

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(СПбГУ)

Кафедра статистической физики



Захаров Дмитрий Васильевич

Выпускная квалификационная работа:

Получение надежных оценок критического индекса ν модели φ^4

Уровень образования: бакалавриат:

Направление: 03.03.02 «Физика»

Основная образовательная программа: СВ.5011.2017 «Физика»

Научный руководитель:
профессор,
кафедра Статистической физики, д.ф.-м.н., проф.
Аджемян Л.Ц.

Рецензент:
профессор,
кафедра Физики высоких энергий и элементарных частиц,
д.ф.-м.н.
Антонов Н.В.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

Введение	2
1. Паде аппроксимации	3
2. Паде аппроксимации с учетом граничных условий в виде дополнительных уравнений системы	5
3. Конформ-борелевское пересуммирование	7
4. Конформ-борелевское пересуммирование с привязкой в граничной точки	10
5. Метод Паде-Леруа	12
Заключение	15

Предметом исследования данной дипломной работы является нахождение оптимального способа вычисления критического индекса ν модели φ^4 для случая $n = 0$.

Введение

Общие черты описания поведения цепных полимеров с большим числом звеньев N в хорошем растворителе и поведения ферромагнетиков вблизи точки Кюри были впервые отмечены Де Женем [1]. Статистические характеристики макромолекулы могут быть заданы функцией $\rho(s)$, определяющей вероятность того, что ее концы находятся на расстоянии s . Она позволяет, в частности, рассчитать среднеквадратичное расстояние между концами $R_F = \langle s^2 \rangle^{1/2}$ – так называемый радиус Флори. Сложность в нахождении зависимости R_F от длины цепочки N существенно зависит от размерности пространства d . Если пренебречь взаимным отталкиванием звеньев цепочки, то задача сводится к задаче случайных блужданий и $R_F \sim N^{1/2}$. Так и будет для пространств достаточно высокой размерности $d > 4$, в которых роль самопересечений не существенна. В случае $d < 4$ запрет на учет самопересечений приводит, как показывает эксперимент (натуральный и численный), к закону вида

$$R_F \sim N^\nu, \quad (1)$$

где $\nu(d) > 1/2$. Задача теории – обосновать этот закон и рассчитать $\nu(d)$.

Поведение ферромагнетиков вблизи точки Кюри также становится простым при $d > 4$ – в этом случае справедлива теория среднего поля. При $d < 4$ необходим учет растущих при $\tau = (T - T_c)/T_c \rightarrow 0$ флуктуаций, характеризующихся радиусом корреляции

$$\xi \sim |\tau|^{-\nu}. \quad (2)$$

Де Жен отметил, что обсуждаемая аналогия оказывается еще более тесной, если рассмотреть зависимость характеристик фазового перехода от числа компонент параметра порядка n , которое определяется структурой решетки. Кроме случая $n = 3$, когда имеется 3 независимых направления вектора намагниченности, различают также случай одноосного магнетика ($n = 1$, – модель Изинга) и случай $n = 2$ ("легкая плоскость").

Индекс ν в (2) равен $1/2$ при $d > 4$, при $d < 4$ метод ренормгруппы позволяет в рамках φ^4 -модели вычислять этот индекс в виде ряда по степеням отклонения $\varepsilon = 4 - d$ размерности пространства от критического значения $d_c=4$:

$$\nu = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n+2}{2(n+8)} \varepsilon + \dots \right). \quad (3)$$

Как отметил Де Жен, модель ферромагнетика переходит в модель случайных блужданий без самопересечений, если положить $n = 0$, при этом асимптотике $\tau \rightarrow 0$ соответствует $N \rightarrow \infty$, а функция $\rho(s)$ принимает скейлинговую форму $\rho(s) = R_F^{-d} f(s/R_F)$ [1], [2]. Для вычисления индекса ν в (1) можно использовать ε -разложение, положив $n = 0$ в (4):

$$\nu = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{8} + \dots \right). \quad (4)$$

В последнее время достигнут большой прогресс в нахождении старших членов ε -разложения и точность разложения (3) доведена до ε^7 включительно [3], [4]. Однако ряды ε разложения являются асимптотическими и их необходимо пересуммировать. Целью настоящей работы является проведение такого пересуммирования ряда (4). Спецификой определения индекса ν для случая $n = 0$ является то, что известно его точное значение $\nu = 1$ для случая $d = 1$ (это очевидно из постановки задачи для случайных блужданий), а также гипотетическое предположение $\nu = 3/4$ для $d = 2$, высказанное в статье [5]. Проверка данной гипотезы также будет являться целью данной работы. Знание же граничного значения в $d = 1$ можно использовать двояко – оно может служить тестом для проверки эффективности используемых методов суммирования при определении значения ν при $d = 3$ и $d = 2$, а может использоваться как информация, дополняющая ε - разложение. Оба этих подхода реализованы в данной работе.

Простая и очень удачная аппроксимация зависимости $\nu(d)$ была предложена в работе [6] на основе баланса энтропийного вклада в конформацию цепочки и сил отталкивания между ее звеньями в свободную энергию:

$$\nu(d) = \frac{3}{d+2}. \quad (5)$$

Это соотношение оказывается точным для размерностей $d = 4$, $d = 1$ и дает при $d = 2$ значение $3/4$, совпадающее с предсказанным в работе [5], а также полученным в рамках двумерных конформных теорий. При $d = 3$ формула (5) дает значение 0.6, удивительным образом близкое к величине 0.587597, полученной методом Монте-Карло в работе [7].

Перечислим всю имеющуюся в настоящее время информацию о зависимости $\nu(d)$. В рамках метода ренормгруппы вычислены вплоть до седьмого порядка члены разложения по $\varepsilon = 4 - d$ величины, обратной к $\nu(d)$:

$$\frac{1}{\nu} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \varepsilon^i, \quad (6)$$

$$\frac{1}{\nu} = 2 - 0.25 \varepsilon - 0.085937 \varepsilon^2 + 0.114425 \varepsilon^3 - 0.287512 \varepsilon^4 + 0.956133 \varepsilon^5 - 3.855754 \varepsilon^6 + 17.783883 \varepsilon^7 \quad (7)$$

Для коэффициентов A_n ряда (6) известна асимптотика высокого порядка:

$$A_n = c(-a)^n n! n^{b_0} [1 + O(1/n)], \quad a = \frac{1}{3}, \quad b_0 = \frac{7}{2}. \quad (8)$$

Как уже упоминалось, известны также частные значения:

$$\nu(1) = 1, \quad (9)$$

$$\nu(2) = 3/4. \quad (10)$$

Целью настоящей работы является пересуммирование ряда (7) и проверка согласованности полученных результатов с приведенной выше информацией. Пересуммирование будет проводиться различными методами, в основе которых лежат борелевское пересуммирование и аппроксимация Паде.

