{n_1} (\vec{k}, \vec{l})^{n_2} (\vec{q}, \vec{l})^{n_3} \rangle_S$, соответствующие им формулы с зависимостью от d можно найти в работе [21]. Из них следует равенство нулю подобных вкладов при предельном переходе, что заметно упрощает подынтегральное выражение, а диаграммы, в которых скалярное произведение независимых импульсов выделяется в качестве общего множителя, и вовсе зануляются. Таким образом, в главном приближении $1/d$ -разложения, которое соответствует пределу $d \rightarrow \infty$, подынтегральные выражения не зависят от углов и интегрирование по ним сводится к появлению множителя, равного площади поверхности d -мерной единичной сферы S_d , который входит в переопределение заряда (54).

Процесс отбора диаграмм в произвольном порядке теории возмущений был автоматизирован и позволил составлять подынтегральные выражения и вычислять их только для

заведомо ненулевых диаграмм. При этом их количество значительно меньше их исходного числа: в пределе $d \rightarrow \infty$ среди однопетлевых диаграмм остается 1 ненулевая из 4 возможных, в двух петлях ненулевыми являются 7 из 60 диаграмм, в трех петлях - 104 из 4080, а в четырех - 2201 из 417872.

4.2 Анализ подынтегральных выражений

Покажем на примере одной из двухпетлевых диаграмм, обозначенной χ_2 и изображенной на Рис.3, процесс диаграммной ренормировки и построения соответствующего подынтегрального выражения. Хребет этой диаграммы проходит через верхний подграф и не содержит точек на своих линиях, что означает наличие цепочки δ -символов вида (70) и выполнение одного из необходимых условий ее конечности.

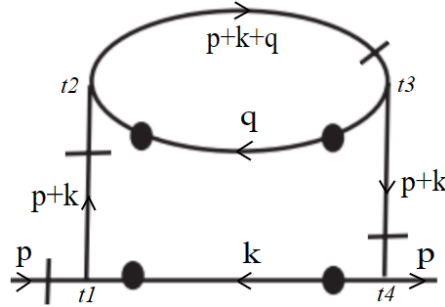


Рис. 3: Пример двухпетлевой диаграммы.

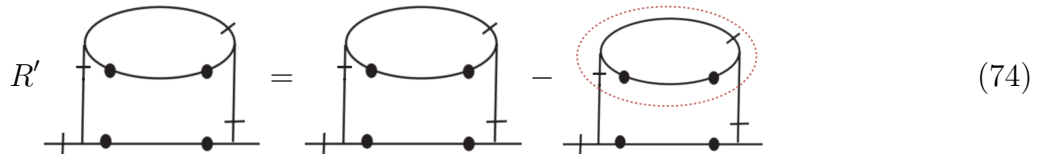
Простые импульсы k, q сопоставим линиям $\langle \phi \phi \rangle$. В диаграмму втекает проходящий по хребту внешний импульс p , импульсы на оставшихся линиях являются линейными комбинациями p, k и q . Диаграмма рассматривается с условием равенства нулю внешней частоты $\omega = 0$, поэтому интегрирование по времени можно проводить с использованием метода *временных версий* [26]: наличие θ -функций в пропагаторах $\langle \phi \phi \rangle$ лимитирует область интегрирования по времени. Ее можно разбить на отдельные интервалы (временные версии), что графически соответствует различному порядку расположения вершин в диаграмме, согласованному с аргументами в θ -функции. В рассматриваемой диаграмме присутствует комбинация $\theta(t_1 - t_2)\theta(t_2 - t_3)\theta(t_3 - t_4)$, которая соответствует единственно возможной области интегрирования, где $t_1 > t_2 > t_3 > t_4$. Однако в других диаграммах число временных версий может быть заметно больше, что сильно увеличивает количество вычислений (по сути, исходный интеграл распадается на сумму отдельных интегралов, число которых равно числу временных версий) и является спецификой динамических задач. Из вида пропагаторов (65,64) следует, что после фиксирования пределов с учетом θ -функций вся зависимость в подынтегральных выражениях от времени находится в показателях экспонент, поэтому интегрирование проводится тривиально. В (73) приведено выражение, получающееся после взятия интегралов по времени. Наличие в диаграмме двух точек на нижней линии (так называемые *рельсы*), что соответствует пропагатору $\langle \phi \phi \rangle$, где на оба поля ϕ действует производная, приводит к свертке внешнего импульса с самим собой и дает множитель p^2 . Однако он, как и возникающий после интегрирования по времени множитель

