

Санкт-Петербургский государственный университет

Кривороль Вячеслав Александрович
Выпускная квалификационная работа

Кинетические коэффициенты в формализме временных функций
Грина при конечной температуре

Уровень образования: магистратура

Направление 03.04.02 «Физика»

Образовательная программа ВМ.5511.2020 «Физика»

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор кафедры
статистической физики СПбГУ,
Налимов Михаил Юрьевич

Рецензент:

к.ф.-м.н, внс Санкт-Петербургского
отделения Математического Института
им. В.А.Стеклова РАН,
Деркачев Сергей Эдуардович

Оглавление

Введение	3
Временные функции Грина при конечной температуре	6
Пинчевые сингулярности и диссипация	10
Заключение	15
Приложение А. Анализ асимптотики $\alpha \rightarrow 0$	16
Приложение В. Коэффициенты разложения фейнмановских диаграмм по частоте.	18
Список литературы	20

Введение

Теоретическое описание феномена диссипации и динамики флуктуаций в квантовых равновесных и неравновесных многочастичных системах является интересной и важной проблемой в современной экспериментальной и теоретической физике [1–4]. Физически природа диссипации связана с наличием взаимодействия как внутри системы, так и с её окружением. Однако, чтобы полностью понять этот феномен, требуется более детальное теоретическое рассмотрение. Исторически, первые попытки описать диссипацию из первых принципов квантовой механики, по видимому, были предприняты в работе Фейнмана и Вернона [5; 6]. Предложенный подход заключался в помещении системы (в простейшем случае с конечномерным гильбертовым пространством) в модельное окружение, например в систему гармонических осцилляторов [7]. В ряде случаев эффекты диссипации в системах с модельным окружением могут обсуждаться путём точного решения модели. Дальнейшие исследования в этой области привели к созданию теории *открытых квантовых систем* [8]. Основным инструментом данного формализма является так называемое *уравнение Линдбланда* [9–11]. Оно представляет собой обобщение стандартного уравнения Неймана для матрицы плотности на случай марковской диссипативной и негамильтоновой эволюции [12]

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H},\hat{\rho}] + \frac{1}{2\hbar}\sum_{k=1}^{\infty}\left([\hat{V}_k\hat{\rho},\hat{V}_k^\dagger] + [\hat{V}_k,\hat{\rho}\hat{V}_k^\dagger]\right),$$

где $\hat{\rho}$ – матрица плотности, \hat{H} – гамильтониан системы. В данное уравнения входят дополнительные к уравнению Неймана слагаемые с некоторыми операторами \hat{V}_k , моделирующие взаимодействие системы и окружения. Стандартными проблемами данного формализма являются выбор конкретного вида операторов \hat{V}_k , модифицирующих для различных моделей уравнение Неймана и сложность микроскопического обоснования данного выбора¹.

Как известно, диссипация стандартно описывается в терминах кинетических коэффициентов. Стандартным результатом о микроскопической структуре кинетических коэффициентов являются формулы Грина – Кубо [1; 2; 17; 18]. Корреляторы, возникающие в данном подходе, имеют довольно сложную структуру, и их вычисление доступно преимущественно в рамках компьютерного моделирования [19–21]. Подробный вывод общей формулы для кинетических коэффициентов линейной гидродинамики в формализме проектирующих операторов Мори можно найти в [1; 2]. Обобщение метода Мори на нелинейный случай проведено в работе [22], однако такой подход не получил широких приложений. Также заметим, что методы теории линейного отклика (к которым, в частности, относятся формулы типа Грина – Кубо) применительно к квантовым системам используют метод аналитического продолжения температурных функций Грина [23], однако в сложных ситуациях использование чисто температурных методов кажется менее прозрачным по сравнению с временными функциями Грина [24], непосредственно учитывающих динамику.

¹ Должна существовать, по видимому, непосредственная связь между задачей выбора набора операторов \hat{V}_k и формализмом, разрабатываемым в рамках данной работы [13–16].

Мы же будем интересоваться возможностью построения гидродинамики из микроскопического гамильтониана, используя квантово-полевые методы [25]. Мотивацией к этому служила старая проблема критической динамики о выборе правильной системы феноменологических гидродинамических моделей (наиболее известно семейство моделей $A, B, C \dots$), описывающей релаксацию параметра порядка и по которой возможно вычисление динамического критического индекса [26]. Критическая динамика, как известно, обладает куда меньшей универсальностью, чем критическая статика². Наличие большого количества классов универсальности приводит к тому, что зачастую выбор между различными феноменологическими моделями довольно сложен, и встаёт вопрос, можно ли построить искомую модель, исходя из микроскопических соображений. Наиболее общий вид системы мезоскопических гидродинамических уравнений, описывающей релаксацию параметра порядка и согласованной с уравнением Фоккера-Планка, может быть записан как [26]

$$\partial_t \varphi_a = (\alpha_{ab} + \beta_{ab}) \frac{\delta S^{st}}{\delta \varphi_b} + \zeta_a. \quad (1)$$

Здесь $\{\varphi_a\}$ – набор мягких мод (в том числе поля параметра порядка), элементы симметричной матрицы α_{ab} называются коэффициентами Онзагера (или кинетическими коэффициентами), элементы антисимметричной матрицы β_{ab} называются межмодовыми связями, S^{st} – статическое действие, ζ_a – гауссов случайный шум $\forall a$. Проблему выбора гидродинамических уравнений удалось разрешить из микроскопических соображений, например, в работе [27] для λ -перехода в Бозе-системе. Было доказано, что правильной гидродинамической моделью в этом случае является³ самая простая модель A^4 ,

$$\partial_t \varphi = \lambda \left[\Delta \varphi - \tau \varphi - \frac{g}{6} \varphi^3 \right] + \zeta, \quad (2)$$

где φ – линейная комбинация полей параметра порядка, λ – кинетический коэффициент, статическим действием является действие модели φ^4 . До этого феноменологические соображения указывали на необходимость использования в этой ситуации куда более сложной модели F [28; 29]

$$\begin{aligned} \partial \psi &= \lambda(1 + ib) \left[\Delta \psi - \frac{g_1}{3} (\psi^+ \psi) \psi + g_2 m \psi \right] + i \lambda g_3 \psi [g_2 \psi^+ \psi - m] + \zeta_\psi, \\ \partial_t \psi^+ &= \lambda(1 - ib) \left[\Delta \psi^+ - \frac{g_1}{3} (\psi^+ \psi) \psi^+ + g_2 m \psi \right] - i \lambda g_3 \psi^+ [g_2 \psi^+ \psi - m] + \zeta_{\psi^+}, \\ \partial_t m &= -\lambda u \Delta [g_2 \psi^+ \psi - m] + i \lambda g_3 [\psi^+ \Delta \psi - \psi \Delta \psi^+] + \zeta_m \end{aligned} \quad (3)$$

или модели E , являющуюся её частным случаем $b = g_2 = 0$. Здесь ψ и ψ^+ – комплексные поля параметра порядка, поле m отвечает за флуктуации плотности и температуры, g_i, b и u – константы связи, λ – коэффициент Онзагера.

²То есть для моделей с одинаковыми статическими индексами динамические индексы могут различаться.

³С точностью до линейной замены полей.

⁴Похожий анализ для спиновых систем на кубической решётке проводился в работе [16].

Видно, что использование микроскопических методов позволило существенно продвинуться в задаче о выборе правильной системы уравнений, описывающей критическую динамику. В связи с этим возникает идея отказаться от специфики критического поведения и поставить задачу о выводе из микроскопического гамильтониана гидродинамических уравнений для произвольных термодинамических состояний. Это могло бы позволить продвинуться в проблемах обоснования диссипации и вычисления кинетических коэффициентов в многочастичных системах из первых принципов. Так как легче работать с равновесными состояниями, то под гидродинамическими уравнениями естественно понимать уравнения релаксации мягких мод равновесных флуктуаций. В работе [30] на примере модели F показано, что микроскопическим аналогом уравнений (1) являются уравнения Дайсона-Швингера [26; 31]. Их можно привести к виду (1), где роль случайной силы ζ_a будет играть некоторая комбинация жёстких мод полей микроскопической модели, причём вне критической области статистика микроскопического аналога случайной силы не будет гауссовой. Однако, притом, что имеется возможность написать микроскопический аналог гидродинамических уравнений, вопрос о вычислении кинетических коэффициентов в данном подходе остаётся открытым. Вычисление кинетических коэффициентов в некоторой упрощённой системе и будет основной задачей данной работы.