1. Паде аппроксимации

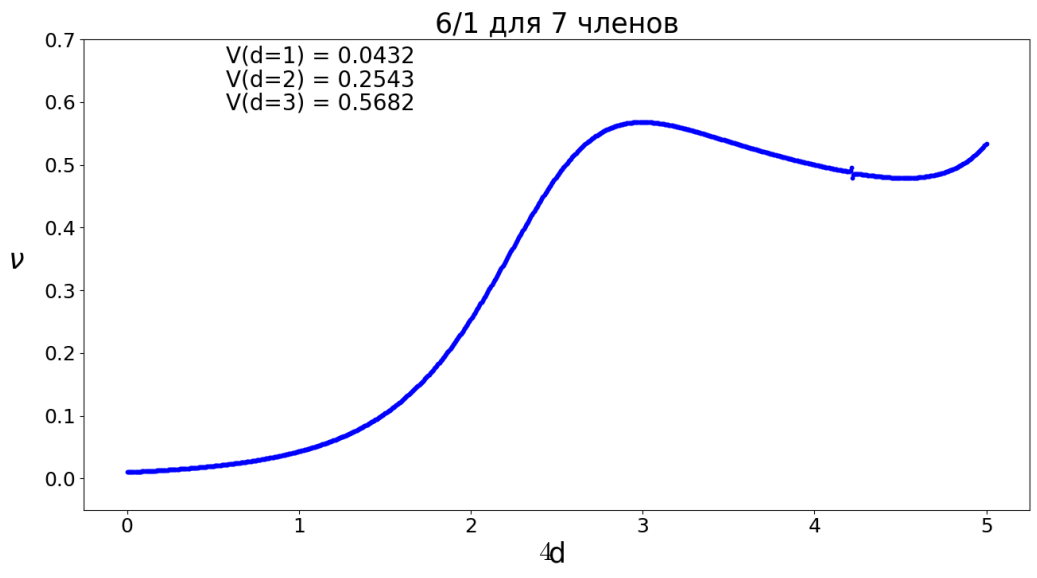
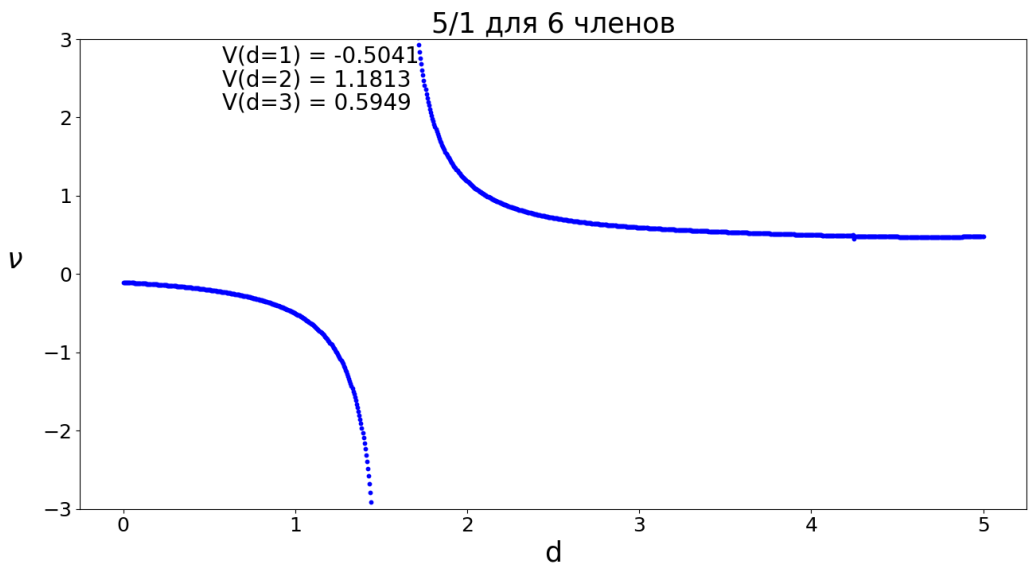
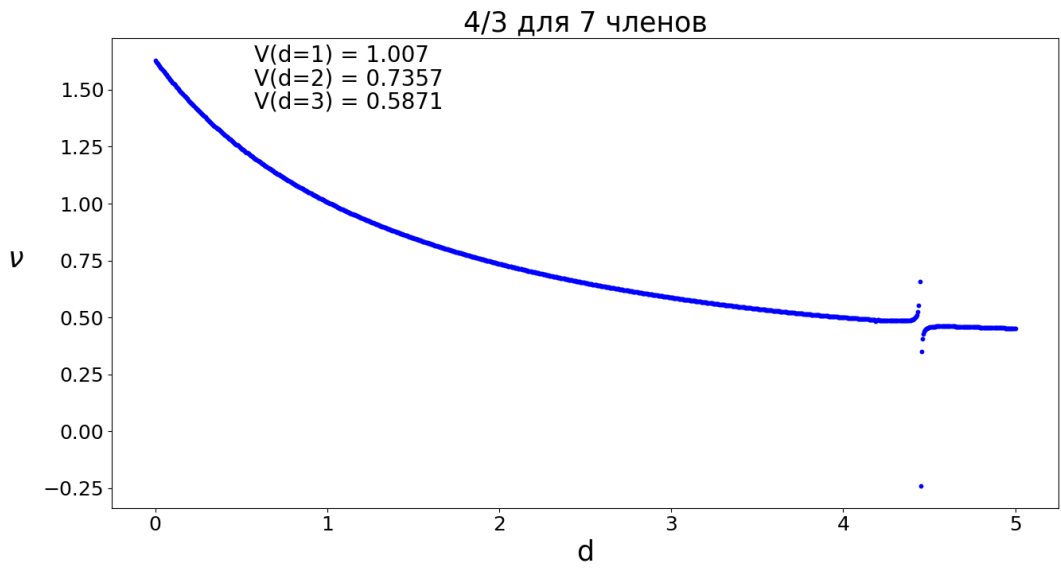
Данный метод является одним из наиболее простых и распространенных методов аппроксимации. Его простота заключается в необходимости учета лишь известных членов ряда, без асимптотики на бесконечности и в целом без учета факта, что ряд является расходящимся.

Пусть нам известно N первых членов ряда с коэффициентами f_n . Предположим, что этот ряд является обрезанным разложением рациональной функции вида:

$$f(g) = \frac{P^{(L)}(g)}{Q^{(M)}(g)} = \frac{\sum_{n=0}^L p_n g^n}{\sum_{n=0}^M q_n g^n} = \sum_{n=0}^N f_n g^n + O(g^{N+1}). \quad (11)$$

Для однозначного нахождения коэффициентов полиномов $P^{(L)}(g)$ и $Q^{(M)}(g)$ необходимо подбирать степени полиномов с условием $L + M = N - 1$, также будем полагать $q_0 = 1$. Нахождение коэффициентов p_n и q_n сводится к решению системы нелинейных уравнений. Аппроксимации (11) соответствует набор разрешенных отношений полиномов $[L/M]$. Подставляя в (11) интересующие нас значения g , мы получим набор значений $f(g)$, который можно усреднить и получить "верное" значение для функции $f(g)$.

