ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (СПбГУ)

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра статистической физики

Копалиани Роман Алексеевич

Применение методов статистической физики для получения оценок баскет-спред опционов для случайных процессов логнормального типа

Диссертация на соискание степени магистра физики

Направление 03.04.02 «Физика»

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф. **А.Ю. Вальков**

Рецензент:
профессор высшей школы прикладной математики и
вычислительной физики СПбПУ, д.ф.-м.н., проф. **В.Л. Кузьмин**

Санкт-Петербург
2021

Содержание

Введение

Стоимости активов на рынке испытывают случайные колебания, поэтому вопросы, связанные с их изучением относятся к теории случайных процессов, в частности — к стохастической финансовой математике, разделу прикладной математики, изучающему финансовые рынки с точки зрения теории вероятностей и стохастического исчисления. Возникающие при этом задачи имеют много общего с задачами статистической механики и физики [1, 2]. Это очень широкая область современных исследований, и мы ограничимся рассмотрением так называемых опционов. Первая работа по стохастической теории опционов была опубликована в 1900 г. Л. Башалье [3] и основана на представлении о «броуновском движении» цен, соответствующее их нормальному распределению. Существенный прорыв связан с появлением в 1973 г. формулы Блэка-Шоулза [4, 5], которая базируется на гипотезе геометрического броуновского движения цен, соответствующего их логнормальному распределению[1]. Далее, мы приводим краткое введение в понятие опциона, и, в частности, в интересующий нас специальный случай спред опциона, а также подходы к их оценке.

Производной ценной бумагой (деривативом) называется финансовый документ, стоимость которого частично определяется стоимостью другой, основной ценной бумаги. К этой категории относятся и опционы [6].

Существует два основных вида опционов. Опцион «колл» дает право покупателю опциона приобрести базовый актив в будущем по определенной цене в течение ограниченного срока времени. Опцион «пут» дает его владельцу право продать базовый актив в будущем по определенной цене в течение ограниченного срока времени. Цена актива, зафиксированная в контракте, называется ценой исполнения. Дата, когда опцион может быть исполнен, называется датой истечения контракта — T. Американский опцион может быть исполнен в любое время до истечения срока действия контракта. Европейский опцион может быть исполнен только в момент времени T.

Пусть K — цена исполнения («страйковая цена»), а S_T — цена актива в момент времени T. Тогда выплаты по длинной позиции в европейском опционе «колл» определяются следующей формулой $\max(S_T - K, 0)$. Существует огромное количество стратегий, основанных на использовании одного опциона и одного соответствующего актива. Спреды состоят из нескольких позиций по опционам «колл» и «пут». Различают бычий спред, медвежий спред, спред «бабочка», календарный спред и т.д. Один из видов экзотических опционов — спред опцион. Спред опцион — это тип опциона, при котором выплата основана на разнице в цене между двумя и

[1] Нобелевская премия 1997 года по экономике

более базовыми активами. Опционы на спред могут быть написаны для всех типов финансовых продуктов, включая форварды, фьючерсы, акции, облигации и валюты. Хотя некоторые типы опционов на спреды торгуются на крупных биржах, их основная торговая площадка — внебиржевой ОТС (ОТС (англ. Over The Counter) — внебиржевой рынок). Ценообразование активов и управление рисками на энергетических рынках воплощают в себе большое разнообразие вариантов спреда. На рынках сырой нефти опционы крэк-спред (crack spread — относится к общей разнице в цене барреля сырой нефти и нефтепродуктов, произведенных из нее), которые либо обменивают сырую нефть и неэтилированный бензин, либо обменивают сырую нефть и топочный мазут, торгуются на Нью-Йоркской товарной бирже (NYMEX). На рынках электроэнергии опцион Spark Spread (Spark Spread Option – это разница между оптовой рыночной ценой на электроэнергию и стоимостью ее производства с использованием природного газа) и его варианты, предназначены для обмена одного или нескольких видов топлива на электроэнергию, обычно используются для хеджирования как краткосрочных, так и долгосрочных кросс-товарных рисков [7].

Кроме того, растет спрос на варианты ценового спреда, включающие 3, 4 и даже больше активов. Такие сценарии возникают в результате применения оценки физических активов, таких как электростанции, работающие на ископаемом топливе, управление активами системы энергопередач (transmission assets) (см. [8,9]), экологические платежи и хранилища природного газа. В приложениях такого типа огромным спросом пользуются числовые алгоритмы, которые позволяют быстро и точно оценить большое количество вариантов спреда на нескольких активов с различными параметрами.

В то время как спред опционы, выписанные для более чем двух базовых активов, становятся все более популярными, очень сложно оценить такие опционы эффективно и точно, поскольку нет возможности получить точное аналитическое выражение в закрытой форме. В ряде исследовательских работ изучались цены на варианты спреда с двумя активами, такие как [10–19]. Эти работы были опубликованы в таких журнал как: «Journal of Finance», «Mathematical Finance», «Insurance: Mathematics and Economics», «Quantitative Finance», «SIAM Journal on Applied Mathematics», «Journal of Futures Markets», «Chaos, Solitons and Fractals» — авторитетных мировых журналах, принадлежашие к квартилю 1. Наконец, Ли, Денг и Зоу в 2006-2008 годах представили очень точную формулу аппроксимации в закрытой форме для эффективного ценообразования спред опционов на два актива [7, 19]. Однако, когда количество активов, задействованных в спред опционе, превышает два, доступно не так уж много подходов для эффективного и точного расчета цены опциона на спред, даже в рамках классической модели Блэка-Шоулза. Это связано с тем, что при большом размере (количестве активов) численные подходы, такие как метод численного интегрирования, численные решения уравнений в частных производных и моделирование методом Монте-Карло, становятся чрезвычайно медленными и на практике трудноприменимыми. Важная работа, которая дала хорошее приближенное описание цены опциона со спредом на несколько активов, — это Кармона и Дуррлеман [20], обобщившая подход авторов в [16]. Хотя метод Кармоны и Дуррлемана достаточно точен, он страдает серьезным недостатком. Метод Кармоны и Дуррлемана не дает цены опциона в полностью замкнутой аналитической форме. Чтобы вычислить цену каждого опциона, необходимо численно решать многомерную задачу оптимизации. В 2010 году авторы Ли, Денг и Зоу обощают свои результаты [7, 19] на случай спреда из N активов, и заметно улучшают точность своего метода [21]. На данный момент результат [21] считается самым точным для оценки стоимости спред опциона в замкнутой аналитической форме. Данная тематика продолжает активно развиваться [22–27]. Также актуальной проблемой является получаение оценок параметров, определяющих чувствительность стоимости опциона к изменению различных величин — «греков». В работе [21] рассматривается только один из множества возможных греческих символов.

В данной магистерской диссертации рассматриваются аналитические формулы для получения оценок стоимости баскет-спред европейских опционов для случайных процессов логнормального типа. Работа построена следующим образом:

- В разделе 1 описаны случайные процессы логнормального типа, приводятся существующие точные результаты для оценки стоимости спред опционов — формулы Блека-Шоулза и Маркгрейба, а также основные существующие в настоящее время подходы к построению приближенных аналитических формул для оценки стоимости спред опционов — методы Кирка, Бьерксунда, подход Крамоны-Дуррлемана и Денга-Ли-Зоу.

- В разделе 2 ставится задача оценки баскет-спред опционов на произвольное число активов. Предлагается оригинальный, основанный на теории возмущений, метод построения все более точных аналитических формул для стоимости опциона из произвольного числа активов, обобщающий и уточняющий метод Денга-Ли-Зоу.

- В разделе 3 даны оригинальные явные выражения для основных греческих символов в виде N-мерных интегралов, и на основе развитой в разделе 2 теории возмущений выведены приближенные аналитические формулы для их оценки.

- Раздел 4 посвящен численному анализу полученных результатов. Проводится сравнение точности предложенных нами методов LBA и QBA с существующими подходами для оценки стоимости опционов и «греков».

1 Краткий обзор аналитических методов оценки спред опциона

1.1 Логнормальная модель изменения цены актива

Рассмотрим дискретный случайный винеровский процесс:

$$W_t = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_t = \varepsilon \sqrt{t}.$$

Нас будет интересовать изменение переменной W_t на протяжении сравнительно долгого периода времени T. Представим это изменение в виде суммы малых приращений переменной W_t на протяжении N сравнительно малых промежутков времени Δt, где $N = T/\Delta t$:

$$W_T - W_0 = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}.$$

Здесь $\varepsilon_i,\ i = 1, 2, ..., N$ — случайные величины, имеющие нормальное распределение вероятностей со средним значением 0 и стандартным отклонением 1:

$$\varphi(x) = \varphi(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Величины, ε_i являются независимыми друг от друга. Следовательно, случайная величина $W_T - W_0$ имеет нормальное распределение, математическое ожидание которого равно нулю, а дисперсия равна $N\Delta t = T$, стандартное отклонение — $\sqrt{T}$.