ν , сокращается со знаменателем в условии нормировки (53) и далее не учитывается.

$$\chi_2(p, \varepsilon) = \frac{1}{4} \int dk \int dq \frac{k^{1-2\varepsilon} q^{1-2\varepsilon} k^2}{(2k^2 + p^2)^2 (2k^2 + 2q^2 + p^2)} \quad (73)$$

Множитель k^2 в числителе, аналогично ненаписанному множителю p^2 , соответствует сворачиванию импульса k самого с собой на второй линии с двумя точками. В полученном выражении был совершен переход к сферическим координатам в импульсных интегралах. Как обсуждалось в Главе 4.2, интегралы по углам сводятся к выделению множителя S_d^2 , который уходит в переопределение заряда в (54). Все скалярные произведения двух разных импульсов можно просто не учитывать в силу их оговоренного зануления при $d \rightarrow \infty$, поэтому во все диаграммы входят только квадраты импульсов.

Выражение (73) содержит два вида УФ-расходимостей при $\varepsilon \rightarrow 0$: подграфную логарифмическую по импульсу q от верхней петли и поверхностную при совместном стремлении $k, q \rightarrow 0$. Из формулы (63) следует, что ренормированный (свободный от расходимостей) вклад такой диаграммы в аномальную размерность γ_ν будет иметь вид $\partial_p R' \chi_2|_{\omega=0, p=1}$. Здесь R' -операция соответствует вычитанию на втекающий в подграф импульс $p+k$, который в соответствующем множителе кладется равным единице, а производная по внешнему импульсу p устраняет поверхностную расходимость. После выполнения обеих операций разность основного и вычитательного вклада будет конечной величиной при $\varepsilon \rightarrow 0$. Графически R' -операцию можно представить следующим образом



где пунктир обозначает подграф, на который делается вычитание. Полный вклад диаграммы дается выражением

$$(\partial_p R' \chi_2(p, \varepsilon)) \Big|_{\omega=0, p=1} = \frac{1}{4} \partial_p \int_0^\infty dk dq \left[\frac{k^{1-2\varepsilon} q^{1-2\varepsilon} k^2}{(2k^2 + p^2)^2 (2k^2 + 2q^2 + p^2)} - \frac{k^{1-2\varepsilon} q^{1-2\varepsilon} (p^2 + k^2)}{(2k^2 + p^2)^2 (2q^2 + 1)} \right] \Big|_{\omega=0, p=1} \quad (75)$$

Разлагая такой объект в ряд по ε , можно получить необходимые коэффициенты для расчета γ_ν в нужном порядке по заряду u . Так как $u \sim \varepsilon$, то из (63) следует, что для расчета $(\gamma_\nu)_1$ необходим учет только главного порядка по ε в однопетлевых диаграммах, для $(\gamma_\nu)_2$ нужен нулевой и первый порядок в однопетлевых и нулевой порядок в двухпетлевых и т.д.

Рассмотрение более старших порядков теории возмущений включает в себя расчет диаграмм с большим количеством расходящихся подграфов, требующих вычитаний. В связи с этим с точки зрения практической реализации оказывается удобным ввести компактный способ операции вычитания на единичном втекающем импульсе, основанный на простом равенстве:

$$\int dk [f(p, k) - f(1, k)] = \int_0^1 da \int dk \partial_a f(p^a, k). \quad (76)$$

Идея состоит во введении так называемых *параметров растяжения* для каждого вычитания на расходящийся подграф. Полученное выражение (75) тогда можно переписать

следующим образом:

$$(\partial_p R' \chi_2(p, \varepsilon)) \Big|_{\omega=0, p=1} = \frac{1}{4} \partial_p \int_0^1 da \int_0^\infty dk dq \partial_a \left[\frac{k^{1-2\varepsilon} q^{1-2\varepsilon} k^2}{(2k^2 + p^2)^2 ((p^2 + 2k^2)^a + 2q^2)} \right] \Big|_{p=1}. \quad (77)$$

Рассмотрим далее одну из ненулевых трехпетлевых диаграмм χ_3 . Комбинация θ -функций, как и в прошлой диаграмме, приводит к одной временной версии с областью интегрирования по времени $t_1 > t_2 > t_3 > t_4 > t_5 > t_6$, где t_1 - время, соответствующее левой внешней вершине, а t_6 - правой внешней вершине.

