

Санкт-Петербургский государственный университет

**Овсянников Андрей Вячеславович**  
**Выпускная квалификационная работа**

***Модель ренормгруппового описания высокотемпературного  
сверхпроводящего фазового перехода***

Уровень образования: магистратура

Направление 03.04.02 "Физика"

Образовательная программа ВМ.5511.2019 "Физика"

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., профессор кафедры  
статистической физики СПбГУ,  
Налимов Михаил Юрьевич

Рецензент:  
к.ф.-м.н, внс Санкт-Петербургского  
отделения Математического Института  
им. В.А.Стеклова РАН,  
Деркачев Сергей Эдуардович

Санкт-Петербург

2021

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>1. Метод сходящейся теории возмущений</b> . . . . .	<b>18</b>
1.1. Общий формализм . . . . .	18
1.2. A-модель критической динамики . . . . .	23
<b>2. Флуктуационная модель описания сверхпроводимости</b> . . . . .	<b>26</b>
2.1. Сходящаяся теория возмущений в флуктуационной модели . . . . .	26
2.2. Ренормгруппа в матричной модели . . . . .	27
<b>Заключение</b> . . . . .	<b>34</b>
<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>35</b>

## Введение

Начиная с 1908 года в лаборатории университета города Лейден Каммерлинг-Оннесом проводились опыты по исследованию электрического сопротивления различных металлов, охлаждённых до температуры жидкого гелия. Спустя три года им было открыто явление резкого исчезновения сопротивления у ртути при достижении некоторой критической температуры (4.15 К). Позднее это явление было открыто в целом ряде других металлов и сплавов [1] и получило название сверхпроводимости. Современные эксперименты показывают, что в сверхпроводящем состоянии сопротивление отсутствует с точностью порядка  $\sim 10^{-24}$  Ом·см. Для сравнения, при температуре кипения жидкого гелия  $^4\text{He}$  (4.2 К) очень чистый образец Ag имеет сопротивление  $\sim 10^{-9}$  Ом·см. К настоящему времени найдено тридцать пять металлов и больше тысячи сплавов, обладающих сверхпроводимостью. Практически сразу было обнаружено (1914 г., Каммерлинг-Оннес), что сверхпроводимость разрушается при достижении неких критических значений внешних параметров, таких как магнитное поле или транспортный ток. В отсутствие же магнитного поля появление сверхпроводимости представляет собой фазовый переход второго рода в некоторое более упорядоченное состояние, что следует из температурной зависимости для теплоемкости, полученной в 1932 году в работе [2].

До открытия Мейсснером и Оксенфельдом в 1933 году явления вытеснения достаточно слабого магнитного поля из объемного сверхпроводника [3], последние считались обыкновенными металлами с нулевым сопротивлением. Однако, найденный эффект, получивший название эффекта Мейсснера-Оксенфельда, демонстрировал, что выталкивание магнитного поля не зависит от того, находился ли образец в магнитном поле до охлаждения или нет. В противовес тому, как в идеальном проводнике магнитное поле, включенное до перехода в состояние с бесконечной проводимостью, не выталкивалось бы. В середине XX века стало понятно, что по своему поведению в достаточно сильных магнитных полях сверхпроводники подразделяются на два типа, т.н. сверхпроводники I и II рода. К первым относят чистые металлы (например, Pb, Zn, Al), у них наблюдается полный эффект Мейсснера (вплоть до некоторого значения  $H_c \sim 100$  Э магнитное поле полностью компенсируется внутри сверхпроводника). Вторыми же являются, в основном, различные химические соединения и сплавы (например, MoN, CuS Nb, Nb<sub>3</sub>Sn), в которых в некотором интервале значений  $H_{c1} < H < H_{c2}$  ( $H_{c1} \sim 10^2 - 10^3$  Э,  $H_{c2} \sim 10^3 - 10^6$  Э) существует фаза частичного проникновения магнитного поля внутрь сверхпроводника (фаза Шубникова) в виде двумерной периодической структуры, состоящей из отдельных нитей (вихри Абрикосова). Среди сверхпроводников II рода иногда еще выделяют т.н. "жесткие" сверхпроводники или сверхпроводники III рода (например, сплавы Nb-Ti, V-Ga, Nb-Ge), для которых характерно большое количество примесей или дефектов структуры, затрудняющих движение магнитного потока. В них происходит, как говорят, зацепление (пинингование) вихревой решетки, после чего для отрыва вихревой нити от дефекта (центра пининга)

приходится прикладывать существенную силу Лоренца, т.е. вводить в систему конечный транспортный ток (крип потока).

Несколько примеров хорошо известных сверхпроводников приведены в таблице 1.

Образец	Сверхпроводники I рода					Сверхпроводники II рода				
	Hg	Pb	Sn	Ta	Al	NbN	V <sub>3</sub> Si	Nb <sub>3</sub> Sn	Nb <sub>3</sub> Ge (пленка)	MgB <sub>2</sub> <sup>a</sup>
T <sub>c</sub> , К	4.15	7.19	3.69	4.38	1.18	16.0	17.1	18.0	23.2	39
Год	1911	1912	1913	1928	1933	1955	1964	1968	1973	2001

Таблица 1: Некоторые классические сверхпроводники

<sup>a</sup>Переход в сверхпроводящее состояние у диборида магния [4] происходит при критической температуре, более характерной для высокотемпературных керамических соединений. Однако MgB<sub>2</sub> представляет собой типичный металл, переходящий в сверхпроводящее состояние по сценарию теории БКШ.

На протяжении сорока лет интенсивные экспериментальные исследования сверхпроводников сопровождались многочисленными попытками продвинуть теоретические представления о природе этого явления. Первоначальное описание строилось на разнообразных феноменологических моделях, среди которых можно отметить двухжидкостную модель Гортера и Казимира [5], теорию Лондонов электромагнитных свойств сверхпроводников [6] и ее локальное обобщение, даваемое уравнением Пиппарда [7]. Вершиной феноменологического подхода в теории сверхпроводимости по праву является, построенная в 1950 г. на базе общей теории Ландау фазовых переходов второго рода, теория Гинзбурга-Ландау (ГЛ) [8]. Она дала детальное и достаточно точное описание магнитных и температурных свойств известных сверхпроводников, а так же явилась базой для предсказания в 1952 году Абрикосовым и Заварицким существования нового класса сверхпроводников (II рода). Теория ГЛ является основной в построении современной теории пиннинга вихревых нитей, крипа потока, критического состояния в “жестких” сверхпроводниках (теории Бина [9] и Кима-Андерсона [10; 11]).

Недостатком феноменологической теории Гинзбурга-Ландау является отсутствие понимания микроскопической природы сверхпроводимости. Продвинуться в этом вопросе удалось после открытия в 1950 году Максвеллом [12] и Рейнольдсом [13] (независимо) изотопического эффекта в сверхпроводниках: при изменении изотопического состава вещества критическая температура  $T_c \sim M^{-\alpha}$ , где  $M$  – масса изотопа,  $\alpha \sim 0.5$ . Стало очевидно, что в возникновении сверхпроводимости существенную роль играет динамика кристаллической решетки [14]. Опираясь на эту идею в 1957 году Бардин, Купер и Шриффер построили первую микроскопическую теорию сверхпроводимости [15] (теория БКШ). Квантовомеханическая теория БКШ объяснила образование связанных состояний из пар электронов вблизи поверхности Ферми (куперовских пар) через механизм обмена квантом колебания кристаллической решетки (фононом) между двумя электронами. В рамках БКШ удалось рассчитать термодинамику сверхпроводников, объяснить скачок

теплоемкости, эффект Мейсснера, изотопический эффект, однако, имелись трудности с обобщением на случай меняющихся в пространстве полей и токов, а также с построением калибровочно-инвариантной теории эффекта Мейсснера. С помощью более последовательного математического аппарата эти трудности были в 1958 году решены Боголюбовым (см. работы [16–18]) в рамках созданного им метода квазисредних. Практически сразу после этого (1958 г., [19]), Горьковым была предложена теория, объединившая уравнения Боголюбова и подход БКШ в рамках единого формализма функций Грина (т.н. формализм Горькова-Намбу) и являющаяся микроскопическим аналогом для теории Гинзбурга-Ландау. С этого момента начинаются попытки применения мощного аппарата квантовой теории поля к теории сверхпроводимости.

Важным аспектом в теориях БКШ и Абрикосова-Горькова является предположение о слабой связи электронов между собой, которое, однако, не выполняется для целого ряда сверхпроводников, в основном, интерметаллидов со структурой А-15 ( $\beta$ -вольфрама), таких как:  $Nb_3Sn$ ,  $Nb_3Al$ ,  $Nb_3Ge$  и др. В них проявляется целый набор аномальных свойств, таких как: нетипичные температурные зависимости критических полей, высокие критические параметры, аномально малые длины когерентности, структурные превращения, анизотропия энергетической щели, разрушение основного состояния и т.п. Для корректного описания сверхпроводимости в этих веществах требуется учет кулоновского отталкивания, а также сильной электрон-фононной связи. Последнюю можно характеризовать константой электрон-фононного взаимодействия  $\lambda$ , случаю сильной связи при этом будет соответствовать  $\lambda \gtrsim 1$ . Последовательное обобщение теории Абрикосова-Горькова на случай сильной связи базируется на известной теореме Мигдала [20] и было дано в работах Элиашберга [21], сформулировавшего уравнения для параметра порядка, и МакМиллана [22], получившего их аналитическую интерпретацию в виде формулы для критической температуры. Образованная таким образом теория Мигдала-Элиашберга-Макмиллана до сих пор является одной из самых совершенных микроскопических теорий для описания традиционных (не высокотемпературных) сверхпроводников [23; 24]. Достаточно полный обзор теории и эксперимента с соединениями типа А-15, фазами Лавеса и другими сверхпроводниками с сильной связью можно найти в [25].

Несмотря на значительные успехи в понимании явления сверхпроводимости, долгое время физика сверхпроводников была достаточно изолированной областью физики твердого тела, в основном из-за трудоемкой технологии поддержания гелиевой температуры. Однако, в связи с развертыванием в конце 70-х, начале 80-х годов XX века работ по управляемому термоядерному синтезу, сильноточная сверхпроводящая тематика получила дополнительный стимул к развитию. Для сверхпроводящих обмоток магнитов удалось создать композитные провода, выдерживающие плотность тока до  $10^6$  A/cm<sup>2</sup> в поле до 15 Т. Можно отметить, что полученный в этой области технологический задел велик настолько, что даже на данный момент, спустя четверть века после открытия высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП), в проекте международного термоядерного реактора

(ИТЭР) обмотки сверхпроводящих магнитов получают на основе "низкотемпературного" соединения  $\text{Nb}_3\text{Sn}$  с  $T_c = 18 \text{ K}$ .

С момента открытия явления сверхпроводимости среди ученых господствовало мнение, что сверхпроводник и в нормальном состоянии должен являться хорошим проводником. Эта уверенность пошатнулась только в 1973 году, когда были найдены различные неметаллические соединения: оксиды и сульфиды, халькогениды, являющиеся сверхпроводниками при температурах ниже 10 К. Наиболее высокой критической температурой в классе неметаллов в то время обладало соединение  $\text{BaPb}_{1-x}\text{Bi}_x\text{O}_3$ ,  $x = 0.25$ , с  $T_c = 13 \text{ K}$ . Открытое в 1975 году, оно в нормальном состоянии являлось полупроводником, и его сверхпроводимость казалась аномалией на фоне свойств остальных известных в то время сверхпроводников. Как оказалось в дальнейшем, это соединение было первой ступенькой на пути к оксидным высокотемпературным сверхпроводникам.

Прорыв в поисках сверхпроводников с высокими критическими температурами случился 27 января 1986 года, когда сотрудники фирмы ИВМ Беднорц и Мюллер [26] обнаружили, что исходно сильный антиферромагнитный диэлектрик  $\text{La}_2\text{CuO}_4$  при допировании барием, примесью-замещением для La ( $\text{La}_{2-x}\text{Ba}_x\text{CuO}_4$ ), проявляет при температуре 30 - 35 К сверхпроводящие свойства (для сравнения, точка кипения жидкого Ne 27.2 К). Очень быстро (февраль 1987 г.) критическая температура превысила точку кипения жидкого азота ( $T = 77.4 \text{ K}$ ) и достигла 92 К. Этого удалось достичь в медь-оксидном соединении с включениями иттрия ( $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ ,  $0 < \delta < 0.5$ ) [27]. Для современной криогенной техники азотные температуры во много раз более доступны, чем гелиевые. Это обстоятельство позволяет уже сейчас существенно расширить область использования сверхпроводников в науке и технике.

Практически сразу после открытия ВТСП, среди различных экспериментальных групп по всему миру началась настоящая гонка по поиску все более высокотемпературных сверхпроводников. Было получено множество семейств термодинамически стабильных высокотемпературных сверхпроводников: лантановые (неодимовые), иттриевоподобные,  $(\text{Bi}, \text{Tl}, \text{Pb}, \text{Hg})_m(\text{Sr}, \text{Ba})_2\text{Ca}_{n-1}\text{Cu}_n\text{O}_x$ ,  $m, n = 1, 2, \dots$  (общий вид многокомпонентного купрата), фуллерены и др. Характерные представители перечисленных классов ВТСП приведены в таблице 2 вместе с хронологией их открытия.

Вследствие огромного структурного разнообразия известных высокотемпературных сверхпроводников, для их экспериментального исследования используют огромное число самых разных методов, таких как: измерение динамического и статического сопротивления, статической и динамической магнитной восприимчивости, воздействие давления, радиации, лазерных импульсов, термоЭДС, нейтронную и рентгеновскую дифракцию, воздействия ультразвуком, эффект Мессбауэра, электронную и мюонную спектроскопию, аннигиляцию позитронов и эффект де-Гааза-ван-Альфена, туннельную накачку, ЯМР и ЭПР-спектроскопию, комбинационное рассеяние света, измерения эффекта Холла и пр. За более чем четверть века интенсивных исследований был накоплен огромный массив фактов, отражающих специфику ВТСП и не вписывающихся в стандартную картину сверхпрово-

Вещество	<b>La<sub>1.8</sub>Sr<sub>0.2</sub>CuO<sub>4</sub></b>	<b>YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7-δ</sub></b> 0 < δ < 0.5	<b>Bi<sub>2</sub>Sr<sub>2</sub>Ca<sub>1+x</sub>Cu<sub>2+x</sub>O<sub>8+2x</sub></b> x = 0, 1.	
Группа	лантановые	иттриевые	висмутовые медь-оксиды	
T <sub>c</sub> , К	36.2 [28]	90-95 [27]	85-88 [29]	110 [29]
Год	1987	1987	1988	1988
Вещество	<b>Tl<sub>2</sub>BaCa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>16</sub></b>	<b>HgBa<sub>2</sub>RCu<sub>2</sub>O<sub>6+δ</sub></b> δ = 0.08	<b>Nd<sub>1.85</sub>Ce<sub>0.15</sub>CuO<sub>4</sub></b> <sup>a</sup>	<b>Cs<sub>2</sub>Rb<sub>1</sub>C<sub>60</sub></b>
Группа	таллиевые	ртутные	неодимовые	фуллерены
T <sub>c</sub> , К	125 [30;31]	140 [32;33]	24 [34]	33-42 [35]
Год	1988	1989	1993	1994

Таблица 2: Некоторые высокотемпературные сверхпроводники

<sup>a</sup>Эксперименты по эффекту Холла показали, что в отличие от других известных ВТСП, в соединениях (Nd/Pr)<sub>2-x</sub>Ce<sub>x</sub>CuO<sub>4</sub> реализуется не дырочный, а электронный механизм проводимости.