Обощенный винеровский процесс для переменной $x(t)$ дополнительно учитывает наличие регулярного (нестохастического) дрейфа переменной x. В пределе $\Delta t \to 0$ его можно определить следующим образом:

$$dx = adt + b\delta W,$$

где a и b — константы, а dx и $\delta W \propto \sqrt{dt}$ — инфинитезимальные приращения. Коэффициент a отвечает за регулярный дрейф (снос), а коэффициент b — учитывает роль стохастики. Таким образом, изменение переменной x в течение произвольного интервала времени T будет распределено нормально с математическим ожиданием aT, стандартным отклонением $b\sqrt{T}$.

Следующим шагом обощения является процесс Ито:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)\delta W.$$

Стоимость опциона является функцией, зависящей от цены актива и времени. Обобщая, можно сказать, что стоимость любого деривативa является функцией, зависящей от стохастических переменных и времени. В этой области важную роль играет знаменитая «лемма Ито». Пусть значение переменной x подчиняются процессу Ито. Лемма Ито утверждает, функция G, зависящая от переменных x и t подчинятся стохастическому процессу:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{b^2(x,t)}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)dt + b(x,t)\frac{\partial G}{\partial x}\delta W.$$

Лемма Ито позволяет решить стохастическое дифференциальное уравнение, зависящее от поведения функции, аргумент которой определяется стохастичесим процессом.

Обычно стохастическую динамику цен описывают в рамках модели геометрического броуновского движения:

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,\delta W.$$

При рассмотрении ценообразования стандартно рассматривают динамику цен, нейтральную к риску. По этой причине смещения μ необходимо заменить на r — безрисковая процентная ставка или $r - q_i$, если мы рассматриваем активы, приносящие дивиденды (q_i – ставка выплаты дивидендов).

Величина dS/S имеет нормальное распределение с математическим ожиданием, равным μdt, и стандартным отклонением, равным $\sigma\sqrt{dt}$,

$$\frac{dS}{S} \propto \varphi(\mu dt, \sigma\sqrt{dt}),$$

где $\varphi(m, s)$ — плотность одномерного нормального распределение с математическим ожиданием m и стандартным отклонением s. Если использовать в качестве G случайную величину $G = \ln S$, то тогда:

$$dG = \left((r - q_i) - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma\delta W. \tag{1}$$

Этот результат означает, что случайная величина $G(T)$, распределена нормально со средним $((r - q_i) - \frac{1}{2}\sigma^2)T$ и дисперсией $\sigma^2 T$,

$$\ln S_T \propto \varphi\left[\ln S_0 + \left((r - q_i) - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma\sqrt{T}\right],$$

где S_T — цена актива в момент времени T, S_0 — цена актива в нулевой момент времени.

Говорят, что переменная имеет логнормальное распределение, если её логарифм имеет нормальное распределение. Таким образом, решение стохастического дифференциального уравнения (1),

$$S(T) = S_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T+\sigma W_T}, \tag{2}$$

имеет логнормальное распределение.

1.2 Точные результаты

Для установления цены спред опциона P со страйковой ценой K необходимо усреднить платежную функцию P, которая показывает какую прибыль получает держатель такого деривативa со страйковой ценой K, с весом $\rho(x)$. Для спред опциона она имеет вид:

$$P = e^{-rT}\max\{S_1(T) - S_2(T) - K,\ 0\}. \tag{3}$$

Рассмотрим далее два случая, когда $S_2(T) = 0$ — стоимость стандартного опциона, и случай, когда $K = 0$ получается опцион на замену одного актива на другой («чистый спред»).

1.2.1 Формула Блэка-Шоулза

Найдем стоимость опциона «колл». Для этого рассмотрим платежную функцию:

$$p(T) = \max(S_1(T) - K, 0). \tag{4}$$

В силу волатильности рынка существует распределение вероятностей того, что цена будет больше или меньше, чем значение S_0. Будущее значение «колл» опциона равна усреднению всех возможных реализаций S в момент времени T (см., например, [6]):

$$\langle p(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\max(S_1(T) - K, 0)e^{-\xi^2/2}d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{S_1(T)\geq K}^{\infty}(S_1(T) - K)e^{-\xi^2/2}d\xi. \tag{5}$$

Данные интегралы выражаются через интегральную функцию нормального распределения:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du. \tag{6}$$

Имеем

$$\langle p(T)\rangle = F_1 N(d_1) - KN(d_2), \tag{7}$$

где

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{S_{01}}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T\right),\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \tag{8}$$

Для учета временного характера стоимости денег необходимо внести изменения: пусть актив через время T будет в среднем стоить $\langle p(T)\rangle$, тогда сегодня с учетом процентной ставки r он должен стоить:

$$P = e^{-rT}\langle p(T)\rangle = e^{-rT}\left(F_1 N(d_1) - KN(d_2)\right). \tag{9}$$

Таким образом, стоимость «колл» опциона дается формулой (9). Это знаменитый результат, полученный Блэком, Шоулзом и Мертном [5] носит название «формулы Блэка-Шоулза». В дальнейшем, мы также будем рассматривать только стоимость «колл» опциона, ввиду того, что стоимость опциона «пут» может быть получена, используя паритет опционов «колл» и «пут».

1.2.2 Формула Маргрейба

Рассмотрим случай, когда в формуле (3) значение $K = 0$. Получается вариант для замены одного актива на другой в момент даты истечения контракта — так называемый «чистый спред». Платежная функция в таком случае:

$$p(T) = \max(S_1(T) - S_2(T), 0). \tag{10}$$

Усредняя по всем возможным реализациям, получаем будущее значение спред опциона:

$$\langle p(T)\rangle = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Sigma}}\int\limits_{\Omega_0} d\xi_1 d\xi_2 \left(F_1 e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T + \sigma_1\xi_1\sqrt{T}} - F_2 e^{-\frac{1}{2}\sigma_2^2 T + \sigma_2\xi_2\sqrt{T}}\right) e^{-\frac{1}{2}\xi'\Sigma^{-1}\xi}, \tag{11}$$

где Ω_0 — область, в которой опцион находится «в деньгах», Σ — ковариационная матрица:

$$\Omega_0 = \left\{(\xi_1, \xi_2) | F_1 e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T + \sigma_1\xi_1\sqrt{T}} \geq F_2 e^{-\frac{1}{2}\sigma_2^2 T + \sigma_2\xi_2\sqrt{T}}\right\}, \tag{12}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Sigma^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Учитывая временную стоимость денег получаем:

$$P = e^{-rT}\left(F_1 N(d_1) - F_2 N(d_2)\right), \tag{14}$$

где

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{F_1}{F_2} + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right),\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},\ \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}. \tag{15}$$

Таким образом, стоимость опциона (10) дается формулой (14). Этот результат в литературе носит название «формула Маргрейба» [10].

1.3 Приближенные аналитические формулы

К сожалению, нельзя получить точную аналитическую формулу для платежной функции вида (3). В таком случае, используются различные приближения. Далее приведен обзор самых популярных и самых точных методов для получения приближенных оценок стоимости спред опциона на данный момент.

1.3.1 Формула Кирка

Идея данного метода, предложенного в работе [14], состоит в том, чтобы свести задачу (3) к задаче (10). Будем аппроксимировать сумму $S_2(T) + K$ логнормальным распределением.

$$\begin{aligned} S_2(T) + K &\quad\rightarrow\quad \widetilde{S}_2(T), \\ F_2 e^{\sigma_2\xi_2\sqrt{T}} + K &\quad\rightarrow\quad \widetilde{F}_2 e^{\widetilde{\sigma}_2\widetilde{\xi}_2\sqrt{T}}. \end{aligned}$$

А неизвестные величины $\widetilde{F}_2$ и $\widetilde{\sigma}_2$ будем находить из условия равенства первого и второго моментов, предполагая условие $\sigma_2\sqrt{T} \ll 1$:

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left[F_2 e^{\sigma_2\xi_2\sqrt{T}} + K\right] = \mathbb{E}\left[\widetilde{F}_2 e^{\widetilde{\sigma}_2\widetilde{\xi}_2\sqrt{T}}\right] \\ D\left[F_2 e^{\sigma_2\xi_2\sqrt{T}} + K\right] = D\left[\widetilde{F}_2 e^{\widetilde{\sigma}_2\widetilde{\xi}_2\sqrt{T}}\right] \end{cases}. \tag{16}$$

Таким образом, из (16) находим неизвестные величины:

$$\widetilde{\sigma} = \frac{F_2\sigma}{F_2 + K}, \qquad \widetilde{F}_2 = F_2 + K. \tag{17}$$

Используя формулу Маргрейба, получаем:

$$P = e^{-rT}(F_1 N(d_1) - \widetilde{F}_2 N(d_2)), \tag{18}$$

где

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{T}}\left(\ln\frac{F_1}{\widetilde{F_2}} + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right),\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},\ \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\widetilde{\sigma_2} + \widetilde{\sigma}_2^2}. \tag{19}$$

Результат (18) носит название «формула Кирка» и является одной из самых первых аналитических формул для оценки спред опционов, имеющих неплохую точность.