Однако Паде аппроксимация имеет свои недочеты, связанные с наличием полюсов или экстремумов. Из-за этих особенностей получаемые значения оказываются в некоторых случаях некорректными. Ниже представлены три графика аппроксимаций для 7 и 6 членов разложения:



Данные графики характеризуют зависимость индекса ν от размерности d . Значения d являются физическими лишь в области от 1 до 4, поэтому особенность первого графика между $d = 4$ и $d = 5$ не портит значения индекса. Второй график имеет разрыв в интересующей нас области, соответственно эта аппроксимация не будет учитываться при усреднении. На третьем же графике наблюдается явный максимум, являющийся признаком некорректной аппроксимации, так как величина ν должна убывать с увеличением d . Ниже приведена таблица значений $\nu(d)$ для разного количества известных исходных членов ряда:

	2 [0/2]	3 ([1/2], [2/1])	4 ([1/3], [3/1])	5 ([1/4], [2/3], [3/2])	6 ([1/5], [2/4], [3/3], [4/2])	7 ([2/5], [3/4], [4/3], [5/2])
$d = 1$	0.951	0.84 (7)	1.0 (2)	0.87 (5)	1.19 (16)	0.95 (2)
$d = 2$	0.742	0.69 (2)	0.74 (3)	0.712 (8)	0.77 (3)	0.729 (3)
$d = 3$	0.592	0.581 (3)	0.588 (2)	0.5854 (5)	0.5885 (13)	0.5869 (1)

Как видно из таблицы, с увеличением числа членов ряда растет количество допустимых аппроксимаций, при этом разброс по значениям в большинстве случаев сокращается, что позволяет нам получать результаты с более выверенной погрешностью. Однако, в особенности для точек $d = 2$ и $d = 1$, наблюдаются значительные отклонения от предполагаемых значений: $\nu_{d=2} = 0.75$ и $\nu_{d=1} = 1$. Для $\nu_{d=1}$ аппроксимации поочередно подходят к точному значению с разных сторон - сверху и снизу. Однако, отчетливо прослеживается сокращение отклонений от точного значения. Гипотетическое предположение о $\nu_{d=2} = 0.75$, как видно из таблицы не оправдывается, "верное" значение лежит в области $\nu_{d=2} = 0.73$.

2. Паде аппроксимация с учетом граничных условий

Метод, представленный в этом разделе, является улучшением предыдущего способа аппроксимации. Как уже говорилось, для нахождения полиномов $[L/M]$ нам необходимо решать систему нелинейных уравнений. При этом, если известно значение искомой функции $f(g)$ в некоторой точке g_1 , мы можем добавить эту информацию в систему в виде уравнения:

$$\frac{\sum_{n=0}^L p_n g_1^n}{\sum_{n=0}^M q_n g_1^n} = f(g_1). \quad (12)$$

Соответственно, добавляя новое уравнение, мы получаем возможность найти уже аппроксимацию $[(L+1)/M]$ или $[L/(M+1)]$ при том же количестве известных коэффициентов исходного ряда. Также следует отметить, что в этом методе используются такие же правила выбора аппроксимаций, как и в предыдущем случае, то есть без экстремумов и полюсов в интересующем нас интервале. Ниже приведены таблицы с усредненными значениями по всем аппроксимациям:

		1 [0/2]	3 [1/2], [2/1], [0,3]	3 ([0/4], [1/3], [2/2], [3/1])	4 ([1/4], [2/3], [3/2], [4/1])
Учет привязки в $d = 1$	$d = 2$	0.7143	0.75 (1)	0.741 (12)	0.740 (3)
	$d = 3$	0.5790	0.591 (3)	0.590 (5)	0.5881 (4)
Учет привязки в $d = 2$	$d = 1$	0.9688	1.00 (3)	1.13 (7)	1.06 (2)
	$d = 3$	0.5938	0.592 (1)	0.588 (4)	0.5888 (2)

		5 ([1/5], [3/3], [4/2])	6 ([3/4], [2/5], [4/3], [5/2])	7 ($[(3/5)]_{d=1}$, [4/4], [5/3], [6/2], [2/6])
Учет привязки в $d = 1$	$d = 2$	0.729 (4)	0.73767 (2)	0.7346(8)
	$d = 3$	0.5863 (3)	0.5874 (2)	0.5871 (1)
Учет привязки в $d = 2$	$d = 1$	1.11 (1)	1.09 (2)	1.13 (4)
	$d = 3$	0.5877 (3)	0.58803 (13)	0.58775 (13)

Учесть граничное условие можно и другим способом - с помощью уравнения:

$$f(g) = f_1 + (g_1 - g)A(g), \quad (13)$$

где

$$f_1 = f_{g=g_1}, \quad A(g) = \frac{f(g) - f_1}{g_1 - g}. \quad (14)$$

Функция $A(g)$ из уравнения (13) раскладывается в ряд, и в качестве ее аппроксимации необходимо найти полиномы $[L/M]$. Затем полученное выражение подставляется в уравнение (13), и мы получаем выражение для исходной функции $f(g)$. Этот способ также позволяет задействовать меньшее количество членов исходного ряда. Ниже приведена таблица с полученными данными:

		1 [0/1]	2 [1/1], [0/2]	3 ([2/1], [1/2])	4 ([1/3], [2/2], [3/1])
Учет привязки в $d = 1$	$d = 2$	0.71429	0.752 (2)	0.7291 (5)	0.739 (3)
	$d = 3$	0.5790	0.592 (4)	0.586 (1)	0.5878 (4)
Учет привязки в $d = 2$	$d = 1$	—	0.99 (7)	1.12 (2)	1.07 (1)
	$d = 3$	—	0.593 (3)	0.5876 (3)	0.5886 (1)

		5 $([4/1]_{d=1}, [3/2], [2/3])$	6 $([1/5]_{d=1}, [2/4], [3/3], [4/2])$	7 $([2/5], [5/2]_{d=1}, [3/4], [4/3])$
Учет привязки в $d = 1$	$d = 2$	0.728 (5)	0.76 (2)	0.7339 (6)
	$d = 3$	0.5863 (5)	0.589 (2)	0.58706 (4)
Учет привязки в $d = 2$	$d = 1$	1.11 (1)	1.112 (5)	1.11 (1)
	$d = 3$	0.5880 (2)	0.587903 (1)	0.5879 (2)

Можно заметить, что результаты в последних таблицах совпадают в пределах погрешности, в связи с этим можно сказать, что учет граничной точки можно делать любым из двух предложенных методов. Однако метод с привязкой по формуле (13) не позволяет нам учесть сразу несколько известных значений в граничных точках, а для рассмотрения нашей задачи с $n = 0$ это является существенным препятствием в использовании всех доступных граничных значений. Зная значения ν в нескольких точках, мы можем еще больше повысить скорость сходимости к "верному" значению. Конечно, возникает вопрос о нахождении таких граничных значений для других моделей. На данный момент мы можем заключить, что эти граничные значения могут быть найдены либо из других теоретических методов, либо из эксперимента. Ниже приведена таблица усредненных Паде-аппроксимаций с учетом доступных нам значений $\nu_{d=2} = 0.75$ и $\nu_{d=1} = 1$:

	1 ([1/2], [2/1])	2 ([1/3], [2/2], [3/1])	3 ([1/4], [2/3], [4/1])	4 ([1/5], [2/4], [3/3], [5/1])	5 ([1/6], [2/5], [3/4], [5/2])
$d = 3$	0.596 (5)	0.5921 (3)	0.5907 (2)	0.5895 (2)	0.5912 (12)

	6 ([1/7], [2/6], [3/5], [6/2], [7/1])	7 ([2/7], [7/2])
$d = 3$	0.5890 (2)	0.5881 (3)

Как видно из представленных таблиц, гипотеза о $\nu_{d=2} = 0.75$ не подтверждается при учете граничного условия $\nu_{d=1} = 1$, мы опять получаем меньшее значение, лежащее в области 0.735. Также при учете в качестве граничного условия $\nu_{d=2} = 0.75$ мы получаем явное расхождение с точным значением $\nu_{d=1} = 1$, которое не может быть списано на погрешность счета. Более того, при учете $\nu_{d=2} = 0.75$, среди получаемых аппроксимаций, случаев с полюсами больше, чем при $\nu_{d=1} = 1$, что также наводит нас на мысль о некорректности данного граничного условия, что отчетливо отражается при учете сразу двух граничных условий. Для значения в $d = 3$ при увеличении числа членов ряда, разброс значений также наблюдается, только начиная с третьего знака, что полностью согласуется с аппроксимацией с помощью метода Паде без привязок. При этом согласование результатов аппроксимации без привязки и с привязкой становится очевидным уже при учете лишь 5 членов для метода с учетом граничного значения. При этом погрешность становится совсем малой, что позволяет нам сделать вывод о том, что учет верного граничного условия существенно улучшает сходимость, требуя меньшее количество коэффициентов исходного ряда.