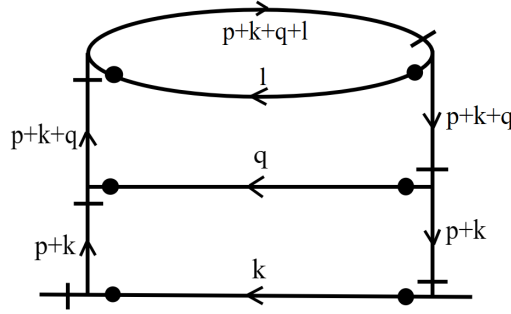


Рис. 4: Пример трехпетлевой диаграммы.

В данной диаграмме имеется два расходящихся подграфа, причем один вложен в другой, поэтому необходимо делать два вычитания - на двухпетлевой подграф с вытекающим импульсом $p + k$ и на петлю с импульсом $p + k + q$.

$$R' = \text{Diagram} - \text{Diagram} - \text{Diagram} \quad (78)$$

Полный ренормированный вклад этой диаграммы в коэффициент $(\gamma_\nu)_3$ при u^3 в разложении аномальной размерности (63) дается выражением

$$(\partial_p R' \chi_3(p, \varepsilon)) \Big|_{\omega=0, p=1} = \frac{1}{8} \partial_p \int_0^1 dadb \int_0^\infty dk dq \partial_a \partial_b \left[\frac{k^{1-2\varepsilon} q^{1-2\varepsilon} l^{1-2\varepsilon} (p^2 + k^2) ((p^2 + k^2)^a + q^2)}{(2k^2 + p^2)^2 ((p^2 + 2k^2)^a + 2q^2)^2 (((p^2 + 2k^2)^a + 2q^2)^b + 2l^2)} \right], \quad (79)$$

где параметр растяжения a соответствует большому подграфу, а параметр b - петле.

Описанный алгоритм построения подынтегральных выражений необходимо проводить для всех ненулевых диаграмм с заданным количеством петель. В данной работе этот процесс был автоматизирован, что позволяет получать выражения вида (75, 79) для всех n -петлевых диаграмм.

4.3 Параметрическое представление Фейнмана

Для аналитического интегрирования методом гиперлогарифмов выражений вида (75, 79) необходимо перейти к *фейнмановскому представлению*. Его суть заключается в замене

интегралов по импульсам на интегралы по новым параметрам Фейнмана, что позволяет работать с выражениями в более удобной для вычислений форме.

Сначала рассмотрим общепринятый вид этого представления: подынтегральное выражение не содержит множителей в числителе (в нашем случае они есть), а знаменатель представляет из себя произведение n пропагаторов A_i , возведенных в степени $\lambda_i > 0$ (в нашем случае множители в знаменателе появляются от интегрирования пропагаторов по времени):

$$I_n = \int d\vec{k}_1 \dots \int d\vec{k}_n \prod_{i=1}^n A_i^{-\lambda_i}. \quad (80)$$

Это произведение можно свести к единой квадратичной форме путем интегрирования по вспомогательным параметрам Фейнмана:

$$A_1^{-\lambda_1} \dots A_n^{-\lambda_n} = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^n \lambda_i)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 \dots \int_0^1 du_1 \dots du_n \frac{\delta(\sum_{i=1}^n u_i - 1) \prod_{i=1}^n u_i^{\lambda_i - 1}}{[\sum_{i=1}^n A_i u_i]^{\sum_{i=1}^n \lambda_i}} \quad (81)$$

Вся зависимость от импульсов находится в знаменателе в квадратичной форме, которая в общем случае имеет вид $\sum_{i=1}^n A_i u_i = v_{ij} k_i k_j + a_i k_i + c$. Интеграл от ее степени дается известной формулой

$$\int \dots \int \frac{d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_n}{(\sum_{i=1}^n A_i u_i)^\alpha} = \frac{\pi^{dl/2} \Gamma(\alpha - dl/2) (\det v)^{-d/2}}{\Gamma(\alpha) [c - (v^{-1})_{is} (\vec{a}_i, \vec{a}_s)]^{\alpha - dl/2}}, \quad (82)$$

где $\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ для (81). Для применения фейнмановского представления в рассматриваемой модели (к интегралам вида (79)) необходимо уточнить два момента.