1.3.2 Формула Бьерксунда

Авторы данного метода Бьерксунд и Стенсланд предлагают случайную величину $S_2(T) + K$ сохранить, а изменить лишь область интегрирования на используемую в методе Кирка (которая является полупространством) [17, 18]. Соответствующая аналитическая формула для оценки значение спреда «колл» имеет вид:

$$P = e^{-rT}\Big(F_1 N(d_1) - F_2 N(d_2) - K N(d_3)\Big), \tag{20}$$

где d_1, d_2 и d_3 определены следующим образом:

$$d_1 = \frac{\ln(F_1/a) + (\frac{1}{2}\sigma_1^2 - b\rho\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2}b^2\sigma_2^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{21}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_1/a) + (-\frac{1}{2}\sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2}b^2\sigma_2^2 - b\sigma_2^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{22}$$

$$d_3 = \frac{\ln(F_1/a) + (-\frac{1}{2}\sigma_1^2 + \frac{1}{2}b^2\sigma_2^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{23}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 - 2b\rho\sigma_1\sigma_2 + b^2\sigma_2^2}, \tag{24}$$

где

$$a = F_2 + K, \tag{25}$$

$$b = \frac{F_2}{F_2 + K}. \tag{26}$$

Этот подход оказывается заметно точнее (примерно на два порядка), по сравнению с приближением Кирка[2].

[2]См. Таблицу 1.

1.3.3 Процедура Кармона–Дурлемана

Перепишем будущие стоимости активов с помощью двух независимых переменных, а корреляцию выразим с помощью тригонометрических функций.

$$S_1(T) = F_1 e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T + (z_1 \sin\varphi + z_2 \cos\varphi)\sigma_1 \sqrt{T}}$$
$$S_2(T) = F_2 e^{-\frac{1}{2}\sigma_2^2 T + \sigma_2 \sqrt{T} z_2}\ , \tag{27}$$

где z_1 и z_2 — стандартные нормальные и независимые случайные величины, $\cos\varphi = \rho$, где $\varphi \in [0, \pi]$. Авторы рассматривают значение от реализации опции спреда в соответствии с осуществимой, но неоптимальной стратегией, обусловленной двумя переменными состояния. С математической точки зрения, данный метод соответствует замене исходной области интегрирования — полуплоскостью, с максимизацией значения стоимости спред опциона, путем выбора данной полуплоскости оптимальным способом:

$$z_1 \sin\theta^* - z_2 \cos\theta^* \leq d^*, \tag{28}$$

где $\theta^* \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ и d^* находятся численно, путем максимизации стоимости опциона[3].

Значение, которое представляет собой нижнюю границу точного значения спред-опциона, полученное при такой стратегии, равно:

$$\begin{aligned} C_{CD} &= e^{-rT}\mathbb{E}[(S_1(T) - S_2(T) - K)I(z_1 \sin\theta^* - z_2 \cos\theta^* \leq d^*)] = \\ &= e^{-rT}\Big(F_1 N\big(d^* + \sigma_1 \sqrt{T}\cos(\theta^* + \varphi)\big) - F_2 N\big(d^* + \sigma_2 \sqrt{T}\cos\theta^*\big) - KN\big(d^*\big)\Big). \end{aligned} \tag{29}$$

Численные исследования проведенные в [16] показывают, что этот метод дает очень точные оценки истинного значения опциона. Однако по сравнению с приведенными выше методами Кирка и Бьерксунда (а также излагаемого ниже метода DLZ) она имеет существенный недостаток: ответ не является полностью замкнутым аналитическим выражением, поскольку включает в себя процедуру численной оптимизации.

[3] Здесь $\varphi \in [0, \pi]$ и $\theta^* \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, следовательно: $\sin\varphi \geq 0$ и $\cos\theta^* \leq 0$.

1.3.4 Подход Денга-Ли-Зоу (DLZ)

Идея метода состоит в том, чтобы уравнение границы разложить в ряд в точке $y_0 = 0$. Соответствующая формула для стоимости спред опциона [7]:

$$P = e^{\sigma_1^2 T/2+\mu_1-rT} I_1 - e^{\sigma_2^2 T/2+\mu_2-rT} I_2 - K e^{-rT} I_3 \ , \tag{30}$$

где

$$I_1 \approx J_0(C^{(i)}, D^{(i)}) + J_1(C^{(i)}, D^{(i)})\epsilon + \frac{1}{2} J_2(C^{(i)}, D^{(i)})\epsilon^2 \ , \tag{31}$$

$$J_0(u, v) = N\left(\frac{u}{\sqrt{1+v^2}}\right) \ , \tag{32}$$

$$J_1(u, v) = \frac{1+(1+u^2)v^2}{(1+v^2)^{5/2}} \varphi\left(\frac{u}{\sqrt{1+v^2}}\right) \ , \tag{33}$$

$$J_2(u, v) = \frac{(6-6u^2)v^2 + (21-2u^2-u^4)v^4 + 4(3+u^2)v^6 - 3}{(1+v^2)^{11/2}} \varphi\left(\frac{u}{\sqrt{1+v^2}}\right) \ , \tag{34}$$

$$C^{(1)} = C^{(3)} + D^{(3)}\rho\sigma_1\sqrt{T} + \epsilon\rho^2\sigma_1^2 T + \sigma_1\sqrt{T(1-\rho^2)} \ , \tag{35}$$

$$D^{(1)} = D^{(3)} + 2\rho\sigma_1\sqrt{T}\epsilon \ , \tag{36}$$

$$C^{(2)} = C^{(3)} + D^{(3)}\sigma_2\sqrt{T} + \epsilon\sigma_2^2 T \ , \tag{37}$$

$$D^{(2)} = D^{(3)} + 2\sigma_2\sqrt{T}\epsilon \ , \tag{38}$$

$$C^{(3)} = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{T(1-\rho^2)}}\left(\mu_1 - \ln(R+K) + \frac{R\sigma_2\sqrt{T}}{R+K} y_0 - \frac{1}{2}\frac{RK\sigma_2^2 T}{(R+K)^2} y_0^2\right) \ , \tag{39}$$

$$D^{(3)} = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\left(\rho\sigma_1\sqrt{T} - \frac{R\sigma_2\sqrt{T}}{R+K} + \frac{RK\sigma_2^2 T}{(R+K)^2} y_0\right) \ , \tag{40}$$

$$\epsilon = -\frac{1}{2\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\frac{RK\sigma_2^2 T}{(R+K)^2} \ , \tag{41}$$

$$R = e^{\sigma_2\sqrt{T} y_0 + \mu_2} \ , \tag{42}$$

$$\mu_i = \ln S_{0i} + (r - q_i - \sigma_i^2/2)T. \tag{43}$$

Этот метод имеет высокую точность, что будет продемонстрировано в разделе 4 «Численные результаты». В работе [21] авторы демонстрируют результаты на случай N активов изменив при этом точку разложения. Последнее заметно улучшает точность, и на данный момент подход DLZ [21] считается самым точным приближением в замкнутой аналитической форме.

2 Основные результаты. Часть 1: Оценка стоимости спред опционов.

2.1 Постановка задачи

Будем рассматривать опцион состоящий из N активов. Тогда платежная функция:

$$p = \left(\sum_{i=1}^{N} w_i S_i(T) - K,\ 0 \right)^+, \tag{44}$$

где $x^+ \equiv \max(x, 0)$, w_i — веса [4], $S_i(T)$ — цена базового актива в момент исполнения T, K — цена исполнения. Если все веса w_i положительны и $N \geq 2$, имеет место баскет опцион. Если встречаются как положительные, так и отрицательные веса, то для случая $N = 2$ возникает спред опцион, а для $N \geq 3$ — баскет-спред опцион.

В соответствии с безарбитражным принципом ценообразования цена опциона определяется формулой

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(p), \tag{45}$$

в которой r — безрисковая процентная ставка, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ является математическим ожиданием по нейтральной к риску мере $\mathbb{Q}$.

В дальнейшем будет предполагаться, что стоимость базового актива следуют геометрическому броуновскому движению при мере $\mathbb{Q}$,

$$S_i(t) = S_{0i} e^{(r-q_i)t - \sigma_i^2 t/2 + \sigma_i W_i(t)}, \tag{46}$$

где $S_{0i} \equiv S_i(0)$ — стоимость актива в нулевой момент времени, σ_i — волатильность стоимости актива, $W_i(t)$ — коррелированные винеровские процессы, $dW_i(t)dW_j(t) = \rho_{ij}dt$, ρ_{ij} — коэффициенты корреляции.

Запишем стоимость актива (46) в форме

$$S_i(T) = F_i e^{-\sigma_i^2 T/2 + x_i}, \tag{47}$$

где $x_i = \sigma_i W_i(T)$, $F_i = S_{0i} e^{(r-q_i)T}$. В этих переменных платежная функция определяется как

$$p(\mathbf{x}) = B^+(\mathbf{x}), \tag{48}$$

[4] Без ограничения общности можно считать, что все $w_i \neq 0$

где

$$B(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_i F_i \, e^{-\sigma_i^2 T/2 + x_i} - K. \tag{49}$$

Случайный вектор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)'$ имеет многомерное нормальное распределение плотностью

$$\varphi_N(\mathbf{x}, \mathbf{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{\det \mathbf{\Sigma}}} \, e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{x}}, \tag{50}$$

где элементы симметричной и положительно определенной ковариационной $N \times N$-матрицы определяются равенствами

$$\Sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j T. \tag{51}$$

Соответственно, закон распределения цены каждого актива $S_i(T)$ в уравнении (47) является логнормальным.