3. Борелевское пересуммирование

Борелевское суммирование применяется к асимптотическим рядам вида

$$A(g) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n g^n, \quad (15)$$

в которых асимптотика высокого порядка коэффициентов A_n определяется соотношением (8). Борелевское представление такой функции имеет вид

$$A(g) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^b F(gt), \quad (16)$$

где функция $F(y)$ определяется рядом

$$F(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\Gamma(b+1+n)} y^n, \quad (17)$$

подстановка которого в (16) дает (15) с учетом

$$\int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{b+n} = \Gamma(b+1+n). \quad (18)$$

Ряд (17), в отличие от (15), имеет конечный радиус сходимости, равный a^{-1} (с a из (8)). Проблема в том, что для вычисления интеграла в (16) требуется знание функции $F(y)$ в диапазоне $0 < y < \infty$, т.е. необходимо каким-либо способом аналитически продолжить ее на всю ось. Мы рассмотрим 2 способа решения этой задачи – метод Паде-Бореля-Леруа и метод конформ-Бореля.

Метод конформ-Бореля основан на замене аргумента g функции $A(g)$ на конформную переменную

$$w(g) = \frac{\sqrt{1+ag} - 1}{\sqrt{1+ag} + 1} \quad (19)$$

и переходе от (16) к конформ-борелевскому представлению вида

$$A(g) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^b \left(\frac{gt}{w(gt)}\right)^\mu P(w(gt)). \quad (20)$$

Разложение переменной (19) по g начинается с линейного члена

$$w(g) = \frac{1}{2}ag + O(g^2), \quad (21)$$

соответствующий ряд имеет радиус сходимости a^{-1} . Области изменения $0 < g < \infty$ соответствует область изменения $0 < w < 1$ переменной w . Функция $P(w)$ ищется в виде ряда

$$P(w) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n w^n, \quad (22)$$

коэффициенты которого выбираются так, чтобы разложение функции (20) по g совпадало с (15). Благодаря свойству (21) первые N коэффициентов ряда (22) определяются первыми N коэффициентами ряда (15).

Асимптотика высоких порядков коэффициентов разложения функции (20) в ряд по g имеет вид (8) с заданными параметрами a и b_0 , если на параметр b_0 наложено условие:

$$b = b_0 + \frac{3}{2}.$$

Дополнительный множитель $(\frac{gt}{w(gt)})^\mu$ ("модифицированный конформ-Борель") введен в (20) для того, чтобы иметь возможность управлять асимптотикой "сильной связи":

$$A(g) \sim g^\mu, g \rightarrow \infty.$$

В нашей задаче показатель μ не известен, и мы будем выбирать его из условия наилучшей сходимости последовательных приближений.

Итак, для построения приближенной функции $A^{(N)}(g)$ необходимо учитывать N слагаемых ряда $P(w)$. Подставляя $A(g)$ в виде (15), мы получаем линейную систему из N уравнений, решая которую, мы однозначно определяем коэффициенты P_n и получаем приближенное выражение для $A^{(N)}(g)$:

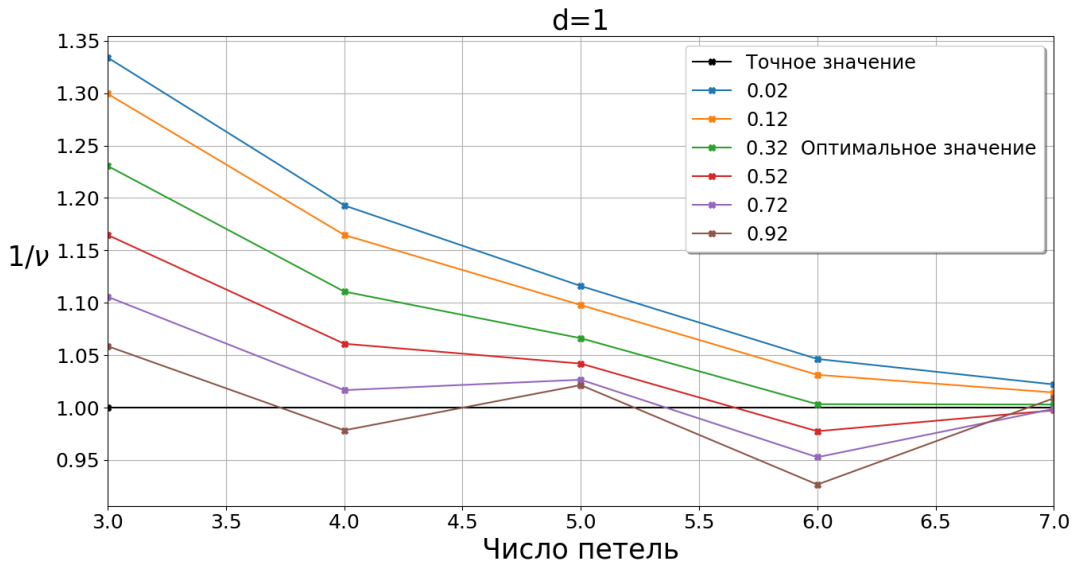
$$A^{(N)}(g) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^b \left(\frac{gt}{w(gt)}\right)^\mu \sum_{n=0}^N P_n(w(gt))^n. \quad (23)$$