В данной выпускной квалификационной работе исследуется вопрос о структуре и вычислении кинетических коэффициентов в произвольном равновесном состоянии выше критической точки квантовых многочастичных системах. Для демонстрации основных идей будем интересоваться динамикой равновесных флуктуаций в упрощённой ферми- или бозе- системе со слабым локальным бесструктурным взаимодействием. Естественным инструментом построения теории возмущений в данной задаче является формализм временных функций Грина при конечной температуре, динамика которых оказывается задана на контуре Келдыша – Швингера (основы данного подхода и необходимую литературу можно найти в [2; 24; 32–39]). Обнаружилось, аналогично случаю критической области [40], что начиная со второго порядка теории возмущений для временных функций Грина при конечной температуре присутствуют так называемые “пинчевые” сингулярности (особенности на больших временных масштабах специального вида) [23; 41–45], специфические для квантово-полевых моделей⁵. Диаграммы, содержащие данные сингулярности, были регуляризованы и вычислены в двухпетлевом приближении. Было замечено, что проведение данной процедуры с последующим “одеванием” параметра регуляризации по уравнению Дайсона позволяет доказать наличие в полной двухточечной функции Грина экспоненциального по времени затухания, чего не наблюдалось на уровне пропагаторов. То есть, наличие пинчевых сингулярностей в данной системе приводит к затуханию в квазичастичном спектре. В данной работе в двухпетлевом приближении будет показано, что можно явно вычислить затухающий экспоненциальный фактор как функцию температуры и химического потенциала.

⁵Заметим, что похожие сингулярности теории возмущений Келдыша были замечены при описании динамики релятивистских частиц на искривлённом пространственно-временном фоне, в данной деятельности используются близкие нам идеи [46–49].

Временные функции Грина при конечной температуре

Будем рассматривать нерелятивистскую равновесную ферми- или бозе- систему со слабым взаимодействием типа “плотность – плотность”. Для иллюстрации наших идей конкретный вид потенциала не будет играть значительной роли, поэтому будем работать в приближении локального потенциала. Обобщение на случай произвольного потенциала не представляет затруднений, однако в общем случае вычисление фейнмановских диаграмм становится гораздо более трудоёмким. Будем предполагать однородность и изотропность в пространстве рассматриваемой системы. Широко известный модельный гамильтониан [50; 51] этой системы есть⁶

$$\hat{H} = \int d\mathbf{x} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \left(-\frac{\Delta}{2m} - \mu \right) \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) + g \int d\mathbf{x} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}(\mathbf{x}, t). \quad (4)$$

Здесь m – масса одной частицы, $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^\dagger$ – фермионные или бозонные операторы поля, g – константа связи, μ – химический потенциал. Здесь и далее, если не указано иного, интегралы подразумеваются взятыми в бесконечных пределах, суммирование по спиновым индексам операторов поля подразумеваются.

Будем описывать динамику равновесных флуктуаций данной системы с точки зрения временных функций Грина при конечной температуре. В этом формализме основные объекты есть $2n$ -точечные функции Грина

$$G_{2n} = \text{Sp}(\mathbb{T}[\hat{\psi}(\mathbf{x}_{2n}, t_{2n}) \dots \hat{\psi}(\mathbf{x}_n, t_n) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}_{n-1}, t_{n-1}) \dots \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}_2, t_2) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}_1, t_1)] \hat{\rho}), \quad (5)$$

где Sp – след в квантово-механическом смысле, $\hat{\rho}$ – матрица плотности, описывающая статистическое распределение в системе в некий начальный момент времени t_{in} , $\mathbb{T}[\dots]$ – операция временного упорядочения. Квантовые поля рассматриваются в представлении Гейзенберга:

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}, t_k) = e^{i\hat{H}(t_k - t_{in})} \hat{\psi}(\mathbf{x}) e^{-i\hat{H}(t_k - t_{in})}, \quad k = 1, 2 \dots 2n, \quad (6)$$

где $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ оператор поля в представлении Шрёдингера в начальный момент времени t_{in} . В данной задаче естественно не фиксировать число частиц, поэтому будем предполагать, что матрица плотности $\hat{\rho}$ описывает распределение Гиббса большого канонического ансамбля с обратной температурой $\beta = 1/T$. Будем считать, что температура T выше температуры всех возможных фазовых переходов, так как дальнейшее рассмотрение справедливо в случае отсутствия аномальных средних. Диаграммная техника для функций Грина (5) обсуждалась в работах [27; 40; 52] с точки зрения операторного формализма [31]. Этот подход технически более сложен, поэтому мы примем точку зрения, основанную на функциональном интеграле. Можно показать⁷, что диаграммная техника может быть получена

⁶В данной работе $\hbar = 1$ и константа Больцмана $k_B = 1$.

⁷Для доказательства этого факта достаточно применить формулу Фейнмана-Каца [53] к (5).

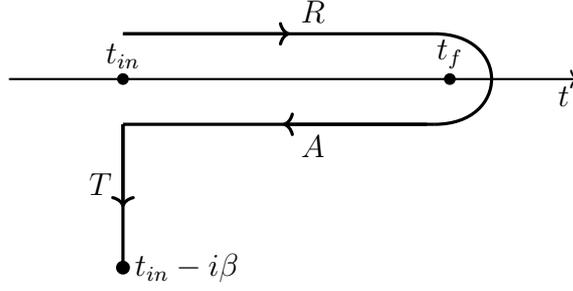


Рис. 1 Контур Келдыша – Швингера

из производящего функционала вида [54]

$$\int \mathcal{D}\psi^+ \mathcal{D}\psi e^{iS+A^+\psi+A\psi^+}. \quad (7)$$

Здесь A и A^+ – поля источников, символ \mathcal{D} обозначает функциональное интегрирование, ψ и ψ^+ – бозонные или фермионные поля. Действие S может быть записано в форме

$$S = \int_C dt \left[\psi^+(\mathbf{x}, t) \left(i\partial_t + \frac{\Delta}{2m} + \mu \right) \psi(\mathbf{x}, t) - g \left(\psi^+(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) \psi^+(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) \right) \right], \quad (8)$$

где C есть контур Келдыша – Швингера [55–57] (Рис.1). Форма действия (8) отражает тот факт, что имеется набор полей ψ_R , ψ_A , ψ_T (и сопряжённые к ним), индексы R (Retarded), A (Advanced), T (Temperature) соответствуют прямолинейному участку контура, на котором определены соответствующие поля. На контуре Келдыша – Швингера предполагаются следующие граничные условия:

$$\psi_R(t_f) = \psi_A(t_f), \quad \psi_A(t_{in}) = \psi_T(t_{in}), \quad \psi_R(t_{in}) = \pm \psi_T(t_{in} - i\beta). \quad (9)$$

Здесь и далее мы используем нотацию \pm и \mp , верхний знак используется в бозонном случае, а нижний в фермионном. Первые два условия (9) являются условиями непрерывности полей на контуре Келдыша – Швингера, третье условие есть стандартная симметрия в бозонном случае и анти-симметрия в фермионном случае на температурной части контура, аналогично теории температурных функций Грина [31].

Посредством $\langle \dots \rangle_0$ обозначим усреднение полей с гауссовым весом $\exp(-S_0)$, где S_0 отличается от квадратичной по полям части действия (8) множителем $-i$. Пропагаторы $\langle \psi_i(\mathbf{x}, t) \psi_j^+(\mathbf{x}', t') \rangle_0 \equiv G_{ij+}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t')$ определены решением матричного уравнения [31]

$$\left(\partial_t - i\frac{\Delta}{2m} - i\mu \right) \begin{pmatrix} \langle \psi_R \psi_R^+ \rangle_0 & \langle \psi_R \psi_A^+ \rangle_0 & \langle \psi_R \psi_T^+ \rangle_0 \\ \langle \psi_A \psi_R^+ \rangle_0 & \langle \psi_A \psi_A^+ \rangle_0 & \langle \psi_A \psi_T^+ \rangle_0 \\ \langle \psi_T \psi_R^+ \rangle_0 & \langle \psi_T \psi_A^+ \rangle_0 & \langle \psi_T \psi_T^+ \rangle_0 \end{pmatrix} = \delta(t - t') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

с граничными условиями, согласованными с (9). Пропагаторы имеют индексы $i, j \in \{R, A, T\}$ соответствующих полей. Решая уравнение (10) в импульсно – временном представлении, получаем

$$G_{RR+} = (\theta(t-t') \pm n(\varepsilon))e^{-i\varepsilon(t-t')}, \quad G_{RA+} = n(\pm\varepsilon)e^{-i\varepsilon(t-t')}, \quad G_{RT+} = \pm n(\varepsilon)e^{-i\varepsilon(t-t')}, \quad (11)$$

$$G_{AA+} = (-\theta(t'-t) \pm n(\pm\varepsilon))e^{-i\varepsilon(t-t')}, \quad G_{AR+} = n(-\varepsilon)e^{-i\varepsilon(t-t')}, \quad G_{AT+} = \pm n(\varepsilon)e^{-i\varepsilon(t-t')}, \quad (12)$$

$$G_{TT+} = (\theta(t-t') \pm n(\varepsilon))e^{-i\varepsilon(t-t')}, \quad G_{TR+} = n(-\varepsilon)e^{-i\varepsilon(t-t')}, \quad G_{TA+} = \pm n(-\varepsilon)e^{-i\varepsilon(t-t')}. \quad (13)$$

где $\theta(t-t')$ есть функция Хевисайда, $n(\varepsilon) = (e^{\beta\varepsilon} \mp 1)^{-1}$ есть среднее число заполнения уровня с энергией $\varepsilon = \mathbf{p}^2/2m - \mu$, \mathbf{p} есть импульс, канонически сопряжённый в смысле Фурье с $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$.