Согласно уравнениям (47), (48) и (50) проблема оценки опциона (45) может быть сформулирована как задача вычисления N-мерного интеграла:

$$P = e^{-rT} \int_{\mathbb{R}^N} B^+(\mathbf{x})\varphi_N(\mathbf{x}, \Sigma)\, \mathrm{d}^N x = e^{-rT} \int_{\mathcal{D}} B(\mathbf{x})\varphi_N(\mathbf{x}, \Sigma)\, \mathrm{d}^N x, \tag{52}$$

с областью интегрирования:

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \,|B(\mathbf{x}) \geq 0 \right\}, \tag{53}$$

который можно интерпретировать как набор векторов $\mathbf{x}$, для которых опцион находится «в деньгах».

Представим интеграл (52) в виде суммы отдельных вкладов

$$P = e^{-rT} \left(\sum_{i=1}^{N} w_i F_i I_i - K I_{N+1} \right), \tag{54}$$

где

$$I_j = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{\det \mathbf{\Sigma}}} \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}^N x \, e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{x}} \times \begin{cases} e^{-\sigma_j^2 T/2 + x_j}, & j = 1, \ldots, N, \\ 1, & j = N+1. \end{cases} \tag{55}$$

Интегралы I_j можно переписать в несколько иной форме: с единой подынтегральной функцией — стандартной нормальной N-мерной плотностью вероятности (50), но с разными областями интегрирования. Для этого заметим, что аргументы экспонент в подынтегральных выражениях (55) представляют собой квадратичные формы по $\mathbf{x}$. Выделим в каждой из этих квадратичных форм полный квадрат, сделав в интеграле I_j замену переменной $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{\Sigma}\mathbf{e}^{(j)}$, где

$\mathbf{e}^{(j)} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)'$ — j-ый базисный вектор, $j = 1, \ldots, N$. В результате получим:

$$I_j = \int_{\mathcal{D}_j} \varphi_N(\mathbf{y}, \mathbf{\Sigma})\, \mathrm{d}^N y, \tag{56}$$

где область [5]

$$\mathcal{D}_j = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, B_j(\mathbf{y}) \geq 0 \right\},\ B_j(\mathbf{y}) = B\left(\mathbf{y} + \mathbf{\Sigma}\mathbf{e}^{(j)}\right),\ j = 1, \ldots, N \tag{57}$$

является просто параллельными сдвигами исходной области $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_{N+1} = \mathcal{D}$. Итак, задача оценки опциона из N активов свелась к вычислению $N + 1$ интеграла гуассового типа $I_j = I_j(\mathbf{F}, K, \mathbf{\Sigma})$ по нетривиальной области (56).

2.2 Точно решаемый случай

В общем случае области $\mathcal{D}_j$ имеют нетривиальную форму, не позволяющую выразить интегралы I_j и стоимость P в аналитическом виде, существенно более простом, чем сами формулы (55), (56) или (52).

Основой для используемого далее нами метода является тот факт, что N-мерный интеграл гауссового типа (56) допускает существенное упрощение (сводится к одномерному), если область интегрирования является полупространством.

Утверждение 1.

$$J(\mathbf{b}, c, \mathbf{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{\det \mathbf{\Sigma}}} \int\limits_{\mathbf{b}'\mathbf{y}+c\geq 0} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{y}}\, \mathrm{d}^N y = \Phi\left(d\right), \tag{58}$$

где $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ — *N-мерный вектор-столбец и c — скаляр,*

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}u^2} \mathrm{d}u \tag{59}$$

— *стандартная интегральная функция нормального распределения,*

$$d = c/||\mathbf{b}||_\Sigma,\ ||\mathbf{b}||_\Sigma = \sqrt{\mathbf{b}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{b}}. \tag{60}$$

Доказательство. Выполним в формуле (58) замену переменной

$$\mathbf{t} = \mathbf{S}\mathbf{y}, \tag{61}$$

[5] Отметим, что каждая область интегрирования $\mathcal{D}_j$ зависит от параметров *всех* активов.

где $\mathbf{S}$ — $N \times N$-матрица, $\det \mathbf{S} > 0$, определяется по формуле $\mathbf{S}'\mathbf{S} = \mathbf{\Sigma}^{-1}$, т.е., является квадратным корнем из матрицы $\mathbf{\Sigma}^{-1}$, $\mathbf{S} = \mathbf{\Sigma}^{-1/2}$. Область интегрирования $\mathbf{b}'\mathbf{y} + c \geq 0$ примет в новых переменных вид $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{t} + c \geq 0$, где $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{S}^{-1})'\mathbf{b}$. Учитывая тождества $\mathrm{d}\mathbf{t} = \det \mathbf{S}\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \mathrm{d}\mathbf{y}/\sqrt{\det \mathbf{\Sigma}}$ и $\mathbf{y}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{t}'\mathbf{t} = |\mathbf{t}|^2$ получим

$$J(\mathbf{b}, c, \mathbf{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\boldsymbol{\beta}'\mathbf{t}+c\geq 0} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{t}|^2} \mathrm{d}^N t.$$

Выделим теперь в векторе $\mathbf{t}$ компоненты вдоль и поперек вектора $\boldsymbol{\beta}$: $\mathbf{t} = \left(t^{\|}; \mathbf{t}^{\perp}\right)$, где $t^{\|}$, $\mathbf{t}^{\perp}$ — проекции вектора $\mathbf{t}$ на подпространства, соответственно, вдоль и поперек $\boldsymbol{\beta}$, т.е. $t^{\|} = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{t}/|\boldsymbol{\beta}| \in \mathbb{R}$, $\mathbf{t}^{\perp} \in \mathbb{R}^{N-1}$; $(1; \mathbf{0}) \parallel \boldsymbol{\beta}$, $(0; \mathbf{t}^{\perp}) \perp \boldsymbol{\beta}$. Таким образом, мы имеем факторизацию по $t^{\|}$ и $\mathbf{t}^{\perp}$ переменным в подынтегральном выражении, $\exp(-|\mathbf{t}|^2/2) = \exp(-(t^{\|})^2/2)\exp(-\left|\mathbf{t}^{\perp}\right|^2/2)$, и в области интегрирования, $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{t} + c = |\boldsymbol{\beta}|\,t^{\|} + c \geq 0$, т.е., $t^{\|} \geq -c/|\boldsymbol{\beta}|$. Таким образом, мы получаем факторизацию нашего интеграла:

$$J(\mathbf{b}, c, \mathbf{\Sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t^{\|}\geq -c/|\boldsymbol{\beta}|} e^{-\frac{1}{2}(t^{\|})^2} dt^{\|} \frac{1}{(2\pi)^{(N-1)/2}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-\frac{1}{2}\left|\mathbf{t}^{\perp}\right|^2} \mathrm{d}^{N-1} t^{\perp}. \tag{62}$$

Второй интеграл тождественно равен 1, и мы, финально, приходим к

$$J(\mathbf{b}, c, \mathbf{\Sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c/|\boldsymbol{\beta}|}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t^{\|})^2} \mathrm{d}t^{\|} = 1 - \Phi\left(-\frac{c}{|\boldsymbol{\beta}|}\right) = \Phi\left(\frac{c}{|\boldsymbol{\beta}|}\right) = \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{\mathbf{b}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{b}}}\right). \tag{63}$$

□

По геометрическому смыслу величина $|d|$ в (60) это расстояние от начала координат до гиперплоскости $\mathbf{b}'\mathbf{y} + c = 0$ в метрике, определяемой нормой $\|\ldots\|_{\Sigma}$.

Отметим ниже два случая опционов, для которых граница области $\mathcal{D}$ являются линейной, а значит линейными будут и все области $\mathcal{D}_i$. При этом формула (58) позволяет точно вычислять интегралы I_i, а формула (54), соответственно, дает точный ответ для оценки опциона.

- *Формула Блэка-Шоулза*, $N = 1$. Этот случай соответствует европейскому опциону «колл». Тогда платежная функция соответсвует (4):

$$P = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(S_1(T) - K)^+ = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi T}\sigma_1} \int_{\mathbb{R}} \left(F_1 e^{-\sigma_1^2 T/2 + x_1} - K\right)^+ e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2 T}} \mathrm{d}x_1.$$

  Граница области $\mathcal{D}$ имеет вид $x_1 = \ln(K/F_1) + \sigma_1^2 T/2$, (и может тривиально трактоваться как линейная в $\mathbb{R}^1$). Здесь $b = 1$, $\Sigma = \sigma_1^2 T$, $c = \ln(K/F_1) \pm \sigma_1^2 T/2$, $\|b\|_{\Sigma} = \sigma_1\sqrt{T}$ и формула (54) переходит в классическую формулу Блэка-Шоулза (9):

$$P = e^{-rT}\left(F_1\Phi\left(\frac{\ln(F_1/K)}{\sigma_1\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma_1\sqrt{T}\right) - K\Phi\left(\frac{\ln(F_1/K)}{\sigma_1\sqrt{T}} - \frac{1}{2}\sigma_1\sqrt{T}\right)\right). \tag{64}$$

