ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(СПбГУ)

Физический факультет

Направление «Физика»
Кафедра статистической физики

Диаграммные вычисления ренормгрупповых функций в координатно-временном представлении

Выпускная квалификационная работа:
Треногина Александра Владимировича

Научный руководитель:
д.ф-м.н., профессор
Налимов Михаил Юрьевич

Рецензент:
д.ф-м.н., профессор
Антонов Николай Викторович

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1 Введение.

Диаграммные методы являются универсальным инструментом для решения многих задач в самых различных областях физики. Их успешно применяют в задачах рассеяния, кинетики и гидродинамики, а также в многих других волнующих человечество вопросах.

Изначально эти методы были разработаны для нужд физики высоких энергий [1], но впоследствии нашли свое применение и в других разделах физики. Их применение в квантовой теории поля (КТП) позволяет наглядно представить систему со взаимодействием как бесконечную сумму некоторых диаграмм, где каждой диаграмме соответствует слагаемое, возникающее после применения теории возмущений.

В данной работе представлена диаграммная техника на примере модели, используемой для исследования такого критического явления, как сверхтекучесть. Исследование поведения системы вблизи λ-точки является актуальной задачей. Современная теория критических явлений описывается с помощью методов КТП. Именно поэтому развитие методов КТП очень важно для дальнейшего развития теории критических явлений в целом.

Теория критического поведения состоит из критической статики и динамики. В первом случае исследуются задачи, в которых отсутствует временная зависимость. Это задачи термодинамики и равновесной статистической физики вблизи критических точек. Во втором случае исследуются различные величины и характеристики в стохастических системах. Конкретнее, рассматривается критическое поведение под воздействием равновесных флуктуаций.

Развитие теории критических явлений началось с задач статики, которые по своей основе легче, чем задачи динамики, так как не содержат временной зависимости. Вначале, в зависимости от рассматриваемой задачи, строится функционал действия (в дальнейшем просто действие) вида $S = S_0 + V$, где S_0 - свободное действие, которое имеет квадратичную зависимость от имеющихся в нашей модели полей, а V - некоторое взаимодействие. В выражениях для вычисления статистической суммы (далее статсумма) и функций Грина, действие присутствует в экспоненте, поэтому свободное действие оставляют, а взаимодействие раскладывают в ряд по теории возмущений, считая, что оно невелико. Работая в d-мерном евклидовом пространстве, наши слагаемые в ряде будут иметь $n \cdot d$ интегралов, где n - номер члена ряда. Используя теорему Вика, можно представить получаемые слагаемые некоторыми диаграммами, которые, в свою очередь, тоже обозначают некоторые математические выражения, за которыми кроются многократные интегралы. Эти многократные интегралы создают одну существенную проблему. При попытке увеличения точности и учета все более сложных членов ряда (или диаграмм, соответствующих им), сложность вычислений увеличивается в разы таким образом, что применение метода Монте-Карло становится невозможным.

Для решения этой проблемы, предпринимают следующий порядок действий:
1. Конкретную диаграмму записывают в импульсном представлении, в котором она представляется в виде заинтегрированного по всевозможным импульсам произведения пропагаторов.
2. Используют фейнмановское представление для произведения пропагаторов.
3. Применяют метод Sector Decomposition (SD) [2], смысл которого в разделении области интегрирования на подобласти определенным образом.

Данный алгоритм оказался довольно эффективным и показал лучший результат, чем применение метода Монте-Карло к вычислению получаемых многократных интегралов. На данный момент метод SD является основным инструментом вычисления диаграмм.

В [3] был предложен абсолютно иной подход для решения проблем, возникающих при попытке повысить точность посредством учета более сложных членов ряда теории возмущений. Основная идея в том, чтобы работать не только в импульсном представлении, но и в координатном. Ловко маневрируя между разными представлениями, можно получить грандиозные результаты. Во многом благодаря этому методу, были произведены существенные подвижки в критической статике и теории критических явлений в целом.

Переходя к критической динамике, мы встречаем уйму трудностей и замечаем, что здесь все намного сложнее. В этом разделе теории критических явлений у нас возникает временная зависимость уравнений и вследствие этого сильно увеличивается сложность вычислений. Для описания динамики в системе используют различные модели [4], именуемые как A, B, C и так далее. Данные модели не следуют из какой-либо теории, потому что строгое математическое описание стохастических процессов довольно сложно. Их построение строится феноменологически с помощью введения в стохастические уравнения некоторых случайных сил или величин.

В данной работе нас интересует диаграммная техника в применение к сверхтекучей критической динамике. Так сложилось, что для описания этого фазового перехода модель F и ее упрощенная версия E являются наиболее феноменологически пригодны. Однако в недавней работе [5] было выдвинуто предположение, что в основополагающей для непрерывного фазового перехода ИК-области, поведение нашей системы описывается более простой стохастической моделью A. Изначально считалось, что данная модель феноменологически непригодна в этом случае, но, по всей видимости, это не совсем так. Если это предположение подтвердится, то это сильно облегчит ситуацию, потому что динамический критический индекс до сих пор не вычислен в моделях F и E, но в модели A он известен.

Само предположение проверяется путем сравнения динамических критических индексов модели, основанной на микроскопическом подходе для соответствующего фазового перехода, и модели A. Изначально применялся метод SD для получения значения критического индекса в первом порядке ϵ-разложения, но было замечено, что метод, предложенный А. Н. Васильевым в [3] для статики, после небольших преобразований также находит себе хорошее применение и в динамике. Благодаря этому методу стало возможным посчитать вклады в константы ренормировки одно и двухпетлевых диаграмм в аналитическом виде [6], что при применении метода SD не представлялось возможным.

Далее будут описаны модель, основанная на микроскопическом подходе с применением временных функций Грина при конечной температуре, и сама диаграммная техника, используемая для вычисления нужных вкладов в константы ренормировки различных диаграмм.

2 Временные функции Грина при температуре не равной нулю.

Для начала опишем систему, в которой мы работаем, а далее сами функции Грина в применении к ней.

Рассматриваем систему квантовых бозе-частиц в большом каноническом ансамбле (БКА) с локальным отталкивающим взаимодействием типа плотность-плотность. Гамильтониан системы представим следующим образом [7]:

$$\hat{H} = \int dx\, \hat{\psi}^{+}(x,t)(\frac{\hat{p}^2}{2m} - \mu)\hat{\psi}(x,t) + \iint dx\, dx'\, \hat{\psi}^{+}(x,t)\hat{\psi}(x,t)V(x-x')\hat{\psi}^{+}(x',t)\hat{\psi}(x',t), \quad (1)$$

где x является d-мерным вектором ($x \in \mathbb{R}^d$), $\hat{p} = -i\nabla$ - оператор импульса (работаем в системе единиц, где $\hbar = 1$), m - масса частиц, μ - химический потенциал. Операторы поля $\hat{\psi}^{+}(x,t)$ и $\hat{\psi}(x,t)$:

$$\hat{\psi}^{+}(x,t) = \sum_k \varphi_k^*(x,t)\, \hat{a}_k^{+}, \qquad \hat{\psi}(x,t) = \sum_k \varphi_k(x,t)\, \hat{a}_k.$$

В выражениях для операторов поля суммирование ведется по одночастичным состояниям гамильтониана свободной частицы $\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \mu$, $\hat{a}_k^{+}$ и $\hat{a}_k$ - операторы рождения и уничтожения соответственно, $\varphi_k(x,t)$ - волновая функция, удовлетворяющая уравнению Шредингера:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi_k(x,t) = \hat{H}_1\, \varphi_k(x,t).$$

Она представима в виде произведения функций, зависящих только от времени и координаты:

$$\varphi_k(x,t) = e^{-i\epsilon_k t}\varphi_k(x),$$

где ϵ_k - собственные значения и $\varphi_k(x)$ - собственные функции гамильтониана $\hat{H}_1$.