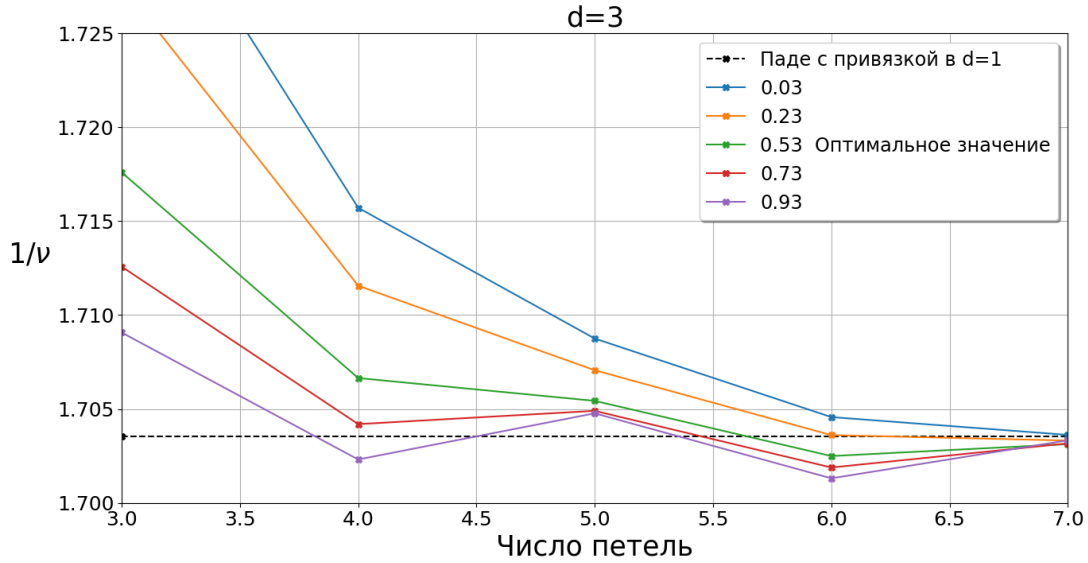
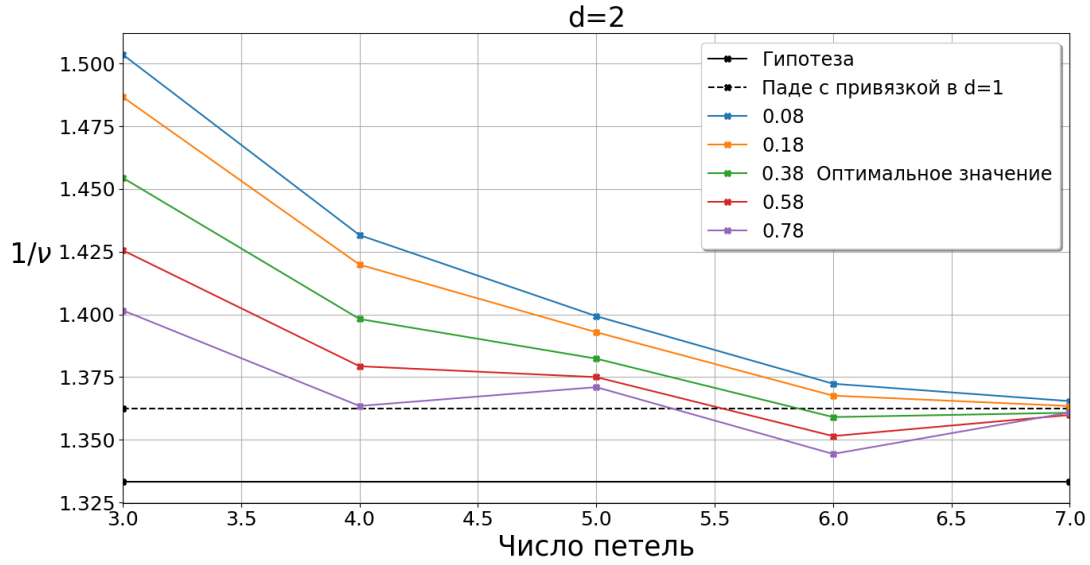
Ниже представлена таблица с полученными значениями после пересуммирования:

	3 петли	4 петли	5 петель	6 петель	7 петель
$d = 1$	0.84 (3)	1.0 (1)	0.977 (1)	1.03 (3)	1.0005 (12)
$d = 2$	0.690 (8)	0.73 (2)	0.7295 (2)	0.739 (4)	0.7350 (2)
$d = 3$	0.5809 (13)	0.586 (2)	0.58657 (2)	0.5874 (2)	0.58714 (1)

Опишем алгоритм получения данной таблицы: сначала выбиралась точка счета $d = 1, d = 2$ или $d = 3$. Для нахождения значения ν в этой точке проводилось пересуммирование, для которого подбиралось оптимальное значение μ с учетом используемого количества слагаемых исходного ряда. Далее для найденного μ вычислялись значения ν в двух других точках d . Данная процедура повторялась для всех точек счета и всех доступных членов ряда, кроме первых двух. Дело в том, что у критерия нахождения μ для случаев с учетом только первого и первых двух слагаемых нет минимума. То есть минимальное значение критерия достигается при $\mu \rightarrow -\infty$, в связи с этим нахождение пересуммированного значения $f(d)$ становится невозможным. Значения ν для каждого d усреднялись, эти значения и приведены в таблице. В качестве погрешности представлена погрешность отклонения от среднего.

Теперь обсудим критерий для нахождения оптимального μ . Для наглядной иллюстрации приведем графики "вееров" в разных точках для разных μ в зависимости от учета разного количества членов ряда:





Из этих графиков интуитивно понятно, что приближение к оптимальному значению параметра μ должно давать максимальную плотность линий с минимальным наклоном. Для количественного описания критерия была выбрана формула:

$$Q = \sqrt{(\partial_\nu A)^2 + (\partial_\nu B)^2 + (A)^2 + (B)^2}, \quad (24)$$

где A – разность последнего и предпоследнего членов, B – разность предпоследнего и предпредпоследнего членов, а первые два слагаемых – соответствующие разности производных. Однако стоит отметить, что в данной задаче параметр μ является сугубо подгоночным и, как видно из приведенных выше графиков, даже при разбросе μ от 0 до 1, все "траектории" сходятся к близким значениям, отличающимся только в четвертом знаке после запятой. Выбор же конкретно такого критерия обусловлен его эффективностью применительно к другим критическим индексам, в частности, для критического индекса Фишера η . Дополнительным аргументом является то, что при вычислении $1/\nu$ для $d = 1$ мы получаем оптимальную траекторию, практически точно лежащую на верное значение $\nu = 1$. Для $d = 2$ получаемый результат снова расходится с гипотетическим предположением $\nu_{d=2} = 0.75$ (изображено на графике сплошной черной линией) и равен $\nu_{d=2} = 0.735$, что в пределах погрешности сходится со значением, полученным с

помощью Паде аппроксимации с привязкой в $d = 1$. Значения, вычисленные этим методом, приводятся на графике пунктирной линией. Аналогичное совпадение с предыдущими результатами мы видим и для $d = 3$. В связи с этим можно заключить, что метод конформ-борелевского пересуммирования дает близкие к "верным" результаты, которые слабо зависят от введенного параметра "сильной связи".

4. Конформ-борелевское пересуммирование с привязкой в граничной точке

Для улучшения сходимости пересуммированного ряда к "верному" значению нам нужно знать, как можно больше коэффициентов исходного ряда. Однако нахождение таких коэффициентов является трудной вычислительной задачей, в связи с этим встает вопрос, каким образом можно модифицировать данный метод пересуммирования, чтобы получать хорошую сходимость, но при этом задействовать как можно меньше известных членов ряда. Такая модификация возможна, если в некоторой точке значения функции известно. Поступим аналогично тому как это было сделано в главе 2 – представим исследуемую функцию $f(g)$ в виде:

$$f(g) = f_1 + (g_1 - g)A(g), \quad (25)$$

где

$$f_1 = f_{g=g_1}, \quad A(g) = \frac{f(g) - f_1}{g_1 - g}. \quad (26)$$

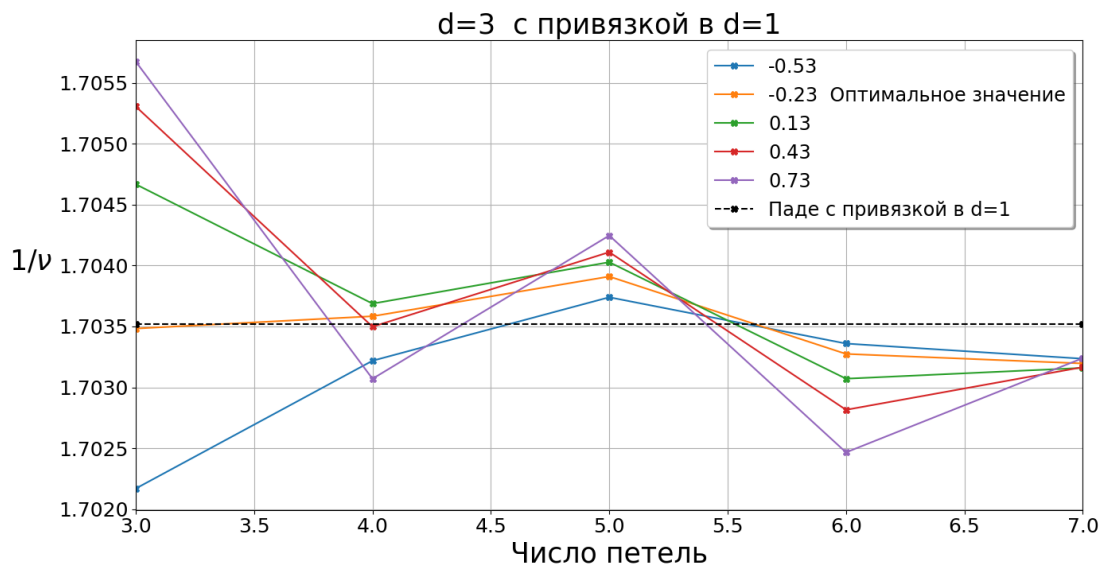
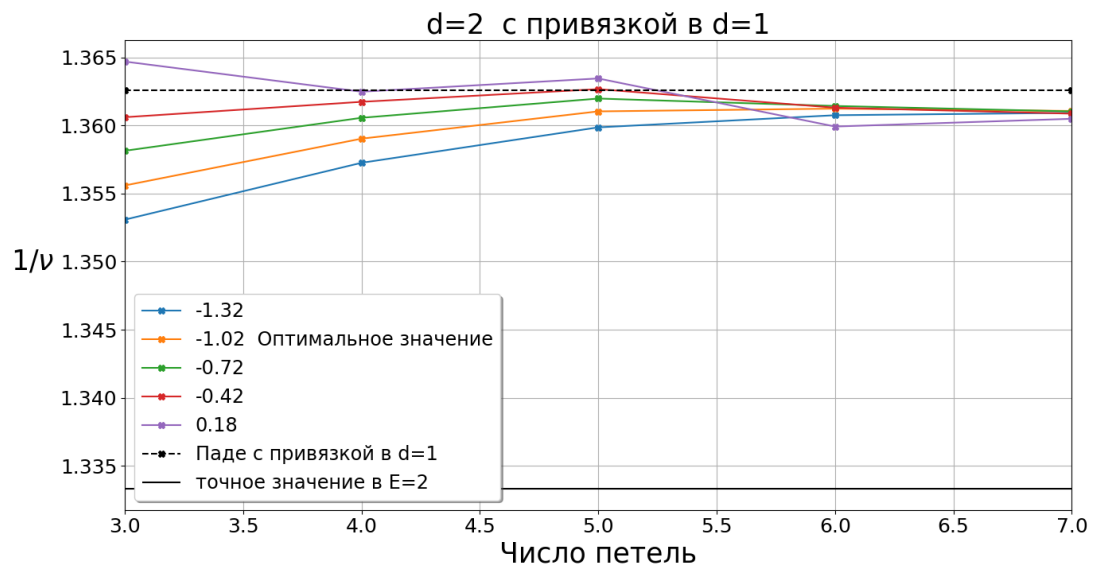
Затем, используя известный начальный отрезок ряда $f^{(N)}(g) = \sum_{n=0}^N C_n g^n$, рассчитаем соответствующий отрезок ряда для функции $A(g)$

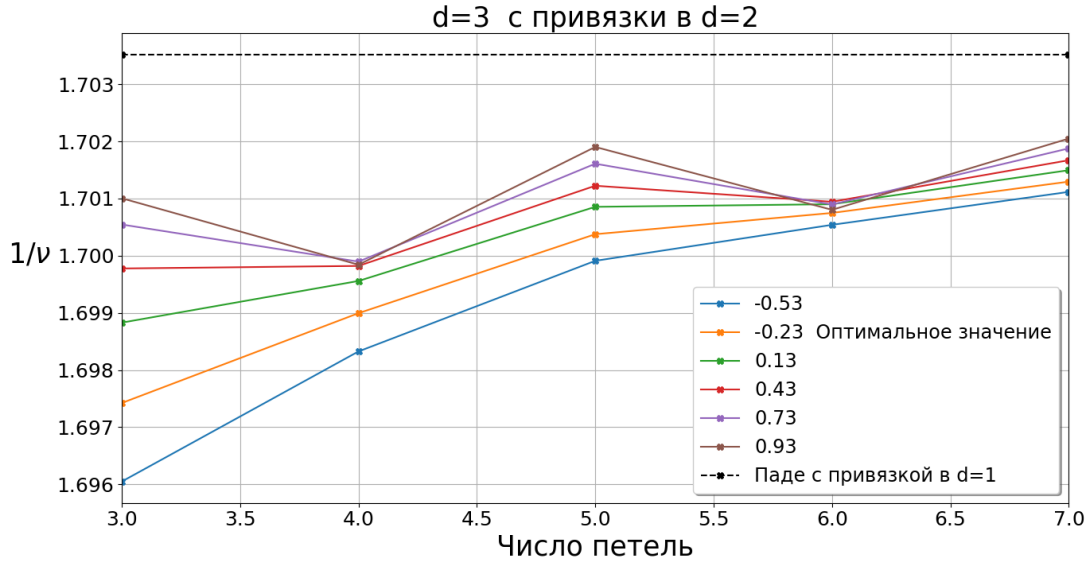
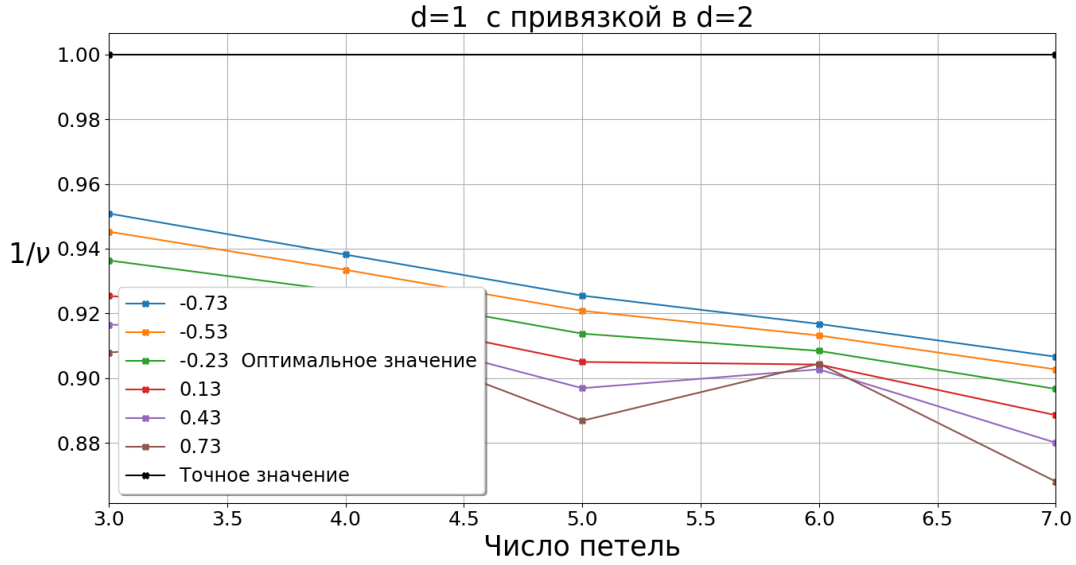
$$A^{(n)}(g) = \sum_{n=0}^N \bar{C}_n g^n \quad (27)$$