Следуя методу Келдыша и используя произвол в выборе t_{in} и t_f , удобно рассматривать систему в пределе $t_{in} \rightarrow -\infty$, $t_f \rightarrow +\infty$ в виду удобства дальнейшего использования интегрального преобразования Фурье. После взятия данного предела система становится однородной во времени (2). Это согласовано с логикой гидродинамического рассмотрения

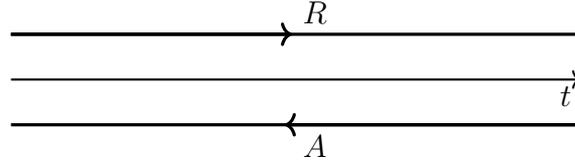


Рис. 2 Контур Келдыша – Швингера в пределе $t_{in} \rightarrow -\infty$, $t_f \rightarrow +\infty$.

системы в том смысле, что мы интересуемся поведением корреляторов на больших масштабах времён. Начальное равновесное распределение становится заданным в бесконечно удалённом прошлом.

Ввиду нетипичного для теории поля вида пропагаторов теория возмущений содержит специфические сингулярности типа “пинч” [58] для моделей типа (8) [27; 54]. Для обсуждения данных расходимостей удобно ввести новые полевые переменные, называемые *келдышевскими переменными*⁸ [55]:

$$\xi = \frac{\psi_R + \psi_A}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{\psi_R - \psi_A}{\sqrt{2}}, \quad \xi^+ = \frac{\psi_R^+ + \psi_A^+}{\sqrt{2}}, \quad \eta^+ = \frac{\psi_R^+ - \psi_A^+}{\sqrt{2}}. \quad (14)$$

Связанные с этими переменными пропагаторы заметно упрощаются:

$$G_{\eta\xi^+} = -e^{-i\varepsilon(t-t')}\theta(t'-t), \quad G_{\xi\eta^+} = e^{-i\varepsilon(t-t')}\theta(t-t'), \quad G_{\xi\xi^+} = e^{-i\varepsilon(t-t')}(1 \pm 2n(\varepsilon)), \quad (15)$$

$$G_{\eta\eta^+} = 0, \quad G_{\xi T^+} = \pm\sqrt{2}n(\varepsilon)e^{-i\varepsilon(t-t')}, \quad G_{\eta T^+} = 0, \quad (16)$$

$$G_{T\xi^+} = \mp\sqrt{2}n(-\varepsilon)e^{-i\varepsilon(t-t')}, \quad G_{T\eta^+} = 0. \quad (17)$$

⁸В литературе поле ξ часто называют классическим полем, а поле η – квантовым [16].

Удобно ввести следующие графические обозначения:

$$G_{\eta\xi^+} = \leftarrow \times, \quad G_{\xi\eta^+} = \rightarrow \times, \quad G_{\xi\xi^+} = \text{---} \times. \quad (18)$$

Пусть взаимодействие S_{int} есть часть действия, не квадратичная по полям. В келдышевских переменных она может быть записана как [54]

$$S_{int} = g(\xi^+\xi\xi^+\eta + \xi^+\xi\eta^+\xi + \xi^+\eta\eta^+\eta + \eta^+\xi\eta^+\eta). \quad (19)$$

Учитывая графические обозначения (18), структура взаимодействия (19) приводит к наличию следующих вершин в диаграммной технике:



$$\quad (20)$$

Заметим также, что все диаграммы, содержащие хотя-бы один замкнутый цикл из стрелок, равны нулю⁹, аналогично диаграммной технике Уайльда [59].

⁹Это следует из запаздывающей и опережающей структуры пропагаторов $G_{\eta\xi^+}$ и $G_{\xi\eta^+}$.

Пинчевые сингулярности и диссипация

Можно показать, что указанная диаграммная техника содержит специфические сингулярности, называемые пинчевыми [23; 41–45]. Для иллюстрации рассмотрим, например, диаграмму в импульсно-временном представлении:

$$\begin{aligned} \text{---} \times \left(\text{---} \times \text{---} \right) \text{---} &= \frac{\mp \zeta g^2}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} e^{-i\varepsilon(\mathbf{k})(t-t')} (1 \pm 2n(\mathbf{k})) e^{-i\varepsilon(\mathbf{q})(t-t')} \times \\ &\times (1 \pm 2n(\mathbf{q})) e^{i\varepsilon(\mathbf{p}-\mathbf{k}-\mathbf{q})(t-t')} \theta(t-t'). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь \mathbf{p} – внешний импульс, ζ принимает значение 1 в бозонном случае и 3/2 в фермионном случае¹⁰. Рассматривая данную диаграмму на нулевых импульсах и частотах, получаем

$$\begin{aligned} \text{---} \times \left(\text{---} \times \text{---} \right) \text{---} \Big|_{\mathbf{p}=0, \omega=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} d(t-t') \text{---} \times \left(\text{---} \times \text{---} \right) \text{---} \Big|_{\mathbf{p}=0} = \\ &= \frac{\mp \zeta g^2}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} \left(\pi \delta(\varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{q})) + \mathcal{P} \frac{i}{\varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{q})} \right) \times \\ &\times (1 \pm 2n(\mathbf{k})) (1 \pm 2n(\mathbf{q})). \end{aligned} \quad (22)$$

Для доказательства последнего равенства нужно заметить, что указанная диаграмма, проинтегрированная с учётом θ -функции по $(t-t')$ в пределах от 0 до ∞ , содержит неопределённость на верхнем пределе ввиду наличия у подынтегрального выражения лишь осциллирующей части. В связи с этим необходимо регуляризовать подынтегральное выражение, добавив в показатель экспоненты бесконечно малую затухающую по времени часть¹¹. Далее необходимо провести интегрирование и воспользоваться формулой Сохоцкого

$$\frac{1}{x + i0} = -\pi \delta(x) + i\mathcal{P} \frac{1}{x}, \quad (23)$$

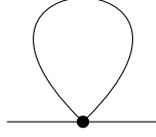
где \mathcal{P} – главное значение интеграла. Мнимая часть интеграла (22) содержит сингулярность на поверхности, задаваемой уравнением $\varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{q}) = 0$. Такое anomalous поведение на больших временах и называется пинчевой сингулярностью. Прямым вычислением можно показать [27], что с аналогичными входящими и выходящими линиями данного вида сингулярности в порядке теории возмущений g^2 содержатся в диаграммах

$$\text{---} \times \left(\text{---} \times \text{---} \right) \text{---} , \quad \text{---} \times \left(\text{---} \times \text{---} \right) \text{---} , \quad \text{---} \times \left(\text{---} \times \text{---} \right) \text{---} . \quad (24)$$

¹⁰ Данный фактор в симметричном коэффициенте связан с наличием суммирования по спиновым индексам в фермионном случае.

¹¹ Здесь мы считаем, что регуляризация не зависит от импульса.

Сумму вышеуказанных двухпетлевых диаграмм в импульсно – частотном представлении далее будем обозначать как $I(\mathbf{p}, \omega)$. Можно также показать, что свободны от пинчевых сингулярностей диаграммы топологии



со всевозможными расстановками крестов и стрелок. В дальнейшем мы не будем рассматривать данные диаграммы, так как они являются добавками лишь в химический потенциал.