В (1), $V(x-x')$ - потенциал парного взаимодействия частиц. При рассмотрении локального отталкивающего взаимодействия, хорошим приближением будет $V(x-x') = \frac{\lambda}{2}\delta(x-x')$ - приближение Ландау. Это приближение хорошо работает при больших плотностях, что эквивалентно низким температурам.

Учитывая все вышесказанное, наш гамильтониан (1) можно переписать в следующем виде:

$$\hat{H} = \int dx\, \hat{\psi}^{+}(x,t)(-\frac{\Delta}{2m} - \mu)\hat{\psi}(x,t) + \frac{\lambda}{2}\int dx\, (\hat{\psi}^{+}(x,t)\hat{\psi}(x,t))^2. \quad (2)$$

Теперь перейдем к самим функциям Грина. Общее определение n-точечных функций Грина (иначе корреляционных функций) в квантовой теории поля [8]:

$$G_n(x_1,t_1,x_2,t_2,...,x_n,t_n) = \langle T[\hat{\phi}(x_1,t_1)\hat{\phi}(x_2,t_2)...\hat{\phi}(x_n,t_n)]\rangle, \quad (3)$$

где T - оператор хронологического упорядочивания по времени, $\hat{\phi}(x_k,t_k)$ - оператор поля в представлении Гейзенберга, состоящий из двух компонент:

$$\hat{\phi}(x_k,t_k) = \begin{pmatrix} \hat{\psi}(x_k,t_k) \\ \hat{\psi}^{+}(x_k,t_k) \end{pmatrix}.$$

В силу определения усреднения как $\langle ... \rangle = Sp\{\hat{\rho}...\}$, где Sp - операция взятия следа, $\hat{\rho}$ - оператор плотности, можем переписать (3):

$$G_n(x_1, t_1, x_2, t_2, ..., x_n, t_n) = Sp\{\hat{\rho}\, T[\hat{\phi}(x_1, t_1)\hat{\phi}(x_2, t_2)...\hat{\phi}(x_n, t_n)]\}.$$

В функции Грина мы можем выбирать любую из компонент оператора поля $\hat{\phi}$. Возможны случаи, где все операторы полей $\hat{\psi}$ или $\hat{\psi}^+$. Будем рассматривать первый случай:

$$G_n(x_1, t_1, x_2, t_2, ..., x_n, t_n) = Sp\{\hat{\rho}\, T[\hat{\psi}(x_1, t_1)\hat{\psi}(x_2, t_2)...\hat{\psi}(x_n, t_n)]\}. \tag{4}$$

Представим оператор в представлении Гейзенберга $\hat{\psi}(x_k, t_k)$ через оператор в представлении Шредингера $\hat{\psi}(x_k)$ и оператор эволюции $e^{-i(t_k - t_0)(\hat{H} - \mu\hat{N})}$, который, в свою очередь, определяется через гамильтониан $\hat{H}$, описывающий систему в БКА:

$$\hat{\psi}(x_k, t_k) = e^{i(t_k - t_0)(\hat{H} - \mu\hat{N})}\hat{\psi}(x_k)e^{-i(t_k - t_0)(\hat{H} - \mu\hat{N})}.$$

Оператор плотности представим в виде:

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}}{Sp\{e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}\}}, \qquad \beta = \frac{1}{k_B T},$$

где k_B - постоянная Больцмана.

В знаменателе стоит ничто иное, как статсумма, которую обозначим Z. Принимая во внимание все вышесказанное, а также вспоминая одно из свойств $Sp : Sp(AB) = Sp(BA)$, и замечая, что $\hat{\rho}$ и оператор эволюции коммутируют, можем переписать функцию Грина (4):

$$\begin{aligned} G_n(x_1, t_1, x_2, t_2, ..., x_n, t_n) = Sp\{&\frac{e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}}{Z}\, T[\hat{\psi}(x_1)e^{i(t_2 - t_1)(\hat{H} - \mu\hat{N})}\hat{\psi}(x_2)... \\ &e^{i(t_n - t_{n-1})(\hat{H} - \mu\hat{N})}\hat{\psi}(x_n)e^{-i(t_n - t_1)(\hat{H} - \mu\hat{N})}]\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Далее воспользуемся формулой Фейнмана-Каца [9]:

$$\langle q|U(t, t_0)|q_0\rangle = \int\limits_{q(t_0)=q_0}^{q(t)=q} Dq(t) \int Dp(t) e^{iS_{cl}(t, t_0)\hbar^{-1}}.$$

Это выражение рассматривается на нерелятивистской квантовой частице, где p, q - канонические импульс и координата частицы, которым соответствуют некоторые операторы $\hat{p}$ и $\hat{q}$. В моменты времени t_0 и t частица находилась в q_0 и q соответственно. $U(t, t_0)$ - оператор эволюции. $S_{cl}(t, t_0)$ - классическое действие, зависящее от канонических переменных:

$$S_{cl}(t, t_0) = \int dt(p(t)\dot{q}(t) - h(p(t), q(t))),$$

где $h(p(t), q(t))$ - классический гамильтониан, зависящий от канонических переменных p и q. Еще раз подчеркнем, что слева в выражении для формулы Фейнмана-Каца стоит матричный элемент некоторого оператора, зависящего от $\hat{p}$ и $\hat{q}$, а справа - интегрирование экспоненты, содержащей действие, зависящее от канонических переменных p и q.

Вспоминая определение из квантовой механики: $Sp\{...\} = \lim\limits_{q'' \to q'} \langle q'|...|q''\rangle$, и представляя $i\hat{\psi}^+ = \hat{p}$ и $\hat{\psi} = \hat{q}$ (для сохранности коммутатора), переписываем функцию Грина

(5), используя аналогичные соображения вывода формулы Фейнмана-Каца, следующим образом:

$$G_n(x_1,t_1,x_2,t_2,...,x_n,t_n) = \lim_{\psi_b\to\psi_e}\langle\psi_e|\frac{e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}}{Z}T[\hat{\psi}(x_1)e^{i(t_2-t_1)(\hat{H}-\mu\hat{N})}\hat{\psi}(x_2)...$$

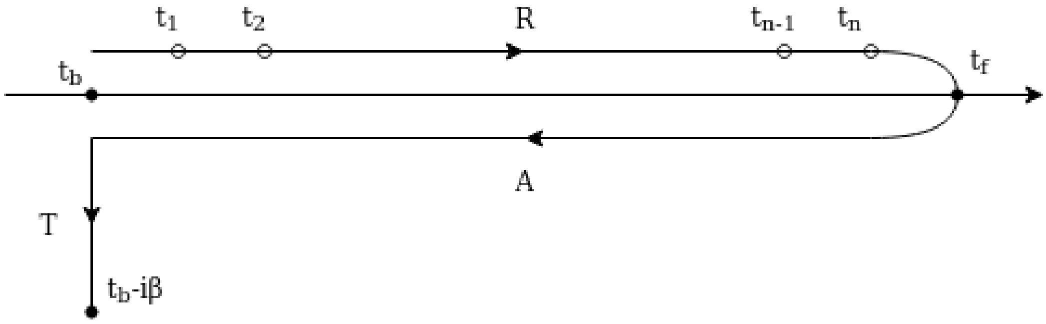
$$e^{i(t_n-t_{n-1})(\hat{H}-\mu\hat{N})}\hat{\psi}(x_n)e^{-i(t_n-t_1)(\hat{H}-\mu\hat{N})}]|\psi_b\rangle = \frac{1}{\sum}\int\limits_{\psi_e=\psi_b} D\psi\int D\psi^+\psi(x_1)\psi(x_2)...\psi(x_n)e^{iS}, \quad (6)$$

$$Z=\int D\psi\int D\psi^+e^{iS}.$$

Здесь ψ и ψ^+ - комплексно-сопряженные поля, заменяющие операторы поля; ψ_b и ψ_e - поля в начальный и конечный момент времени соответственно. Действие S:

$$S=\int dt\int dx(i\psi^+\partial_t\psi+\psi^+(\frac{\Delta}{2m}+\mu)\psi-\frac{\lambda}{2}(\psi^+\psi)^2). \quad (7)$$