- Формула Маргрейба, $N = 2$, $K = 0$. Такая платежная функция соответствует задаче, рассмотренной ранее в (10):

$$P = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(S_1(T) - S_2(T))^+ = e^{-rT}\int_{\mathbb{R}^2}\left(F_1 e^{-\sigma_1^2 T/2+x_1} - F_2 e^{-\sigma_2^2 T/2+x_2}\right)^+ \varphi_2(\mathbf{x},\Sigma)\,\mathrm{d}^2x. \tag{65}$$

Граница области $\mathcal{D}$ определяется формулой $\ln F_1 - \sigma_1^2 T/2 + x_1 = \ln F_2 - \sigma_2^2 T/2 + x_2$, т.е. является линейной в $\mathbb{R}^2$. В этом случае

$$\mathbf{b} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right),\ \boldsymbol{\Sigma} = T\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},\ ||\mathbf{b}||_\Sigma = \sigma_M\sqrt{T},\ c = \ln(F_1/F_2) \pm \sigma_M^2 T/2,$$

где $\sigma_M = \sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$ и формула (58) дает формулу Маргрейба (14):

$$P = e^{-rT}\left(F_1\Phi\left(\frac{\ln(F_1/F_2)}{\sigma_M\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma_M\sqrt{T}\right) - F_2\Phi\left(\frac{\ln(F_1/F_2)}{\sigma_M\sqrt{T}} - \frac{1}{2}\sigma_M\sqrt{T}\right)\right). \tag{66}$$

2.3 Теория возмущений

Предложение 1 открывает следующий путь к построению последовательных, все более точных приближений для вычисления интегралов (56):

1. В качестве начального приближения использовать некоторое линейное приближение для нижней границы области $B_i(\mathbf{y}) = 0$.
2. Приближения следующих порядков можно искать на основе теории возмущений по нелинейным членам в уравнении границы.

2.3.1 Касательная линейная аппроксимация границы

Разложим функцию $B_j(\mathbf{y})$ в ряд Тейлора до членов первого порядка малости в окрестности некоторой точки $\mathbf{y}_j^*$, принадлежащей границе $B_j(\mathbf{y}) = 0$:

$$B_j(\mathbf{y}) = \mathbf{g}_j^{*\prime}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_j^*) + O\left(\left|\mathbf{y} - \mathbf{y}_j^*\right|^2\right), \tag{67}$$

где

$$\mathbf{g}_j^* = \mathbf{g}(\mathbf{y}_j^*) = \nabla B_j(\mathbf{y})\big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_j^*}$$

— градиент функции $B_j(\mathbf{y})$ в точке $\mathbf{y}_j^*$. Пренебрегая в формуле (67) остаточным членом, используем в качестве первого приближения к границе области интегрирования линейную аппроксимацию

$$\mathbf{g}_j^{*\prime}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_j^*) = 0, \tag{68}$$

которое представляет собой касательную гиперплоскость в точке $\mathbf{y}_j^*$ к истинной «кривой» границе $B_j(\mathbf{y}) = 0$. В обозначениях Утверждения 1 линейная граница (68) соответствует выбору $\mathbf{b} = \mathbf{g}_j^*$ и $c = -\mathbf{g}_j^{*\prime}\mathbf{y}_j^*$, и мы получаем приближенную формулу первого порядка

$$I_j \approxeq \Phi\left(d_j^{(1)}\right),\ d_j^{(1)} = -\mathbf{g}_j^{*\prime}\mathbf{y}_j^*/\|\mathbf{g}_j^*\|_\Sigma = -\mathbf{g}_j^{*\prime}\mathbf{y}_j^*\Big/\sqrt{\mathbf{g}_j^{*\prime}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{g}_j^*}. \tag{69}$$

2.3.2 Оптимальная точка разложения $\mathbf{y}_j^*$

Чтобы минимизировать погрешность вычисления интеграла (56) по формуле (69) центр разложения $\mathbf{y}_j^*$ для каждого интеграла I_j разумно выбирать таким образом, чтобы линейная аппроксимация границы (68) была наиболее близка к реальной границе $B_j(\mathbf{y}) = 0$ именно там, где подынтегральная функция $\varphi_N(\mathbf{y}, 0, \Sigma)$ вносит наибольший вклад в интеграл I_j. Таким образом, «оптимальная» для данного I_j точка $\mathbf{y}_j^*$ соответствует максимуму функции $\varphi_N(\mathbf{y}, 0, \Sigma)$ на границе $B_j(\mathbf{y}) = 0$, что с учетом явного вида (50) функции φ_N дает:

$$\mathbf{y}_j^* = \underset{\mathbf{y}:\, B_j(\mathbf{y})=0}{\operatorname{argmin}}\, \mathbf{y}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{y}. \tag{70}$$

Направления вектора градиента $\mathbf{g}_j^*$ и вектора $\mathbf{y}_j^*$ в оптимальной точке (70) удовлетворяют условию

$$\mathbf{y}_j^* \| \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{g}_j^*. \tag{71}$$

В «$\mathbf{t}$-пространстве», получаемом из «$\mathbf{y}$-пространства» преобразованием (61), формулы (70) и (71) приобретают более простую форму:

$$\mathbf{t}_j^* = \underset{\mathbf{t}:\, \tilde{B}_j(\mathbf{t})=0}{\operatorname{argmin}}\, |\mathbf{t}|^2, \quad \mathbf{t}_j^* \| \mathbf{G}_j^*, \tag{72}$$

где

$$\tilde{B}_j(\mathbf{t}) = B_j(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{t}),\ \mathbf{G}_j^* = \nabla\tilde{B}_j(\mathbf{t}) = (\mathbf{S}')^{-1}\mathbf{g}_j^*. \tag{73}$$

По своему смыслу точка $\mathbf{t}_j^*$ является ближайшей к началу координат точкой границы $\tilde{B}_j(\mathbf{t}) = 0$.

В силу замкнутости области $\mathcal{D}$ решение задачи (70) заведомо существует, но, в общем случае, оно может быть не единственно. В такой ситуации в качестве $\mathbf{y}_j^*$ ($\mathbf{t}_j^*$) следует использовать решение, обеспечивающее глобальный минимум $\|\mathbf{y}\|_\Sigma$ в «$\mathbf{y}$-пространстве» (или глобальный минимум $|\mathbf{t}|$ в «$\mathbf{t}$-пространстве»). Однако, когда в платежной функции (44) только один из коэффициентов w_i положителен (здесь, без ограничения общности, можно считать, что это коэффициент w_1) или все коэффициенты положительны (баскет-спред), то область $\mathcal{D}$ является выпуклой и решение задачи (70) единственно.

Для численного решения задач (70), (71) можно использовать либо общие алгоритмы многомерной минимизации с ограничениями, либо специализированные алгоритмы, учитывающие особенности нашей задачи. Ниже мы предложим именно такой алгоритм.

2.3.3 Квадратичная аппроксимация границы

В этом разделе мы используем те же обозначения, что и в предыдущем разделе. Интеграл (56) после замены переменных (61) примет вид

$$I_j = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\tilde{B}_j(\mathbf{t})\geq 0} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{t}|^2} \mathrm{d}^N t. \tag{74}$$

В переменных $t^{\|}$ и $\mathbf{t}^{\perp}$ этот интеграл принимает форму

$$I_j = \frac{1}{(2\pi)^{(N-1)/2}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{t}^{\perp}|^2} \Phi\left(-t_j^{\|}(\mathbf{t}^{\perp})\right) \mathrm{d}^{N-1} t^{\perp}, \tag{75}$$

где $t_j^{\|}(\mathbf{t}^{\perp})$ — граница области интегрирования $\tilde{B}_j(\mathbf{t}) = 0$ в координатах $t^{\|}, \mathbf{t}^{\perp}$ (выбор продольного направления пока не конкретизирован и будет сделан ниже).

Найдем квадратичное приближение функции $t^{\|}(\mathbf{t}^{\perp})$ в окрестности точки $\mathbf{t}^*$, определяемой формулой (72). Для этого учтем в разложении (67) члены до 2-го порядка:

$$B_j(\mathbf{y}) = \mathbf{g}_j^{*\prime}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_j^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_j^*)'\mathbf{H}_j^*(\mathbf{y} - \mathbf{y}_j^*) + O\left(\left|\mathbf{y} - \mathbf{y}_j^*\right|^3\right),$$

где $\mathbf{H}_j^* = \nabla \otimes \nabla B|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_j^*}$ — матрицы Гессе функции B в точке $\mathbf{y} = \mathbf{y}_j^*$. Ввиду $B_j(\mathbf{y}_j^*) = 0$, квадратичное приближение к поверхности $B(\mathbf{y}) = 0$ в непосредственной близости от точки $\mathbf{y}_j^*$ имеет форму

$$\mathbf{g}_j^{*\prime}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_j^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_j^*)'\mathbf{H}_j^*(\mathbf{y} - \mathbf{y}_j^*) = 0.$$

Эта формула в $\mathbf{t}$-пространстве имеет вид:

$$\mathbf{G}_j^{*\prime}\Delta\mathbf{t} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{t}'\tilde{\mathbf{H}}_j^*\Delta\mathbf{t} = 0, \tag{76}$$

где $\Delta\mathbf{t} = \mathbf{t} - \mathbf{t}_j^*$ и $\tilde{\mathbf{H}}_j^* = \mathbf{S}'^{-1}\mathbf{H}_j^*\mathbf{S}^{-1}$. Теперь конкретизируем выбор продольно-поперечного представления $\mathbf{t} = \left(t^{\|}; \mathbf{t}^{\perp}\right)$. Пусть $(1; \mathbf{0}) \parallel \mathbf{G}_j^*$, т.е.