Во-первых, в формуле (80) предполагается интегрирование по векторным импульсам, а в (82) размерность пространства и вовсе входит в конечное выражение в явном виде. Однако в Главе 4.1 было замечено, что вся зависимость интегралов от d факторизуется в виде множителя S_d , который учитывается при переопределении заряда. Таким образом, подынтегральное выражение и вовсе не зависит от d , поэтому для применимости приведенных формул было предложено ввести *эффективную размерность пространства D* :

$$D = 2 - 2\varepsilon. \quad (83)$$

Так как зависимости от углов в подынтегральном выражении нет, то одномерные интегралы по k_i можно интерпретировать как D -мерные, если каждый интеграл разделить на S_D . Выбор выражения (83) связан с тем, что в интеграле на каждый дифференциал dk_i всегда приходится множитель $k_i^{1-2\varepsilon}$, который выступает в качестве якобиана при переходе к сферической системе координат: $k^{1-2\varepsilon} dk = k^{D-1} dk$. После этого "трюка" становится возможным использование формулы (82), где в конечном ответе все искусственно введенные D выразятся через ε .

Во-вторых, из-за наличия рельсов (цепочка линий с двумя точками на концах) в диаграммах в числителе возникают квадраты импульсов, которые свернулись сами с собой. Стандартная формула (81) не предполагает наличие множителей в числителе подынтегрального выражения, однако несложным путем ее можно модифицировать для этого. Пусть в числителе стоит множитель q^2 . Введем еще один дополнительный параметр \tilde{u} , по

которому не будет вестись интегрирование, но будет взята производная, а в конце следует положить \tilde{u} равным нулю. Тогда оказывается справедливым равенство:

$$q^2 A_1^{-\lambda_1} \dots A_n^{-\lambda_n} = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^n \lambda_i)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\lambda_i)} \left((-\partial_{\tilde{u}}) \int_0^1 \dots \int_0^1 du_1 \dots du_n \frac{\delta(\sum_{i=1}^n u_i - 1) \prod_{i=1}^n u_i^{\lambda_i - 1}}{[\sum_{i=1}^n A_i u_i + q^2 u]^{\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1}} \cdot \frac{1}{(\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1)} \right) \Big|_{\tilde{u}=0}. \quad (84)$$

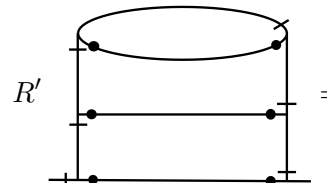
Сокращая множители по известной рекуррентной формуле для Γ -функции, получим аналог формулы (82) с учетом одного множителя в числителе:

$$\begin{aligned} & \int \dots \int d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_l q^2 A_1^{-\lambda_1} \dots A_n^{-\lambda_n} = \\ & = \frac{\pi^{dl/2} \Gamma(\tilde{\alpha} - dl/2)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\lambda_i)} \left((-\partial_u) \int_0^1 \dots \int_0^1 du_1 \dots du_n \frac{\delta(\sum_{i=1}^n u_i - 1) \prod_{i=1}^n u_i^{\lambda_i - 1} (\det \tilde{v})^{-d/2}}{[c - (\tilde{v}^{-1})_{is}(\vec{a}_i, \vec{a}_s)]^{\tilde{\alpha} - dl/2}} \right) \Big|_{u=0}, \end{aligned} \quad (85)$$