В этом выражении интегрирование по времени ведется по контуру Келдыша-Швингера:



Времена расставлены в следующем порядке: $t_b<t_1<...<t_n<t_f$. Контур имеет такой вид из-за того что у нас есть разные экспоненты в (5). Вначале ведется интегрирование по контуру R, чему соответствуют экспоненты с правильным знаком в правой части выражения (5), далее по контуру A из-за появления экспонент с другим знаком, напоследок, интегрирование по контуру T необходимо из-за наличия оператора плотности. Важно подчеркнуть, что выражение (4) на самом деле является выражением для зависящих от времени неравновесных функций Грина с оператором плотности, отвечающим t_b. Чтобы воспользоваться равновесным оператором плотности, который был приведен выше, будем считать $t_b\to-\infty$. В этом случае начальное распределение "забудется" к моменту времени t_1 и наша система будет находиться в равновесии. В добавок к этому, для дальнейшего упрощения, будем считать, что $t_f\to\infty$. На границах контуров R,A,T у нас стоят условия сшивания:

$$\psi_R(t_f)=\psi_A(t_f), \quad \psi_A(t_b)=\psi_T(t_b), \quad \psi_T(t_b-i\beta)=\psi_R(t_b).$$

Появившиеся условия являются следствием непрерывности полей и взятия операции следа.

Найдем свободные пропагаторы. Взглянув на действие (7), видно, что квадратичная часть выглядит $\psi^+K\psi$, где $K=i\partial_t+\frac{\Delta}{2m}+\mu$. Именно поэтому пропагаторы вида $\langle\psi\psi\rangle$ и $\langle\psi^+\psi^+\rangle$ равны нулю. Осталось найти пропагаторы вида $G_{ij}\equiv\langle\psi_i(t)\psi_j^+(t')\rangle_0$. Индексы i,j - показывают на каком из контуров R, A или T находятся времена t и t', субскрипт 0 обозначает, что усреднение идет с квадратичной по полям частью действия S.

Пропагаторы находятся из выражения:

$$(i\partial_t + \frac{\Delta}{2m} + \mu)G_{ij}(x-x', t-t') = \delta(x-x')\delta(t-t').$$

Производя преобразование Фурье по координате и используя условия сшивания, получаем в импульсно-временном представлении:

$$\begin{array}{lll} G_{RR} = e^{-i\epsilon(t-t')}(\theta(t-t')+n), & G_{RA} = e^{-i\epsilon(t-t')}n, & G_{AR} = e^{-i\epsilon(t-t')}(n+1), \\ G_{AA} = e^{-i\epsilon(t-t')}(\theta(t'-t)+n), & G_{RT} = e^{-i\epsilon(t-t')}n, & G_{TR} = e^{-i\epsilon(t-t')}(n+1), \\ G_{TT} = e^{-i\epsilon(t-t')}(\theta(t'-t)+n), & G_{AT} = e^{-i\epsilon(t-t')}n, & G_{TA} = e^{-i\epsilon(t-t')}(n+1), \end{array}$$

где θ - тета-функция Хевисайда, $n = n(\epsilon(p)) = \frac{1}{e^{\beta\epsilon}-1}$ - средние значения чисел заполнения, $\epsilon = \frac{p^2}{2m} - \mu$, p - импульс.

Далее удобно представить $\psi_R, \psi_R^+, \psi_A, \psi_A^+$ через новые поля ξ, ξ^+, η, η^+ [10]:

$$\psi_R = \frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}, \quad \psi_R^+ = \frac{\xi^+ + \eta^+}{\sqrt{2}}, \quad \psi_A = \frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}}, \quad \psi_A^+ = \frac{\xi^+ - \eta^+}{\sqrt{2}}.$$

После этой замены используем "безмассовую" схему ренормировки ($\mu = 0$). Вспоминая, что мы устремили $t_b \to -\infty, t_f \to \infty$ и учитывая, что в окрестности сверхтекучего фазового перехода существенны лишь длинноволновые флуктуации, наши пропагаторы сильно упрощаются и начинают выглядеть следующим образом:

$$\langle\xi\xi^+\rangle_0 = \frac{2}{k^2}e^{-iuk^2(t-t')-\alpha k^2|t-t'|}, \quad \langle\xi\eta^+\rangle_0 = \theta(t-t')e^{-iuk^2(t-t')-\alpha k^2|t-t'|},$$
$$\langle\eta\eta^+\rangle_0 = 0, \quad \langle\eta\xi^+\rangle_0 = -\theta(t'-t)e^{-iuk^2(t-t')-\alpha k^2|t-t'|},$$

где α - безразмерный параметр; $\langle\eta^+\xi\rangle, \langle\xi^+\eta\rangle, \langle\xi^+\xi\rangle$, получаются заменой $t \leftrightarrow t'$. Заметим, что данные пропагаторы отличаются от таковых в модели А, за счет того, что в экспоненте присутствует комплексная составляющая.

Перейдем к более естественной записи действия в (6) через замену $S = iS'$, получим $e^{-S'}$.

В результате получим действие следующего вида:

$$S' = S'_0 + \frac{i\lambda\alpha}{2}\eta^+\xi^+\xi\xi + \frac{i\bar{\lambda}\alpha}{2}\eta\xi\xi^+\xi^+,$$

где $\lambda, \bar{\lambda}$ - два различных заряда, S'_0 - часть действия, квадратичная по полям:

$$S'_0 = 4\eta\alpha\eta^+ + \eta^+(\partial_t - iu\Delta - \alpha\Delta)\xi + \xi^+(\partial_t - iu\Delta + \alpha\Delta)\eta.$$

Величина u вводится руками для дальнейшего удобства в вычислениях. В самом конце нужно будет положить $u = 1$. Все нужные интегрирования в действии подразумеваются.

3 Диаграммная техника.

Как уже было сказано, функция Грина является важным объектом исследования. Ее запись в полях ξ, η и сопряженных им:

$$G_n(x_1, t_1, x_2, t_2, ..., x_n, t_n) = \frac{1}{Z}\int D\xi\, D\xi^+\, D\eta\, D\eta^+ \,...\, e^{-S'}.$$

Под ... подразумевается произведение n-внешних полей, имеющих свои координаты и времена. Используя квантовополевую теорию возмущений, раскладываем экспоненту в ряд, оставляя лишь квадратичные по полям вклады:

$$G_n(x_1, t_1, x_2, t_2, ..., x_n, t_n) = \frac{1}{Z}\int D\xi\, D\xi^+\, D\eta\, D\eta^+ \,...\, \left(1 - \frac{i\lambda\alpha}{2}\eta^+\xi^+\xi^2 + ...\right) \qquad (8)$$
$$\left(1 - \frac{i\bar{\lambda}\alpha}{2}\eta\xi\xi^{+2} + ...\right) e^{-S'_0}.$$

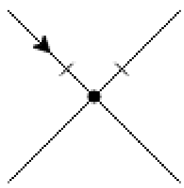
Все интегрирования по внутренним переменным подразумеваются. Воспользовавшись теоремой Вика, каждое из слагаемых, получающихся из этого выражения, можно представить в виде некоторой суммы всевозможного произведения пропагаторов. Эти же всевозможные произведения пропагаторов можно представить в виде некоторых диаграмм. Введем обозначения для пропагаторов, полученных в предыдущем разделе:

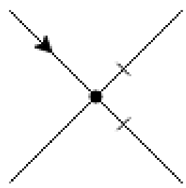
$\langle\xi(p,t)\xi^+(-p,t')\rangle_0$

$\langle\xi(p,t)\eta^+(-p,t')\rangle_0$

$\langle\eta(p,t)\xi^+(-p,t')\rangle_0$

Возможные вершины:





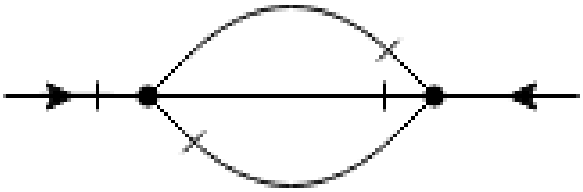
В каждой вершине есть множитель вида $-\frac{i\lambda\alpha}{2}$ или $-\frac{i\bar{\lambda}\alpha}{2}$. Допустим в (8) у нас вместо ... стоит $\xi\xi^+$:

$$G_2(x, t, x', t') = \frac{1}{Z}\int D\xi\, D\xi^+\, D\eta\, D\eta^+\, \xi(x,t)\xi^+(x',t') \left(1 - \frac{i\lambda\alpha}{2}\eta^+\xi^+\xi^2 + ...\right)$$
$$\left(1 - \frac{i\bar{\lambda}\alpha}{2}\eta\xi\xi^{+2} + ...\right) e^{-S'_0}.$$

Используя теорему Вика, одно из слагаемых будет иметь следующий вид:

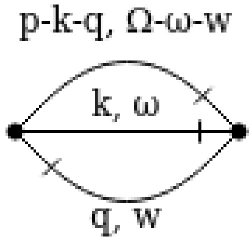
$$-\frac{\lambda\bar{\lambda}\alpha^2}{4}\langle\xi(x,t)\eta^+(x1,t1)\rangle_0\ \langle\xi^+(x1,t1)\xi(x2,t2)\rangle_0\ \langle\xi(x1,t1)\xi^+(x2,t2)\rangle_0^2$$
$$\langle\eta(x2,t2)\xi^+(x',t')\rangle_0.$$

Интегрирование по x_1, x_2, t_1, t_2 подразумевается. Это слагаемое получается, если взять 2-ое слагаемое из 1 скобки (8) и 2-ое из 2-ой. Представление в виде диаграммы:



Для нахождения интересующего нас значения, проводится размерная регуляризация $D = 4 - \epsilon$. При $\epsilon \to 0$ будут появляться расходимости, от которых мы и хотим избавиться. Для этого нужно найти константы при расходящихся вкладах. Посчитаем эту константу для диаграммы типа "арбуз" , представленной выше, используя метод А.Н. Васильева.

Отметим, что в (p, ω) представлении, внешние хвосты просто домножаются на оставшуюся часть диаграммы, поэтому мы с легкостью можем их убрать, так как они не содержат расходимостей. Рассматриваем ампутированную диаграмму:



Данная диаграмма представляет собой произведение 3-х пропагаторов в (p, ω) представлении, заинтегрированных по внутренним импульсам и частотам:

$$\iiiint dk d\omega dq dw \; G_{\xi\xi^+}(p - k - q, \Omega - \omega - w) \; G_{\xi\xi^+}(k, \omega) \; G_{\xi^+\xi}(q, w).$$

Взглянув на выражение, видно, что присутствует 10-ти-мерный интеграл. Интегрировать в лоб довольно-таки трудоемкий процесс, однако есть другое решение. Можно заметить, что полученное выражение представляет собой ничто иное как свертку:

$$((G_{\xi\xi^+} * G_{\xi\xi^+}) * G_{\xi^+\xi})(p, \Omega).$$

Применив преобразование Фурье:

$$\int d^D(x - x')e^{-ik(x-x')}, \; \int dt e^{i\omega(t-t')}, \; \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D k e^{ik(x-x')}, \; \frac{1}{(2\pi)} \int d\omega e^{-i\omega(t-t')}$$

и вспомнив одно из свойств свертки: $F[f * g] = F[f] \cdot F[g]$, получим произведение 3-х пропагаторов в (x, t) представлении:

$$\frac{8}{(2\pi)^{3D}} \pi^{3\frac{D}{2}} \beta_1^{2-D} \beta_2^{1-\frac{D}{2}} \int_0^1 \frac{ds_1}{s_1^{2-\frac{D}{2}}} \int_0^1 \frac{ds_2}{s_2^{2-\frac{D}{2}}} \int_0^1 \frac{ds_3}{s_3^{2-\frac{D}{2}}} \, exp\left(- \frac{(x - x')^2}{4} \left(\frac{s_1 + s_2}{\beta_1} + \frac{s_3}{\beta_2} \right) \right), \tag{9}$$

$$\beta_1 = \alpha|t - t'| + iu(t - t'), \; \beta_2 = \alpha|t - t'| + iu(t' - t).$$

Предварительно к каждому из пропагаторов было применено обратное преобразование Фурье по импульсу. Для пропагаторов $\langle \xi\eta^+ \rangle_0, \langle \eta\xi^+ \rangle_0$ это сделать довольно-таки просто, для $\langle \xi\xi^+ \rangle_0$ нужно дополнительно применить некоторое преобразование, чтобы избавиться от k^2 в знаменателе. Рассмотрим получение пропагатора $\langle \xi(k, t)\xi^+(-k, t') \rangle_0$ в (x, t) представлении. Используем:

$$\frac{e^{-\beta k^2}}{k^2} = \int_0^1 \frac{\beta \, exp(-\frac{\beta k^2}{s})}{s^2} ds,$$

чтобы избавиться от k^2 в знаменателе:

$$\langle\xi\xi^+\rangle_0=\frac{2}{k^2}e^{-iuk^2(t-t')-\alpha k^2|t-t'|}=\frac{2}{k^2}e^{-\beta_1 k^2}=2\int\limits_0^1\frac{\beta_1\, exp(-\frac{\beta_1 k^2}{s})}{s^2}ds \overset{Fourier}{\to}$$

$$\overset{Fourier}{\to}\frac{2}{(2\pi)^D}\int\limits_0^1\frac{ds}{s^2}\beta_1\int e^{ik(x-x')}exp\Big(-\frac{\beta_1 k^2}{s}\Big)d^Dk=$$

$$=\frac{2}{(2\pi)^D}\beta_1\int\limits_0^1\frac{ds}{s^2}\Big(\frac{\pi s}{\beta_1}\Big)^{\frac{D}{2}}exp\Big(-\frac{(x-x')^2}{4}\frac{s}{\beta_1}\Big).$$

Далее в (9) применяем преобразование Фурье по координате и времени, а также используем определение для гамма-функции:

$$\frac{8}{(4\pi)^D}\frac{\Gamma(4-D)}{(p^2)^{4-D}}\int\limits_0^1\frac{ds_1}{s_1^{2-\frac{D}{2}}}\int\limits_0^1\frac{ds_2}{s_2^{2-\frac{D}{2}}}\int\limits_0^1\frac{ds_3}{s_3^{2-\frac{D}{2}}}\Big((\alpha+iu)^{2-D}(\alpha-iu)^{1-\frac{D}{2}}\Big(\frac{s_1+s_2}{\alpha+iu}+\frac{s_3}{\alpha-iu}\Big)^{4-\frac{3D}{2}}+$$

$$(\alpha-iu)^{2-D}(\alpha+iu)^{1-\frac{D}{2}}\Big(\frac{s_1+s_2}{\alpha-iu}+\frac{s_3}{\alpha+iu}\Big)^{4-\frac{3D}{2}}\Big).$$

Здесь нет зависимости от Ω, так как при преобразовании Фурье было положено нулем. Это было сделано, так как вклад $p=0,\Omega\neq 0$ не содержит расходимостей, что нельзя сказать о противоположной ситуации. Однако можно проинтегрировать и не полагая $\Omega=0$. Тогда бы в выражении одно из сомножителей выглядело не $\big(\frac{p^2}{A}\big)^B$, а $\big(\frac{p^2}{A}\pm i\Omega\big)^B$, где знак зависит от того какая θ-функция стоит в выражении.