$$t^{\|} = \mathbf{G}_j^{*\prime}\mathbf{t} / \left|\mathbf{G}_j^*\right|. \tag{77}$$

Первое слагаемое в формуле (76) включает в себя только продольную компоненту $\Delta\mathbf{t}$: $\mathbf{G}_j^{*\prime}\Delta\mathbf{t} = |\mathbf{G}_j^*|\Delta t^{\|}$ и мы приходим к $\Delta t^{\|} = O(\left|\Delta\mathbf{t}^{\perp}\right|^2)$ для $\Delta\mathbf{t}^{\perp} \to \mathbf{0}$. Таким образом, в непосредственной близости от $\Delta\mathbf{t}^{\perp} = 0$ мы можем опустить продольную составляющую $\Delta\mathbf{t}$ во втором слагаемом формулы (76), так как оно вносит вклад $O\left(\left|\mathbf{t} - \mathbf{t}_j^*\right|^3\right)$. Таким образом, мы получаем квадратичную аппроксимацию поверхности $\tilde{B}(\mathbf{t}) = 0$ в форме:

$$\left|\mathbf{G}_j^*\right| \Delta t^{\|} + \frac{1}{2}(0; \Delta\mathbf{t}^{\perp})'\tilde{\mathbf{H}}_j^*(0; \Delta\mathbf{t}^{\perp}) = 0, \tag{78}$$

Учтем теперь, что согласно (72) выполнено условие $\mathbf{t}_j^* \| \mathbf{G}_j^*$, т.е. $\mathbf{t}_j^{*\perp} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{N-1}$. Таким образом $\Delta\mathbf{t}^{\perp} = \mathbf{t}^{\perp}$. Кроме того из Eqs. (61), (73), (69) и (77) мы получаем

$$t^{*\|} = \mathbf{G}_j^{*\prime}\mathbf{t}^* / \left|\mathbf{G}_j^*\right| = -d_j^{(1)}.$$

В результате получим в $\mathbf{t}$-пространстве, окончательно, уравнение квадратичного приближения к границе в виде

$$t_j^{\|}(\mathbf{t}^{\perp}) = -d_j^{(1)} - \frac{1}{2}\left|\mathbf{G}_j^*\right|^{-1}\mathbf{t}^{\perp\prime}\tilde{\mathbf{H}}_j^{*\perp}\mathbf{t}^{\perp}, \tag{79}$$

где $\tilde{\mathbf{H}}_j^{*\perp}$ это $(N-1)\times(N-1)$ ортогональный проектор матрицы $\tilde{\mathbf{H}}_j^*$ на линейное подпространство, ортогональное $\mathbf{G}_j^*$. В системе координат $(t^{\|}, \mathbf{t}^{\perp})$ явная форму для матрицы $\tilde{\mathbf{H}}_j^{*\perp}$:

$$\tilde{\mathbf{H}}_j^{*\perp} = (\mathbf{0}|\mathbf{1})'\tilde{\mathbf{H}}_j^*(\mathbf{0}|\mathbf{1}), \tag{80}$$

где $(\mathbf{0}|\mathbf{1})$ это $(N-1)\times N$-блочная матрица, $\mathbf{0}$ это $(N-1)$- вектор-столбец и $\mathbf{1}$ определяется как $(N-1)\times(N-1)$-матрица.

Разложим функцию $\Phi(-t^{\|}(t^{\perp}))$ в окрестности точки $\mathbb{E}(-t^{\|}(\mathbf{t}^{\perp})) = d_j^{(1)} + s$ с точностью до членов второго порядка,

$$\Phi(-t^{\|}(t^{\perp})) = \Phi\left(d_j^{(1)} + s\right) + \varphi\left(d_j^{(1)} + s\right)\left(\left|\mathbf{G}_j^*\right|^{-1} \mathbf{t}^{\perp\prime}\tilde{\mathbf{H}}_j^{*\perp}\mathbf{t}^{\perp}/2 - s\right) + \ldots, \tag{81}$$

где $\varphi(z)$ – плотность нормального распределения.

Выберем сдвиговую константу s как среднее значение правой части (79) с весом $\propto e^{-\left|\mathbf{t}^{\perp}\right|^2/2}$,

$$s = \left|\mathbf{G}_j^*\right|^{-1} \frac{1}{2(2\pi)^{(N-1)/2}} \int_{R^{N-1}} e^{-\frac{1}{2}\left|t^{\perp}\right|^2} \mathbf{t}^{\perp\prime}\tilde{\mathbf{H}}_j^{*\perp}\mathbf{t}^{\perp} d^{N-1}t^{\perp} = \frac{1}{2}\left|\mathbf{G}_j^*\right|^{-1} \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{H}}_j^{*\perp}). \tag{82}$$

В силу этого второй член в (81) вносит нулевой вклад после интегрирования в (75), и мы получаем,

$$I_j \approx \Phi\left(d_j^{(1)} + s\right). \tag{83}$$

Выражение (82) можно преобразовать к виду более удобному для расчетов. Для этого заметим, что согласно (80)

$$\operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{H}}_j^{*\perp}) = \operatorname{tr}(\mathbf{P}_j^{\perp}\tilde{\mathbf{H}}_j^*\mathbf{P}_j^{\perp}) = \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{H}}_j^*) - \left|\mathbf{G}_j^*\right|^{-2} \mathbf{G}_j^{*\prime}\tilde{\mathbf{H}}_j^*\mathbf{G}_j^*. \tag{84}$$

где $\mathbf{P}_j^{\perp} = \mathbf{E} - \mathbf{G}_j^*\mathbf{G}_j^{*\prime}/\left|\mathbf{G}_j^*\right|^2$ ортогональный проектор из $\mathbb{R}^N$ на линейное подпространство, ортогональное $\mathbf{G}_j^*$. Возвращаясь в $\mathbf{y}$-пространство, получаем окончательно,

$$\operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{H}}_j^{*\perp}) = \operatorname{tr}(\mathbf{H}_j^*\mathbf{\Sigma}) - \left(\mathbf{g}_j^{*\prime}\mathbf{\Sigma}\mathbf{g}_j^*\right)^{-2} \mathbf{g}_j^{*\prime}\mathbf{\Sigma}\mathbf{H}_j^*\mathbf{\Sigma}\mathbf{g}_j^*. \tag{85}$$

Таким образом, в первом и втором порядках теории возмущений возникает

Утверждение 2. *Для полиномиальных порядка k аппроксимаций границы области интегрирования, справедливы формулы*

$$I_j = \int_{B_j(\mathbf{y})\geq 0} \varphi_N(\mathbf{y}, 0, \mathbf{\Sigma})dy \approx \Phi\left(d_j^{(k)}\right), \tag{86}$$

где

$$d_j^{(1)} = -\frac{\mathbf{g}_j^{*\prime}\mathbf{y}_j^*}{\sqrt{\mathbf{g}_j^{*\prime}\mathbf{\Sigma}\mathbf{g}_j^*}},\ d_j^{(2)} = d_j^{(3)} = d_j^{(1)} + \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{g}_j^{*\prime}\mathbf{\Sigma}\mathbf{g}_j^*}}\left(\operatorname{tr}(\mathbf{H}_j^*\mathbf{\Sigma}) - \frac{\mathbf{g}_j^{*\prime}\mathbf{\Sigma}\mathbf{H}_j^*\mathbf{\Sigma}\mathbf{g}_j^*}{\mathbf{g}_j^{*\prime}\mathbf{\Sigma}\mathbf{g}_j^*}\right), \tag{87}$$

где

$$\mathbf{y}_j^* = \underset{\mathbf{y}:\, B_j(\mathbf{y})=0}{\operatorname{argmin}}\, \mathbf{y}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{y},\ \mathbf{g}_j^* = \nabla B(\mathbf{y})|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_j^*},\ \mathbf{H}_j^* = \nabla \otimes \nabla B(\mathbf{y})|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_j^*}. \tag{88}$$

Аналогичные, но более громоздкие выкладки можно сделать и для разложений границы $B_j(\mathbf{y})$ более высоких порядков — изменятся лишь выражения для постоянных $d_j^{(k)}$.

Заметим важную особенность формулы (87) для второго порядка теории возмущений, которая следует из нашего специального выбора точки разложения. На самом деле эта формула имеет более высокий порядок точности — она справедлива также и в третьем порядке теории возмущений, вклад от которого в d_j оказывается тождественно равен нулю! Это относится ко всем поправкам в $d_{(j)}$ нечетного порядка.