где $\tilde{\alpha} = \sum_{i=1}^n \lambda_i - 1$ и $\tilde{v}_{is}(k_i, k_s) = v_{is}(k_i, k_s) + \tilde{u}q^2$. Для подынтегрального выражения, содержащего несколько множителей B_1, \dots, B_m в числителе, справедлива общая формула:

$$\begin{aligned} & A_1^{-\lambda_1} \dots A_n^{-\lambda_n} B_1 \dots B_m = \\ & \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^n \lambda_i)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\lambda_i)} (-\partial_{\tilde{u}_1}) \dots (-\partial_{\tilde{u}_m}) \int_0^1 \dots \int_0^1 du_1 \dots du_n \frac{\delta(\sum_{i=1}^n u_i - 1) \prod_{i=1}^n u_i^{\lambda_i - 1}}{(\sum_{i=1}^n A_i u_i + \sum_{i=1}^m B_i u'_i)^{\sum_{i=1}^n \lambda_i - m} \prod_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n \lambda_i - j)} \Big|_{\tilde{u}_1=0, \dots, \tilde{u}_m=0} \end{aligned} \quad (86)$$

Введенные формулы позволяют переходить к фейнмановскому представлению в получающихся в теории интегралах. Сначала программно генерируются выражения с растяжениями вида (76), затем по ним явно пишутся основной и все вычитательный вклады, каждый из которых переводится в представление Фейнмана. Отметим, что отсутствие скалярных произведений независимых импульсов приводит к существенному упрощению в силу диагонализации матрицы v_{is} . Для примера приведем итоговое выражение для рассмотренной в предыдущей главе трехпетлевой диаграммы (79):



$$\begin{aligned} & = \frac{1}{8} \int_0^1 dadb \int_0^\infty dkdq \partial_a \partial_b \left[\frac{k^{1-2\varepsilon} q^{1-2\varepsilon} l^{1-2\varepsilon} (p^2 + k^2) ((p^2 + k^2)^a + q^2)}{(2k^2 + p^2)^2 ((p^2 + 2k^2)^a + 2q^2)^2 ((p^2 + 2k^2)^a + 2q^2)^b + 2l^2} \right] = \\ & = \frac{\Gamma(3\varepsilon) \Gamma(1 - \varepsilon)^3}{64} (-\partial_{u_6}) (-\partial_{u_7}) \int_0^1 du_1 du_2 du_3 du_4 du_5 \delta(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 - 1) \times \\ & \quad \times \left[\frac{(2u_3(2u_2 + 2u_3 + 2u_4 + u_6)(2u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 + 2u_5 + u_6 + u_7))^{\varepsilon-1}}{(p^2(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7))^{3\varepsilon}} - \right. \\ & \quad - \frac{(2u_3(2u_2 + 2u_4 + u_6)(2u_1 + 2u_2 + 2u_4 + 2u_5 + u_6 + u_7))^{\varepsilon-1}}{(p^2 u_1 + p^2 u_2 + p^2 u_4 + p^2 u_5 + p^2 u_6 + p^2 u_7 + u_3)^{3\varepsilon}} - \\ & \quad - \frac{(2u_3(2u_1 + 2u_5 + u_7)(2u_2 + 2u_3 + 2u_4 + u_6))^{\varepsilon-1}}{(p^2 u_1 + p^2 u_5 + p^2 u_7 + u_2 + u_3 + u_4 + u_6)^{3\varepsilon}} + \\ & \quad \left. + \frac{(2u_3(2u_1 + 2u_5 + u_7)(2u_2 + 2u_4 + u_6))^{\varepsilon-1}}{(p^2 u_1 + p^2 u_5 + p^2 u_7 + u_2 + u_3 + u_4 + u_6)^{3\varepsilon}} \right]. \end{aligned} \quad (87)$$

5 Аналитическое интегрирование

Для получения аналитических результатов был использован относительно новый способ параметрического интегрирования с помощью гиперлогарифмов, впервые комплексно исследованный в работе [35]. За последние десять лет вышло большое количество работ, успешно применяющих этот метод в различных задачах. Например, с его помощью был получен шестипетлевой результат для РГ-функций в модели ϕ^4 [36][37]. Его суть заключается в последовательном сведении подынтегрального выражения многократного интеграла к виду гиперлогарифма:

$$G(\sigma_1, \dots, \sigma_\omega) \equiv \int_0^z \frac{dz_1}{z_1 - \sigma_1} \int_0^{z_1} \frac{dz_2}{z_2 - \sigma_2} \dots \int_0^{z_{\omega-1}} \frac{dz_\omega}{z_\omega - \sigma_\omega}. \quad (88)$$

Подробное описание метода можно найти в [38][39]. В данной работе была использована его реализация *HyperInt* в виде пакета для системы *Maple*.