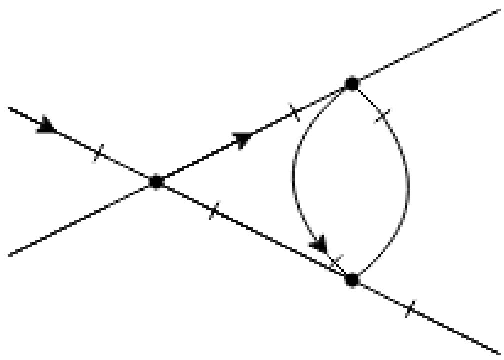
Теперь остается лишь положить $D=4-\epsilon$, разложить гамма-функцию в ряд Лорана по ϵ и вычленить выражение, получающееся при $\frac{1}{\epsilon}$:

$$\frac{8}{(4\pi)^4}\frac{1}{\alpha(1+u^2)}\Big(Log\Big[\frac{4096}{(1+u^2)(9+u^2)^3}\Big]+2u\Big(Arctg\Big[\frac{u^2+3}{2u}\Big]-Arctg\Big[\frac{1-u^2}{2u}\Big]\Big)\Big).$$

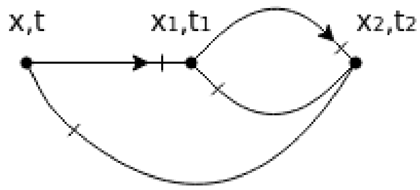
Дополнитель к этому была проведена замена $u\to\alpha u$, внешний импульс p положен равным 1.

Таким образом, было получено интересующее нас значение в аналитическом виде для диаграммы типа "арбуз" , что, однако, невозможно сделать, используя метод Sector Decomposition. На примере этой диаграммы видно преимущество метода Васильева.

Рассмотрим более сложный пример:



Оказывается, в этом случае, можно считать, что на одном из внешних хвостов, импульс и частота равняются нулю. Вследствие этого, предоставляется удобным обрезать правый верхний хвостик. Поступая аналогичным образом, как с диаграммой "арбуз" , рассматриваем лишь ампутированную часть:



Усложнение вычислений заключается в том, что в точке x_1, t_1 свертка по этим переменным. Чтобы избавиться от свертки, все также применяем свойство преобразования Фурье. Для этого, каждую из частей диаграммы, находящуюся слева и справа от точки x_1, t_1, переводим в (p, ω) представление, перемножаем и переводим обратно в (x, t):

$$A_1 A_2 \left(\frac{\pi}{b_1 b_2}\right)^{\frac{D}{2}} \int\limits_0^1 ds_3\, s_3^{\frac{D}{2}-a_1} (1-s_3)^{\frac{D}{2}-a_2} \left(\frac{s_3}{b_1} + \frac{(1-s_3)}{b_2}\right)^{-\frac{D}{2}} (t-t_2)^{1+\frac{D}{2}-a_1-a_2} \theta(t-t_2)$$
$$exp\left(-\frac{(x-x_2)^2}{t-t_2}\left(\frac{s_3}{b_1} + \frac{1-s_3}{b_2}\right)^{-1}\right),$$

где $a_1 = \frac{D}{2}, a_2 = D-1, b_1 = \frac{1}{4(\alpha+iu)}, b_2 = \frac{s_1}{4(\alpha-iu)} + \frac{1}{4(\alpha+iu)}, A_1 = \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D}(\alpha+iu)^{-\frac{D}{2}}, A_2 = \frac{2\pi^D}{(2\pi)^{2D}}(\alpha - iu)^{1-\frac{D}{2}}(\alpha+iu)^{-\frac{D}{2}} \int\limits_0^1 \frac{ds_1}{s_1^{2-\frac{D}{2}}}$. Здесь была использована формула для свертки пропагаторов в общем виде, приведенная в приложении 5.2.

Домножив на пропагатор, присоединенный ниже, подставив a_1, a_2 и переведя в (p, ω) представление, получаем:

$$\frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \int\limits_0^1 \frac{ds_2}{s_2^{2-\frac{D}{2}}} (\alpha - iu)^{1-\frac{D}{2}} A_1 A_2 \left(\frac{\pi}{b_1 b_2}\right)^{\frac{D}{2}} \int\limits_0^1 ds_3\, (1-s_3)^{1-\frac{D}{2}} \left(\frac{s_3}{b_1} + \frac{(1-s_3)}{b_2}\right)^{-\frac{D}{2}}$$
$$\left(\frac{\pi}{A_3}\right)^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(4-D)}{\left(\frac{p^2}{4A_3} - i\Omega\right)^{4-D}},$$

где $A_3 = \frac{s_2}{4(\alpha-iu)} + \left(\frac{s_3}{b_1} + \frac{1-s_3}{b_2}\right)^{-1}$. Аналогично с тем, как делалось в арбузе, кладем $p = 1, \Omega = 0$, так как нужный нам вклад в константу ренормировки сидит именно здесь.

Далее подставляем $D = 4 - \epsilon$ и видим, что есть особенность в точке $s_3 = 1$:

$$\int\limits_0^1 ds_3 (1-s_3)^{\frac{\epsilon}{2}-1} f(s_3, \epsilon, ...).$$

Для решения этой проблемы прибавляем, вычитаем $f(s_3 = 1, ...)$. Таким образом, наша особенность переходит в расходимость по ϵ, где первым членом ряда Лорана будет не $C_1\epsilon^{-1}$, а $C_2\epsilon^{-2}$. Выделяя вклад при ϵ^{-1}, снова получим выражение в аналитическом виде, которое приводить не будем из-за его громоздкости. Полученный вклад при $u = 0$, $\alpha = 1$: 0.000322599.

4 Заключение.

Метод Васильева является сильным инструментом для получения вкладов различных диаграмм в константы ренормировки. Его применение нашлось не только в критической статике, но и в динамике.

Вначале был представлен формализм временных функций Грина, используемых для описания модели, предназначенной для исследования сверхтекучей динамики. Далее были приведены примеры использования метода для нахождения вкладов в константы ренормировки. Было показано, что с его помощью можно найти интересующие нас величины в аналитическом виде, чего не позволяет сделать метод Sector Decomposition. В этом одно из преимуществ метода Васильева. Другое же преимущество в том, что сложность вычислений растет не так быстро, как при использовании метода Sector Decomposition. Используя метод Васильева, были сосчитаны и успешно сверены искомые значения для нескольких десятков других диаграмм. Две из них типа "арбуз" , другая часть подобна диаграммам типа "глаз" , остальные более сложные.

5 Приложение.

5.1 Преобразование Фурье в общем виде.

В (x,t) представлении у нас получаются выражения, состоящие из слагаемых следующего вида (взглянув на $\langle\xi\xi^+\rangle_0$, приведенный выше в (x,t) представлении, можно увидеть, что он как раз таки и состоит из двух слагаемых вида $... \cdot \theta(t-t_2)$ и $... \cdot \theta(t_2-t)$):

$$A_1\,\frac{\theta(t-t_2)}{(t-t_2)^{a_1}}exp\biggl(-\frac{(x-x_2)^2}{t-t_2}b_1\biggr),\quad A_2\,\frac{\theta(t_2-t)}{(t_2-t)^{a_2}}exp\biggl(-\frac{(x-x_2)^2}{t_2-t}b_2\biggr),$$

где $A_1, a_1, b_1, A_2, a_2, b_2$ не конкретизированы, но не зависят от координат и времени.