и проведем его пересуммирование. Можно надеяться, что данный пересуммированный ряд будет давать "верное" значение функции при использовании меньшего числа членов исходного ряда. Ниже приведена таблица с полученными результатами с учетом $\nu_{d=1} = 1$ и $\nu_{d=2} = 0.75$:

		3 петли	4 петли	5 петель	6 петель	7 петель
Учет привязки в $d = 1$	$d = 2$	0.7355 (6)	0.73451 (4)	0.7338 (4)	0.7346 (1)	0.7348 (1)
	$d = 3$	0.5875 (2)	0.5871 (3)	0.5869 (1)	0.58709 (2)	0.58712 (1)
Учет привязки в $d = 2$	$d = 1$	1.0583	1.092 (2)	1.1077	1.104 (2)	1.11 (1)
	$d = 3$	0.5896	0.58830 (3)	0.58790	0.58794 (2)	0.5878 (1)

Как видно из таблицы учет привязки в $d = 2$ опять дает неверные результаты для $\nu_{d=1}$, поэтому также можно заключить, что наиболее вероятным значением $\nu_{d=2}$ является 0.735 вместо 0.75. Интересующее же нас значение ν при $d = 3$ совпадает в пределах погрешности со значениями, полученными в предыдущих методах: $\nu_{d=3} = 0.5871$. Для большей наглядности сказанного рассмотрим графики "вееров" для параметра μ с учетом привязки:





Как видно из данных графиков, привязка в $\nu_{d=1} = 1$ дает сходимость в четвертом знаке к значению, полученному ранее с помощью аппроксимации Паде, начиная уже с четырех членов исходного ряда. Однако привязка $\nu_{d=2} = 0.75$ приводит к противоположному эффекту – в точке $d = 1$ с увеличением количества членов исходного ряда получаемое значение все дальше отклоняется от точного. Сами "веера" при этом имеют явный наклон и не уплотняются с увеличением количества слагаемых.

Таким образом, учет правильного граничного значения позволяет почти в два раза ускорить сходимость к "верному" значению, это особенно актуально, учитывая возрастающую сложность вычисления каждого последующего члена разложения.

5. Метод Паде-Леруа

Как уже упоминалось в главе 3 при рассмотрении борелевского преобразования, одним из способов аналитического продолжения функции (17) в область $0 < y < \infty$ является метод Паде-Леруа, который мы и обсудим в данной главе. В этом методе для функции $F(y)$ в борелевском представлении (16) используется

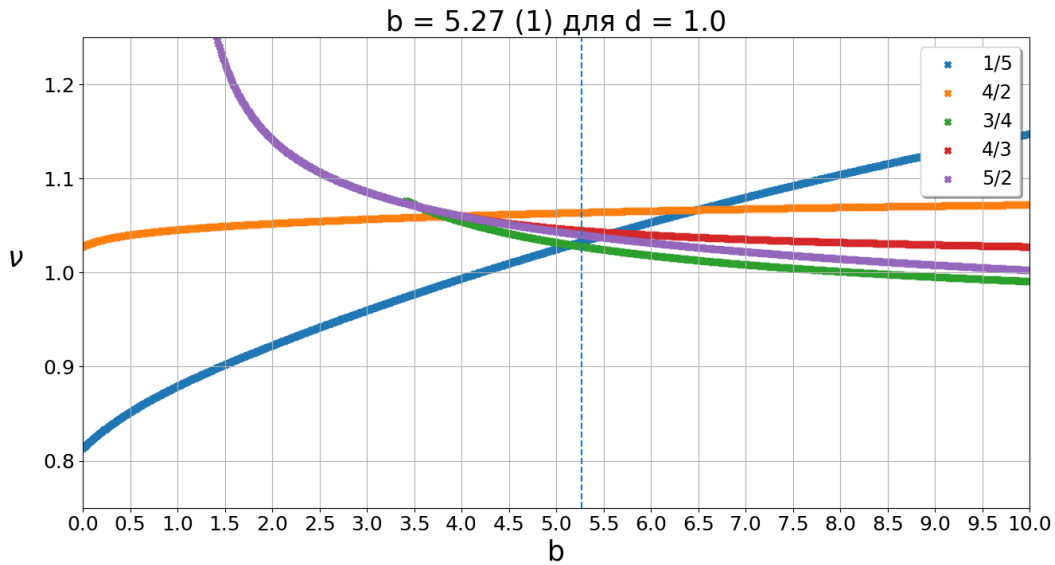
аппроксимация Паде, т.е. она представляется в виде отношения полиномов

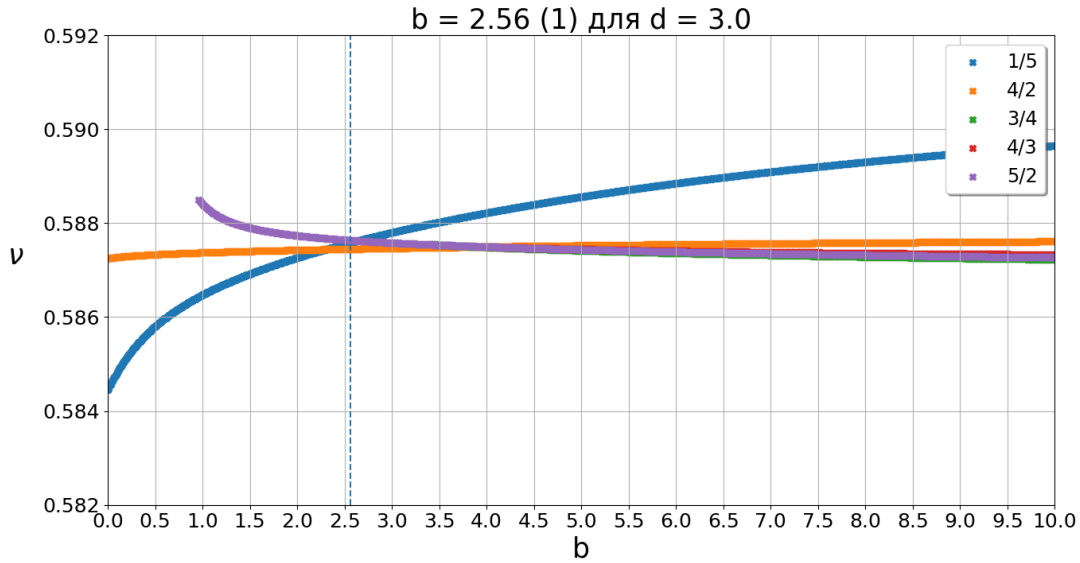
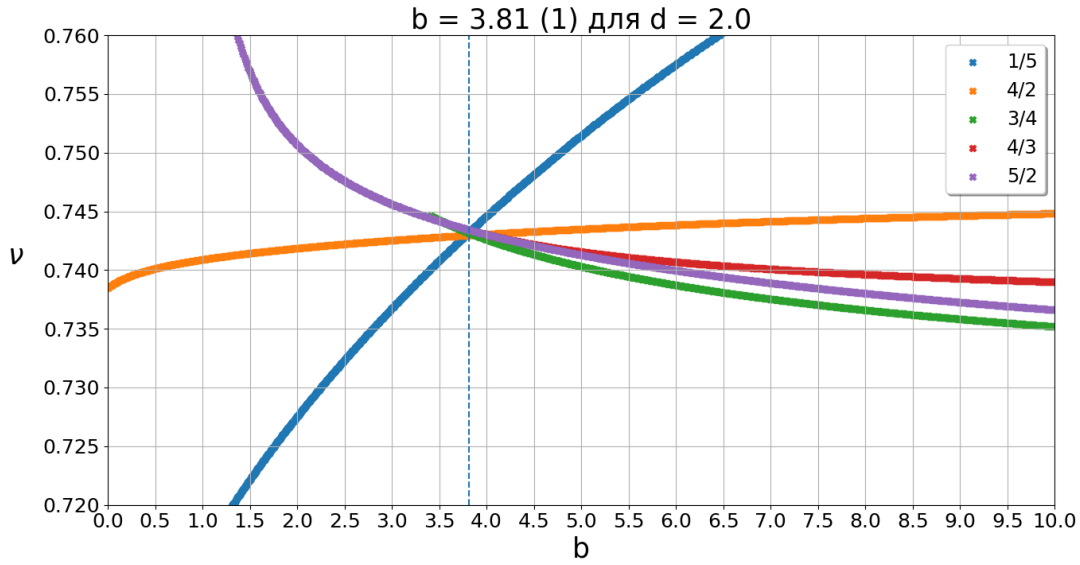
$$F(y) = \frac{P^{(L)}(y)}{P^{(M)}(y)} \quad (28)$$