Для его использования необходимо представить искомый интеграл в фейнмановском или швингеровском α -представлении. Это, как и все предыдущие этапы вроде построения и отбора диаграмм, было реализовано на *Python*, полученные выражения затем передаются для интегрирования в *Maple*.

Отличительной особенностью пакета *HyperInt* является возможность получения "осмысленных" результатов при интегрировании расходящихся объектов. Например, в формуле (87) представлена сумма основного и трех вычитательных вкладов для трехпетлевой диаграммы. Важно, что только их сумма является конечным объектом (после действия операции ∂_p), в то время как по отдельности все эти вклады расходятся. При численных расчетах авторам предыдущих работ по этой тематике приходилось объединять всю сумму в одно подынтегральное выражение, являющееся сложным объектом для численного интегрирования. Аналитический же расчет стандартными методами и вовсе перестает работать в трехпетлевых интегралах. *HyperInt* может выделять конечную часть у расходящихся интегралов. Поэтому на вход можно подавать не одно большое конечное выражение, а четыре более простых расходящихся вклада. Правильный ответ для всей ренормированной диаграммы получится только при суммировании всех вкладов, по отдельности результаты интегрирования расходящихся слагаемых смысла не имеют.

Для примера приведем аналитические выражения рассмотренных в Главе 4.2 двух- и трехпетлевой диаграмм, необходимых для вычисления аномальной размерности γ_ν в третьем порядке по ϵ (63):

$$\left(\partial_p R' \left(\text{Diagram} \right) \right) \Big|_{\omega=0, p=1} = \frac{1}{64} + \left(\frac{1}{32} \ln 2 + \frac{1}{64} \zeta_2 + \frac{1}{32} \right) \epsilon + \left(\frac{1}{32} \ln 2 \zeta_2 - \frac{1}{16} \ln 2 + \frac{1}{32} \ln^2 2 + \frac{1}{32} - \frac{1}{32} \zeta_3 + \frac{1}{16} \zeta_2 \right) \epsilon^2. \quad (89)$$

$$\left(\partial_p R' \left(\text{Diagram} \right) \right) \Big|_{\omega=0, p=1} = -\frac{3}{2048} + \left(\frac{5}{1024} - \frac{1}{1024} \zeta_2 - \frac{9}{2048} \ln 2 + \frac{1}{1024} \zeta_3 \right) \epsilon. \quad (90)$$

Проводя аналогичный расчет для всех остальных диаграмм по формуле (63) получим аномальную размерность. Воспользовавшись тривиальной связью РГ-функций (50), можно

рассчитать β -функцию, найти неподвижную точку и получить аналитическое значение поправочного индекса:

$$\omega = \beta'(g^*) = 2\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon^2 + \frac{10}{9}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \quad (91)$$

Несмотря на то, что аналитические ответы для отдельных диаграмм представляют собой комбинацию рациональных дробей, ζ -функций разного порядка и натуральных логарифмов двойки (ζ и $\ln 2$ могут быть возведены в степени), конечный ответ представлен обычной дробью, а все остальные вклады сократились.

6 Заключение

В данной работе был проведен аналитический трехпетлевой расчет поправочного индекса ω , определяющего зависимость структурных функций от диссипативного масштаба в модели развитой турбулентности. Главным результатом является первое успешное применение метода аналитического интегрирования с помощью гиперлогарифмов в динамической квантово-полевой задаче. Для этого была выбрана схема ренормировки на единичном импульсе, до этого не применявшаяся в этой задаче. Также в соответствии с новой ренормировочной схемой были скорректированы правила отбора значащих диаграмм, предложенные в работе [2]. Все этапы от построения диаграмм до получения их аналитических ответов автоматизированы и обобщены на случай n -петлевых расчетов. Полученный таким образом трехпетлевой ответ согласуется с численным результатом, рассчитанным в другой ренормировочной схеме, что подтверждает его правильность. Принципиальных трудностей в четырехпетлевых вычислениях нет, однако результат не согласуется с численным расчетом Ю.Кириенко [personal communication], что свидетельствует о наличии ошибки в программе. Следует отметить, что ручная проверка большого числа четырехпетлевых диаграмм не выявила проблемы, поэтому написанный алгоритм в целом не является проблемным, но содержит в себе пока что ненайденный изъян, влияющий на правильность общего ответа.