3 Основные результаты. Часть 2: Греческие символы («греки»)

Так называемые «греки» — важные параметры в теории опционов, определяющие чувствительность стоимости опциона к изменению параметров. С математической точки зрения они определяются соответствующими частными производными. Среди частных производных первого порядка чаще всего рассматривают следующие: $\Delta = \partial P/\partial S_0$, $\mathcal{V} = \partial P/\partial\sigma$, $\Theta = \partial P/\partial T$, rho $= \partial P/\partial r$, $\epsilon = \partial P/\partial q$, а среди частных производных второго порядка: $\Gamma = \dfrac{\partial^2 P}{\partial^2 S_0} = \dfrac{\partial\Delta}{\partial S_0}$, Vanna $= \dfrac{\partial^2 P}{\partial S_0 \partial\sigma}$, Charm $= -\dfrac{\partial\Delta}{\partial\tau} = \dfrac{\partial\Theta}{\partial S_0} = -\dfrac{\partial^2 V}{\partial\tau\partial S_0}$, Vomma $= \dfrac{\partial^2 P}{\partial^2\sigma}$.

Далее мы рассмотрим наиболее важные из приведенных выше греческих символов.

3.1 Точные формулы

Наши явные аналитические выражения для «греков» основаны на следующей лемме.

Лемма 1.

$$I(a) = \int\limits_{f(\mathbf{x},a)\geq 0} h(\mathbf{x},a)\,\mathrm{d}^N x \Rightarrow \frac{\partial I}{\partial a} = \int\limits_{f(\mathbf{x},a)\geq 0} \frac{\partial h(\mathbf{x},a)}{\partial a}\,\mathrm{d}^N x + \int\limits_{f(\mathbf{x},a)=0} h(\mathbf{x}) \frac{1}{|\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x},a)|} \frac{\partial f(\mathbf{x},a)}{\partial a}\,d\mathbb{S}, \tag{89}$$

где $d\mathbb{S}$ — бесконечно малый элемент площади $(N-1)$-мерной поверхности $f(\mathbf{x},a) = 0$.

Доказательство. Ниже мы используем стандартные обозначения $\theta(z)$ для функции Хевисайда и $\delta(z)$ для функции Дирака. Имеем,

$$I(a) = \int\limits_{f(\mathbf{x},a)\geq 0} h(\mathbf{x},a)\,\mathrm{d}^N x = \int\limits_{\mathbb{R}^N} h(\mathbf{x},a)\theta(f(\mathbf{x},a))\,\mathrm{d}^N x \Rightarrow$$

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial h(\mathbf{x},a)}{\partial a}\theta(f(\mathbf{x},a))\,\mathrm{d}^N x + \int\limits_{\mathbb{R}^N} h(\mathbf{x},a)\frac{\partial\theta(f(\mathbf{x},a))}{\partial a}\,\mathrm{d}^N x.$$

Для первого слагаемого получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial h(\mathbf{x}, a)}{\partial a} \theta(f(\mathbf{x}, a)) \, \mathrm{d}^N x = \int\limits_{f(\mathbf{x},a)\geq 0} \frac{\partial h(\mathbf{x}, a)}{\partial a} \, \mathrm{d}^N x.$$

Для второго члена, используя свойства δ-функции, приходим к

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} h(\mathbf{x}) \frac{\partial \theta(f(\mathbf{x}, a))}{\partial a} \, \mathrm{d}^N x = \int\limits_{\mathbb{R}^N} h(\mathbf{x}) \frac{\partial \theta(f(\mathbf{x}, a))}{\partial f(\mathbf{x}, a)} \frac{\partial f(\mathbf{x}, a)}{\partial a} \, \mathrm{d}^N x =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} h(\mathbf{x}) \delta(f(\mathbf{x}, a)) \frac{\partial f(\mathbf{x}, a)}{\partial a} \, \mathrm{d}^N x = \int\limits_{f(\mathbf{x},a)=0} h(\mathbf{x}) \frac{1}{|\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, x)|} \frac{\partial f(\mathbf{x}, a)}{\partial a} \, d\mathcal{S}.$$

□

Отметим два полезных частных случая, которые тривиально следуют из (89):

Следствие 1.

$$I(a) = \int\limits_{f(\mathbf{x},a)\geq 0} h(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}^N x \;\Rightarrow\; \frac{\partial I}{\partial a} = \int\limits_{f(\mathbf{x},a)=0} h(\mathbf{x}) \frac{1}{|\nabla f(\mathbf{x})|} \frac{\partial f(\mathbf{x}, a)}{\partial a} \, d\mathcal{S}. \tag{90}$$

$$I(a) = \int\limits_{f(\mathbf{x},a)\geq 0} f(\mathbf{x}, a) g(\mathbf{x}, a) \, \mathrm{d}^N x \;\Rightarrow\; \frac{\partial I}{\partial a} = \int\limits_{f(\mathbf{x},a)\geq 0} \frac{\partial f(\mathbf{x}, a) g(\mathbf{x}, a)}{\partial a} \, \mathrm{d}^N x. \tag{91}$$

В итоге, используя Лемму 1 и Следствие 1 мы получим точные выражения для греческих символов:

Утверждение 3. *Для греков первого порядка справедливы интегральные представления:*

1. *Delta*

$$\Delta_i = \frac{\partial P}{\partial S_{0i}} = e^{-q_i T} w_i I_i. \tag{92}$$

Здесь $i = 1, \ldots, N$, $\Delta_{N+1} = e^{-rT} \partial P / \partial K$ обозначается как Dual Delta.

2. *Vega*

$$\mathcal{V}_i = \frac{\partial P}{\partial \sigma_i} = -e^{-rT} w_i F_i \sigma_i^{-1} \int_{\mathcal{D}_i} y_i \varphi_N(\mathbf{y}, \mathbf{\Sigma}) \mathrm{d}^N y, \tag{93}$$

$i = 1, \ldots, N.$

Альтернативная форма:

$$\mathcal{V}_i = w_i F_i e^{-(r + \frac{\sigma_i^2}{2})T} \int_{\mathcal{D}} (-\sigma_i T + \xi_i \sqrt{T}) e^{\sigma_i \xi_i \sqrt{T}} \varphi_N(\xi, \boldsymbol{\rho}) \mathrm{d}^N \xi, \tag{94}$$

$(\boldsymbol{\rho})_{ij} = \rho_{ij}, \; i = 1, \ldots, N.$

3. *Chi*

$$\chi_{ij} \equiv \frac{\partial P}{\partial \rho_{ij}} = \left(\left(\frac{1}{2}\delta_{ij} - 1\right)\left(\rho^{-1}\right)_{ij} - \frac{1}{2}\sigma_i\sigma_j\delta_{ij}\right)P -$$
$$- e^{-rT}\sum_{k=1}^{N+1} w_k F_k \int_{B_k(\mathbf{y})\geq 0}\left(\frac{1}{2}\mathbf{y}'\mathbf{A}^{(ij)}\mathbf{y} + \mathbf{y}'\mathbf{q}^{(ijk)}\right)\varphi_N(\mathbf{y},\mathbf{\Sigma})\mathrm{d}^N y, \quad (95)$$

где $i, j = 1, \dots, N$, $\mathbf{A}^{(ij)} = \mathbf{\Sigma}^{-1}\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \rho_{ij}}\mathbf{\Sigma}^{-1}$, $\mathbf{q}^{(ijk)} = \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \rho_{ij}}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{e}_k$.

4. *Theta*

$$\Theta = \frac{\partial P}{\partial T} = -rP + \sum_{i=1}^{N} e^{-rT}\int_{\mathcal{D}}\left((r - q_i) - \frac{1}{2}\sigma_i^2 + \frac{\sigma_i \xi_i}{2\sqrt{T}}\right)F_i e^{-\frac{\sigma_i^2 T}{2} + \sigma_i\xi_i\sqrt{T}}\varphi_N(\xi,\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^N\xi. \quad (96)$$

Альтернативные формы:

$$\Theta = \frac{\partial P}{\partial T} = -qP + \frac{1}{2T}\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\mathcal{V}_k + \sum_{k=1}^{N}F_k e^{-(r+\frac{\sigma_k^2}{2})T}(r - q_k)\int_{\mathcal{D}} e^{\sigma_k\xi_k\sqrt{T}}\varphi_N(\xi,\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^N\xi. \quad (97)$$

$$\Theta = \frac{\partial P}{\partial T} = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2T}\sigma_k\mathcal{V}_k - q_k P - q_k e^{-rT}KI_{N+1}\right) + re^{-rT}KI_{N+1} \quad (98)$$

5. *Rho*

$$rho = \frac{\partial P}{\partial r} = Te^{-rT}KI_{N+1} \quad (99)$$

6. *Gamma*

$$\Gamma_{ij} \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial F_i \partial F_j} = \frac{\partial \Delta_i}{\partial F_j} = e^{-rT}w_i\frac{\partial I_i}{\partial F_j} =$$
$$= e^{-rT}w_i w_j e^{\Sigma_{ji}}\int_{B(\mathbf{z}+\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}^{(i)}+\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}^{(j)})=0}\frac{\varphi_N(\mathbf{z},\mathbf{\Sigma})}{\left\|\boldsymbol{\nabla}B(\mathbf{z}+\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}^{(i)}+\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}^{(j)})\right\|}d\mathcal{S}(\mathbf{z}), \quad (100)$$

где $d\mathcal{S}(\mathbf{z})$ *— элемент площади поверхности интегрирования* $B(\mathbf{z} + \mathbf{\Sigma}\mathbf{e}^{(i)} + \mathbf{\Sigma}\mathbf{e}^{(j)}) = 0$. [6]

[6] При параметризации поверхности в виде $z_1 = z_1(z_2, \dots, z_n)$, $(z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, имеем

$$d\mathcal{S}(\mathbf{z}) = \frac{\left\|\nabla B(\mathbf{z}+\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}^{(i)}+\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}^{(j)})\right\|}{\nabla_{z_1}B(\mathbf{z}+\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}^{(i)}+\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}^{(j)})}dz_2\dots dz_n,$$

где $i, j = 1, \dots, N$.