димости по сценарию БКШ или Элиашберга-МакМиллана. Можно отметить, например, линейный рост электрического сопротивления при  $T > T_c$  (в чистых монокристаллах такая зависимость проявляется вплоть до комнатной температуры), нехарактерное поведение теплоемкости ниже  $T_c$  вместе с аномально большим скачком в точке фазового перехода, появление пика в коэффициенте поглощения ниже  $T_c$  и, в целом, крайне низкую концентрацию носителей заряда ( $n \sim 10^{21} \text{ см}^{-3}$ ).

В целом, для ВТСП характерна близость сверхпроводящего и диэлектрического состояний, что означает, что фазовые переходы "металл-диэлектрик" могут происходить при изменении стехиометрического состава вещества либо под влиянием облучения, или при повышении давления. Второй характерной особенностью высокотемпературных сверхпроводников являются очень малые длины когерентности (несколько периодов решетки), что говорит о намного более сильных корреляциях между носителями заряда, чем в традиционных сверхпроводниках.

Теоретические подходы к описанию ВТСП столь же разнообразны, как и они сами. Как известно, физическая природа сверхпроводимости металлов состоит в стремлении электронов к образованию связанных состояний из пар частиц носителей заряда, при этом, микроскопический механизм такого спаривания может быть самым разным. По типу механизма спаривания используемые теоретические модели можно разделить на две большие группы: фоновые модели, опирающиеся на традиционную схему косвенного взаимодействия электронов посредством фононов (по существу, это разнообразные модификации теории БКШ или Элиашберга-Макмиллана) и прочие т.н. нефоновые модели, использующие другие типы спаривания (экситонный, плазмонный, магнитные корреляции и др.)

В моделях с притягивающим взаимодействием через другие квазичастицы (экситоны, плазмоны и т. д.) реально реализуется тот же сценарий, что и в теории БКШ, только приводящий к более высоким критическим параметрам (см., например, работы [36–39]). Большое число моделей взаимодействия, ответственного за сверхпроводимость, в своей ос-

нове содержат существование во многих ВТСП-соединениях (например, купраты) явления сильного антиферромагнитного упорядочивания, наблюдающегося как в проводящей, так и в диэлектрической фазе. Такие модели представляют собой разнообразные решеточные гамильтонианы по типу модели Гейзенберга (см., например, [40–42]), где каждый магнитный момент соответствует медному атому с находящейся на нем дыркой. Подробнее о спин-флуктуационных механизмах см. обзор [43]. Следует также упомянуть достаточно детальный подход к описанию микроскопического механизма ВТСП, основанный на модели Хаббарда [44] и ее модификациях (t-J-модель и модель Эмери [45]).

С момента создания теории Элиашберга-МакМиллана многими теоретиками достаточно часто высказывались аргументы в пользу того, что электрон-фононное взаимодействие не может привести к  $T_c$  больше 30 - 40 К [46–48]. В основном, такая точка зрения опиралась на то, что электрон-фононное взаимодействие ослабляется при учете прямого кулоновского отталкивания, что, в свою очередь, для известных на тот момент (вплоть до 90-х годов XX века) сверхпроводников с энергией Ферми  $\sim 1 - 10$  эВ и температурой Дебая  $\sim 100 - 500$  К действительно приводило к максимальной  $T_c \sim 40$  К. После открытия ВТСП проводились многочисленные опыты по оценке фононного вклада в механизм сверхпроводимости. В качестве примера можно привести исследования изотопического эффекта в лантановых ВТСП: для  $\text{La}_{1.85}\text{Sr}_{0.15}\text{CuO}_4$   $T_c \sim M^\alpha$ ,  $\alpha \sim 0.16$ , тогда как для  $\text{La}_{1.89}\text{Sr}_{0.11}\text{CuO}_4$   $T_c \sim M^\alpha$ ,  $\alpha \sim 0.6 - 0.8$ . В то же время в иттриевом ВТСП  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+\delta}$  при замене  $^{16}\text{O}$  на  $^{18}\text{O}$ , а также изотопов Ba на Cu изотопический эффект обнаружить не удалось. Все это свидетельствует как о существенном вкладе в механизм сверхпроводимости нефононных взаимодействий, так и об особенностях фононного спектра ВТСП.

В связи с вышеизложенным, нельзя не отметить существенный прогресс, достигнутый в последние годы в деле поиска новых сверхпроводящих структур с высокой  $T_c$ , за которую ответственно именно электрон-фононное взаимодействие. В 2015 году в металлической фазе гидрида серы (под высоким давлением) группой Михаила Еремца была обнаружена сверхпроводимость с критической температурой  $T_c = 203$  К [49]. Наблюдаемый сильный изотопический эффект (при замещении водорода дейтерием) показал на фононный характер механизма перехода в сверхпроводящее состояние. Последующие эксперименты с другими гидридами подтвердили полученную картину высокотемпературного фазового перехода (см. таблицу 3).

Вещество	$\text{H}_2\text{S}$ ( $\text{H}_3\text{S}$ ) <sup>a</sup>		$\text{LiH}_{10}$		$\text{YH}_9$
Давление, GPa	150	150	170	190	201
$T_c$ , К	203 [49]	215 [52]	250 [53]	260 [54]	243 [55]
Год	2015	2018	2019	2019	2019

Таблица 3: Некоторые высокотемпературные сверхпроводники (гидриды)

<sup>a</sup>Повышение давления сопровождается образованием структурных единиц  $\text{H}_3\text{S}$  посредством преобразования:  $2\text{H}_2\text{S} \rightarrow 2\text{H}_3\text{S} + \text{S}$ . Этот переход детально рассмотрен в работах [50; 51].



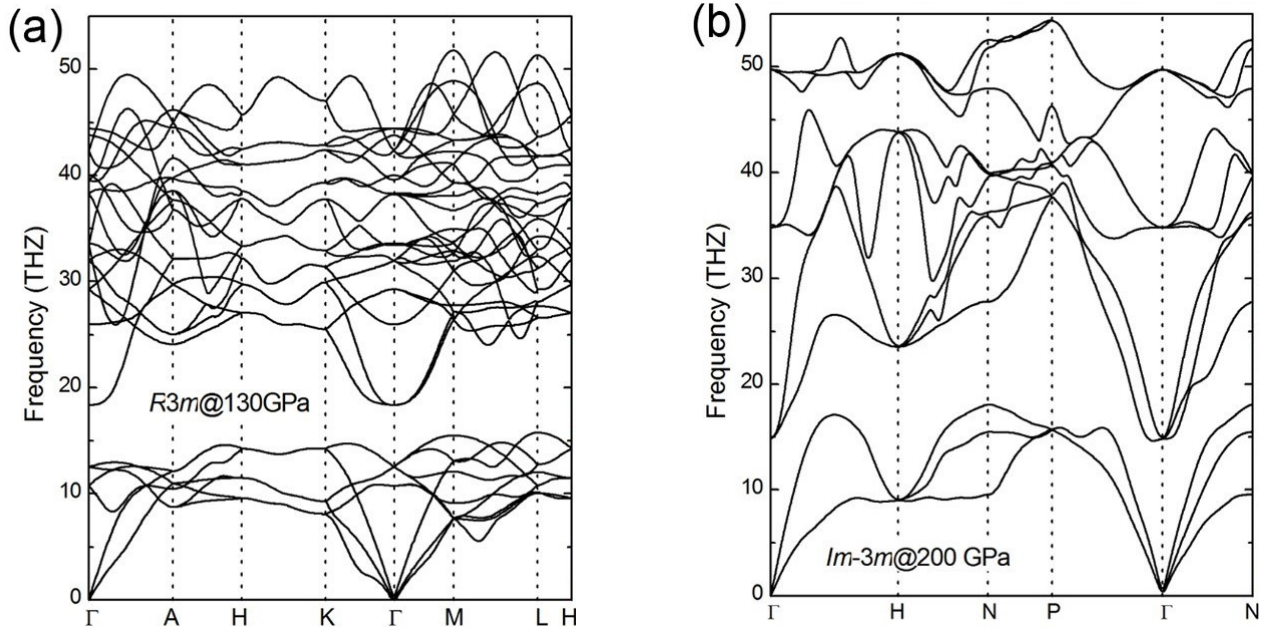


Рис. 1 Фононный спектр гидрида серы [56]

- (a) фаза с симметрией  $R3m$  (тригональная решетка) при 130 GPa ( $T_c \approx 120$  K)  
 (b) фаза с симметрией  $Im-3m$  (кубическая решетка) при 200 GPa ( $T_c \approx 200$  K)

Получаемые высокие критические температуры можно объяснить фононным механизмом в духе теории Элиашберга-Макмиллана с некоторой модификацией, связанной со сложной структурой фононного спектра гидридов (см. обзор [57]). Дело в том, что присутствие водорода приводит к появлению в фононном спектре гидрида оптических мод, а присутствие тяжелых ионов создает дополнительные акустические моды. Обе эти ветви спектра достаточно хорошо разделены (см. Рис. 1) и обе вносят свой вклад в спаривание электронов.

Важнейшей особенностью гидридов является то, что повышение давления изменяет их кристаллическую структуру, что приводит к серии структурных переходов, в том числе, и к переходу первого рода в сверхпроводящую фазу, с рекордной  $T_c$  (например, для  $H_2S$  значение  $T_c$  увеличивается от 100 - 120 K до рекордной  $\approx 200$  K в относительно узком интервале давлений 125 - 150 GPa [58]). Предполагается, что учет связи параметра порядка деформациями решетки преобразовывает стандартный переход второго рода в переход первого рода (см. [59–61]). Отметим, что идея перехода первого рода в высокотемпературную фазу также позволяет непротиворечиво объяснить медленное уменьшение  $T_c$  с ростом давления выше давления, соответствующего максимуму  $T_c \approx 203$  K.

Кроме исследования непосредственно условий для повышения критической температуры можно интересоваться поведением гидридов в нормальном состоянии, особенностями электронного и фононного спектров в обеих фазах, зависимостью изотопического коэффициента от давления и многим другим. Безусловно, глобальной задачей остается создание конструкции, способной демонстрировать высокие значения критической температуры при атмосферном давлении.

### Актуальность темы

На данный момент, изучение высокотемпературной сверхпроводимости остается одним из центральных направлений физики конденсированного состояния. Как уже отмечалось, системы ВТСП оказались настолько сложными и разнообразными, что дать сколько-нибудь полный обзор как по накопленным экспериментальным данным, так и по многообразию теоретических подходов не представляется возможным. Достаточно сказать, что с момента открытия и до сих пор в журнале *Physical Review B* около половины номеров отводится под работы, касающиеся исследования высокотемпературных сверхпроводников. Кроме того, появились специализированные журналы по ВТСП (например, *Physica C Superconductivity*). Все вышеизложенное свидетельствует о том, что построение некоторой, в достаточной степени общей, теории высокотемпературной сверхпроводимости является, безусловно, актуальной задачей.

Важным обстоятельством для теории высокотемпературной сверхпроводимости является то, что несмотря на различия в подходах, существенная часть современных моделей, вслед за своими предтечами – теорией Элиашберга-МакМиллана и БКШ, проявляют определенную общность. Она заключается в том, что основной упор теоретиками делается на подбор как можно более точного микроскопического гамильтониана, тогда как описание с его помощью строится, по сути, в приближении Хартри-Фока, что на языке квантовой теории поля соответствует решению уравнения Дайсона в однопетлевом приближении. Этим, во многом, и объясняется огромное разнообразие существующих моделей для ВТСП, ведь последние в нормальном состоянии обладают большим разнообразием своей микроскопической структуры. На языке квантовой теории поля уточнение структуры микроскопического гамильтониана обычно означает переопределение константы притягивающего взаимодействия, которое позволяет поправить все то же однопетлевое решение уравнения Дайсона. В качестве примера можно привести работы [62; 63], где исследовалось электрон-фононное взаимодействие в режиме сильной неадиабатичности (характерная частота фононов  $\omega_0$  сравнима или превышает энергию Ферми  $E_F$ ). По существу, анализ основывался на все той же теореме Мигдала, которая имеет место и в режиме  $E_F/\omega_0 \ll 1$  [64] (напомним, что стандартный параметр Мигдала есть  $\omega_0/E_F \ll 1$ ). Описываемая ситуация имеет место, например, в высокотемпературных сверхпроводниках на основе моноатомного слоя FeSe на подложке типа SrTiO<sub>3</sub> (FeSe/STO) [65–67].

Хорошо известны недостатки подобного однопетлевого подхода, состоящие в том, что при приближении к критической точке (фазовый переход предполагается непрерывным) следующие петлевые поправки начинают играть все большую роль и условие пренебрежения флуктуациями параметра порядка нарушается. Таким образом, в реальности, многие из существующих моделей сверхпроводимости (в частности, теория БКШ, Элиашберга-МакМиллана и их расширения) не могут корректно описывать ситуацию при стремлении  $T \rightarrow T_c$ , давая хорошее описание только в некоторой окрестности фазового перехода. Для классических сверхпроводников эта особенность теории не критична (параметр

Гинзбурга-Леванюка мал), тогда как для ВТСП, где критическая область наблюдается экспериментально, ситуация совсем иная.

В данной работе нами исследован подход к описанию высокотемпературной сверхпроводимости в слоистых системах и в системах с подрешетками, основанный на построении соответствующей флуктуационной модели. Такой, стандартный для теории критических явлений, подход состоит в замене микроскопического гамильтониана некоторой упрощенной моделью со случайным полем. Это позволяет корректно учесть поправки за счет флуктуаций параметра порядка и строить описание непосредственно вблизи точки фазового перехода [68].

### Степень разработанности темы исследования

Отправной точкой для проведенного исследования служила квантово-полевая модель с локальным бесструктурным притягивающим четырехфермионным взаимодействием, традиционно применяемая для полевого описания сверхпроводимости [69]. Будучи использованной для описания классической низкотемпературной сверхпроводимости эта модель, тем не менее, допускает тривиальное расширение на случай более сложной тензорной структуры квантовых полей, которые по своей природе связаны с волновыми функциями фермионов. Появление дополнительных индексов может быть связано, например, с описанием коллектива частиц с высшими спинами (см. [70;71]) или коллективных явлений в твёрдых телах, при наличии у последних слоистой структуры или дополнительных подрешеток. Именно последняя ситуация, как мы знаем, постоянно имеет место для ВТСП. В формализме функций Грина при конечной температуре действие обсуждаемой модели имеет вид

$$S = \psi_l^+ \left( \partial_t - \frac{\Delta}{2m} - \mu \right) \psi_l + \frac{\lambda}{2} \psi_l^+ \psi_l \psi_{l'}^+ \psi_{l'}, \quad \lambda < 0. \quad (1)$$

где  $\psi_l(\mathbf{x}, t)$ ,  $\psi_l^*(\mathbf{x}, t)$  – комплексно-сопряженные грасмановы поля,  $l', l = 2, \dots, r$  (случаю  $r > 2$  соответствует наличие у полей дополнительной значковой структуры). Зависимость компонент полей от  $d$ -мерных координат  $\mathbf{x}$  и "мнимого времени"  $t \in [0, \beta \equiv 1/T]$  всюду подразумевается. Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $T$  – температура в энергетических единицах,  $m$  – масса фермиона,  $\mu$  – химический потенциал системы и  $\lambda$  – эффективная константа четырехфермионного взаимодействия. Всюду в работе использована система единиц  $\hbar = k_B = 1$ , где  $\hbar$  – постоянная Планка, а  $k_B$  – постоянная Больцмана. Граничные условия по времени для функций  $\psi_l$ ,  $\psi_l^*$  стандартно предполагаются антипериодическими

$$\psi_l(\mathbf{x}, t) = -\psi_l(\mathbf{x}, t + \beta), \quad \psi_l^*(\mathbf{x}, t) = -\psi_l^*(\mathbf{x}, t + \beta).$$

Все необходимые интегрирования по  $t$  и  $\mathbf{x}$  в формуле (1) и аналогичных формулах, а также суммирование по повторяющимся значкам в дальнейшем всюду подразумевается.