Для работы с сингулярностями пинчевого типа введём регуляризатор γ [27; 40] в пропагаторы нашей модели по правилу

$$e^{-i\varepsilon(t-t')} \rightarrow e^{-i\varepsilon(t-t') - \gamma|t-t'|}. \quad (25)$$

Введения данного типа регуляризации соответствует введению в свободную систему бесконечно малую диссипацию. Удобно выбрать параметр затухания как некоторую функцию импульса¹² $\gamma = \gamma(\mathbf{p})$. Выберем явный вид этой функции как $\gamma(\mathbf{p}) = \alpha \mathbf{p}^2 / 2m$, где параметр $\alpha \rightarrow 0$ при снятии регуляризации. Физически выбор функции $\gamma(\mathbf{p})$ отражает тот факт, что параметр α является прямым аналогом гидродинамического коэффициента Онзагера [26; 60]. Например, модель А (2) критической динамики [26; 61–64] имеет аналогичную форму экспоненциального затухания во времени. В импульсно – временном представлении пропагатор действия MSR¹³ [26; 65] данной модели имеет вид¹⁴

$$\langle \varphi(t)\varphi(t') \rangle_0^{\text{MSR}} \sim e^{-\lambda \mathbf{p}^2 |t-t'|}, \quad (26)$$

причём роль α с точностью до множителя $1/2m$ выполняет коэффициент Онзагера λ , что поясняет мотивацию выбора нами $\gamma(\mathbf{p})$. После введения регуляризации свободная часть действия может быть записана в форме [54]

$$S_0 = -i\eta^+ (2\gamma(1 \pm 2n))\eta - i\xi^+ (\partial_t + i\varepsilon - \gamma)\eta - i\eta^+ (\partial_t + i\varepsilon + \gamma)\xi. \quad (27)$$

Естественным инструментом для анализа затухания является использование уравнения Дайсона [26; 31]:

$$D^{-1} = K - \Sigma, \quad (28)$$

где D – матрица функций Грина, K – матрица квадратичной формы действия, Σ – собственная энергия. Идея состоит в нахождении петлевых добавок к регуляризатору (в пределе $\alpha \rightarrow 0$), используя уравнение Дайсона¹⁵. При нашем выборе $\gamma(\mathbf{p})$ такие добавки

¹²Этим данная регуляризация отличается от использованной при вычислении (22).

¹³Martin-Siggia-Rose.

¹⁴С точностью до множителя, зависящего только от импульса.

¹⁵Такую процедуру мы и называем “одевание”.

должны быть вещественны и пропорциональны \mathbf{p}^2 . Если такие поправки существуют, то полные двухточечные функции Грина будут иметь экспоненциальное затухание по времени (25) даже после снятия регуляризации. Вообще говоря, в собственной энергии могут содержаться вещественные поправки старших степеней \mathbf{p}^2 , дающие затухающие факторы. Однако, так как мы интересуемся крупномасштабными эффектами в режиме малых импульсов и частот (гидродинамический предел), старшими поправками можно пренебречь.

Для проведения процедуры “одевания” удобно рассмотреть матричный элемент

$$D_{\eta+\xi}^{-1} = i\omega + i\varepsilon + \gamma - \Sigma_{\eta+\xi}, \quad (29)$$

где $D_{\eta+\xi}^{-1}$, $\Sigma_{\eta+\xi}$ есть матричные элементы D^{-1} и Σ , относящиеся к полям η^+ и ξ . По причинам, указанным выше, имеет смысл рассматривать выражение для $\Sigma_{\eta+\xi}$ в гидродинамическом приближении, то есть аппроксимируя собственную энергию её рядом Тейлора в окрестности $\omega = 0$, $\mathbf{p} = 0$. Для анализа эффектов диссипации достаточно удерживать лишь первые нетривиальные члены разложения, пропорциональные ω и \mathbf{p}^2 . После взятия предела $\alpha \rightarrow 0$ в гидродинамическом приближении можно записать уравнение (29) в форме

$$D_{\eta+\xi}^{-1} = (1 + a_1 + ia_2)i\omega + (i + ib_1 + b_2)\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - i\mu(c_1 + ic_2), \quad (30)$$

используя теорию возмущений. Здесь $a_i, b_i, c_i, i \in \{1,2\}$ есть некоторые функции от T и μ , возникающие из петлевых вкладов $\Sigma_{\eta+\xi}$ (см. Приложение А). Так как интересующие нас петлевые поправки пропорциональны g^2 , то в уравнении (30) можно пренебречь a_1 и b_1 . После этого мы можем определить “одетый” параметр затухания с точностью g^2 как

$$\tilde{\alpha} = \text{Re}\left(\frac{i + ib_1 + b_2}{1 + a_1 + ia_2}\right) \approx b_2 + a_2. \quad (31)$$

Заметим, что возможны петлевые добавки, приводящие к появлению у химического потенциала мнимой части, однако это запрещено уравнением Неймана. Разрешение кажущегося противоречия состоит в том, что уравнения Дайсона, по сути, является уравнением самосогласования, поэтому также необходимо добавить в уравнение слагаемые, обеспечивающие вещественность химического потенциала.

В соответствии с логикой гидродинамического описания, указанной выше, разложим $I(\mathbf{p}, \omega)$ в ряд в окрестности $\mathbf{p} = 0$, $\omega = 0$:

$$I(\mathbf{p}, \omega) \approx I(\mathbf{p} = 0, \omega = 0) + \omega \cdot \left. \frac{\partial I(\mathbf{p} = 0, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} + \frac{p_i p_j}{2!} \cdot \left. \frac{\partial^2 I(\mathbf{p}, \omega = 0)}{\partial p_i \partial p_j} \right|_{\mathbf{p}=0}, \quad (32)$$

где p_i есть i -ая компонента импульса \mathbf{p} , суммирование по повторяющимся индексам подразумевается. Так как система однородна в пространстве, в разложении отсутствуют слагаемые, линейные по компонентам импульса. Также можно существенно упростить дальнейший анализ, положив в знаменателях подынтегральных выражениях всех слагаемых в (32) $\mu = 0$. Это возможно, если перейти от рассмотрения гидродинамической переменной ω к, в некотором смысле более естественной, гидродинамической переменной $\omega - \mu$.

Для перехода к нулевой частоте в импульсно-временном представлении достаточно проинтегрировать соответствующие диаграммы по разности времён в бесконечных пределах. После этой процедуры сумму диаграмм, взятых при $\omega = 0$, можно представить в виде (см. Приложение В)

$$I(\mathbf{p}, \omega = 0) = \frac{\mp 2\zeta g^2}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k}d\mathbf{q} \frac{2n(\mathbf{k})n(\mathbf{q}) \mp 2n(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}) - 4n(\mathbf{k})n(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q})}{i(\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}) - \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}) - \tilde{\varepsilon}(\mathbf{q})) - \gamma(\mathbf{k}) - \gamma(\mathbf{q}) - \gamma(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q})}. \quad (33)$$

Здесь $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m$. Аналогичным способом производную по частоте от $I(\mathbf{p}, \omega)$ можно также представить в виде

$$\left. \frac{\partial I(\mathbf{p}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} = \frac{\mp 2i\zeta g^2}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k}d\mathbf{q} \frac{2n(\mathbf{k})n(\mathbf{q}) \mp 2n(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}) - 4n(\mathbf{k})n(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q})}{[i(\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}) - \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}) - \tilde{\varepsilon}(\mathbf{q})) - \gamma(\mathbf{k}) - \gamma(\mathbf{q}) - \gamma(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q})]^2}. \quad (34)$$

Здесь множитель i появляется вследствие перехода от импульсно – частотного представления к импульсно – временному. Слагаемое $I(\mathbf{p} = 0, \omega = 0)$ не приводится, так как, по уравнению Дайсона, это добавка лишь в химический потенциал.

Итого, производя необходимые дифференцирования, вклады из (32), дающие одевающие параметра затухания, могут быть записаны в виде¹⁶:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial I(\mathbf{p} = 0, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} &= \frac{\mp 2i\zeta g^2 m^2}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k}d\mathbf{q} \frac{f(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) - \alpha(\mathbf{k}^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q}^2)]^2}, \quad (35) \\ \left. \frac{\partial^2 I(\mathbf{p}, \omega = 0)}{\partial p_i \partial p_j} \right|_{\mathbf{p}=0} &= \delta_{ij} \frac{\mp 2\zeta g^2 m}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k}d\mathbf{q} \left(- \frac{if(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) - \alpha(\mathbf{k}^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q}^2)]^2} + \right. \\ &+ \frac{2}{3} \frac{f(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2}{[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) - \alpha(\mathbf{k}^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q}^2)]^3} + \frac{f_1(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) - \alpha(\mathbf{k}^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q}^2)} + \\ &\left. + \frac{2}{3} \frac{if_2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2}{[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) - \alpha(\mathbf{k}^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q}^2)]^2} \right), \quad (36) \end{aligned}$$

где

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = 2n(\mathbf{k})n(\mathbf{q}) \mp 2n(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}) - 4n(\mathbf{k})n(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}),$$

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = f(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{q})|_{\mathbf{p}=0},$$

$$\partial_{p_i} \partial_{p_j} f(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{q})|_{\mathbf{p}=0} \equiv f_1(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \cdot \delta_{ij}, \quad \partial_{p_j} f(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{q})|_{\mathbf{p}=0} \equiv (\mathbf{k}_j + \mathbf{q}_j) \cdot f_2(\mathbf{k}, \mathbf{q}),$$

δ_{ij} есть дельта-символ Кронекера, \mathbf{k}_i и \mathbf{q}_i есть i -ая компонента векторов \mathbf{k} и \mathbf{q} соответственно. Из соображений пространственной симметрии все слагаемые $(\mathbf{k}_i + \mathbf{q}_i) \cdot (\mathbf{k}_j + \mathbf{q}_j)$ в подынтегральных выражениях должны быть заменены на $\delta_{ij}/3 \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2$. Заметим, что вещественная часть (36) и (35) возникает вследствие введения регуляризации (25), так как соответствующие выражения при $\alpha = 0$ её не содержат.