Приведем общий вид этих выражений в (p,ω) представлении:

$$A\,\frac{\theta(t-t_2)}{(t-t_2)^{a}}exp\biggl(-\frac{(x-x_2)^2}{t-t_2}b\biggr)\overset{Fourier}{\rightarrow}A\biggl(\frac{\pi}{b}\biggr)^{\frac{D}{2}}\frac{\Gamma(\frac{D}{2}+1-a)}{\biggl(\frac{p^2}{4b}-i\omega\biggr)^{\frac{D}{2}+1-a}},$$

$$A\,\frac{\theta(t_2-t)}{(t_2-t)^{a}}exp\biggl(-\frac{(x-x_2)^2}{t_2-t}b\biggr)\overset{Fourier}{\rightarrow}A\biggl(\frac{\pi}{b}\biggr)^{\frac{D}{2}}\frac{\Gamma(\frac{D}{2}+1-a)}{\biggl(\frac{p^2}{4b}+i\omega\biggr)^{\frac{D}{2}+1-a}}.$$

5.2 Свертка пропагаторов в общем виде.

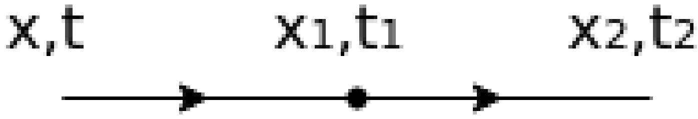
Для ускорения вычислений, была вычислена свертка пропагаторов в точке x_1, t_1 в общем виде, с учетом того, какой вид могут иметь пропагаторы. Вначале применялась формула преобразования Фурье в общем виде для каждого из пропагаторов, чтобы перевести их в (p,ω) представление. Далее использовалось фейнмановское представление:

$$\frac{1}{A_1^{\lambda_1}A_2^{\lambda_2}...}=\frac{\Gamma(\sum_i\lambda_i)}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)...}\int\limits_0^1 du_1\int\limits_0^1 du_2\,...\,\delta\biggl(\sum_i u_i-1\biggr)\frac{\prod\limits_i u_i^{\lambda_i-1}}{\biggl[\sum\limits_i A_i u_i\biggr]^{\sum\limits_i\lambda_i}}.$$

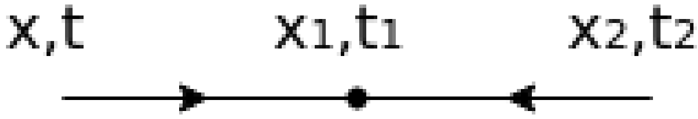
В нашем случае для произведения двух выражений вида:

$$\biggl(\frac{p^2}{4b}\pm i\omega\biggr)^{a-1-\frac{D}{2}}.$$

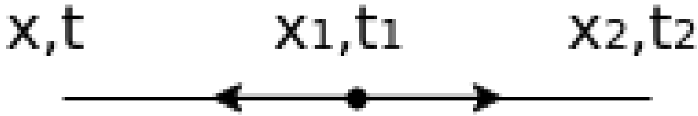
Далее производим преобразование Фурье в обратном виде и получаем следующие выражения для 4 случаев:



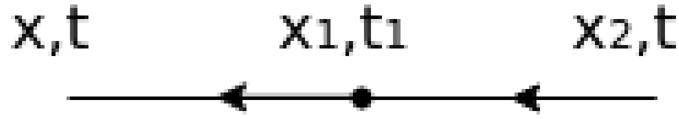
$$A_1\frac{\theta(t-t_1)}{(t-t_1)^{a_1}}exp\left(-\frac{(x-x_1)^2}{t-t_1}b_1\right) \quad * \quad A_2\frac{\theta(t_1-t_2)}{(t_1-t_2)^{a_2}}exp\left(-\frac{(x_1-x_2)^2}{t_1-t_2}b_2\right) =$$
$$A_1A_2\left(\frac{\pi}{b_1b_2}\right)^{\frac{D}{2}}\int_0^1 du_1u_1^{\frac{D}{2}-a_1}(1-u_1)^{\frac{D}{2}-a_2}\left(\frac{u_1}{b_1}+\frac{1-u_1}{b_2}\right)^{-\frac{D}{2}}\frac{\theta(t-t_2)}{(t-t_2)^{a_1+a_2-\frac{D}{2}-1}}$$
$$exp\left(-\frac{(x-x_2)^2}{t-t_2}\left(\frac{u_1}{b_1}+\frac{1-u_1}{b_2}\right)^{-1}\right).$$



$$A_1\frac{\theta(t-t_1)}{(t-t_1)^{a_1}}exp\left(-\frac{(x-x_1)^2}{t-t_1}b_1\right) \quad * \quad A_2\frac{\theta(t_2-t_1)}{(t_2-t_1)^{a_2}}exp\left(-\frac{(x_1-x_2)^2}{t_2-t_1}b_2\right) =$$
$$\frac{A_1A_2}{2^{\frac{D}{2}+1-a_1-a_2}}\left(\frac{\pi}{b_1b_2}\right)^{\frac{D}{2}}\int_0^1 du_1u_1^{a_1+a_2-\frac{D}{2}-2}\Bigg[(1-u_1)^{\frac{D}{2}-a_1}(1+u_1)^{\frac{D}{2}-a_2}\left(\frac{1-u_1}{b_1}+\frac{1+u_1}{b_2}\right)^{-\frac{D}{2}}$$
$$\frac{\theta(t_2-t)}{(t_2-t)^{a_1+a_2-\frac{D}{2}-1}}\,exp\left(-2u_1\frac{(x-x_2)^2}{t_2-t}\left(\frac{1-u_1}{b_1}+\frac{1+u_1}{b_2}\right)^{-1}\right)+(1+u_1)^{\frac{D}{2}-a_1}(1-u_1)^{\frac{D}{2}-a_2}$$
$$\left(\frac{1+u_1}{b_1}+\frac{1-u_1}{b_2}\right)^{-\frac{D}{2}}\frac{\theta(t-t_2)}{(t-t_2)^{a_1+a_2-\frac{D}{2}-1}}\,exp\left(-2u_1\frac{(x-x_2)^2}{t-t_2}\left(\frac{1+u_1}{b_1}+\frac{1-u_1}{b_2}\right)^{-1}\right)\Bigg].$$



$$A_1\frac{\theta(t_1-t)}{(t_1-t)^{a_1}}exp\left(-\frac{(x-x_1)^2}{t_1-t}b_1\right) \quad * \quad A_2\frac{\theta(t_1-t_2)}{(t_1-t_2)^{a_2}}exp\left(-\frac{(x_1-x_2)^2}{t_1-t_2}b_2\right) =$$
$$\frac{A_1A_2}{2^{\frac{D}{2}+1-a_1-a_2}}\left(\frac{\pi}{b_1b_2}\right)^{\frac{D}{2}}\int_0^1 du_1u_1^{a_1+a_2-\frac{D}{2}-2}\Bigg[(1+u_1)^{\frac{D}{2}-a_1}(1-u_1)^{\frac{D}{2}-a_2}\left(\frac{1+u_1}{b_1}+\frac{1-u_1}{b_2}\right)^{-\frac{D}{2}}$$
$$\frac{\theta(t_2-t)}{(t_2-t)^{a_1+a_2-\frac{D}{2}-1}}\,exp\left(-2u_1\frac{(x-x_2)^2}{t_2-t}\left(\frac{1+u_1}{b_1}+\frac{1-u_1}{b_2}\right)^{-1}\right)+(1-u_1)^{\frac{D}{2}-a_1}(1+u_1)^{\frac{D}{2}-a_2}$$
$$\left(\frac{1-u_1}{b_1}+\frac{1+u_1}{b_2}\right)^{-\frac{D}{2}}\frac{\theta(t-t_2)}{(t-t_2)^{a_1+a_2-\frac{D}{2}-1}}\,exp\left(-2u_1\frac{(x-x_2)^2}{t-t_2}\left(\frac{1-u_1}{b_1}+\frac{1+u_1}{b_2}\right)^{-1}\right)\Bigg].$$



$$A_1\frac{\theta(t_1-t)}{(t_1-t)^{a_1}}exp\left(-\frac{(x-x_1)^2}{t_1-t}b_1\right)\quad * \quad A_2\frac{\theta(t_2-t_1)}{(t_2-t_1)^{a_2}}exp\left(-\frac{(x_1-x_2)^2}{t_2-t_1}b_2\right)=$$