Температура фазового перехода  $T_c$  в рамках модели (1) определяется появлением аномальных решений уравнения Дайсона [69]. Параметр порядка сверхпроводящего фазового перехода при этом есть ни что иное, как среднее значение составных операторов

$\langle \psi_i \psi_j \rangle$  и  $\langle \psi_i^* \psi_j^* \rangle$ . Чтобы построить эффективную модель, описывающую поведение системы в окрестности точки фазового перехода, в работе [72] действие (1) при помощи преобразования Хаббарда-Стратоновича было преобразовано к виду (преобразование в стиле [73])

$$S_{HS} = \psi_l^+ \left( \partial_t - \frac{\Delta}{2m} - \mu \right) \psi_l + \text{Tr}(\chi^+ \chi) + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \chi_{ll'} (\psi_l^+ \psi_{l'}^+) + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \chi_{ll'}^+ (\psi_l \psi_{l'}). \quad (2)$$

Здесь и далее в работе под символом  $\text{Tr}$  всюду будет пониматься матричная операция взятия следа. Поля  $\chi$  и  $\chi^+$  – эрмитово-сопряженные антисимметричные матричные поля ранга  $r$ , средние значения которых, как было показано [72], напрямую связаны с естественными параметрами порядка в исходной модели (1), а сами переменные  $\chi$ ,  $\chi^+$  являются безмассовыми критическими модами в точке фазового перехода.

Структура полученного действия (2) позволила выполнить гауссово интегрирование по фермионным полям  $\psi$ ,  $\psi^+$  и перейти к чисто бозонному действию в форме

$$S_\chi = \frac{1}{2\lambda} \chi_{ji}^+ \chi_{ij} + \text{Tr} \ln \begin{pmatrix} -\chi^+ & -i\omega_s + \epsilon(\mathbf{k}) \\ -i\omega_s - \epsilon(\mathbf{k}) & -\chi \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $\epsilon(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|^2/2m - \mu$  и  $\omega_s = \pi T(2s + 1)$  – мацубаровские частоты,  $s \in \mathbb{Z}$ .

Далее, в работе [72] был произведен переход к ИК-эффективной модели путем отбора наиболее существенных в ИК режиме вкладов (3). Позднее, этот переход был строго обоснован в [74] при помощи ренормгруппового анализа старших вершин в (3), рассматриваемых в качестве составных операторов. Полученная в результате ИК-существенная  $SU(r)$ -симметричная модель, описывающая коллективное поведение многокомпонентной фермионной системы вблизи фазового перехода в сверхпроводящее (сверхтекучее) состояние, имеет вид

$$S_{HL} = \text{Tr}(\chi^+ (-\Delta + \tau_0) \chi) + \frac{g_{01}}{4} (\text{Tr}(\chi^+ \chi))^2 + \frac{g_{02}}{4} \text{Tr}(\chi^+ \chi \chi^+ \chi). \quad (4)$$

Переход к ИК-эффективной теории сопровождается введением регуляризации в графах действия, произвол в выборе которой фиксируется процедурой перенормировки. Важно отметить, что вершина  $(\text{Tr}(\chi^+ \chi))^2$  не возникает в процессе получения эффективного действия, поэтому  $g_{01} = 0$ , однако она разрешена симметрией и необходима для обеспечения мультипликативной ренормируемости теории. Кроме того, в критической области поля  $\chi$  и  $\chi^+$  зависят только от  $d$ -мерных координат  $\mathbf{x}$  (интегралы по "мнимому времени"  $t \in [0, 1/T]$  порождают несущественный множитель  $1/T$ , устраняемый растяжением полей). Параметры (4) даются выражениями  $g_{0j} = \tilde{g}_{0j}/c_0^2$ ,  $\tau_0 = \tilde{\tau}_0/c_0$ , где

$$c_0 = \frac{1}{2} \partial_p^2 \sum_{\omega_s} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{-1}{(\epsilon(\mathbf{k}) + i\omega_s)(\epsilon(\mathbf{k} + \mathbf{p}) - i\omega_s)} \Big|_{p=0}, \quad \tilde{g}_{02} = \sum_{\omega_s} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\epsilon(\mathbf{k})^2 + \omega_s^2)^2}, \quad (5)$$

$$\tilde{\tau}_0 = \frac{\beta}{2\lambda} - \frac{1}{2} \sum_{\omega_s} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\epsilon(\mathbf{k})^2 + \omega_s^2)}, \quad \tilde{g}_{01} = 0.$$

Отметим, что уравнения движения полей  $\chi$  и  $\chi^+$  при введении в (4) (с учетом условия  $g_{01} = 0$ ) источников полей  $A_\psi$ ,  $A_{\psi^+}$  есть ни что иное, как уравнения Гинзбурга-Ландау.

Диаграмма для  $\tau_0$  в (5) содержит логарифмическую УФ-расходимость, которая физически обрезается параметром  $\delta$ . В случае обсуждения стандартной низкотемпературной сверхпроводимости следует полагать  $\delta = 2\omega_D$ , для ВТСП же величина обрезания требует отдельного обсуждения.

Анализ показал, что при  $r = 2$  (обычные электроны проводимости) члены взаимодействия в выражении для  $S_{HL}$  оказываются линейно-зависимыми, константы взаимодействия представляют собой один параметр  $g = g_{02} + 2g_{01}$ , что сразу приводит нас к  $O(2)$ -симметричной теории  $\phi^4$  (антисимметричные матрицы ранга 2 однозначно задаются единственным комплексным числом). Однако для любого другого  $r = 4, 6, \dots$  действие (4) содержит в себе независимо уже обе константы связи. При этом на основании пятипетлевых вычислений методом ренормализационной группы с конформ-Борель пересуммированием полученных результатов было показано [74], что при  $r > 2$  в описываемой системе критические флуктуации выводят систему из устойчивого состояния – происходит флуктуационный срыв непрерывного фазового перехода к переходу первого рода в окрестности точки, определенной условием (45) для инвариантных зарядов. При этом, переход в новую фазу происходит при температуре превышающей значение, получаемое в приближении теории среднего поля Ландау (которая, к тому же, предсказывает непрерывный фазовый переход при любых значениях  $r$ ). Подобный флуктуационный срыв типичен именно для моделей с многокомпонентным параметром порядка, обнаруженное поведение часто встречается в магнитных системах, например, при антиферромагнитном переходе порядок-беспорядок.

Дальнейшее описание ВТСП моделью (4) (ситуация, когда  $r > 2$ ) основано на предположении о близости имеющегося фазового перехода к точке фазового перехода второго рода, поскольку только в этом случае вершины следующего порядка градиентного разложения для (3) можно считать ИК-несущественными.

В работах [74; 75] попытка оценить температуру перехода через физически измеримые параметры приводит к чрезвычайно трудоёмкой задаче борелевского пересуммирования на каждом шаге численного решения интегро-дифференциальных динамических уравнений ренормализационной группы. Последнее обстоятельство стандартно для приложений квантово-полевых методов к задачам теории критических явлений: асимптотические ряды теории возмущений с конечным, но не малым параметром разложения, требующие процедуры пересуммирования.

Традиционно, критическое поведение описывается методами ренормализационной группы (РГ) в формализме некоторого регулярного, обычно  $4 - \epsilon$  разложения. В рамках этого разложения критические индексы фазовых переходов второго рода представляются в виде рядов по степеням  $\epsilon$ , причем физическому (трёхмерному) случаю соответствует  $\epsilon = 1$ . В связи со своей физической значимостью задача их вычисления постоянно привлекает новых исследователей (см., например, [76–79]). В последнее время был достигнут

существенный прогресс в вычислении старших порядков  $4 - \epsilon$  разложения. Для теории  $\phi^4$  получены результаты шестипетлевых вычислений [80], ведётся активная работа по вычислению более высоких порядков. Существенно, что ввиду асимптотического характера получаемых рядов, дальнейший прогресс в улучшении точности вычисления критических показателей предполагает не только учет вкладов диаграмм высших порядков, но и использования методов «улучшения» и суммирования асимптотических рядов [80–82].

Дополнительную информацию о поведении асимптотических рядов теории возмущений нам дает вычисление асимптотики высоких порядков коэффициентов их разложения (АВП). Стандартная процедура вычисления АВП для произвольной теоретико-полевой величины  $A$  была предложена Липатовым в [83] и основывается на использовании метода перевала в функциональном интеграле. Характерная асимптотика, получаемая в результате этого подхода, имеет вид  $A^{(N)} \approx N! q_A^N N^{b_A} C_A$ , где  $A^{(N)}$  –  $N$ -й коэффициент разложения физической величины  $A$  в ряд по константе связи  $g$ , а  $q_A$ ,  $b_A$  и  $C_A$  – некоторые, не зависящие от  $N$ , константы. Из приведенного выражения непосредственно видно, что ряд теории возмущений для  $A$  является расходящимся в классическом смысле.

Проблема извлечения числовых результатов из асимптотической теории возмущений решается процедурой пересуммирования по Борелю [84] доступных членов разложения или различными её обобщениями (см., например, [80–82]). Существенно, что информация, необходимая для проведения пересуммирования содержится не только в начальных порядках разложения, но и в их АВП, пересуммирование без учёта которой не может быть признано корректным [80].

Кроме методов пересуммирования асимптотических рядов, однако, существует различные альтернативные подходы, основанные на идее получить заведомо сходящиеся разложения (см, например, работы [85–90]). Именно подход, основанный на сходящихся рядах, был нами использован для продвижения в ренормгрупповом анализе модели (4). Искомый метод, приводящий непосредственно к сходящейся теории возмущений, правда по некоторому новому дополнительному параметру, был предложен в работе [91] при исследовании стандартной для описания критического поведения  $O(n)$ -симметричной теории  $\phi^4$ . Метод РГ для данного разложения был развит в работах [92; 93]. Очевидные с математической точки зрения (сходимость ряда теории возмущений) преимущества данного подхода инициировали попытки его расширения на более общий класс рассматриваемых моделей [94; 95]. К сожалению, в упомянутых выше работах авторы для оценки радиусов сходимости получаемых рядов пользуются, вслед за оригинальной работой [91], неравенствами Соболева вместо более точного анализа, предложенного позднее в работах [92; 93].

**Целью** данной работы является анализ эффективной  $SU(r)$ -симметричной двухзарядной тензорной модели высокотемпературного фазового перехода в сверхпроводящее состояние методами квантово-полевой ренормализационной группы в рамках формализма сходящейся теории возмущений. Поставленная цель требует для своего достижения решения следующих **задач**:

I. Развитие метода построения сходящихся рядов теории возмущений для стандартных квантово-полевых моделей. Исследование эффективности его применения к ренормгрупповому анализу на примере модели А критической динамики.

II. Подробный анализ фазовой картины уравнений Гелл-Манна-Лоу, построенных по диаграммам сходящейся теории возмущений, и получение РГ-инвариантных констант ренормировки в модели (4).

III. Получение интегральных уравнений, связывающих "голые" (зависящие от физически измеряемых параметров) и "бегущие" параметры модели с целью оценок таких параметров как критическая температура и константа четырёхфермионного взаимодействия.

**Научная новизна.** В рамках проделанной работы были впервые решены следующие задачи:

1. Предложен метод построения теории возмущений с конечным радиусом сходимости для класса однозарядных квантово-полевых моделей с однородным по полям взаимодействием, опирающийся на диаграммы стандартной (расходящейся) теории возмущений. Уточнено значение радиуса сходимости получаемых рядов.
2. Исследована применимость предложенного метода сходящейся теории возмущений на примере модели А критической динамики, где проведено вычисление критического индекса  $z$ .
3. В формализме сходящейся теории возмущений в модели (4) вычислены РГ-инвариантные константы перенормировки.
4. В рамках анализа фазовой плоскости уравнений Гелл-Манна-Лоу для тензорной модели (4) сформулировано и доказано принципиально новое утверждение о том, что начальные состояния всех сверхпроводников, демонстрирующих высокотемпературный фазовый переход первого рода, лежат на одной единственной кривой в фазовой плоскости "бегущих" констант взаимодействия.
5. Построены и исследованы интегральные уравнения, связывающие "голые" и "бегущие" параметры (4).

**Теоретическая и практическая значимость.** Результаты, полученные в работе, могут быть использованы в широком классе моделей квантовой теории поля и статистической физики, где стандартные теоретико-возмущенческие подходы либо дают неполное описание, либо их применение затруднительно. В рамках теории высокотемпературной сверхпроводимости в слоистых системах полученные качественные и количественные результаты могут быть использованы для вычисления эффективных констант четырёхфермионного взаимодействия или оценки температуры фазового перехода.

**Методология и методы исследования.** Методология работы основана на использовании методов квантовой теории поля – методе функционального интегрирования, диаграммной технике Фейнмана, теории ренормировок и ренормализационной группе. Для

построения сходящихся рядов теории возмущений применялись методы инстантонного и асимптотического анализа.

**Достоверность полученных результатов.** Высокая степень достоверности полученных результатов обеспечивается использованием различных методов квантовой теории поля, хорошо зарекомендовавших себя при решении задач, близких к рассматриваемым в настоящей работе. Для используемого в работе мало известного метода сходящейся теории возмущений проводился отдельный анализ степени достоверности результатов, полученных на его основе (см. Раздел... и Раздел...). Все результаты, как конечные, так и промежуточные, находятся в согласии с полученными ранее другими авторами.

**Апробация работы.** Результаты и положения работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

1. XIII Всероссийский форум студентов, аспирантов и молодых ученых "Наука и инновации в технических университетах" (Санкт-Петербург, Россия, 2019);
2. 54-я Школа Петербургского Института Ядерной Физики (ПИЯФ), тематическая школа "Теоретическая физика" (Санкт-Петербург, Россия, 2020);

**Публикации.** Результаты работы опубликованы в журнале Теоретическая и Математическая Физика, который включен в перечень ВАК и индексируется базами данных "Scopus", "РИНЦ" и "Web of Science" а также в тезисах докладов соответствующих конференций.

1. Nalimov, M.Y., Ovsyannikov, A.V. *Convergent perturbation theory for studying phase transitions*, Theor Math Phys, **204**, 1033–1045 (2020).

**Личный вклад автора.** Все включенные в работу результаты были получены автором лично либо при его непосредственном участии в неразделимом соавторстве.

**Объем и структура работы.** Работа состоит из Введения, 2 Разделов и Заключение. Полный объем работы составляет 42 страницы с 3 рисунками и 5 таблицами. Список литературы содержит 103 наименования.

- Во **введении** дан краткий обзор современной теории сверхпроводимости, обоснована актуальность проделанной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, описаны методология, методы и степень разработанности темы исследования, а также показана практическая значимость полученных результатов. Представлены выносимые на защиту научные положения.
- В **разделе 1** нами определяется класс квантово-полевых моделей, для представителей которого строится общая процедура построения сходящейся теории возмущений, которая, в свою очередь, опирается на стандартную (расходящуюся) теорию возмущений и информацию об АВП её коэффициентов. В рамках описываемого подхода доказывается возможность использования результатов расчетов диаграмм стандартной теории возмущения для вычислений коэффициентов получаемых сходящихся рядов, определяется их радиус сходимости. Применение предлагаемого



подхода иллюстрируется на примере стохастической модели А критической динамики.