¹⁶Здесь отброшены слагаемые, обращающиеся в 0 при снятии регуляризации.

Следуя вышеописанной логике, необходимо найти не исчезающий при снятии регуляризации член асимптотики вещественной части интегралов (35-36). Данные слагаемые и будут давать вклад в перенормировку γ . Асимптотический анализ данных интегралов довольно сложен ввиду крайне неравномерного поведения по параметру α . На данный момент общей теории для такого вида интегралов не существует. Похожего вида интегралы рассматривались в работах [66–68]. Можно показать (см. Приложение А), что интересующие нас выражения (вещественная часть (36) и (35)) при $\alpha \rightarrow 0$ ведут себя как¹⁷ $\mathcal{O}(1)$. Явный вид “одетого” параметра затухания выглядит как

$$\tilde{\alpha} = g^2 m^2 T^2 F(T/\mu), \quad (37)$$

где $F(T/\mu)$ есть безразмерная функция. Её численные значения для бозонного и фермионного случаев представлены на графиках 3а-3в.

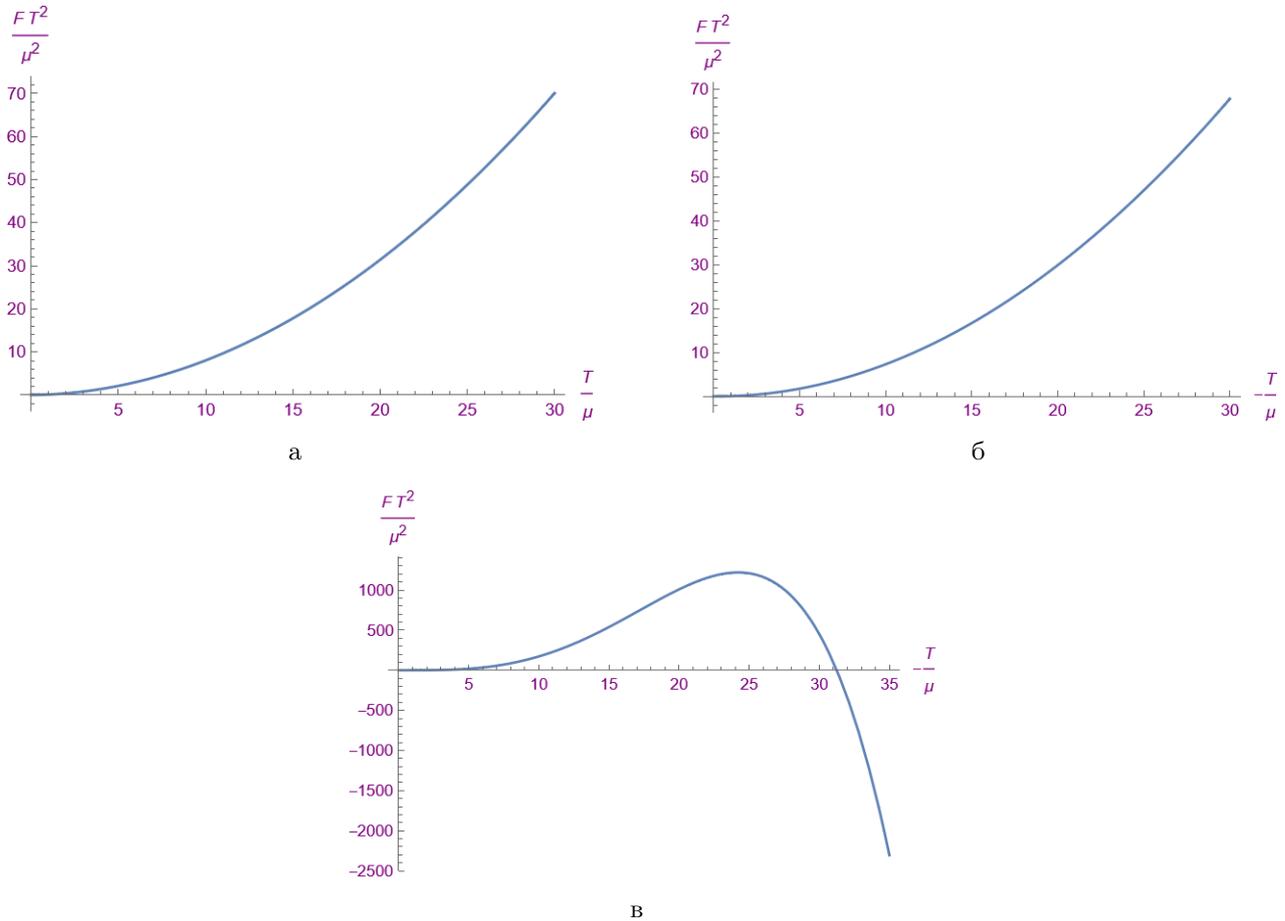


Рис. 3 Функция $F(T/\mu)$ в следующих системах: а фермионы, положительный μ ; б фермионы, отрицательный μ ; в бозоны, отрицательный μ .

Видно, что в бозонном случае существует область параметра T/μ , где $\tilde{\alpha}$ становится отрицательным, что невозможно ввиду неустойчивости системы. Описание этой области, по-видимому, невозможно ввиду наличия фазового перехода ($\mu = 0$ при $T \neq 0$). Случай бозонов с положительным химическим потенциалом стандартно не рассматривается.

¹⁷То есть не обращаются в 0 при $\alpha \rightarrow 0$.

Заключение

В данной работе было предъявлено микроскопическое обоснование диссипации в упрощённой модели ферми- или бозе- системы со слабым локальным взаимодействием, результаты работ [27; 40] были обобщены на случай произвольного равновесного состояния выше критической точки. Было показано, что затухание во времени двухточечных функций Грина возникает из петлевых вкладов, содержащих пинчевые сингулярности. Естественным способом проведения данной процедуры оказывается введение регуляризации, обеспечивающее экспоненциальное затухание пропагаторов, и “одевание” параметра регуляризации с помощью уравнения Дайсона. Форма данного затухания выбирается в виде, аналогичном известным полуфеноменологическим гидродинамическим моделям (такими как, например, модель А критической динамики). В соответствии с этим “одетый” в смысле уравнения Дайсона параметр регуляризации $\tilde{\alpha}$, названный нами параметром затухания, можно считать микроскопическим аналогом кинетического коэффициента Онзагера. Показано, что в данной модели этот параметр пропорционален квадрату константы связи g^2 , то есть данные эффекты возникают в приближении не ниже двухпетлевого. Это объясняет, почему эффекты типа диссипации не были ранее обнаружены в рамках более грубых приближений (таких как приближение Хартри или Хартри – Фока [69]). Параметр затухания был вычислен как функция температуры и химического потенциала с точностью g^2 . При вычислении $\tilde{\alpha}$ основная трудность состояла в асимптотическом анализе некоторого класса крайне неравномерно зависящих от параметра регуляризации интегралов. Отметим, что построение общей теории такого рода интегралов может быть интересной задачей в рамках асимптотического анализа.

Разработанная техника временных функций Грина при конечной температуре открывает большой простор для расчёта характеристик, связанных с затуханием, в случае более реалистичных межчастичных потенциалов в слабозаимодействующих ферми- и бозе- системах типа (4). Возможно применение описанного формализма и в других моделях статистической механики и физики конденсированного состояния. Например видится перспективным рассмотрение с данной точки зрения диссипативного режима в системе двумерных безмассовых релятивистских фермионов, являющийся низкоэнергетическим квазичастичным приближением для системы электронов проводимости в графене [70; 71].