– $[L/M]$ аппроксимация. Коэффициенты полиномов выбираются так, чтобы после подстановки функции $F(gt)$ в (16), разложения ее в ряд и взятия соответствующих интегралов правильно воспроизводились N первых известных коэффициентов в разложении (15). Параметр b в этом методе рассматривается как подгоночный и выбирается для улучшения результатов пересуммирования. Из допустимых вариантов с $L + M = N - 1$ отбраковываются те, в которых полином $P^{(M)}(y)$ имеет ноль на интервале $0 < y < \infty$ – в этом случае интеграл (16) расходится. Положение нулей для данной аппроксимации $[L/M]$ зависит от параметра b , при некоторых значениях которого нули могут попадать в указанный интервал $0 < y < \infty$.

Выбор b будем проводить по методу, предложенному в [8]. Строятся графики зависимости $\nu(b)$ при всех допустимых аппроксимациях $[L/M]$ с учетом максимального числа N известных коэффициентов исходного ряда, а также графики такой зависимости с учетом $N - 1$ членов ряда. Считается, что оптимальное значение b лежит в области максимальной плотности построенных кривых. Для нахождения этого значения вычисляются средние значения ν в каждой точке b с интервалом в $\Delta b = 0.01$ и определяется значение b , соответствующее минимальному среднеквадратичному отклонению аппроксимаций от среднего значения.

Приведем полученные графики $\nu(b)$ для $d = 1$, $d = 2$ и $d = 3$:





Соответствующие значения $\nu(d)$ приведены в таблице для различных значений учтенного числа членов исходного ряда.

	3 петли	4 петли	5 петель	6 петель	7 петель
$d = 1$	0.84 (8)	1.0 (2)	0.91 (4)	1.05 (2)	1.01 (3)
$d = 2$	0.69 (3)	0.72 (3)	0.719 (6)	0.75 (3)	0.74 (1)
$d = 3$	0.582 (3)	0.586 (3)	0.5862 (4)	0.5879 (5)	0.5876 (2)

Как видно из таблицы, значения в $d = 1$ и $d = 3$ хорошо согласуются с результатами прошлых методов. В $d = 2$ результат также согласуется с предыдущими значениями и оказывается между гипотетическим результатом 0.75 и 0.735, вычисленным с помощью метода Паде аппроксимации и конформ-борелевского пересуммирования. Одним из явных недостатков этого метода является большая по сравнению с остальными методами погрешность в $d = 2$ и $d = 1$.

Закключение

В данной работе были проанализированы три метода пересуммирования: Паде-аппроксимация, конформ-борелевское пересуммирование и метод Паде-Леруа. В первых двух методах также использовалась привязка к значениям в граничных точках $d = 1$ и $d = 2$. Наиболее близкие к ожидаемым значениям индекса ν дал метод Паде-Леруа, в котором увеличение числа учтенных членов ряда последовательно приближало результат к точному значению $\nu = 1$ для $d = 1$, Монте-Карловскому значению $\nu = 0.587597$ работы [7] для $d = 3$ и предсказанному двумерными конформными теориями значению $3/4$ для $d = 2$. Удивительным образом при всех способах пересуммирования были при $d = 1$ получены значения, близкие к точному $\nu = 1$, и это несмотря на весьма большие значения параметра разложения $\varepsilon = 3$ в этом случае. В то же время для $d = 2$ во всех способах суммирования, кроме Паде-Леруа, результаты противоречат значению $3/4$ и дают $\nu = 0.735$, хотя параметр разложения в этом случае меньше $\varepsilon = 2$. Последнее обстоятельство связано, возможно, с тем, что именно при $d = 2$ в системе возникают дополнительные симметрии, не учтенные в ε -разложении.

Результаты работы показывают также, что учет при суммировании дополнительной информации в виде точного значения при $d = 1$ значительно ускоряет сходимость итераций.

Обобщая результаты всех использованных методов суммирования, приведем ниже таблицы наших результатов и результатов прошлых лет:

	Паде	Паде с привязкой в $d = 1$	Конформ-Борель	Конформ-Борель с привязкой в $d = 1$	Паде-Леруа
$d = 1$	0.95 (2) (8)	---	1.005 (12)	---	1.01 (3)
$d = 2$	0.729 (3)	0.73767 (2)	0.7350 (2)	0.7348 (1)	0.74 (1)
$d = 3$	0.5869 (1)	0.5871 (1)	0.58714 (1)	0.58712 (1)	0.5876 (2)

Эксперимент (1969) [6]	Метод Монте Карло (2016) [7]	ε разложение с учетом 6 петель (2017) [3]
$\nu_{d=3} = 0.592$	$\nu_{d=3} = 0.587597$	$\nu_{d=2} = 0.7397$ $\nu_{d=3} = 0.5874$

Список литературы

- [1] Pierre-Gilles de Gennes. *Scaling Concepts in Polymer Physics*. Cornell University Press, 1979.
- [2] Jean Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Clarendon Press. Oxford, 1996.
- [3] Mikhail V Kompaniets and Erik Panzer. Minimally subtracted six-loop renormalization of $o(n)$ -symmetric ϕ^4 theory and critical exponents. *Physical Review D*, 96(3):036016, 2017.
- [4] Oliver Schnetz. Numbers and functions in quantum field theory. *Physical Review D*, 97(8):085018, 2018.
- [5] B. Nienhuis. Exact critical point and critical exponents of $o(n)$ models in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1062–1065, 1982.
- [6] Paul J. Flory. *Statistical Mechanics of Chain Molecules*. Interscience publishers, 1969.
- [7] N. Clisby and B. Dünweg. High-precision estimate of the hydrodynamic radius for self-avoiding walks. *Phys. Rev. E* 94, 2016.
- [8] Loran Ts. Adzhemyan, Ella V. Ivanova, Mikhail V. Kompaniets, Andrey Kudlis, and Aleksandr I. Sokolov. Six-loop ε expansion study of three-dimensional n -vector model with cubic anisotropy. *Nuclear Physics B*, 940:332–350, 2019.