Дальнейшая деятельность, в первую очередь, сводится к поиску ошибки в программе. После ее устранения следующей задачей будет аналитический расчет индекса ω в четырех- и пятипетлевом приближении. Получение большого количества аналитических результатов позволит сфокусироваться на проблеме поиска нулевых комбинаций среди полученных ответов и, при наличии успехов, продвинуться в понимании механизма редукции.

Список литературы

- [1] Martin P. C. DeDominicis C. Energy spectra of certain randomly-stirred fluids. *Phys. Rev. A*, 19:419, 1979.
- [2] Goldin P.B. Kim. T. L. Kompaniets M. V. Adzhemyan L. Ts., Antonov N. V. Renormalization group in the theory of turbulence: Three-loop approximation as $d \rightarrow \infty$. *Theoret. and Math. Phys.*, 158:391–405, 2009.
- [3] Т. Л. Ким Ю. В. Кириенко. Стохастическая модель турбулентности: упрощение диаграммной техники в пространствах высоких размерностей. *Вестник СПбГУ*, 3:151–156, 2016.
- [4] Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности. *Докл. АН СССР*, 44:339–342, 1944.
- [5] Hopf E. A mathematical example displaying features of turbulence. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1:303–322, 1948.
- [6] Takens. F. Ruelle D. On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.*, 20:167–192, 1971.
- [7] Колмогоров А. Н. Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности. *Докл. АН СССР*, 32:19–121, 1941.
- [8] Колмогоров А. Н. К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости. *Докл. АН СССР*, 31:538–541, 1941.
- [9] Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. *Докл. АН СССР*, 30:299–303, 1941.
- [10] Frisch U. Turbulence: The legacy of A. Kolmogorov. *Cambridge University Press*, 1995.
- [11] Яглом А.М. Монин А.С. Статистическая гидромеханика. *М.: Наука*, 2, 1996.
- [12] Schlander R. Yaacob M., Buchhave P., and Velte C. Experimental evaluation of Kolmogorov’s-5/3 and 2/3 power laws in the developing turbulent round jet. *J. Adv. Res. Fluid Mech. Therm. Sci.*, 45:14–21, 2018.
- [13] Spangler S. R. Armstrong J. W., Rickett B. J. Electron density power spectrum in the local interstellar medium. *Astrophys. J.*, 443:209, 1995.
- [14] Tanveer S. Nie Q. A note on third-order structure functions in turbulence. *Proc. R. Soc. Lond*, 455:1615–1635, 1999.
- [15] Перекалин М. М. Антонов Н.В. Аномальный скейлинг в теории развитой турбулентности. *Вестник СПбГУ*, 4, 2005.
- [16] Herweijer J. Van De Water W. A note on third-order structure functions in turbulence. *J. Fluid Mech.*, 387:3–37, 1999.