Приложение А. Анализ асимптотики $\alpha \rightarrow 0$

Приведём к более простому виду интегралы (35-36). Прделаем это на примере одного слагаемого из (36),

$$I_1 = \frac{\mp 2\zeta g^2 m}{(2\pi)^6} \int \frac{f_1(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) - \alpha(\mathbf{k}^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q}^2)} d\mathbf{k} d\mathbf{q}. \quad (38)$$

Другие вклады в (35) и (36)

$$I_2 = \frac{\pm 2\zeta g^2 m}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} \frac{if(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - \frac{2}{3}(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 \cdot if_1(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) - \alpha(\mathbf{k}^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q}^2)]^2}, \quad (39)$$

$$I_3 = \frac{\mp 4\zeta g^2 m}{3(2\pi)^6} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} \frac{f(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2}{[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) - \alpha(\mathbf{k}^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q}^2)]^3}, \quad (40)$$

$$I_4 = \frac{\mp 2\zeta g^2 m^2}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} \frac{f(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) - \alpha(\mathbf{k}^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q}^2)]^2} \quad (41)$$

упрощаются аналогично. Рассмотрим вещественную часть вклада (38):

$$\text{Re}(I_1) = \frac{\pm 2\zeta g^2 m}{(2\pi)^6} \int \frac{\alpha(\mathbf{k}^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q}^2) f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^2 + \alpha^2(\mathbf{k}^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q}^2)^2} d\mathbf{k} d\mathbf{q}. \quad (42)$$

Сделаем замену переменных

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} + \mathbf{y}), \quad \mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Данная замена позволяет избавиться от скалярного произведения в знаменателе:

$$\text{Re}(I_1) = \frac{\pm 4\zeta g^2 m}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \frac{\alpha(3\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2) f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{(\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2)^2 + \alpha^2(3\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2)^2}. \quad (43)$$

Здесь и далее мы примем соглашение, что после координатного преобразования функции будут обозначаться той же буквой, фиксируя изменения заменой старых аргументов на новые. Например, сейчас $f_1(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \rightarrow f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Перейдём в сферические координаты. Подынтегральное выражение в (43) зависит от $x = |\mathbf{x}|$, $y = |\mathbf{y}|$ и от угла θ между \mathbf{x} и \mathbf{y} . Интегралы по остальным переменным вычисляются тривиально:

$$\text{Re}(I_1) = \frac{\pm \zeta g^2 m}{2\pi^4} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty \int_0^\infty dx dy \frac{\alpha x^2 y^2 (3x^2 + y^2) f_1(x, y, \theta)}{(x^2 - y^2)^2 + \alpha^2(3x^2 + y^2)^2}. \quad (44)$$

Сделаем замену переменных $\{x^2 = s, y^2 = t, \cos \theta = c\}$ в (44):

$$\text{Re}(I_1) = \frac{\pm 8\zeta g^2 m}{89\pi^4} \int_{-1}^1 dc \int_0^1 \int_0^\infty ds dt \frac{\alpha \sqrt{st} (3s + t) f_1(s, t, c)}{(s - t)^2 + \alpha^2(3s + t)^2}. \quad (45)$$

Интегрируя по частям по переменной s и устремляя $\alpha \rightarrow 0$, получим

$$\operatorname{Re}(I_1) = \frac{\mp 4\zeta g^2 m}{89\pi^3} \int_{-1}^1 dc \int_0^\infty \int_0^\infty ds dt \operatorname{sign}(s-t) \sqrt{t} \partial_s \left(\sqrt{s} f_1(s,t) \right). \quad (46)$$

Здесь $\operatorname{sign}(s-t)$ – функция знака. Внеинтегральные слагаемые при такой операции обращаются в 0 на пределах $s=0$ и $s=\infty$ ¹⁸. Используя ещё одно интегрирование по частям и перекидывая производную по s на функцию знака, интеграл переписется как

$$\operatorname{Re}(I_1) = \frac{\pm 8\zeta g^2 m}{89\pi^3} \int_{-1}^1 dc \int_0^\infty \int_0^\infty ds dt \delta(s-t) \sqrt{st} f_1(s,t). \quad (47)$$

Остальные интегралы преобразуются аналогично. Необходимо лишь увеличить количество интегрирований по частям по таким переменным, чтобы не возникало нетривиальных внеинтегральных слагаемых. Производя данные вычисления, получим¹⁹:

$$\operatorname{Re}(I_2) = \frac{\mp \zeta g^2 m}{12\pi^3} \int_{-1}^1 dc \int_0^\infty \int_0^\infty ds dt \delta(s-t) \sqrt{t} \partial_s \left(\sqrt{s} (3f(s,t) - 4sf_2(s,t)) \right), \quad (48)$$

$$\operatorname{Re}(I_3) = \frac{\pm \zeta g^2 m}{3\pi^3} \int_{-1}^1 dc \int_0^\infty \int_0^\infty ds dt \delta(s-t) \sqrt{t} \partial_t \partial_s \left(s^{3/2} \sqrt{t} f(s,t) \right), \quad (49)$$

$$\operatorname{Im}(I_4) = \frac{\pm \zeta g^2 m^2}{4\pi^3} \int_{-1}^1 dc \int_0^\infty \int_0^\infty ds dt \delta(s-t) \partial_s \partial_t \left(\sqrt{st} f(s,t) \right). \quad (50)$$

Интегралы по c могут быть взяты аналитически, используя системы компьютерной алгебры²⁰. Затем в (47-49), если $\mu > 0$, используя δ -функцию необходимо снять интегрирование по переменной s , в противном же случае это необходимо сделать по переменной t . Это позволяет избежать возникновения корней из отрицательных выражений. После выполнения данных интегрирований задача сводится к вычислению одномерных интегралов. Удобно записать сумму оставшихся выражений в виде произведения безразмерной функции на размерный префактор:

$$m \cdot \operatorname{Re}(I_1 + I_2 + I_3) + \operatorname{Im}(I_4) = g^2 m^2 T^2 F(T/\mu). \quad (51)$$

Здесь проведено обезразмеривание интегралов с помощью растяжения переменных $\{s,t\} \rightarrow \{ms/\beta, mt/\beta\}$. После этого функция $F(T/\mu)$ может быть вычислена численно как одномерный интеграл при каждом значении параметра T/μ , её графики в различных ситуациях приведены в основной части текста.

¹⁸Функция f_1 как функция s экспоненциально затухает на бесконечности.

¹⁹Заметим, что, согласно (31), именно мнимая часть I_4 даёт вклад в затухание.

²⁰Mathematica, Maple и прочее.

Приложение В. Коэффициенты разложения фейнмановских диаграмм по частоте.

В данном разделе приведены коэффициенты разложения по частоте в нулевом и линейном порядке возникающих в работе фейнмановских диаграмм. Линейные коэффициенты обозначаются здесь как $\{ \cdot \}_\omega$. Переменная интегрирования τ обозначает $t - t'$.

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right|_{\omega=0} = \frac{\mp \zeta g^2}{(2\pi)^6} \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} (1 \pm 2n(\mathbf{k})) (1 \pm 2n(\mathbf{q})) \times \\
 & \times \exp \left(i\tau (\varepsilon(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{q})) - |\tau| (\gamma(\mathbf{k}) + \gamma(\mathbf{q}) + \gamma(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q})) \right) = \\
 & = \frac{\mp \zeta g^2}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} \frac{(1 \pm 2n(\mathbf{k})) (1 \pm 2n(\mathbf{q}))}{i(\varepsilon(\mathbf{p} - \mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{q})) - \gamma(\mathbf{k}) - \gamma(\mathbf{q}) - \gamma(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q})}, \quad (52)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right|_{\omega=0} = \frac{\pm 2\zeta g^2}{(2\pi)^6} \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} (1 \pm 2n(\mathbf{k})) (1 \pm 2n(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q})) \times \\
 & \times \exp \left(i\tau (\varepsilon(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{q})) - |\tau| (\gamma(\mathbf{k}) + \gamma(\mathbf{q}) + \gamma(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q})) \right) = \\
 & = \frac{\pm 2\zeta g^2}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} \frac{(1 \pm 2n(\mathbf{k})) (1 \pm 2n(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}))}{i(\varepsilon(\mathbf{p} - \mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{q})) - \gamma(\mathbf{k}) - \gamma(\mathbf{q}) - \gamma(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q})}, \quad (53)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right|_{\omega=0} = \frac{\mp \zeta g^2}{(2\pi)^6} \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} \exp \left(i\tau (\varepsilon(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{q})) \right) \times \\
 & \times \exp \left(- |\tau| (\gamma(\mathbf{k}) + \gamma(\mathbf{q}) + \gamma(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q})) \right) = \\
 & = \frac{\mp \zeta g^2}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} \frac{1}{i(\varepsilon(\mathbf{p} - \mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{q})) - \gamma(\mathbf{k}) - \gamma(\mathbf{q}) - \gamma(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q})}, \quad (54)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\}_\omega = \frac{\mp i \zeta g^2}{(2\pi)^6} \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} \tau (1 \pm 2n(\mathbf{k})) (1 \pm 2n(\mathbf{q})) \times \\
 & \times \exp \left(i\tau (\varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{q})) - |\tau| (\gamma(\mathbf{k}) + \gamma(\mathbf{q}) + \gamma(\mathbf{k} + \mathbf{q})) \right) = \\
 & = \frac{\mp i \zeta g^2}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} \frac{(1 \pm 2n(\mathbf{k})) (1 \pm 2n(\mathbf{q}))}{\left[i(\varepsilon(\mathbf{p} - \mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{q})) - \gamma(\mathbf{k}) - \gamma(\mathbf{q}) - \gamma(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}) \right]^2}, \quad (55)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\}_\omega = \frac{\pm 2i \zeta g^2}{(2\pi)^6} \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} \tau (1 \pm 2n(\mathbf{k})) (1 \pm 2n(\mathbf{k} + \mathbf{q})) \times \\
 & \times \exp \left(i\tau (\varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{q})) - |\tau| (\gamma(\mathbf{k}) + \gamma(\mathbf{q}) + \gamma(\mathbf{k} + \mathbf{q})) \right) = \\
 & = \frac{\pm 2i \zeta g^2}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} \frac{(1 \pm 2n(\mathbf{k})) (1 \pm 2n(\mathbf{k} + \mathbf{q}))}{\left[i(\varepsilon(\mathbf{p} - \mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{q})) - \gamma(\mathbf{k}) - \gamma(\mathbf{q}) - \gamma(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}) \right]^2}, \quad (56)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \text{---} \times \left(\begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \leftarrow \text{---} \end{array} \right) \times \text{---} \right\}_{\omega} = \frac{\mp i \zeta g^2}{(2\pi)^6} \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} \tau \times \\
& \times \exp \left(i\tau (\varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{q})) - |\tau| (\gamma(\mathbf{k}) + \gamma(\mathbf{q}) + \gamma(\mathbf{k} + \mathbf{q})) \right) = \\
& = \frac{\mp i \zeta g^2}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} \frac{1}{\left[i(\varepsilon(\mathbf{p} - \mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{q})) - \gamma(\mathbf{k}) - \gamma(\mathbf{q}) - \gamma(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}) \right]^2}. \quad (57)
\end{aligned}$$