- В **разделе 2** строится сходящееся разложение для действия (4). Проводится полный ренормгрупповой анализ, вычисляются РГ-инвариантные константы ренормировки, исследуется фазовая картина динамических уравнений на инвариантные заряды и строятся интегральные уравнения для определения физических параметров модели.
- В **заключении** представлены основные результаты и выводы.

# 1. Метод сходящейся теории возмущений

В данном разделе приводится схема построения сходящихся рядов теории возмущений для некоторого достаточно широкого класса квантово-полевых моделей и определяются условия их сходимости. Исходно предполагается, что во всех интересующих нас моделях считаются известными диаграммная техника и АВП коэффициентов построенных стандартных разложений. Оказывается, что использование сходящихся разложений в некоторых задачах традиционного подхода приводит к существенному их упрощению. Кроме того, полученный формализм позволяет задумываться о решении принципиально новых задач, таких как, например, исследование асимптотик сильной связи.

Применение предлагаемой схемы иллюстрируется на примере стандартной модели А [96] стохастической динамики, традиционно применяемой для описания критического поведения теории  $\phi^4$ . Из всех динамических моделей модель А самая простая и лучше всего исследованная, по этой причине она традиционно служит полигоном для проверки разрообразных методов расчетов и описания критической динамики. Кроме того, в работе [97] было показано, что именно она описывает динамику перехода в сверхтекучее состояние. Отметим, что используя полученные результаты, описываемый подход может быть легко обобщен и на другие классы квантово-полевых моделей.

## 1.1. Общий формализм

Достаточно общую схему построения сходящейся теории возмущений можно получить рассмотрев класс логарифмических квантово-полевых моделей, описываемых набором полей  $\phi \equiv \{\phi_\alpha(x)\}$ . В аргумент  $x$  поля стандартно объединим совокупность всех непрерывных и дискретных степеней свободы, характеризующих  $\phi$ . Будем считать, что взаимодействие в этом классе задаётся однородным по полям функционалом, в общем случае, зависящем от полей  $\phi_\alpha(x)$  и их производных  $\partial\phi \equiv \{\partial_i^k \phi_\alpha(x)\}$ . Для моделей такого класса действие можно символически записать в виде

$$S = \frac{1}{2} \phi_\alpha K_{\alpha\beta} \phi_\beta + gF\{\phi, \partial\phi\}, \quad (6)$$

где  $g$  – параметр стандартного квантово-полевого разложения.

Свободную часть  $S$  определяет квадратичная форма  $\phi_\alpha K_{\alpha\beta} \phi_\beta$ , где, не ограничивая общности,  $K \equiv \{K_{\alpha\beta}\}$  можно считать линейной интегральной операцией с симметричным ядром. Аналогично, взаимодействие  $F\{\phi, \partial\phi\}$  в (6) тоже можно представить локальным интегральным функционалом с плотностью  $\mathcal{F}(\phi, \partial\phi)$ , являющейся однородной по всем полям функцией с некоторым вещественным показателем однородности  $\Delta_F > 2$ . Отсутствие явной зависимости плотности  $\mathcal{F}(\phi, \partial\phi)$  от  $x$  отражает предполагаемую трансляционную

инвариантность описываемой системы. Суммирование и интегрирование по всем повторяющимся дискретным и непрерывным аргументам в формуле (6) и аналогичных далее всегда подразумевается.

По нашему предположению, в рассматриваемой теории (6) известна асимптотика высоких порядков стандартной КТП теории возмущений, определенная методом инстантонного анализа. В частности, это означает, что для системы уравнений стационарности метода перевала для действия  $S$

$$K_{\alpha\beta}\phi_\beta + g\frac{\delta F\{\phi, \partial\phi\}}{\delta\phi_\alpha} = 0, \quad (7)$$

$$F\{\phi, \partial\phi\} = -1/g, \quad (8)$$

известно нетривиальное решение инстантонного типа в виде набора функций  $\{\phi_\alpha^{(c)}(x)\}$  и точки стационарности  $g_c$ . Символом  $\delta/\delta\phi_\alpha$  обозначена соответствующая функциональная производная по полю  $\phi_\alpha$ . Индекс  $\alpha$  у инстантонов нумерует полный набор полей, однако допускается, что некоторые из  $\phi_\alpha^{(c)}(x)$  могут тождественно равняться нулю.

Для получения рядов теории возмущений с контролируемой аналитически сходимостью совершим над действием (6) преобразование в стиле [91]

$$S \longrightarrow S(\zeta) = \frac{1}{2}\phi_\alpha K_{\alpha\beta}\phi_\beta + g\zeta F\{\phi, \partial\phi\} + a(1 - \zeta)\mathcal{F}([\phi K\phi]^{1/2}), \quad (9)$$

где  $\zeta$  – числовой параметр преобразования, причём  $S(\zeta = 1) = S$ ,  $a$  – некоторое положительное вещественное число, и для всякого выражения в квадратных скобках [...] здесь и всюду далее будет подразумевается интегрирование по непрерывным аргументам и суммирование по дискретным. Выражение  $\mathcal{F}([\phi K\phi]^{1/2})$  представляет собой результат следующей формальной замены аргументов у  $\mathcal{F}(\phi, \partial\phi)$ :  $\phi_\alpha \rightarrow [\phi K\phi]^{1/2}$  и  $\partial_i^k \phi_\alpha \rightarrow [\phi K\phi]^{1/2}$  для каждого  $\alpha = 1, \dots, n$ . Выбор показателя степени  $1/2$  квадратичной формы  $[\phi K\phi]$  в члене  $\mathcal{F}([\phi K\phi]^{1/2})$  обеспечивает одинаковую степень однородности для него и функционала  $F\{\phi, \partial\phi\}$ . Предположенную ранее логарифмичность теории данное преобразование также не нарушает. Отметим, что  $\mathcal{F}([\phi K\phi]^{1/2})$  является однородной функцией своего аргумента порядка  $\Delta_F$  и, следовательно, имеет вид  $\mathcal{F}([\phi K\phi]^{1/2}) = C[\phi K\phi]^{\Delta_F/2}$ , где константа  $C = \mathcal{F}(1, 1)$ .

Тот факт, что вклад  $\mathcal{F}([\phi K\phi]^{1/2})$  оказывается пропорционален некоторой степени квадратичной формы  $[\phi K\phi]$ , даёт возможность привести диаграммную технику для преобразованных по правилу (9) моделей к уже известной диаграммной технике для (6). Рассмотрим, например, эту процедуру для  $2s$ -хвостых функций Грина  $G_{\alpha_1 \dots \alpha_{2s}}$  моделей (9)

$$G_{\alpha_1 \dots \alpha_{2s}} = \int \mathcal{D}\phi \phi_{\alpha_1}(x_1) \dots \phi_{\alpha_{2s}}(x_{2s}) e^{-S(\zeta)}. \quad (10)$$

Вклад в экспоненту соответствующий слагаемому с  $\mathcal{F}([\phi K \phi]^{1/2})$  в (10) можно тождественно переписать, вводя интегрирование с дельта-функцией в представлении Фурье, в виде

$$e^{-a(1-\zeta)C[\phi K \phi]^{\Delta_F/2}} \theta([\phi K \phi]) = \int dy' dy e^{-a(1-\zeta)Cy'^{\Delta_F/2}} e^{iy(y' - \phi_\alpha K_{\alpha\beta} \phi_\beta)} \theta(y'), \quad (11)$$

где  $\theta$ -функция отражает, обычно предполагаемую, положительную определённую квадратичной формы  $[\phi K \phi]$ . Сразу отметим, что такое предположение не является существенным. Не представляет трудности обобщить этот результат на случай произвольных невырожденных матриц  $K$ , таких что соответствующий гауссов интеграл для (6) существует.

Тождество (11), после подстановки в определение (10) и растяжения полей  $\phi_\alpha \rightarrow \phi_\alpha / \sqrt{1 + 2iy}$ , приводит к следующему представлению для  $G_{\alpha_1 \dots \alpha_{2s}}$  в виде

$$G_{\alpha_1 \dots \alpha_{2s}} = \int dy \int_0^\infty dy' \frac{e^{-a(1-\zeta)Cy'^{\Delta_F/2} + iyy'}}{(1 + 2iy)^s} \int \mathcal{D}\phi \phi_{\alpha_1}(x_1) \dots \phi_{\alpha_{2s}}(x_{2s}) e^{-\tilde{S}}, \quad (12)$$

где новое действие  $\tilde{S}$  даётся выражениями

$$\tilde{S} = \frac{1}{2} \phi_\alpha K_{\alpha\beta} \phi_\beta + \tilde{g} F\{\phi, \partial\phi\}, \quad \tilde{g} = g\zeta / (1 + 2iy)^{\Delta_F/2}. \quad (13)$$

Поскольку  $\tilde{S}$  отличается от исходного действия  $S$  только переопределением параметра разложения, то, под знаком интегралов по  $y$  и  $y'$ , диаграммное разложение для  $G_{\alpha_1 \dots \alpha_{2s}}$  в (12) строится по тем же правилам, с точностью до замены вершин  $g \rightarrow \tilde{g}$ , что и для теорий типа (6) и приводит, топологически, к тем же самым диаграммам.

Дальнейшей нашей целью будет показать, что построенная по параметру  $\zeta$  теория возмущений для моделей с действием вида (9), представляет собой сходящийся ряд, в том числе и в "физической" точке  $\zeta = 1$ .

Как и в [83; 98] мы будем проводить анализ АВП разложения не принимая во внимание ренормировку действия, поскольку учёт соответствующих контрчленов приводит только к малым поправкам по  $1/N$  к решениям уравнений стационарности.

Для вычисления радиуса сходимости искомого ряда по  $\zeta$  нам требуется знание АВП  $G_{\alpha_1 \dots \alpha_{2s}}^{(N)}$  – коэффициента разложения с номером  $N$   $2s$ -хвостой функции Грина  $G_{\alpha_1 \dots \alpha_{2s}}$  (10) при  $N \rightarrow \infty$ . Воспользуемся тем, что согласно [83]

$$G_{\alpha_1 \dots \alpha_{2s}}^{(N)} = \frac{1}{2\pi i} \int \mathcal{D}\phi \oint_\gamma d\zeta \phi_{\alpha_1}(x_1) \dots \phi_{\alpha_{2s}}(x_{2s}) e^{-S(\zeta) - (N+1) \ln \zeta}, \quad (14)$$

где  $\gamma$  – замкнутый контур вокруг нуля в комплексной плоскости.

Однородность функционалов  $\mathcal{F}([\phi K \phi]^{1/2})$  и  $F\{\phi, \partial\phi\}$  позволяет в (14) провести растяжение полей  $\phi_\alpha \rightarrow N^{1/\Delta_F} \phi_\alpha$ , выделяя в показателе экспоненты большой параметр  $N$ , так, чтобы применить метод перевала. Уравнения стационарности для (14) принимают

вид

$$a(1 - \zeta)\mathcal{F}(1, 1)[\phi K \phi]^{\frac{\Delta_F - 2}{2}} K_{\alpha\beta} \phi_\beta + g\zeta \frac{\delta F\{\phi, \partial\phi\}}{\delta \phi_\alpha} = 0, \quad (15)$$

$$F\{\phi, \partial\phi\} - a\mathcal{F}([\phi K \phi]^{1/2}) = -1/\zeta. \quad (16)$$

Для дальнейшего анализа АВП (10) необходимо построить решения уравнений (15) и (16).

Рассмотрим уравнения (15). Они однородны, следовательно, если существует какой-то нетривиальный набор полей  $\phi_\alpha^{(s)}(x)$ , удовлетворяющих (15), то и  $z\phi_\alpha^{(s)}(x)$ , тоже будет им удовлетворять. Такая симметрия уравнений позволяет выбрать нормировку решения  $\phi_\alpha^{(s)}(x)$  так, чтобы число  $[\phi^{(s)} K \phi^{(s)}] = 1$ . Для этого достаточно поделить каждое из полей  $\phi_\alpha^{(s)}(x)$  на  $[\phi^{(s)} K \phi^{(s)}]^{-1/2}$ . При таком выборе нормировки непосредственно видно, что уравнение (15) отличается от (7) только ещё одним дополнительным растяжением полей.

Указанные соображения позволяют искать решение (15) в виде  $\phi_\alpha^{(st)}(x) = z\phi_\alpha^{(s)}(x)[\phi^{(s)} K \phi^{(s)}]^{-1/2}$ , где параметр  $z$  определяется из соотношения

$$g_c \left(\frac{1}{z}\right)^{\Delta_F - 2} = \frac{g\zeta}{a(1 - \zeta)\Delta_F}, \quad (17)$$

выражающего равенство коэффициентов при вторых слагаемых уравнений (7) и (15), выполняющееся на функциях  $\phi_\alpha^{(st)}(x)$ . Из (17) следует, что выбор  $z$ , необходимый для того, чтобы поля удовлетворяли уже системе (15), (16) фиксируется выбором точки стационарности  $\zeta_{st}$ .

Для поиска  $\zeta_{st}$  используем приём в стиле [99], подействовав на уравнение (15) оператором  $\sum_\alpha \int dx \phi_\alpha(x)$ . Из предполагаемой однородности функционала взаимодействия  $F\{\phi, \partial\phi\}$  следует равенство

$$\int dx \phi_\alpha(x) \frac{\delta F\{\phi, \partial\phi\}}{\delta \phi_\alpha} = \Delta_F F\{\phi, \partial\phi\}, \quad (18)$$

благодаря которому по уравнению (15) можно написать следующее интегральное соотношение, которое можно использовать для определения  $\zeta$

$$\mathcal{F}([\phi K \phi]^{1/2}) = -\frac{g\zeta}{a(1 - \zeta)} F\{\phi, \partial\phi\}. \quad (19)$$

Здесь уместно отметить, что, благодаря рассмотренному выше оставшемуся произволу в выборе нормировки для решений (15), мы можем всегда сделать совместными уравнения (16) и (19).

Переходя в (19) к решениям  $\phi_\alpha^{(st)}(x)$  и замечая, что  $F\{\phi^{(st)}, \partial\phi^{(st)}\} = (1/z)^{\Delta_F} \times F\{\phi^{(s)}, \partial\phi^{(s)}\}$ , где функционал  $F\{\phi^{(s)}, \partial\phi^{(s)}\}$  известен из (8), получаем выражение для  $\zeta_{st}$

в виде

$$\zeta_{st} = \frac{1}{1 + g / \left( a g_c \Delta_F^{\Delta_F/2} \right)}. \quad (20)$$

По известному инстантону и точке стационарности (20) АВП функций Грина определяется стандартно [83;98]. Для вычисления радиуса сходимости реально необходимо только наиболее быстрорастущий вклад в асимптотику, который, как следует из вышеизложенного, полностью определяется точкой стационарности (20):

$$R = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \frac{G_{\alpha_1 \dots \alpha_{2s}}^{(N)}}{G_{\alpha_1 \dots \alpha_{2s}}^{(N+1)}} \right| = |\zeta_{st}|. \quad (21)$$

Мы получили радиус сходимости, который стремится к бесконечности при стремлении  $a \rightarrow g / ((-g_c) \Delta_F^{\Delta_F/2})$ . Для исследования модели при "физическом" значении  $\zeta = 1$  достаточно, чтобы радиус сходимости превышал единицу, что происходит при выборе параметра  $a > g / (2(-g_c) \Delta_F^{\Delta_F/2})$ .