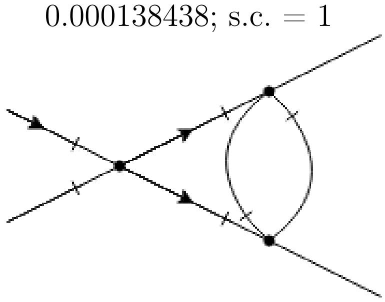
$$A_1A_2\left(\frac{\pi}{b_1b_2}\right)^{\frac{D}{2}}\int\limits_0^1 du_1u_1^{\frac{D}{2}-a_1}(1-u_1)^{\frac{D}{2}-a_2}\left(\frac{u_1}{b_1}+\frac{1-u_1}{b_2}\right)^{-\frac{D}{2}}\frac{\theta(t_2-t)}{(t_2-t)^{a_1+a_2-\frac{D}{2}-1}}$$

$$exp\left(-\frac{(x-x_2)^2}{t_2-t}\left(\frac{u_1}{b_1}+\frac{1-u_1}{b_2}\right)^{-1}\right).$$

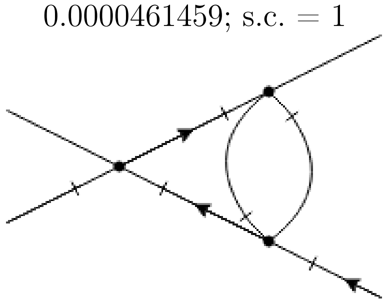
5.3 Вклады в константы ренормировки.

Здесь будут показаны полученные результаты. Вначале приведены вклады различных диаграмм типа "глаз"и их симметрийные коэффициенты. Сами выражения получаются в аналитическом виде, но являются громоздкими, поэтому для простоты приведены при $u=0$, $\alpha=1$:

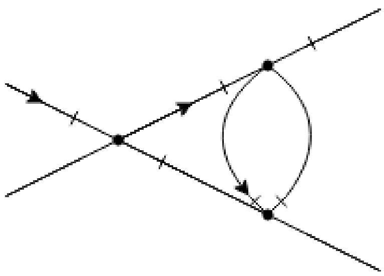
0.000138438; s.c. = 1



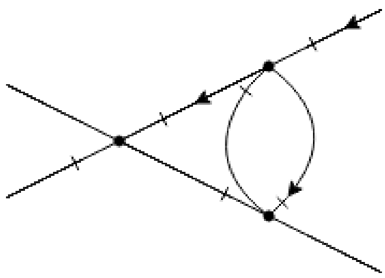
0.0000461459; s.c. = 1



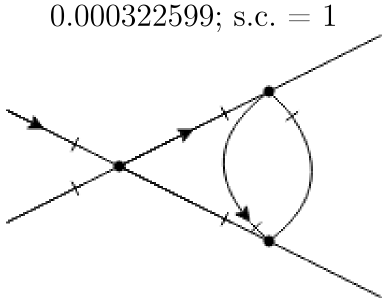
0.000322599; s.c. = 2



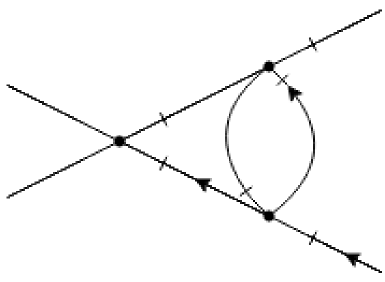
0.000368745; s.c. = 2



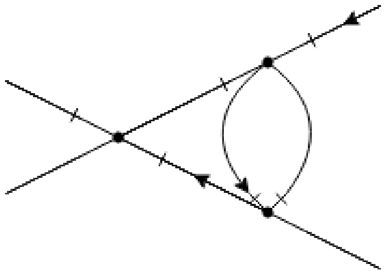
0.000322599; s.c. = 1



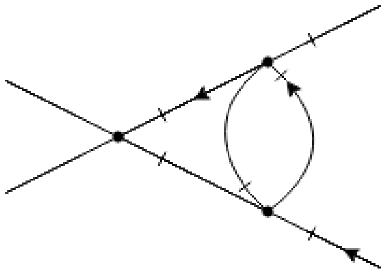
0.000368745; s.c. = 1



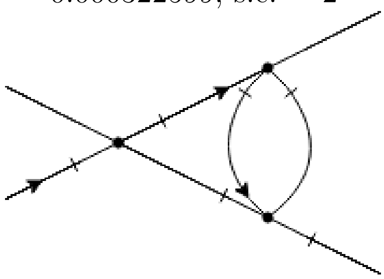
0.000322599; s.c. = 2



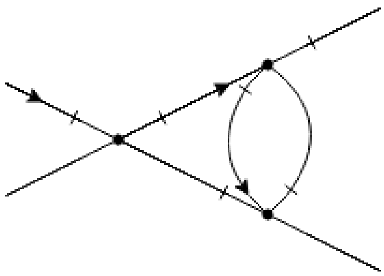
0.000322599; s.c. = 1



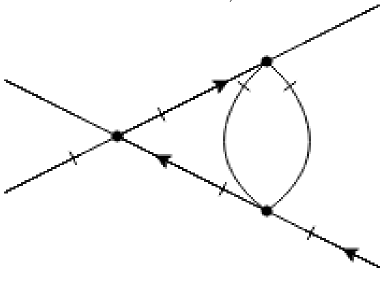
0.000322599; s.c. = 2



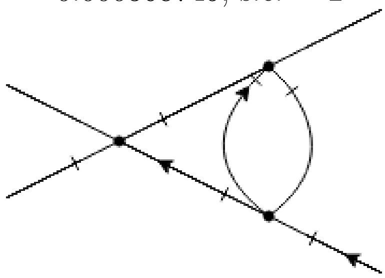
0.000322599; s.c. = 1



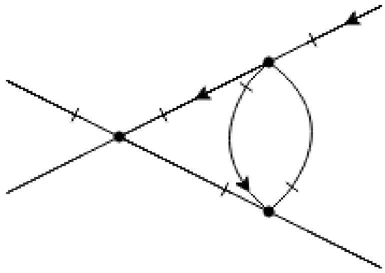
0.0000461459; s.c. = 1



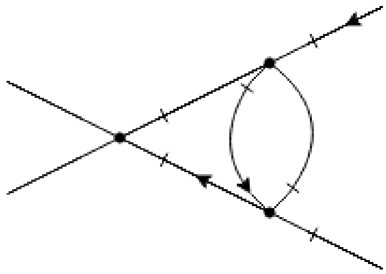
-0.000368745; s.c. = 2



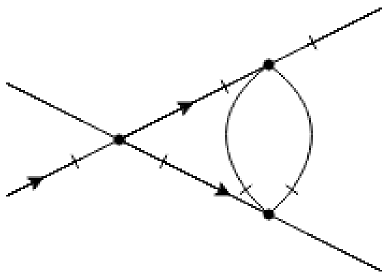
-0.000368745; s.c. = 2



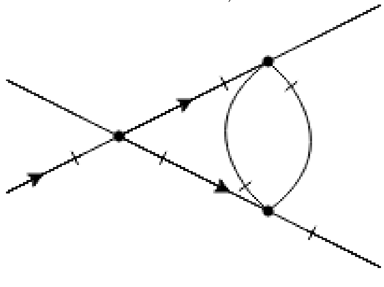
-0.000322599; s.c. = 1



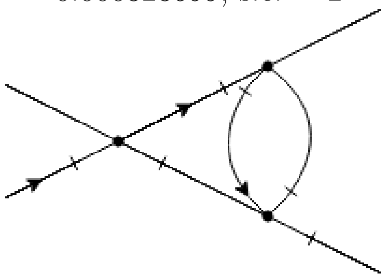
-0.000138438; s.c. = 1



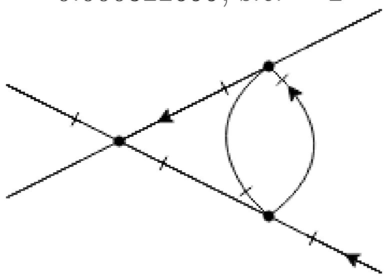
-0.000138438; s.c. = 2



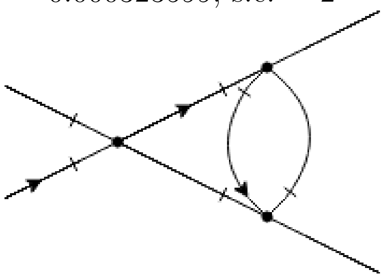
-0.000323599; s.c. = 2



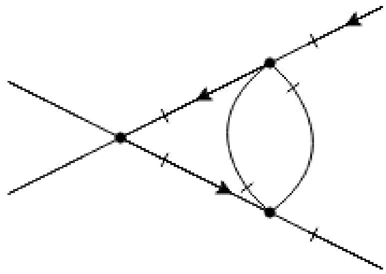
-0.000322599; s.c. = 2



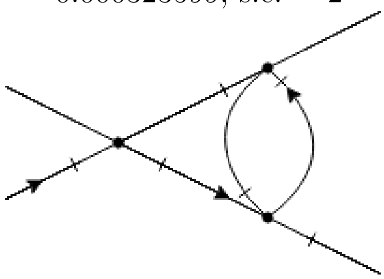
-0.000323599; s.c. = 2



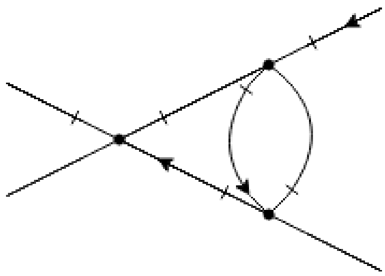
-0.000461459; s.c. = 1



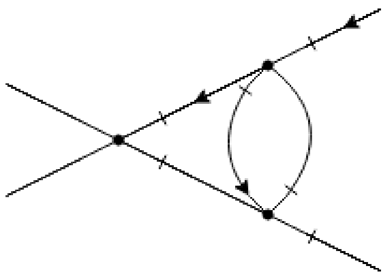
-0.000323599; s.c. = 2



0.000322599; s.c. = 2

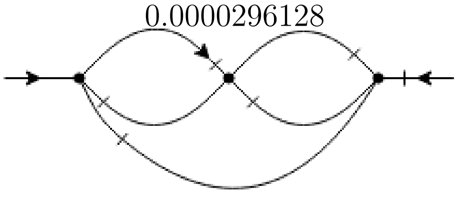


-0.000368745; s.c. = 1

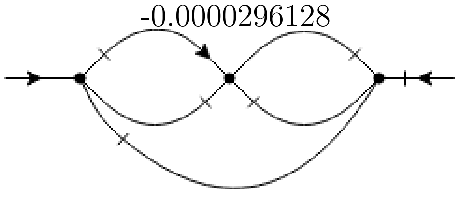


Далее приведены вклады в константу ренормировки диаграмм типа "улыбка". Эти вклады уже не получается сосчитать в аналитическом виде, так как возникает 4-5 кратный интеграл по числовым параметрам, который не позволяет этого сделать. Остается выражение, зависящее от u и α, которое приходится считать численно при различных значениях этих величин. Для простоты, приводим вклад при тех же значениях параметров u и α:

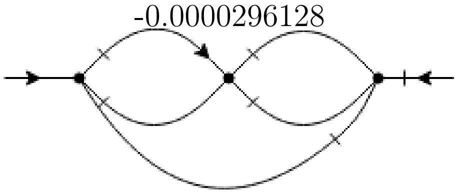
0.0000296128



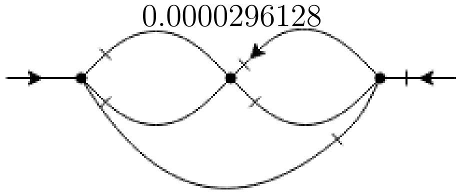
-0.0000296128



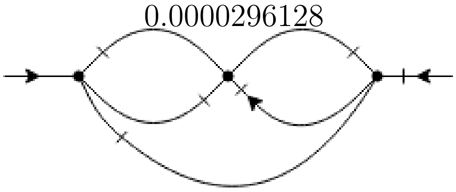
-0.0000296128



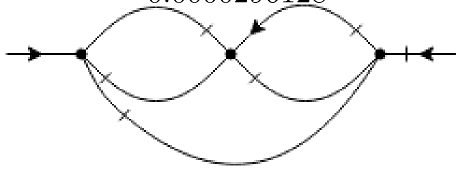
0.0000296128



0.0000296128

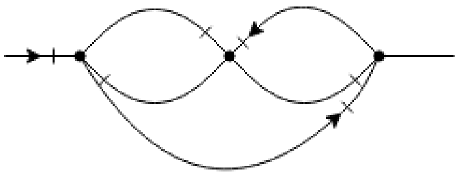


-0.0000296128



Следующая диаграмма содержит два вклада в различные константы ренормировки Z_1 и Z_2 [6]. Вначале будет приведен вклад в Z_1, потом в Z_2:

$$2.50179 * 10^{-6}$$
$$-1.69773 * 10^{-6}$$



Список литературы

[1] Feynman, Richard (1949). "The Theory of Positrons". Physical Review. 76 (6): 749–759.

[2] Gudrun Heinrich, Sector Decomposition, 2008, International Journal of Modern Physics A 23

[3] Vasil'ev, A. N.: The Field Theoretic Renormalization Group in Critical Behavior Theory and Stochastic Dynamics. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2004

[4] Hohenberg P.C, Halperin B.I. Theory of dynamic critical phenomena (Rev.Mod.Phys.49, 1977)

[5] Ю. А. Жаворонков, М. В. Комарова, Ю. Г. Молотков, М. Ю. Налимов, Ю. Хонконен, "Критическая динамика фазового перехода в сверхтекучее состояние", ТМФ, 200:2 (2019), 361–377; Theoret. and Math. Phys., 200:2 (2019), 1237–1251

[6] J. Honkonen, M. V. Komarova, Yu. G. Molotkov, M. Yu. Nalimov Effective large-scale model of boson gas from microscopic theory, 2019

[7] Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М., Физматгиз, 1963, Добросвет, 1998.

[8] Ю. Хонконен, Контурно упорядоченные функции Грина в стохастической теории поля, ТМФ, 2013, том 175, номер 3, 455–464, DOI: https://doi.org/10.4213/tmf8483

[9] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — 2-е изд. — М.: Наука. 1988,—272 с.

[10] Diagram technique for nonequilibrium processes, L.V. Keldysh, Zh.Eksp.Teor.Fiz. 47 (1964) 1515-1527, Sov.Phys.JETP 20 (1965) 1018-1026