Список литературы

- [1] *Zubarev D.N., Morozov V., Ropke G.* Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes, Volume 1 (See 3527400834): Basic Concepts, Kinetic Theory. Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes. — Wiley, 1996.
- [2] *Zubarev D., Morozov V., Röpke G.* Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes, Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes. Volume 2: Relaxation and Hydrodynamic Processes. Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes. — Wiley.
- [3] Snowmass White Paper: Effective Field Theories for Condensed Matter Systems / Tomas Brauner, Sean Hartnoll, Pavel Kovtun et al. // *ArXiv preprint 2203.10110*. — 2022. — 03.
- [4] *Bluhm Marcus et al.* Dynamics of critical fluctuations: Theory – phenomenology – heavy-ion collisions // *Nucl. Phys. A*. — 2020. — Vol. 1003. — P. 122016.
- [5] *Feynman R.P, Vernon F.L.* The theory of a general quantum system interacting with a linear dissipative system // *Annals of Physics*. — 1963. — Vol. 24. — Pp. 118–173. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000349166390068X>.
- [6] *Patriarca Marco.* Feynman–Vernon model of a moving thermal environment // *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*. — 2005. — Vol. 29, no. 1. — Pp. 243–250. — Frontiers of Quantum. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1386947705001694>.
- [7] *Weiss U.* Quantum Dissipative Systems. Series in modern condensed matter physics. — World Scientific, 1999.
- [8] *Rivas Á., Huelga S.F.* Open Quantum Systems: An Introduction. SpringerBriefs in Physics. — Springer Berlin Heidelberg, 2011. <https://books.google.ru/books?id=FGCuYsIZAA0C>.
- [9] *Lindblad Goran.* On the Generators of Quantum Dynamical Semigroups // *Commun. Math. Phys.* — 1976. — Vol. 48. — P. 119.
- [10] *Gorini Vittorio, Kossakowski Andrzej, Sudarshan E. C. G.* Completely positive dynamical semigroups of N-level systems // *Journal of Mathematical Physics*. — 1976. — Vol. 17, no. 5. — Pp. 821–825. <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.522979>.
- [11] *Nathan Frederik, Rudner Mark S.* Universal Lindblad equation for open quantum systems // *Phys. Rev. B*. — 2020. — Sep. — Vol. 102. — P. 115109. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.102.115109>.
- [12] *Tarasov Vasily.* Quantum Mechanics of Non-Hamiltonian and Dissipative Systems. — 2008. — 10.

- [13] *Sieberer L M, Buchhold M, Diehl S.* Keldysh field theory for driven open quantum systems // *Reports on Progress in Physics.* — 2016. — aug. — Vol. 79, no. 9. — P. 096001. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/79/9/096001>.
- [14] *Müller Clemens, Stace Thomas M.* Deriving Lindblad master equations with Keldysh diagrams: Correlated gain and loss in higher order perturbation theory // *Phys. Rev. A.* — 2017. — Jan. — Vol. 95. — P. 013847. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.95.013847>.
- [15] *Arrigoni Enrico, Dorda Antonius.* Master Equations Versus Keldysh Green's Functions for Correlated Quantum Systems Out of Equilibrium // *Out-of-Equilibrium Physics of Correlated Electron Systems* / Ed. by Roberta Citro, Ferdinando Mancini. — Cham: Springer International Publishing, 2018. — Pp. 121–188. https://doi.org/10.1007/978-3-319-94956-7_4.
- [16] *Maghrebi Mohammad F., Gorshkov Alexey V.* Nonequilibrium many-body steady states via Keldysh formalism // *Phys. Rev. B.* — 2016. — Jan. — Vol. 93. — P. 014307. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.93.014307>.
- [17] *Kubo Ryogo.* Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problems // *Journal of the Physical Society of Japan.* — 1957. — Vol. 12, no. 6. — Pp. 570–586. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.12.570>.
- [18] *Kubo Ryogo, Yokota Mario, Nakajima Sadao.* Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. II. Response to Thermal Disturbance // *Journal of the Physical Society of Japan.* — 1957. — Vol. 12, no. 11. — Pp. 1203–1211. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.12.1203>.
- [19] Diffusion and viscosity of liquid tin: Green-Kubo relationship-based calculations from molecular dynamics simulations / Mohamed Mouas, Jean-Georges Gasser, Slimane Hellal et al. // *The Journal of chemical physics.* — 2012. — 03. — Vol. 136. — P. 094501.
- [20] *Liu Pu, Harder Edward, Berne B. J.* On the Calculation of Diffusion Coefficients in Confined Fluids and Interfaces with an Application to the LiquidVapor Interface of Water // *The Journal of Physical Chemistry B.* — 2004. — Vol. 108, no. 21. — Pp. 6595–6602. <https://doi.org/10.1021/jp0375057>.
- [21] *Volkov NA, Posysoev MV, Shchekin AK.* The effect of simulation cell size on the diffusion coefficient of an ionic surfactant aggregate // *Colloid Journal.* — 2018. — Vol. 80, no. 3. — Pp. 248–254.
- [22] *Adzhemyan L. Ts. Kuni F. M. Novozhilova T. Yu.* Nonlinear generalization of Mori's method of projection operators // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 1974. — 03.
- [23] *Eliashberg G. M.* Transport equation for a degenerate system of fermi particles // *Sov. Phys. JETP.* — 1962. — Pp. 886–892.