Результаты этого раздела, даваемые формулами (12)-(13) и (20) полностью согласуются с ответами, полученными в работах [92;93], для случая скалярной модели  $\phi^4$  (отметим, что для единообразия нам пришлось здесь ввести константу  $a$  в четыре раза больше, чем в статьях [92;93]).

При построении ренормгрупповых уравнений в теориях типа (6) применимы аналогичные [?; 100] соображения, приводящие к уравнению РГ вида

$$\mathcal{D}_{RG} G_{2k}^R \equiv [\mathcal{D}_\mu + \beta_1 \partial_{g_1} + \beta_2 \partial_{g_1}^2 + \dots - \gamma_\tau \mathcal{D}_\tau + \dots + \gamma_k] G_{2k}^R = 0, \quad (22)$$

в котором коэффициенты  $\beta_i$  перед соответствующими производными по зарядам и  $\gamma$  зависят от порядка разложения функции Грина и параметров  $g_1, g_2, a, \zeta$ . Здесь многоточиями обозначены члены со старшими производными по  $g$  и  $\tau$  соответственно, а символом  $\mathcal{D}$ —логарифмическая производная по соответствующему аргументу. При наличии фиксированной точки исследование РГ уравнения в форме (38) позволяет, кроме всего прочего, ответить на вопрос о её ИК-устойчивости. Можно строить решение уравнения (38) по теории возмущений и аналогично [?] показать, что в некоторой окрестности фиксированной точки вклады со старшими производными по зарядам можно отбросить, ограничившись исследованием уравнения

$$[\mathcal{D}_\mu + \beta_1 \partial_{g_1} + \beta_2 \partial_{g_2} - \gamma_\tau \mathcal{D}_\tau + \gamma_k] G_{2k}^R = 0. \quad (23)$$

Соответствующие РГ-функции (38) можно найти, пользуясь методом, предложенным в [?; 92; 101; 101].

## 1.2. А-модель критической динамики

Модель А критической динамики, в соответствии с классификацией [96], является типичным представителем эффективных теорий, описывающих процесс релаксации и критического замедления в неравновесной системе и позволяющих установить дисперсию  $\omega \sim k^z$  флуктуаций параметра порядка в ИК пределе  $k \rightarrow 0$ . Модель А принадлежит изинговскому классу универсальности, который включает непосредственно изинговский магнетик, бинарные смеси и критическую точку жидкость-пар. Её действие в MSR формализме [102] имеет вид

$$S_A = \lambda \phi' \phi' + \phi' \left( -\partial_t \phi + \lambda \left( \partial^2 \phi - g \phi^3 / 6 \right) \right) \quad (24)$$

и зависит от основного поля  $\phi$  и MSR-сопряженного к нему поля  $\phi'$ . Оба поля зависят от  $d$ -мерных пространственных координат и времени  $t$ ,  $\lambda$  – ответственный за затухание коэффициент Онзагера. АВП стандартной КТП теории возмущений в данной модели были определены в [98] методом инстантонного анализа.

Динамическое действие А-модели, преобразованное согласно (9), имеет вид

$$S_A = \lambda \left( \phi' \phi' + \partial^2 \phi \right) - \phi' \partial_t \phi - \zeta \lambda g \phi^3 / 6 - a(1 - \zeta) \left( \lambda \left( \phi' \phi' + \partial^2 \phi \right) - \phi' \partial_t \phi \right). \quad (25)$$

Данная теория – мультипликативно ренормируема, а сама ренормировка проводится по схеме, описанной в конце раздела 1.1. Используется размерная регуляризация в пространстве  $d = 4 - \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – отклонение размерности пространства от логарифмической размерности теории, а так же MS-схема перенормировок. Ренормированное действие А-модели под знаком интеграла по  $\sigma$  имеет вид:

$$S = \lambda \tilde{Z}_1 \phi' \phi' + \phi' \left( -\tilde{Z}_2 \partial_t \phi + \lambda \left( \tilde{Z}_3 \partial^2 \phi - \zeta g \tilde{Z}_4 \phi^3 / 6 \right) \right), \quad (26)$$

где  $\tilde{Z}_i = Z_i \left( \zeta g / \left( 1 + i\sigma \sqrt{a(1 - \zeta)} \right)^2 \right)$ . Единичный радиус сходимости обеспечивается при выборе  $a > g / (16\pi^2)$  [93; 98]).

Рассматриваемая теория имеет статический предел, поэтому используя известную связь динамики со статикой при ренормировке [68] можно написать  $Z_1 = Z_\phi^2 Z_\lambda^{-1}$ , где константа  $Z_\phi$  совпадает с вычисленной в статической теории  $\phi^4$ .

В соответствие с [93; 98] уравнение РГ для ренормированной функции Грина  $G_{k,k'}$  теории (26) получается в виде

$$\left[ \mathcal{D}_\mu + \beta_g \partial_g + \dots + \gamma_\lambda \mathcal{D}_\lambda + \dots + \gamma_{\phi,k} + \gamma_{\phi',k'} \right] G_{k,k'} = 0, \quad (27)$$

где многоточиями обозначены члены со старшими производными по  $g$  и  $\lambda$  соответственно. Функция Грина  $G_{k,k'}$  имеет  $k$  внешних хвостов, соответствующих полю  $\phi$ , и  $k'$  соответствующих  $\phi'$ .

Для вычисления коэффициентов уравнения (27) был использован метод, предложенный в [93]. Из наличия равновесного статического предела в рассматриваемой модели следует, что коэффициенты  $\beta_g$  и  $\gamma_\phi$  совпадают со статическими и вычислены в [93]. В данной работе их значения исправлены с учетом известных результатов шестипетлевых расчетов [80].

Таким образом, достаточно было вычислить РГ функцию  $\gamma_\lambda$ , выражение для которой можно получить приравняв нулю коэффициент при операторе  $[\phi'\phi']$  в уравнении (27). Что для  $\langle\phi\phi\rangle$  корреляционной функции приводит к выражению

$$\gamma_\lambda = -g\partial_g \sum_n C_n g^n \zeta^n U_{2n+1}/U_1 - \gamma_{\phi,2}, \quad (28)$$

где  $C_n$  – коэффициенты разложения по  $g$  вычета в простом полюсе константы ренормировки  $Z_1 = 1 + \sum_n C_n g^n / \epsilon + \mathcal{O}(1/\epsilon^2)$ , которая известна из пятипетлевых вычислений в работе [103].

В отличие от [93] в данной работе мы не стали применять итерационное решение на положение фиксированной точки (анализ показал, что оно вносит дополнительную существенную погрешность), а воспользовались численным решением. При использовании сходящейся схемы вычисления критических индексов необходимо обеспечить, чтобы положение фиксированной точки описывалось сходящимся при  $\zeta = 1$  рядом. Также [93], в качестве наиболее адекватного значения параметра  $a$  выбирается минимальное, поскольку оно обеспечивает максимальный вклад в вычисляемую величину сосчитанных членов теории возмущений. Следует отметить, что как использование результатов шестипетлевых вычислений в стандартной теории возмущений, так и применение более точного метода нахождения фиксированной точки изменили значение параметра  $a$  с  $4a = 0.536$ , приведенного в статьях [92; 93], (напомним, что у нас сейчас этот параметр увеличился в четыре раза) на  $a = 0.556$ . Вычислив соответствующее значение заряда в фиксированной точке  $g_* = 86.2$ , мы сосчитали в сходящейся теории возмущений значение динамического критического индекса  $z = 2 + \gamma_\lambda - \eta$  [68] в однокомпонентной А-модели стохастической динамики в трехмерном пространстве и заодно уточнили по результатам шестипетлевых вычислений [80] значение статического индекса  $\eta$ .

Число учтенных петель	2	3	4	5	6
Статический индекс $\eta$	0.0084	0.016	0.0222	0.0272	0.0311
Динамический индекс $z$	2.0061	2.0111	2.0149	2.0176	–

Таблица 4: Зависимость результатов от числа учтенных членов разложения при  $a = 0.556$



Приведенные в таблице 4 результаты позволяют оценить погрешность применяемого метода. Отметим, что в отличие от стандартного  $\epsilon$ -разложения приведенные порядки  $\zeta$ -разложения не демонстрируют знакопеременность.

Полученное выше значение динамического индекса  $z$  следует сравнивать с полученным после многочисленных и трудоемких исследований, с использованием Борель-пересуммирования, в работе [103] значением  $z = 2.0247$ .

Для иллюстрации того, как преобразует ряды теории возмущений применяемая нами сходящаяся схема, интересно сравнить непересуммированное  $\epsilon$ -разложение динамического критического индекса [103]:

$$z(\epsilon) = 2 + 0.0134461562\epsilon^2 + 0.0110362802\epsilon^3 - 0.0055791\epsilon^4 + 0.01773\epsilon^5,$$

где следует полагать  $\epsilon = 1$ , с соответствующим  $\zeta$  разложением (в точке  $\zeta = 1$ ) при  $\epsilon = 1$ :

$$z(\zeta) = 2 + 0.006101\zeta^2 + 0.0049968\zeta^3 + 0.003847\zeta^4 + 0.002629\zeta^5.$$

Данное выражение иллюстрирует сходимость рядов предлагаемого разложения. Последний член в выражении  $z(\zeta)$  может служить для определения погрешности сходящейся теории возмущений. В рамках этой погрешности ее результаты совпадают с полученными в [103].

## 2. Флуктуационная модель описания сверхпроводимости

### 2.1. Сходящаяся теория возмущений в флуктуационной модели

Изложенный в разделе 1.1 метод построения рядов теории возмущений, имеющих ненулевой радиус сходимости, был применён нами к  $SU(r)$  – симметричной тензорной модели с действием (4). Для удобства, приведём здесь его ещё раз

$$S = \text{Tr}(\chi^+ (-\Delta + \tau_0) \chi) + \frac{g_{01}}{4} (\text{Tr}(\chi^+ \chi))^2 + \frac{g_{02}}{4} \text{Tr}(\chi^+ \chi \chi^+ \chi).$$

Как уже отмечалось, данная двухзарядная модель мультипликативно ренормируема [75], а само действие  $S$  представляет собой функционал от  $\chi$  и  $\chi^+$  – эрмитово-сопряженных антисимметричных матричных полей ранга  $r = 2p$ , зависящих от  $d$ -мерных координат  $\mathbf{x}$ .

Для петлевых разложений  $2s$ -корреляционных функций в (4) было проведено исследование АВП их коэффициентов [74]. Как всегда [83], поиск АВП осуществлялся методом инстантонного анализа при  $d = 4$  и  $\tau_0 = 0$ . Для вариационных уравнений метода перевала были найдены нетривиальные решения  $\chi_{(st)}$ ,  $\chi_{(st)}^+$  и соответствующая им точка стационарности. Всюду далее, не ограничивая общность рассуждений, будем полагать, что все поля  $\chi$  и  $\chi^+$  приведены к пфаффовой форме некоторым ортогональным преобразованием, т.е. имеют вид

$$\chi = \text{diag}(s_1 \sigma, \dots, s_p \sigma), \quad \chi^+ = \text{diag}(-s_1^* \sigma, \dots, -s_p^* \sigma), \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

где  $s_i(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  некоторые комплекснозначные функции. Матрицы  $\chi_{(st)}$ ,  $\chi_{(st)}^+$  также имеют вид (29), причём на главных диагоналях у них расположены блоки с инстантонами вида

$$s_i^{(st)}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_i(w_{st})}{|\mathbf{x}|^2 + 1}, \quad (30)$$

каждый из которых представляет из себя, по существу, известный анзац для аналогичных уравнений в скалярной теории  $\phi^4$  [83]. Параметры  $\alpha_i$  в (30) определены с точностью до произвольного фазового множителя. Их абсолютные значения устроены следующим образом: в матрицах  $\chi_{st}$  и  $\chi_{st}^+$  существует  $m$  блоков с  $|\alpha_i| = 0$ , и  $n$  одинаковых блоков с  $|\alpha_i|^2 = -16/(2ng_{02}w_{st} + g_{01}w_{st})$ , причем  $m + n = p$ . С учетом указанной блочной структуры инстантона для точки стационарности точка было найдено значение

$$w_{st}(n) = -\frac{4n}{3} \frac{16\pi^2}{2ng_{01} + g_{02}}. \quad (31)$$

Используя результаты раздела 1.1, построим в рассматриваемой модели при  $d = 4$ , сходящееся разложение теории возмущений. Преобразовав (4) по формуле (9), представим его в виде

$$S = \text{Tr}(\chi^+ (-\Delta + \tau_0) \chi) + a [\text{Tr}(\chi^+ (-\Delta) \chi)]^2 + \zeta \left( \frac{g_{01}}{4} (\text{Tr}(\chi^+ \chi))^2 + \frac{g_{02}}{4} \text{Tr}(\chi^+ \chi \chi^+ \chi) - a [\text{Tr}(\chi^+ (-\Delta) \chi)]^2 \right). \quad (32)$$

Для разложений по  $\zeta$  в этой теории формула (20) позволяет сразу написать выражение для точки стационарности  $\zeta_{st}^T$  в виде

$$\zeta_{st}^T = \frac{1}{1 - 1/(16a(-w_{st}))}. \quad (33)$$

Сходимость ряда при "физическом" значении  $\zeta = 1$  гарантируется при выполнении условия  $|\zeta_{st}^T| > 1$ , которое достигается при выборе  $a > 3(2ng_1 + g_2)/(2048\pi^2 n)$ .

Также в разделе 1.1 была описана процедура, позволяющая эффективно свести диаграммную технику построенной модели (32) к соответствующей известной технике для (4). Поскольку для конкретного рассматриваемого случая  $\Delta_F = 4$  интеграл по  $y'$  в (12) легко вычисляется при помощи формул (12)-(13), после тривиальной замены переменной  $y$  мы можем в данном случае написать стандартное выражение для  $2s$ -хвостых функций Грина теории (4) в виде

$$G_{2s} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \frac{d\sigma e^{-\sigma^2}}{(1 + i\sigma\sqrt{a(1-\zeta)})^s} \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\chi^+ \chi_1 \chi_2^+ \dots \chi_{2s-1} \chi_{2s}^+ e^{-\tilde{S}},$$

$$\tilde{S} = \text{Tr}(\chi(-\Delta + \tau_0)\chi^+) + \frac{\tilde{g}_{01}}{4} \text{Tr}(\chi\chi^+\chi\chi^+) + \frac{\tilde{g}_{02}}{4} (\text{Tr}(\chi\chi^+))^2, \quad (34)$$

где введены обозначения  $\tilde{g}_{0k} = g_k \zeta / (1 + i\sigma\sqrt{a(1-\zeta)})^2$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\chi_{2j-1} \equiv \chi(\mathbf{x}_{2j-1})$  и  $\chi_{2j}^+ \equiv \chi^+(\mathbf{x}_{2j})$ ,  $j = 1, \dots, s$ . Таким образом, введя вспомогательное интегрирование по  $\sigma$ , мы переходим от модели (4) к (34).