- [17] Gagne Y. Hopfinger E. Antonia R. Anselmet, F. High-order velocity structure functions in turbulent shear flows. *Theoret. and Math. Phys.*, 140:63–89, 1984.
- [18] Gagne Y. Hopfinger E. Antonia R. Anselmet, F. Measurement of the scaling of the dissipation at high reynolds numbers. *Phys. Rev. E*, 50:3693, 1994.
- [19] A. Arneodo, C. Baudet, F. Belin, R. Benzi, B. Castaing, B. Chabaud, R. Chavarria, S. Ciliberto, R. Camussi, F. Chillà, B. Dubrulle, Y. Gagne, B. Hebral, J. Herweijer, M. Marchand, J. Maurer, J. F. Muzy, A. Naert, A. Noullez, J. Peinke, F. Roux, P. Tabeling, W. van de Water, and H. Willaime. Structure functions in turbulence, in various flow configurations, at reynolds number between 30 and 5000, using extended self-similarity. *EPL*, 34:411, 1996.
- [20] Kurien S. Sreenivasan K. R. Taylor M. A. Chen S. Y., Dhruva B. Anomalous scaling of low-order structure functions of turbulent velocity. *J. Fluid Mech.*, 533:183–192, 2005.
- [21] Barinov V. A. Kabrits Y. S. Vasil’ev A. N. Adzhemyan L. Ts., Antonov N. V. Calculation of the anomalous exponents in the rapid-change model of passive scalar advection to order epsilon(3). *Phys. Rev. E*, 64:056306, 2001.
- [22] Novikov S. V. Adzhemyan, L. Ts. Anomalous scaling in the model of turbulent advection of a vector field. *Theor. Math. Phys.*, 146:393–410, 2006.
- [23] Kolmogorov A. N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 13:82–85, 1962.
- [24] L. Ts. Vasiliev A. N. Antonov N. V, Adzhemyan. The field theoretic renormalization group in fully developed turbulence. *Gordon and Breach, Amstrdam*, 1999.
- [25] Васильев. А. Н. Аджемян Л. Ц., Антонов Н. В. Квантово-полевая ренормализационная группа в теории развитой турбулентности. *УФН*, 166:12:1257–1284, 1996.
- [26] A. N. Vasil’ev. *Quantum field renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics*. Chapman & Hall/CRC, April 2004. originally published in Russian in 1998 by St. Petersburg Institute of Nuclear Physics Press; translated by Patricia A. de Forcrand-Millard.
- [27] Rose H. A. Martin P.C., Siggia E. D. Statistical dynamics of classical systems. *Phys.Rev.*, A8:423, 1973.
- [28] Васильев. А. Н. Аджемян Л. Ц., Антонов Н. В. Проблема инфракрасных расходимостей и ренормгруппа в теории развитой турбулентности. *Журн. Эксп. Теор. Физ.*, 95:1272–1288, 1989.
- [29] Ширков Д.В. Боголюбов Н.Н. Введение в теорию квантовых полей. *М.:Наука*, 1984.
- [30] Kompaniets M. V Vasil’ev A. N. Adzhemyan L. Ts., Antonov N. V. Renormalizationgroup approach to the stochastic navier-stokes equation: Two-loop approximation. *Int. J. Mod. Phys. B*, 17:2137–2170, 2003.

- [31] Kompaniets M. V Vasil'ev A. N. Adzhemyan L. Ts., J. Honkoniemi. Improved ϵ -expansion for three dimensional turbulence: Two-loop renormalization near two dimensions. *Phys. Rev. E*, 71:036305, 2005.
- [32] Novikov S. V. Sazonov V. K. Adzhemyan L. Ts., Kompaniets M. V. Representation of the β -function and anomalous dimensions by nonsingular integrals: Proof of the main relation. *Theor. Math. Phys.*, 175:717–726, 2013.
- [33] Kompaniets M. V Adzhemyan L. Ts. Five-loop numerical evaluation of critical exponents of the ϕ^4 theory. *J. Phys. Conf. Ser.*, 523:012049, 2014.
- [34] Kompaniets M. V Sazonov V. K. Adzhemyan L. Ts., Kim T. L. Renormalization group in the infinite-dimensional turbulence: determination of the β -functions without renormalization constants. *Nanosystems: Phys. Chem. Math.*, 6:461–469, 2015.
- [35] F. C. S. Brown. The massless higher-loop two-point function. *Commun. Math. Phys.*, 287:925–958, 2009.
- [36] E. Panzer M. V. Kompaniets. Renormalization group functions of ϕ^4 theory in the \overline{MS} -scheme to six loops. *PoS Proc. Sci.*, 2017.
- [37] E. Panzer M. V. Kompaniets. Minimally subtracted six-loop renormalization of ϕ^4 theory and critical exponents. *Physical Review D*, 96(3):036016, 2017.
- [38] E. Panzer. Feynman integrals and hyperlogarithms. *PhD thesis, Humboldt-Universität zu Berlin*, 2014.
- [39] F. C. S. Brown. Algorithms for the symbolic integration of hyperlogarithms with applications to feynman integrals. *Computer Physics Communications*, 188:148–166, 2015.