- [24] *Arseev P. I.* On the nonequilibrium diagram technique: derivation, some features, and applications // *Physics-Uspekhi*. — 2015. — dec. — Vol. 58, no. 12. — Pp. 1159–1205. <https://doi.org/10.3367/ufne.0185.201512b.1271>.
- [25] Thermodynamic Equilibrium as a Symmetry of the Schwinger-Keldysh Action / L. Sieberer, Alessio Chiocchetta, Andrea Gambassi et al. // *Physical Review B*. — 2015. — 05. — Vol. 92.
- [26] *Vasilev A. N.* The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics. — Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004. — Pp. xvi+681. — Translated from the 1998 Russian original by Patricia A. de Forerand-Millard and revised by the author. <https://doi.org/10.1201/9780203483565>.
- [27] Effective large-scale model of boson gas from microscopic theory / Juha Honkonen, M.V. Komarova, Yu.G. Molotkov, M.Yu. Nalimov // *Nuclear Physics B*. — 2019. — Vol. 939. — Pp. 105–129. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321318303559>.
- [28] *Hohenberg P. C., Halperin B. I.* Theory of dynamic critical phenomena // *Rev. Mod. Phys.* — 1977. — Jul. — Vol. 49. — Pp. 435–479. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.49.435>.
- [29] *Folk R., Moser Hans-Guenther.* Critical dynamics: a field-theoretical approach // *J. Phys. A*. — 2006. — Vol. 39. — Pp. R207–R313.
- [30] *Gnatch M. Komarova M. V. Nalimov M. Yu.* Microscopic justification of the stochastic f-model of critical dynamics // *Theoretical and Mathematical Physics*. — 2013. — Vol. 175, no. 3. — Pp. 131–142. <https://doi.org/10.1007/s11232-013-0064-7>.
- [31] *Vasil'ev A. N.* Functional Methods in Quantum Field Theory and Statistical Physics. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1998.
- [32] Introduction to the Keldysh formalism and applications to time-dependent density-functional theory / Robert van Leeuwen, Nils Dahlen, Gianluca Stefanucci, Carl-Olof Almbladh. — 2005. — 07.
- [33] *Haehl Felix, Loganayagam R., Rangamani Mukund.* Schwinger-Keldysh formalism I: BRST symmetries and superspace // *Journal of High Energy Physics*. — 2016. — 10. — Vol. 2017.
- [34] *Pereira Marcelo Janovitch B.* Keldysh Field Theory. — 2019.
- [35] Schwinger-Keldysh superspace in quantum mechanics / Michael Geracie, Felix Haehl, R. Loganayagam et al. // *Physical Review D*. — 2017. — 12. — Vol. 97.
- [36] *Kamenev Alex, Levchenko Alex.* Keldysh technique and non-linear-model: Basic principles and applications // *Advances in Physics*. — 2009. — 01. — Vol. 58.
- [37] *Rammer Jørgen.* Quantum Field Theory of Non-Equilibrium States. — 2007. — 01.

- [38] *Rammer J., Smith H.* Quantum field-theoretical methods in transport theory of metals // *Rev. Mod. Phys.* — 1986. — Apr. — Vol. 58. — Pp. 323–359. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.58.323>.
- [39] *Kadanoff L. P., Baym G.* Quantum Statistical Mechanics. — New York: W.A. Benjamin Inc., 1962.
- [40] *Комарова М. В., Молотков Ю. Г., Налимов М. Ю.* Кинетическая теория бозонного газа // *Theoret. and Math. Phys.* — 2019. <https://doi.org/10.4213/tmf9675>.
- [41] *Tanaka Tomohiro, Nishida Yusuke.* Thermal conductivity of a weakly interacting Bose gas by quasi-one dimensionality // *preprint arXiv:2203.04936*. — 2022. — 03.
- [42] *Jeon Sangyong.* Hydrodynamic transport coefficients in relativistic scalar field theory // *Phys. Rev. D.* — 1995. — Sep. — Vol. 52. — Pp. 3591–3642. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.52.3591>.
- [43] *Jeon Sangyong, Yaffe Laurence G.* From quantum field theory to hydrodynamics: Transport coefficients and effective kinetic theory // *Phys. Rev. D.* — 1996. — May. — Vol. 53. — Pp. 5799–5809. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.53.5799>.
- [44] *Hidaka Yoshimasa, Kunihiro Teiji.* Renormalized linear kinetic theory as derived from quantum field theory: A novel diagrammatic method for computing transport coefficients // *Phys. Rev. D.* — 2011. — Apr. — Vol. 83. — P. 076004. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.076004>.
- [45] *Nieves Jose, Sahu Sarira.* Taming the pinch singularities in the two-loop neutrino self-energy in a medium // *preprint arXiv:2104.04459*. — 2021. — 04.
- [46] *Akhmedov E. T., Moschella U., Popov F. K.* Characters of different secular effects in various patches of de Sitter space // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Apr. — Vol. 99. — P. 086009. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.99.086009>.
- [47] *Akhmedov E. T., Burda Ph.* Solution of the Dyson-Schwinger equation on a de Sitter background in the infrared limit // *Phys. Rev. D.* — 2012. — Aug. — Vol. 86. — P. 044031. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.044031>.
- [48] *Akhmedov E. T., Popov F. K., Slepukhin V. M.* Infrared dynamics of the massive ϕ^4 theory on de Sitter space // *Phys. Rev. D.* — 2013. — Vol. 88. — P. 024021.
- [49] *Akhmedov E., Astrakhantsev Nikita, Popov Fedor.* Secularly growing loop corrections in strong electric fields // *Journal of High Energy Physics.* — 2014. — 05. — Vol. 2014.
- [50] *Abrikosov A. A., Gor'kov L. P., Dzyaloshinskii I. E.* Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics. — Oxford: Pergamon, 1965.
- [51] *Andersen Jens O.* Theory of the weakly interacting Bose gas // *Rev. Mod. Phys.* — 2004. — Vol. 76. — P. 599.

- [52] *Honkonen J.* Contour-ordered Green's functions in stochastic field theory // *Theoret. and Math. Phys.* — 2013. <https://doi.org/10.1007/s11232-013-0069-2>.
- [53] *Faddeev L. D., Slavnov A. A.* Gauge Fields. Introduction to quantum theory (2-nd edition). — Addison-Wesley Redwood City, 1991. — 217 pp.
- [54] Critical Dynamics of the Phase Transition to the Superfluid State / Yu. A. Zhavoronkov, M. V. Komarova, Yu. G. Molotkov, M. Yu. Nalimov // *Theoret. and Math. Phys.* — 2019. <https://doi.org/10.4213/tmf9674>.
- [55] *Keldysh L. V.* Diagram technique for nonequilibrium processes // *Sov. Phys. JETP.* — 1965. — Vol. 20. — P. 1018. — [Zh. Eksp. Theor. Fiz. **47**, 1515 (1964)].
- [56] *Schwinger Julian.* Brownian Motion of a Quantum Oscillator // *Journal of Mathematical Physics.* — 1961. — Vol. 2, no. 3. — Pp. 407–432. <https://doi.org/10.1063/1.1703727>.
- [57] *Hyrkäs M. J., Karlsson D., van Leeuwen R.* Cutting rules and positivity in finite temperature many-body theory // *preprint arXiv:2203.11083*. — 2022.
- [58] *Hwa Rudolph C, Teplitz Vigdor L.* Homology and Feynman integrals. Mathematical physics monograph series. — New York, NY: Benjamin, 1966. <http://cds.cern.ch/record/102287>.
- [59] *Wyld H. W.* // *Ann. Phys.* — 1961. — Vol. 14, no. 1. — Pp. 143–165.
- [60] *Landau L. D., Lifshitz E. M.* Fluid Mechanics, Second Edition: Volume 6 (Course of Theoretical Physics). Course of theoretical physics / by L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Vol. 6. — 2 edition. — Butterworth-Heinemann, 1987. — . <http://www.worldcat.org/isbn/0750627670>.
- [61] Model A of critical dynamics: 5-loop ε expansion study / L. Ts. Adzhemyan, D. A. Evdokimov, M. Hnatič et al. // *preprint arXiv:2201.12640*. — 2022.
- [62] The dynamic critical exponent z for 2d and 3d Ising models from five-loop ε expansion / L. Ts. Adzhemyan, D. A. Evdokimov, M. Hnatič et al. // *Phys. Lett. A.* — 2022. — Vol. 425. — P. 127870.
- [63] *Täuber Uwe C.* Critical Dynamics: A Field Theory Approach to Equilibrium and Non-Equilibrium Scaling Behavior. — Cambridge University Press, 2014.
- [64] *Täuber Uwe C.* Renormalization Group: Applications in Statistical Physics // *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements.* — 2012. — Vol. 228. — Pp. 7–34. — “Physics at all scales: The Renormalization Group” Proceedings of the 49th Internationale Universitätswochen für Theoretische Physik. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920563212001594>.
- [65] *Andersen Hans.* Functional and graphical methods for classical statistical dynamics. I. A formulation of the Martin–Siggia–Rose method // *Journal of Mathematical Physics.* — 2000. — 04. — Vol. 41. — Pp. 1979–2020.

- [66] *Il'in A. M. Ershov A. A. // Proc. Steklov Inst. Math.* — 2010. — Vol. 15, no. 3. — Pp. 131–142.
- [67] *Ershov A. A. Rusanova M. I // Proc. Steklov Inst. Math.* — 2017. — Vol. 22, no. 1. — P. 72–80.
- [68] *Il'in A. M. Danilin A. R. Asymptotic methods in analysis (In Russian).* — Moscow, Fizmatlit Publ, 2009.
- [69] *Mattuck R. A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem: Second Edition.* — Courier Corporation, 2012.
- [70] Visualizing Poiseuille flow of hydrodynamic electrons / Joseph Sulpizio, Lior Ella, Asaf Rozen et al. // *Nature.* — 2019. — P. 75–79.
- [71] Two-Dimensional Gas of Massless Dirac Fermions in Graphene / K. Novoselov, A.K. Geim, S. Morozov et al. // *Nature.* — 2005. — 12. — Vol. 438. — Pp. 197–200.