## 2.2. Ренормгруппа в матричной модели

Под знаком интеграла по  $\sigma$  действие (34), вслед за (4), мультипликативно ренормируется. После ренормировки оно принимает вид

$$\tilde{S}_R = \tilde{Z}_\chi^2 \text{Tr}(\chi^+ (-\Delta + \tau \tilde{Z}_\tau) \chi) + \tilde{Z}_\chi^4 \mu^\varepsilon \left( \frac{\tilde{g}_1 \tilde{Z}_{\tilde{g}_1}}{4} \text{Tr}(\chi\chi^+\chi\chi^+) + \frac{\tilde{g}_2 \tilde{Z}_{\tilde{g}_2}}{4} (\text{Tr}(\chi\chi^+))^2 \right), \quad (35)$$

в котором ренормированные параметры связаны с затравочными соотношениями вида  $\chi \rightarrow \chi \tilde{Z}_\chi$ ,  $\tau_0 = \tau \tilde{Z}_\tau$  и  $\tilde{g}_{0k} = \tilde{g}_k \mu^\varepsilon \tilde{Z}_{\tilde{g}_k}$ , где  $\mu$  – ренормировочная масса.

Константы ренормировки  $\tilde{Z}_k$  в (35) отличаются от соответствующих ренормировочных констант  $Z_k$  модели (4) (известных из [74]) только заменой аргументов  $g_k \rightarrow \tilde{g}_k = g_k \zeta / (1 + i\sigma \sqrt{a(1 - \zeta)})^2$ .

Аналогично [74; 75], в качестве регуляризации воспользуемся размерной регуляризацией в пространстве  $d = 4 - \varepsilon$ , а в качестве схемы перенормировок – MS-схемой, в рамках которой константы ренормировки представляются рядом Лорана по параметру  $\varepsilon$

$$\tilde{Z}_k = 1 + \frac{\tilde{Z}_k^{(1)}}{\varepsilon} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right), \quad \text{где } \tilde{Z}_i^{(1)} = \sum_{m,n} C_{mn}^{(k)} \tilde{g}_1^m \tilde{g}_2^n, \quad k = (\chi, g_1, g_2). \quad (36)$$

Ренормированные функции Грина модели (34) удобно представить в форме выражения (34), в котором проведено растяжение полей  $\chi \rightarrow \chi / \tilde{Z}_\chi$

$$G_{2s}^R = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int d\sigma e^{-\sigma^2} \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\chi^+ \frac{\chi_1 \chi_2^+ \cdots \chi_{2s-1} \chi_{2s}^+}{(1 + i\sigma \sqrt{a(1 - \zeta)})^s} \tilde{Z}_\chi^{-2s} e^{-\tilde{S}_R}, \quad (37)$$

$$\tilde{S}_R = \text{Tr}(\chi^+ (-\Delta + \tau \tilde{Z}_\tau) \chi) + \mu^\varepsilon \tilde{Z}_{g_1} \frac{\tilde{g}_1}{4} (\text{Tr}(\chi \chi^+))^2 + \mu^\varepsilon \tilde{Z}_{g_2} \frac{\tilde{g}_2}{4} \text{Tr}(\chi \chi^+ \chi \chi^+).$$

Уравнение ренормгруппы для ренормированных функций Грина в форме (37) можно построить аналогично [92; 100]. Такой подход приводит к уравнению вида

$$[\mathcal{D}_\mu + \beta_1 \partial_{g_1} + \beta_2 \partial_{g_2} + \beta_{11} \partial_{g_1}^2 + \beta_{12} \partial_{g_1} \partial_{g_2} + \dots - \gamma_\tau \mathcal{D}_\tau + \dots + \gamma_s] G_{2s}^R = 0, \quad (38)$$

в котором  $\beta$ -функции перед соответствующими производными по зарядам,  $\gamma_\tau$  и  $\gamma_s$  зависят параметров  $g_1, g_2, a, \zeta$ . Аналогично соображениям, приведенным в конце раздела 1, перейдем к уравнению ренормгруппы в форме

$$[\mathcal{D}_\mu + \beta_1 \partial_{g_1} + \beta_2 \partial_{g_2} - \gamma_\tau \mathcal{D}_\tau + \gamma_s] G_{2s}^R = 0, \quad (39)$$

РГ-функции которого можно искать пользуясь методом, предложенным в [92; 100; 101]. Приравнивая нулю коэффициенты разложения  $G_{2s}^R$  по независимым составным операторам  $[\text{Tr}(\chi \chi^+ \chi \chi^+)]$  и  $[(\text{Tr}(\chi \chi^+))^2]$ , получаем коэффициенты  $\beta_i, i = 1, 2, \gamma_\tau$  и  $\gamma_s$  в виде

$$\gamma_s = -\frac{2s}{U_s} g_k \partial_{g_k} \left( \sum_{m,n} C_{mn}^{(\chi)} g_1^m g_2^n \zeta^{m+n} U_{2(m+n)+s} \right), \quad (40)$$

$$\gamma_\tau = -\frac{1}{U_s} g_k \partial_{g_k} \left( \sum_{m,n} (C_{mn}^{(\tau)} - 2s C_{mn}^{(\chi)}) g_1^m g_2^n \zeta^{m+n} U_{2(m+n)+s} \right) + \gamma_s, \quad (41)$$

$$\beta_i = \frac{g_i}{U_{s+2}} g_k \partial_{g_k} \left( \sum_{m,n} (C_{mn}^{(g_i)} - 2s C_{mn}^{(\chi)}) g_1^m g_2^n \zeta^{m+n} U_{2(m+n)+s+2} \right) - g_i (2\gamma_s + \varepsilon), \quad (42)$$

где суммирование по  $k = 1, 2$  предполагается и, аналогично [91–93], после интегрирования

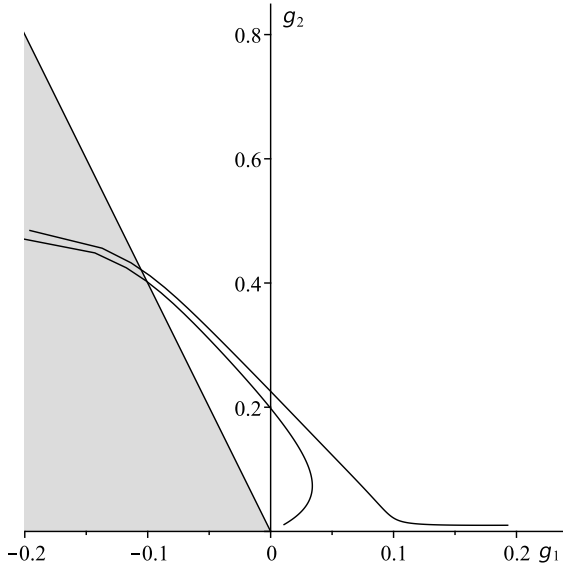


Рис. 2 Поведение фазовых траекторий инвариантных зарядов в плоскости  $g_1, g_2$  при  $d = 3$ . Граница заштрихованной области примерно соответствует фазовому переходу первого рода.

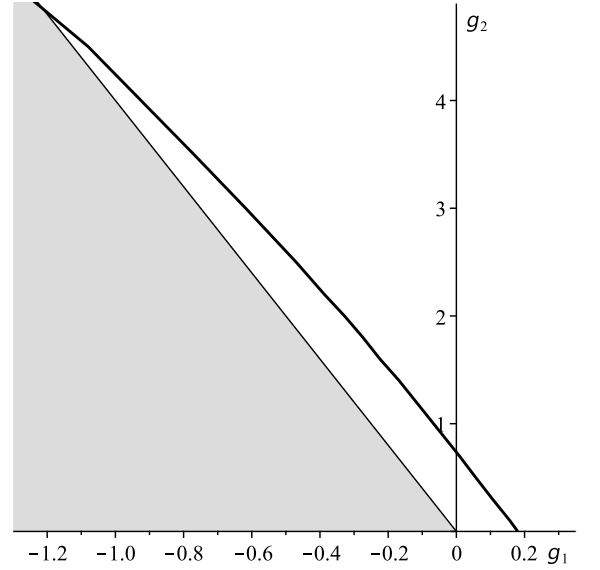


Рис. 3 Сепаратриса (жирная линия) для фазовых траекторий инвариантных зарядов в плоскости  $g_1, g_2$ . Граница заштрихованной области примерно соответствует фазовому переходу первого рода.

по параметру  $\sigma$  были введены функции

$$U_s = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int d\sigma \frac{e^{-\sigma^2}}{(1 + i\sigma\sqrt{a(1-\zeta)})^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-t-a(1-\zeta)t^2/4}.$$

В [92] показано, что первая  $\beta$  функция уравнения РГ (в нашем случае – первые:  $\beta_1, \beta_2$ ) в форме (38) корректно описывает окрестность фиксированной точки и, тем самым, критическое поведение теории. В рассматриваемом сейчас случае ситуация иная: вместо критического поведения модель при  $r > 2$  демонстрирует фазовый переход первого рода. Однако действие (32) возвращается к исходной форме (4) при  $\zeta = 1$ , тем же свойством обладают уравнение РГ и РГ-функции – коэффициенты этого уравнения. Мы собираемся продемонстрировать, что сосчитанных пяти петель в теории возмущений хватает, чтобы с достаточной точностью воспроизвести пересуммированные  $\beta$  функции [75] стандартного КТП разложения по нашим  $\beta$  функциям, полученным в сходящейся теории возмущений.

Для этого, как и в [75], воспользуемся численным решением системы на инвариантные заряды РГ-уравнения в виде

$$\begin{cases} \frac{d\bar{g}_i}{d\xi} = \frac{\beta_i(\bar{g}_1, \bar{g}_2)}{2 + \gamma_\tau(\bar{g}_1, \bar{g}_2)}, & i = 1, 2, \\ \bar{g}_i|_{\xi=0} = g_i. \end{cases} \quad (43)$$

В (43) использованы бета-функции  $\beta_1, \beta_2$ , даваемые выражениями (42) и (40).  $\bar{g}_i$  – соответствующие инвариантные заряды,  $\xi = \ln(\tau/\mu^2)$  – динамическая переменная РГ-уравнения.

Анализ системы (43) проводился на основе преобразованных в соответствии с (40),(42) бета-функций обычной КТП теории возмущений, вычисленных в [74] в пятипетлевом приближении. Результаты численного анализа системы в пятипетлевом по приближении для  $r = 4$  и  $a \approx 11.4$  (обеспечивающем сходимость во всей исследуемой области инвариантных зарядов) приведены на рис. 2. Здесь проявляется ситуация, аналогичная обнаруженной в [72], [75] и [74] для одно-, трех- и пятипетлевого приближения соответственно. А именно, несмотря на отсутствие фиксированной точки, фазовые траектории при  $d = 3$ , стартуя с разных начальных условий, начинают сближаться и пересекать границу фазового перехода 1-го рода (примерно совпадающей с границей устойчивости действия [74]) при некотором значении  $\xi_0$  параметра  $\xi$ .

Отметим, что анализ РГ-уравнений в форме (43) позволяет пролить свет на природу возникающего явления примерной универсальности в поведении траекторий. Дело в том, на уровне численного анализа удалось установить, что система дифференциальных уравнений (43) является "жесткой". Располагая возможностью рассматривать правые части исследуемых уравнений как отрезки рядов сходящейся теории возмущений, кроме очевидно существующей сепаратрисы  $g_2 = 0$ , мы обнаружили еще одну сепаратрису (пертурбативно устойчивую в том смысле, что изменение учета разных порядков теории возмущений лишь незначительно сдвигает ее положение), изображенную на рис. 3. В интересной области, ограниченной этими двумя сепаратрисами  $\beta_{g_2} < 0$ , фазовые траектории притягиваются к верхней сепаратрисе, что и может, в некотором смысле, объяснить сближение фазовых траекторий инвариантных зарядов [72] при стремлении к точке фазового перехода первого рода.

Благодаря использованию формализма сходящейся теории возмущений удастся получить удобную для анализа связь между затравочными и "бегущими" параметрами модели (4). Эта связь основывается на очевидной ренорминвариантности "голых" параметров модели, из которой следует, что константы перенормировки на самом деле являются некоторыми функциями первых интегралов уравнения (39), т.е. решений системы (43). Формально, ренорминвариантность некоторой величины  $F$  можно выразить равенством  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu F = 0$ , где оператор  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$  определяется как логарифмическая производная по  $\mu$  при фиксированных значениях затравочных параметров. Получение уравнений на пересуммированные с помощью ренормгруппы константы ренормировки можно выразить следующим образом

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu \left. \begin{array}{l} g_{01} = \mu^\epsilon g_1 Z_{g_1} \\ g_{02} = \mu^\epsilon g_2 Z_{g_2} \\ \tau_0 = \tau Z_\tau \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} -\epsilon = \beta_i \partial_i (\ln(g_1 Z_{g_1})) \\ -\epsilon = \beta_i \partial_i (\ln(g_2 Z_{g_2})) \\ \gamma_\tau = \beta_i \partial_i (\ln(Z_\tau)) \end{array} \right\} \quad (44)$$

Для однозарядных моделей дифференциальные уравнения из (44) имеют известные решения [68]. В исследуемом же случае двухзарядной модели аналитического представления для решения не существует, поэтому было предложено воспользоваться теорией

возмущений. В рамках используемой в работе схеме MS, константы перенормировки представляются в виде (36), т.е. реально необходимым является только знание вычета в простом полюсе по  $\varepsilon$ . Основная идея состоит в том, чтобы представить неизвестные функции  $\ln(Z_{g_1})$ ,  $\ln(Z_{g_2})$  и  $\ln(Z_\tau)$  в виде главной части ряда Лорана по степеням  $\varepsilon$ , т.е. в форме  $\ln(Z_k) = \sum_m P_m^{(k)}/\varepsilon^m$ ,  $k \in \{g_1, g_2, \tau\}$  и попытаться получить рекуррентную систему на функции  $P_m^{(k)}$ . Знание набора  $P_m^{(k)}$  однозначно определяет искомый вычет, откуда следует единственность (в рамках теории возмущений) предъявляемого решения уравнений (44).

Построение рекуррентной системы на функции  $P_m^{(k)}$  производится следующим образом. Определим  $f_i = \beta_i + \varepsilon g_i$ ,  $i = 1, 2$ , тогда оператор  $\beta_i \partial_i$  можно по линейности представить в виде  $\beta_i \partial_i = -\varepsilon D^I + D^{II}$ . Здесь  $D^I = g_1 \partial_{g_1} + g_2 \partial_{g_2}$  и  $D^{II} = f_1 \partial_{g_1} + f_2 \partial_{g_2}$ . Определенные таким образом операторы обладают следующими свойствами:  $D^I \ln(g_1) = D^I \ln(g_2) = 1$  и  $D^{II} \ln(g_1) = f_1/g_1$ ,  $D^{II} \ln(g_2) = f_2/g_2$ . Используя эти свойства, подставляя  $\ln(Z_k)$  в виде ряда с коэффициентами  $P_m^{(k)}$  в (44) и приравнивая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем следующую рекуррентную систему

$$\begin{aligned} D^I P_k^{(i)} &= f_i/g_i, & D^I P_k^{(i)} &= D^{II} P_{k-1}^{(i)}, & k > 1, & i = g_1, g_2. \\ D^I P_k^{(\tau)} &= -\gamma_\tau, & D^I P_k^{(\tau)} &= D^{II} P_{k-1}^{(\tau)}, & k > 1. \end{aligned}$$

Хорошее свойство полученной системы состоит в том, что уравнения вида  $D^I w = y$  разрешимы в квадратурах:

$$w = \int y(g_1, g_2 u)/g_1 dg_1 \Big|_{u=g_2/g_1} + F(u) \Big|_{u=g_2/g_1},$$

где  $F(u)$  произвольная дифференцируемая функция. Поскольку вся процедура осуществляется в рамках теории возмущений, то возникающие произвольные функции следует считать равными 0 (иначе полученное решение не удастся согласовать с выражением (36), которое в данной процедуре играет роль начального условия).

Окончательно, пересуммированные в рамках ренормгруппы, константы перенормировки получатся в виде  $Z_k^{RG} = \exp\left(\sum P_m^{(k)}/\varepsilon^m\right)$ ,  $k \in \{g_1, g_2, \tau\}$ , где  $P_m^{(k)}$  теперь есть функции решений системы (43).

При обсуждении инвариантных зарядов  $\bar{g}_i(\xi)$ , получаемых решением уравнений (43), до сих пор никак не был фиксирован произвол в выборе точки нормировки. Ранее было показано, что имеется целый класс начальных условий, выходя из которых фазовые траектории демонстрируют поведение, характерное для фазового перехода первого рода, т.е. пересекают линию потери устойчивости системы. Последнее было сформулировано в [72] в виде требования на положительную определённость функционала (4), которое можно представить в виде неравенств

$$g_2 > 0, \quad g_2 + r g_1 > 0, \quad (45)$$

где ренормированные заряды  $g_1$  и  $g_2$ , после пересуммирования по ренормгруппе превращаются в инвариантные.

Теперь же, после получения РГ-инвариантных констант ренормировки, указанный произвол можно зафиксировать однозначно. С одной стороны, обязательным условием на "физическую" траекторию будет являться пересечение ею линии потери устойчивости (45). А с другой, следует вспомнить условие  $g_{01} = 0$  для "нефизической" вершины  $g_{01}$ , которое, тем не менее, оказывается очень важным для проведенного ренормгруппового анализа. В итоге, получается система нелинейных уравнений вида

$$\begin{cases} r\bar{g}_1(\xi) + \bar{g}_2(\xi) = 0, \\ \bar{g}_1 Z_{g_1}^{RG}(\bar{g}_1(\xi), \bar{g}_2(\xi)) = 0. \end{cases} \quad (46)$$

Численное решение (46) при  $r > 2$  и некотором фиксированном  $a$  (анализ показал, что ситуация, в целом, не меняется при изменении  $a$ ) дает единственное пертурбативно-устойчивое решение – точку в фазовой плоскости инвариантных зарядов, через которую, по теореме существования и единственности для дифференциальных уравнений, пройдет единственная фазовая кривая. Результат численного решения системы (46) для  $a = 11.4$  и  $r = 4$  приведен в таблице 5

Число учтенных петель	1	2	3	4	5
Значение $g_1$	-0.1000	-0.0857	-0.700	-0.665	-0.640

Таблица 5: Координата  $g_1$  искомой точки ( $g_2 = -4g_1$ )

Взяв полученную точку в качестве начального условия для системы (43) удастся построить искомую кривую в плоскости  $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ .

Ситуация, когда значения всех допустимых ренормированных зарядов лежат на одной кривой приводит к новому утверждению о том, что каждой точке означенной кривой взаимнооднозначно соответствует своя температура. Рассмотрим, уравнения, связывающие затравочные и теперь уже РГ-инвариантные константы

$$\begin{cases} g_{02}(T) = \mu \bar{g}_2 Z_{g_2}^{RG}(\bar{g}_1, \bar{g}_2) \\ \tau_0(T) = \tau Z_{\tau}^{RG}(\bar{g}_1, \bar{g}_2) \end{cases}, \quad \implies \quad \ln \left( \frac{\tau_0(T)}{g_{02}^2(T)} \right) = \ln \xi + \ln \left( \frac{\tau Z_{\tau}^{RG}(\bar{g}_1, \bar{g}_2)}{\bar{g}_2^2 \left( Z_{g_2}^{RG}(\bar{g}_1, \bar{g}_2) \right)^2} \right).$$

Здесь введены обозначения  $\bar{g}_i(\xi) = \bar{g}_i$ ,  $\xi = \ln(\tau/\mu^2)$ ,  $i = 1, 2$ .

Из последнего соотношения видно, что каждой точке на кривой действительно будет соответствовать своя температура, если предварительно фиксировать своеобразное начало отсчета для параметра  $\xi$ . Напомним, что  $\xi$  параметризует решение автономной системы дифференциальных уравнений, в которых всегда существует симметрия относительно сдвига  $\xi \rightarrow \xi + \xi_0$ . В нашей системе подобного сдвига можно добиться фиксацией



произвольного параметра  $\mu$ . Наличие такого произвола реально означает, что одной произвольной точке на кривой мы всегда можем сопоставить любую напередзаданную температуру, после чего все остальные температуры будут определяться движением по кривой однозначно.

Отметим так же, что полученные уравнения, связывающие затравочные и ренорминвариантные параметры модели есть ни что иное как петлевые поправки к теории среднего поля. Например, в стандартном подходе к теории сверхпроводимости уравнение  $\tau_0(T) = 0$  определяет критическую температуру фазового перехода, мы же имеем аналогичное уравнение с ненулевой (но малой) правой частью.

Потенциально, из полученных уравнений может быть проведена оценка для критической температуры фазового перехода. Однако, на практике, для этого необходимо иметь независимое экспериментальное определение константы четырехфермионного взаимодействия, чего на данный момент пока нет. Можно решать обратную задачу и восстановить искомую константу взаимодействия по известной из эксперимента критической температуре, как и поступают в большинстве теоретических работ по ВТСП. Вычисленные таким образом константы  $\lambda$  в нашей модели, в целом, совпадают с результатами других теоретических работ и численных экспериментов.

## Заключение

В работе исследовалась флуктуационная  $SU(r)$ -симметричная двухзарядная матричная модель высокотемпературного фазового перехода 1-го рода в сверхпроводящее состояние, имеющего место в слоистых системах и (или) с подрешетками. Здесь уместно отметить обнаруженный недавно фазовый переход в сверхпроводящее состояние с рекордно высокой  $T_c$  у различных соединений типа  $H_2S$  [49; 52–55]. Основные результаты работы можно сформулировать в виде следующих пунктов:

1. Для успешного ренормгруппового анализа искомой модели был предложен метод построения теории возмущений с конечным радиусом сходимости в классе однозарядных квантово-полевых моделей с однородным по полям взаимодействием, опирающийся на диаграммы стандартной (расходящейся) теории возмущений. Уточнено значение радиуса сходимости получаемых рядов.
2. Исследована применимость предложенного метода сходящейся теории возмущений на примере модели А критической динамики, где проведено вычисление критического индекса  $z$ . Показано, что используемый метод имеет смысл воспринимать как еще один инструмент анализа квантово-полевых разложений.
3. В формализме сходящейся теории возмущений в модели (4) найдены константы перенормировки как функции инвариантных зарядов.
4. В рамках анализа фазовой плоскости уравнений Гелл-Манна-Лоу для тензорной модели (4) сформулировано и доказано принципиально новое утверждение о том, что начальные состояния всех сверхпроводников, демонстрирующих высокотемпературный фазовый переход первого рода, лежат на одной единственной кривой в фазовой плоскости "бегущих" констант взаимодействия. Тем самым, окончательно выяснена природа обнаруженного ранее в [72; 74; 75] явления – квазиуниверсального поведения траекторий фазового перехода первого рода
5. Построены интегральные уравнения, связывающие затравочные и "бегущие" параметры

**Благодарности.** Выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Михаилу Юрьевичу Налимову за его многолетнее наставничество и отношение ко мне. Благодарю профессоров и преподавателей кафедры статистической физики за их огромный труд, эрудицию, профессионализм и тёплое отношение к студентам.

## Список литературы

- [1] *Bennemann K., Ketterson J.* Superconductivity: Conventional and Unconventional Superconductors. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. — Pp. XXXII, 1568. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-73253-2>.
- [2] *Keesom W.H., van den Ende J.H.* The specific heats of solids at temperatures obtainable with liquid helium. // *Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden.* — 1932. — Vol. IV, no. 219b. — Pp. 142–155.
- [3] *Meissner W., Ochsenfeld R.* "Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit" // *Naturwissenschaften.* — 1933. — Vol. 21. — P. 787–788. <https://doi.org/10.1007/BF01504252>.
- [4] *Nagamatsu J., Nakagawa N. et al.* Superconductivity at 39 K in magnesium diboride // *Nature.* — 2001. — Vol. 410. — P. 63–64. <https://doi.org/10.1038/35065039>.
- [5] *Gorter Von C. J., Casimir H. G. B.* The thermodynamics of the superconducting state // *Z. tech. Phys.* — 1934. — Vol. 15. — P. 539.
- [6] *London F., London H.* The Electromagnetic Equations of the Supraconductor // *Proc. R. Soc.* — 1935. — Vol. A149. — P. 71–88. <http://doi.org/10.1098/rspa.1935.0048>.
- [7] *Pippard A. B.* Metallic conduction at high frequencies and low temperatures // *Adv. Electronics a. Electron Physics.* — 1954. — Vol. 6. — P. 1–45.
- [8] *Ginzburg V.L., Landau L.D.* // *Eksperim. i. Ther. Fiz.* — 1950. — Vol. 20. — P. 1064.
- [9] *Bean C. P.* Magnetization of Hard Superconductors. Physical Review Letters // *Phys. Rev. Lett.* — 1962. — Vol. 8. — Pp. 250–253. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.8.250>.
- [10] *Anderson P. W.* Theory of Flux Creep in Hard Superconductors. Physical Review Letters // *Phys. Rev. Lett.* — 1962. — Oct. — Vol. 9. — Pp. 309–311. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.9.309>.
- [11] *Anderson P. W., Kim Y. B.* Hard Superconductivity: Theory of the Motion of Abrikosov Flux Lines // *Rev. Mod. Phys.* — 1964. — Jan. — Vol. 36. — Pp. 39–43. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.36.39>.
- [12] *Maxwell E.* Isotope Effect in the Superconductivity of Mercury // *Phys. Rev.* — 1950. — May. — Vol. 78. — Pp. 477–477. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.78.477>.
- [13] *Reynolds C. A., Serin B. et al.* Superconductivity of Isotopes of Mercury // *Phys. Rev.* — 1950. — Vol. 78. — Pp. 487–487. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.78.487>.

- [14] Fröhlich H. Theory of the Superconducting State. I. The Ground State at the Absolute Zero of Temperature // *Phys. Rev.* — 1950. — Sep. — Vol. 79. — Pp. 845–856. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.79.845>.
- [15] Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R. Theory of Superconductivity // *Phys. Rev.* — 1957. — Dec. — Vol. 108. — Pp. 1175–1204. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.1175>.
- [16] Bogoliubov N. N. A New Method in the Theory of Superconductivity. I // *Soviet Physics JETP.* — 1958. — Vol. 34. — Pp. 41 – 46.
- [17] Tolmachev V. V., Tiablikov S. V. A New Method in the Theory of Superconductivity. II // *Soviet Physics JETP.* — 1958. — Vol. 34. — Pp. 46 – 51.
- [18] Bogoliubov N. N. A New Method in the Theory of Superconductivity. III // *Soviet Physics JETP.* — 1958. — Vol. 34. — Pp. 51 – 55.
- [19] Gor'kov L. P. On the Energy Spectrum of Superconductors // *Soviet Physics JETP.* — 1958. — Vol. 7. — P. 505.
- [20] Migdal A. B. Interaction between electrons and lattice vibrations in a normal metal // *Soviet Physics JETP.* — 1956. — Vol. 34. — P. 996–1001.
- [21] Eliashberg G. M. Interactions between electrons and lattice vibrations in a superconductor // *Soviet Physics JETP.* — 1960. — Vol. 11. — P. 696.
- [22] McMillan W. L. Transition Temperature of Strong-Coupled Superconductors // *Phys. Rev.* — 1968. — Vol. 167. — Pp. 331–344. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.167.331>.
- [23] Scalapino D. J. Superconductivity / Ed. by R. D. Parks, Marcel Dekker. — New York, 1966. — P. 449.
- [24] Allen P. B., Mitrović B. Solid State Physics / Ed. by H. Ehrenreich, F. Seitz, D. Turnbull. — New York: Academic Press, 1982. — Vol. 37. — P. 1.
- [25] Вонсовский С. В., Изюмов Ю. А., Курмаев Э. З. Сверхпроводимость переходных металлов, их сплавов и соединений. — М.: Наука, 1977. — Vol. 37. — P. 383.
- [26] Bednorz J. G., Müller K. A. Possible high  $T_c$  superconductivity in the  $Ba - La - Cu - O$  system // *Z. Phys. B.* — 1986. — Vol. 64. — P. 189. <https://doi.org/10.1007/BF01303701>.
- [27] Wu M. K., Ashburn J. R., Torng C. J. et al. Superconductivity at 93 K in a new mixed-phase Y-Ba-Cu-O compound system at ambient pressure // *Phys. Rev. Lett.* — 1987. — Mar. — Vol. 58. — Pp. 908–910. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.908>.
- [28] Cava R. J., van Dover R. B. et al. Bulk superconductivity at 36 K in  $La_{1.8}Sr_{0.2}CuO_4$  // *Phys. Rev. Lett.* — 1987. — Vol. 58. — P. 408–410. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.58.408>.

- [29] *Maeda H., Tanaka Y. et al.* A New High- $T_c$  Oxide Superconductor without a Rare Earth Element // *Jap. J. Appl. Phys.* — 1988. — Vol. 27. — P. L209–L210. <https://doi.org/10.1143/jjap.27.l209>.
- [30] *Sheng Z. Z., Hermann A. M.* Superconductivity in the rare-earth-free Tl-Ba-Cu-O system above liquid-nitrogen temperature // *Nature.* — 1988. — Vol. 332. — P. 55–58. <https://doi.org/10.1038/332055a0>.
- [31] *Parkin S. S. P., Engler E. M. et al.* Magnetic field dependence of the resistivity and susceptibility of the above-100-K Bi-Sr-Ca-Cu superconductor // *Phys. Rev. B.* — 1988. — Oct. — Vol. 38. — Pp. 7101–7104. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.38.7101>.
- [32] *Schilling A., Cantoni M. et al.* Superconductivity above 130 K in the Hg-Ba-Ca-Cu-O system // *Nature.* — 1993. — Vol. 363. — P. 56–58. <https://doi.org/10.1038/363056a0>.
- [33] *Putilin S. N., Antipov E. V. et al.* Superconductivity at 94 K in  $HgBa_2CuO_{4+\delta}$  // *Nature.* — 1993. — Vol. 362. — P. 226–228. <https://doi.org/10.1038/362226a0>.
- [34] *Nucker N., Adelman P. et al.* Is  $Nd_{2-x}Ce_xCuO_4$  an electron-superconductor? // *Z. Physik B.* — 1989. — Vol. 75. — P. 421–422. <https://doi.org/10.1007/BF01312517>.
- [35] *Hebard A. F. et al.* Metal Film Nucleation and Growth on C60 Interfacial Layers // *MRS Proceedings.* — 1994. — Vol. 359. — P. 421–422. <https://doi.org/10.1557/proc-359-387>.
- [36] *Gaididei Yu.B., Loktev V.M.* On a Theory of the Electronic Spectrum and Magnetic Properties of High- $T_c$  Superconductors // *Phys.Stat.Sol. B.* — 1988. — Vol. 147. — P. 307. <https://doi.org/10.1002/pssb.2221470135>.
- [37] *Weber W. A.* Cud-d excitation model for the pairing in the high- $T_c$  cuprates // *Z. Physik B.* — 1988. — Vol. 70. — P. 323–329. <https://doi.org/10.1007/BF01317238>.
- [38] *Varma C.M., Schmitt-Rink S., Abrahams E.* Charge transfer excitations and superconductivity in "ionic" metals // *Solid State Comm.* — 1987. — Vol. 62. — P. 323–329. [https://doi.org/10.1016/0038-1098\(87\)90407-8](https://doi.org/10.1016/0038-1098(87)90407-8).
- [39] *Pashitskii E.A.* Plasmon mechanism of high-temperature superconductivity in cuprate metal-oxide compounds // *JETP.* — 1993. — Vol. 76. — P. 425.
- [40] *Schrieffer J.R.* Understanding High  $T_c$  // *Int. J. Mod. Phys. B.* — 1990. — jan. — Vol. 4, no. 10. — Pp. 1611–1628.
- [41] *Anderson P.W.* The Resonating Valence Bond State in  $La_2CuO_4$  and Superconductivity // *Science.* — 1987. — Vol. 235. — Pp. 1196–1198. <http://dx.doi.org/10.1126/science.235.4793.1196>.

- [42] *Millis A. J., Monien Hartmut, Pines David.* Phenomenological model of nuclear relaxation in the normal state of  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  // *Phys. Rev. B.* — 1990. — Jul. — Vol. 42. — Pp. 167–178. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.42.167>.
- [43] *Изюмов Ю. А.* “Спин-флуктуационный механизм высокотемпературной сверхпроводимости и симметрия параметра порядка” // *УФН.* — 1999. — Vol. 169. — P. 225–254. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0169.199903a.0225>.
- [44] *J. Hubbard.* Electron correlations in narrow energy bands // *Proc. R. Soc. Lond.* — 1964. — Vol. A276. — P. 238–257. <https://doi.org/10.1098/rspa.1963.0204>.
- [45] *Emery V. J.* Theory of high- $T_c$  superconductivity in oxides // *Phys. Rev. Lett.* — 1987. — Jun. — Vol. 58. — Pp. 2794–2797. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.2794>.
- [46] *Гинзбург В. Л.* Проблема высокотемпературной сверхпроводимости // *УФН.* — 1968. — Vol. 95. — P. 91–110. <https://ufn.ru/ru/articles/1968/5/g/>.
- [47] *Kirzhnits D. A.* Superconductivity and elementary particles // *Sov. Phys. Usp.* — 1978. — Vol. 21. — P. 470–486. <https://ufn.ru/en/articles/1978/5/h/>.
- [48] *Anderson P.W.* Theories of fullerene  $T_c$ 's which will not work // (*unpublished*). — 1991.
- [49] *Drozdov A., Erements M., Troyan I. et al.* Conventional superconductivity at 203 kelvin at high pressures in the sulfur hydride system // *Nature.* — 2015. — Vol. 525. — P. 73–76. <https://doi.org/10.1038/nature14964>.
- [50] *Bernstein N., Hellberg C. et al.* What superconducts in sulfur hydrides under pressure and why // *Phys. Rev. B.* — 2015. — Feb. — Vol. 91. — P. 060511. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.91.060511>.
- [51] *Errea I. et al.* High-Pressure Hydrogen Sulfide from First Principles: A Strongly Anharmonic Phonon-Mediated Superconductor // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 114. — P. 157004. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.114.157004>.
- [52] *Kruglov I. A., et al.* Superconductivity of  $\text{LaH}_{10}$  and  $\text{LaH}_{16}$  polyhydrides // *Phys. Rev. B.* — 2020. — Jan. — Vol. 101, no. 2. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.101.024508>.
- [53] *Drozdov A.P., Kong P.P. and Minkov V.S. et al.* Superconductivity at 250 K in lanthanum hydride under high pressures // *Nature.* — 2019. — Vol. 569. — P. 528–531. <https://doi.org/10.1038/s41586-019-1201-8>.
- [54] *Somayazulu M., et al.* Evidence for Superconductivity above 260 K in Lanthanum Superhydride at Megabar Pressures // *Phys. Rev. Lett.* — 2019. — Jan. — Vol. 122, no. 2. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.027001>.

- [55] Kong P., et al. Superconductivity up to 243 K in yttrium hydrides under high pressure // *arXiv: Superconductivity*. — 2019. <https://arxiv.org/abs/1909.10482>.
- [56] Duan D., Liu Y. et al. Pressure-induced metallization of dense  $(H_2S)_2H_2$  with high- $T_c$  superconductivity // *Sci. Rep.* — 2014. — Vol. 4. — P. 6968. <https://doi.org/10.1038/srep06968>.
- [57] Gor'kov Lev P., Kresin Vladimir Z. Colloquium: High pressure and road to room temperature superconductivity // *Rev. Mod. Phys.* — 2018. — Jan. — Vol. 90, no. 1. <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.90.011001>.
- [58] Einaga M. et al. Crystal structure of the superconducting phase of sulfur hydride // *Nature Phys.* — 2016. — Vol. 12. — P. 835–838. <https://doi.org/10.1038/nphys3760>.
- [59] Gor'kov L. P., Kresin V. Z. Phase diagram of the sulfur hydride: transition into high  $T_c$  state. — 2017.
- [60] Larkin A.I., Pikin S. A. Phase Transitions of the First Order but Nearly of the Second // *JETP*. — 1969. — Vol. 29. — P. 891.
- [61] Barzykin V., Gor'kov L. P. Role of striction at magnetic and structural transitions in iron pnictides // *Phys. Rev. B*. — 2009. — Apr. — Vol. 79. — P. 134510. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.79.134510>.
- [62] Sadovskii M.V. Electron–Phonon Coupling in Eliashberg–McMillan Theory Beyond Adiabatic Approximation // *J. Exp. Theor. Phys.* — 2019. — Vol. 128. — P. 455–463. <https://doi.org/10.1134/S0044451019030155>.
- [63] Sadovskii M.V. Antiadiabatic Phonons and Superconductivity in Eliashberg–McMillan Theory // *J Supercond Nov Magn.* — 2020. — Vol. 33. — P. 19–26. <https://doi.org/10.1007/s10948-019-05277-4>.
- [64] Ikeda M.A. et al. On Migdal's theorem // *Phys. Lett. A*. — 1992. — Vol. 170. — Pp. 319–324. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(92\)90262-K](https://doi.org/10.1016/0375-9601(92)90262-K).
- [65] Садовский М.В. Высокотемпературная сверхпроводимость в слоистых соединениях на основе железа // *УФН*. — 2008. — Vol. 178. — P. 1243–1271. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0178.200812b.1243>.
- [66] Gor'kov L. P. Superconducting transition temperature: Interacting Fermi gas and phonon mechanisms in the nonadiabatic regime // *Phys. Rev. B*. — 2016. — Feb. — Vol. 93. — P. 054517. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.93.054517>.
- [67] Gor'kov L. P. Peculiarities of superconductivity in the single-layer FeSe/SrTiO<sub>3</sub> interface // *Phys. Rev. B*. — 2016. — Feb. — Vol. 93. — P. 060507. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.93.060507>.

- [68] *Vasilev A. N.* The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics. — Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004. — Pp. xvi+681. — Translated from the 1998 Russian original by Patricia A. de Forerand-Millard and revised by the author. <https://doi.org/10.1201/9780203483565>.
- [69] *Abrikosov A. A., Gor'kov L. P., Dzyaloshinskii I. E.* Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics. — Oxford: Pergamon, 1965.
- [70] *Wu Congjun, Hu Jiang-ping, Zhang Shou-cheng.* Exact SO(5) Symmetry in the Spin-3/2 Fermionic System // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Oct. — Vol. 91. — P. 186402. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.186402>.
- [71] *L. Bohn J.* Cooper pairing in ultracold  $^{40}\text{K}$  using feshbach resonances // *Phys. Rev. A.* — 2000. — Vol. 61. — P. 1237–1251.
- [72] *Komarova M. V., Nalimov M. Yu., Honkonen J.* Temperature Green's functions in Fermi systems: The superconducting phase transition // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2013. — Jul. — Vol. 176, no. 1. — Pp. 906–912. <https://doi.org/10.1007/s11232-013-0078-1>.
- [73] *Попов В.Н.* континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. — Москва: Атомиздат, 1976. — P. 256.
- [74] *Kalagov G.A., Kompaniets M.V., Nalimov M. Yu.* Renormalization-group investigation of a superconducting U(r)-phase transition using five loops calculations. // *Nuclear Physics B.* — 2016. — Vol. 905. — Pp. 16–44.
- [75] *Kalagov G. A., Kompaniets M. V., Nalimov M. Yu.* Renormalization-group study of a superconducting phase transition: Asymptotic behavior of higher expansion orders and results of three-loop calculations // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2014. — Nov. — Vol. 181, no. 2. — Pp. 1448–1458. <https://doi.org/10.1007/s11232-014-0225-3>.
- [76] *Aharony A.* Critical Behavior of Anisotropic Cubic Systems // *Phys. Rev. B.* — 1973. — Nov. — Vol. 8. — Pp. 4270–4273. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.8.4270>.
- [77] *Ketley I. Wallace D.* A modified epsilon expansion for a hamiltonian with cubic point-group symmetry // *J. Phys. A.* — 1973. — Vol. 6. — P. 1667.
- [78] *Nelson D. R., Kosterlitz J. M. et al.* Renormalization-Group Analysis of Bicritical and Tetracritical Points // *Phys. Rev. Lett.* — 1974. — Sep. — Vol. 33. — Pp. 813–817. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.33.813>.
- [79] *Kleinert H., Thoms S., Schulte-Frohlinde V.* Stability of a three-dimensional cubic fixed point in the two-coupling-constant  $\varphi^4$  theory // *Phys. Rev. B.* — 1997. — Dec. — Vol. 56. — Pp. 14428–14434. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.56.14428>.



- [80] *Kompaniets M. V., Panzer E.* Minimally subtracted six-loop renormalization of  $O(n)$ -symmetric  $\phi^4$  theory and critical exponents // *Phys. Rev. D* 96. — 2017. — P. 036016.
- [81] *Kazakov D. I. et al.* Analytical Continuation of Perturbative Results of the  $g\phi^4$  Model Into the Region  $g$  Is Greater Than or Equal to 1. // *Theor. Math. Phys.* — 1979. — Vol. 38. — Pp. 9–16.
- [82] *Kazakov D. I. et al.* Calculation of Critical Exponents by Quantum Field Theory Methods. // *Sov. Phys. JETP.* — 1979. — Vol. 50. — P. 521.
- [83] *Лунатов Л.Н.* // *ЖЭТФ.* — 1977. — no. 72:2. — Pp. 411–421.
- [84] *Zinn-Justin J.* Quantum Field Theory and Critical Phenomena. — Oxford: Oxford University Press, 2002.
- [85] *Белокуров В. В., Соловьев Ю. П., Шавгулидзе Е. Т.* Метод приближенного вычисления континуальных интегралов, использующий теорию возмущений со сходящимися рядами. I // *ТМФ.* — 1996. — Vol. 109. — P. 51–59. <https://doi.org/10.4213/tmf1210>.
- [86] *Белокуров В. В., Соловьев Ю. П., Шавгулидзе Е. Т.* Метод приближенного вычисления континуальных интегралов, использующий теорию возмущений со сходящимися рядами. II // *ТМФ.* — 1996. — Vol. 109. — Pp. 60–69. <https://doi.org/10.4213/tmf1211>.
- [87] *Белокуров В. В., Соловьев Ю. П., Шавгулидзе Е. Т.* Теория возмущений со сходящимися рядами для функциональных интегралов по фейнмановской мере // *УМН.* — 1997. — Vol. 52. — P. 155–156. <https://doi.org/10.4213/rm828>.
- [88] *Белокуров В. В., Соловьев Ю. П., Шавгулидзе Е. Т.* Вычисление функциональных интегралов с помощью сходящихся рядов // *Фундамент. и прикл. матем.* — 1997. — Vol. 3. — P. 693–713. <https://doi.org/10.4213/rm828>.
- [89] *Белокуров В. В., Соловьев Ю. П., Шавгулидзе Е. Т.* Общий подход к вычислению функциональных интегралов и суммированию расходящихся рядов // *Фундамент. и прикл. матем.* — 1999. — Vol. 5. — P. 363–383. <https://doi.org/10.4213/rm828>.
- [90] *Белокуров В. В., Соловьев Ю. П., Шавгулидзе Е. Т.* Теория возмущений со сходящимися рядами для вычисления величин, заданных конечным числом членов расходящегося ряда традиционной теории возмущений // *ТМФ.* — 2000. — Vol. 123. — P. 452–461. <https://doi.org/10.4213/tmf615>.
- [91] *Ushveridze A. G.* // *Yad. Fiz.* — 1983. — Vol. 38, no. 798.
- [92] *Honkonen J., Nalimov M.* Convergent expansion for critical exponents in the  $O(n)$ -symmetric  $\phi^4$  model for large  $\epsilon$  // *Phys. Lett. B.* — 1999. — Vol. 459. — Pp. 582–588.

- [93] *Honkonen J., Komarova M., Nalimov M.* Large order asymptotics and convergent perturbation theory for critical indexes of  $\phi^4$  model in  $4 - \epsilon$  expansion // *Acta Physica Slovaca*. — 2002. — Vol. 52, no. 4. — Pp. 303 – 310.
- [94] *Sazonov V.K.* Convergent perturbation theory for lattice models with fermions // *International Journal of Modern Physics A*. — 2016. — Vol. 31, no. 13. — P. 1650072. <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X1650072X>.
- [95] *Ivanov A., Sazonov V.* Infinite lattice models by an expansion with a non-Gaussian initial approximation // *Physics Letters B*. — 2019. — Vol. 796. — P. 52–58. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2019.07.001>.
- [96] *Hohenberg P. C., Halperin B. I.* Theory of dynamic critical phenomena // *Reviews of Modern Physics*. — 1977. — Vol. 49, no. 3. — P. 435.
- [97] *Zhavoronkov Yu. A., Komarova M. V. et al.* Critical Dynamics of the Phase Transition to the Superfluid State // *Theor. Math. Phys.* — 2019. — Vol. 200. — P. 1237–1251.
- [98] *Komarova M. V., Nalimov M. Yu.* Asymptotic behavior of renormalization constants in higher orders of the perturbation expansion for the  $(4 - \epsilon)$ -dimensionally regularized  $O(n)$ -symmetric  $\phi^4$  theory. // *Theor. Math. Phys.* — 2001. — Vol. 126, no. 3. — Pp. 339–353.
- [99] *Makhankov V. G.* // *Phys. Lett. A*. — 1977. — Vol. 61. — Pp. 431–432.
- [100] *Антонов Н.В., Васильев А.Н.* Квантово-полевая ренормгруппа в задаче о растущей границе раздела. // *ЖЭТФ*. — 1995. — Vol. 108, no. 3(9). — Pp. 885 –893.
- [101] *Васильев А.Н., Налимов М.Ю.* Аналог размерной регуляризации для расчета ренормгрупповых функций в  $1/n$  - разложении при произвольной размерности пространства. // *ТМФ*. — 1983. — Vol. 55, no. 2. — Pp. 163 – 175.
- [102] *Martin P. C., Siggia E. D., Rose H. A.* Statistical dynamics of classical systems // *Phys. Rev. A*. — 1973. — no. 8. — P. 423–437.
- [103] *Adzhemyan L. Ts., Danco M. et. al.* Multi-Loop Calculations of Anomalous Exponents in the Models of Critical Dynamics // *EPJ Web of Conferences*. — 2016. — Vol. 108. — P. 02004. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201610802004>.