3.2 Приближения для греческих символов

Для вычисления значения греков нам будут полезны некоторые следствия формулы (58). Прежде всего, заметим, что сделав в формуле (58) замену переменной $\mathbf{y} \to \mathbf{y} - \Sigma\mathbf{h}$ после выделения полного квадрата в показателе экспоненты подынтегрального выражения, получаем:

Следствие 2 (Производящая функция)**.**

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{\det\mathbf{\Sigma}}}\int\limits_{\mathbf{b}'\mathbf{y}+c\geqslant 0} e^{\mathbf{h}'\mathbf{y}-\frac{1}{2}\mathbf{y}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{y}}\,\mathrm{d}^N y = e^{\frac{1}{2}\mathbf{h}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{h}}\Phi\left(\mathbf{h}'\mathbf{e}+d\right), \tag{101}$$

где

$$\mathbf{e} = \mathbf{\Sigma b}/\|\mathbf{b}\|_\Sigma,\ d = c/\|\mathbf{b}\|_\Sigma.$$

Отсюда, в силу простого тождества

$$\left.\frac{\partial^n e^{\mathbf{h}'\mathbf{y}}}{\partial h_{\alpha_1}\partial h_{\alpha_2}\ldots\partial h_{\alpha_n}}\right|_{\mathbf{h}=\mathbf{0}} = y_{\alpha_1}y_{\alpha_2}\ldots y_{\alpha_n}$$

следуют соотношения:

Следствие 3.

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{\det\mathbf{\Sigma}}}\int\limits_{\mathbf{b}'\mathbf{y}+c\geqslant 0} y_\alpha e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{y}}\mathrm{d}^N y = \varphi(d)e_\alpha, \tag{102}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{\det\mathbf{\Sigma}}}\int\limits_{\mathbf{b}'\mathbf{y}+c\geq 0} y_\alpha y_\beta e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{y}}\mathrm{d}^N y = \Phi(d)\Sigma_{\alpha\beta} - d\,\varphi(d)e_\alpha e_\beta, \tag{103}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

— *стандартная нормальная функция плотности вероятности.*

В частности, отсюда получаем:

Следствие 4.

$$\int\limits_{\mathbf{b}'\mathbf{y}+c\geq 0}\frac{1}{2}\mathbf{y}'\boldsymbol{A}\mathbf{y}\,\varphi_N(\mathbf{y},\Sigma)\mathrm{d}^N y = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}\Sigma\right)\Phi\left(d\right) + \varphi\left(d\right)\frac{d}{\|\mathbf{b}\|_\Sigma^2}\mathbf{b}'\Sigma\boldsymbol{A}\Sigma\mathbf{b}, \tag{104}$$

$$\int\limits_{\mathbf{b}'\mathbf{y}+c\geq 0}\mathbf{y}'\mathbf{q}\,\varphi_N(\mathbf{y},\mathbf{\Sigma})\mathrm{d}^N y = \varphi\left(d\right)\frac{\mathbf{q}'\mathbf{\Sigma b}}{\|\mathbf{b}\|_\Sigma}. \tag{105}$$

Следствия 3 и 4 дают возможность построить приближенное аналитическое выражение для греческих символов, если использовать линейную аппроксимацию границы области интегрирования $\mathcal{D}_j$ (и, при необходимости, — использовать теорию возмущений для учета последующих поправок в границу). Можно, как и раньше, применить аппроксимацию касательной гиперплоскостью в точке границы ближайшей к началу координат в t-пространстве. Тогда нужно положить $\mathbf{b} = \mathbf{g}$, $c = -\mathbf{g}'\mathbf{y}^*$, где $\mathbf{g}$ — градиент в точке $\mathbf{y}^*$ и $\mathbf{y}^*$ — точка касания.

Выражения для Delta, Rho даются автоматически, если мы нашли значение опциона: формула для Delta — это значение отдельных интегралов умноженное на константу, а значение для Rho получается из значения $N + 1$ интеграла, которое нужно домножить на константу. Также сразу дается выражение для Theta, если уже имеются значения Vega. Таким образом, достаточно привести только выражения для Vega и Chi:

1. Vega
$$\mathcal{V}_i = \frac{\partial P}{\partial \sigma_i} = -e^{-rT} w_i F_i \sigma_i^{-1} \varphi\left(d_i^{(m)}\right) e_i, \tag{106}$$
где величины $d_i^{(1,2,3)}$ определены в (87), $\mathbf{e} = \mathbf{\Sigma g}^* / ||\mathbf{g}^*||_\Sigma$, $i = 1, \ldots, N$.

2. Chi
$$\begin{aligned}\chi_{ij} \equiv \frac{\partial P}{\partial \rho_{ij}} = \left(\left(\frac{1}{2}\delta_{ij} - 1\right)\left(\rho^{-1}\right)_{ij} - \frac{1}{2}\sigma_i\sigma_j\delta_{ij}\right)P-\\ - e^{-rT}\sum_{k=1}^{N+1} w_k F_k\Bigg(\operatorname{tr}\left(A^{(ij)}\Sigma\right)\Phi\left(d_k^{(m)}\right) +\\ + \varphi\left(d_k^{(m)}\right)\frac{d_k^{(m)}}{||\mathbf{g_k^*}||^2_\Sigma}\mathbf{g}_k^{*\prime}\,\Sigma A^{(ij)}\mathbf{\Sigma g}_k^* + \varphi\left(d_k^{(m)}\right)\frac{\mathbf{q}^{(ijk)\prime}\mathbf{\Sigma g}_k^*}{||\mathbf{g}_k^*||_\Sigma}\Bigg),\end{aligned} \tag{107}$$
где $(\boldsymbol{\rho})_{ij} = \rho_{ij}$ — корреляционная матрица, $\mathbf{A}^{(ij)} = \mathbf{\Sigma}^{-1}\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial\rho_{ij}}\mathbf{\Sigma}^{-1}$, $\mathbf{q}^{(ijk)} = \frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial\rho_{ij}}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{e}_k$, $i, j = 1, \ldots, N$.

4 Основные результаты. Часть 3: Численные расчеты.

4.1 Случай двух активов

Рассмотрим задачу (54) в случае $N = 2$:

$$P = \frac{e^{-rT}}{2\pi\sqrt{\det\Sigma}} \int\limits_{\Omega_0} d\xi_1 d\xi_2 \left(F_1 e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T + \sigma_1 \xi_1 \sqrt{T}} - S_2(\xi_2) - K\right) e^{-\frac{1}{2}(\Sigma^{-1}\xi,\, \xi)}, \tag{108}$$

где

$$\Omega_0 = \left\{(\xi_1, \xi_2) | F_1 e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T + \sigma_1 \xi_1 \sqrt{T}} \geq S_2(\xi_2) + K\right\}. \tag{109}$$

Двухкратный интеграл (108) можно свести к однократному интегралу от спецфункции:

$$P = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \left(F_1 e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T + \frac{\sigma_1^2 T(1-\rho^2)}{2} + \sigma_1\sqrt{T}\rho y} N(\sigma_1\sqrt{T(1-\rho^2)} - \Omega_1(y)) - \right.$$
$$\left. - F_2 e^{(-\frac{1}{2}\sigma_2^2 T + \sigma_2\sqrt{T} y} N(-\Omega_1(y)) - KN(-\Omega_1(y))\right) e^{-\frac{1}{2}y^2}, \tag{110}$$

где

$$\Omega_1(y) = \frac{\ln(F_2 e^{-\frac{1}{2}\sigma_2^2 T + \sigma_2\sqrt{T} y} + K) - \ln(F_1 e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T}) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 T - \sigma_1\sqrt{T}\rho y}{\sigma_1\sqrt{T(1-\rho^2)}}. \tag{111}$$

Данная формула будет использоваться для контроля точности получаемых приближенных аналитических формул.

Рассмотрим точность оценок нашего линейного (LBA) и кубического (QBA) приближения для задачи оценки спред опциона на два актива (3). В Таблице 1 представлены абсолютные ошибки расчета стоимости спред опциона на 2 актива, полученные различными методами: Bj соответствует приближению Бьерксунда (20) - (26), C-D — полуаналитическая процедура Кармона-Дуррлемана (27)–(29), Kirk — приближение Кирка (18), DLZ соответствует формулам (30), а LBA и QBA — наши приближения (86). В таблице 2 представлены абсолютные ошибки для первого интеграла (56). Параметры взяты из работ [16, 17]: $r = 0.05$, $q_1 = 0.03$, $q_2 = 0.02$, $S_{01} = 110$, $S_{02} = 100$, $T = 1$, $\sigma_1 = 0.1$, $\sigma_2 = 0.15$, при этом $\rho = [-0.5,\ 0,\ 0.3,\ 0.8]$ — коэффициент корреляции, $K = [-20,\ -10,\ 0,\ 5,\ 15,\ 25]$ — цена исполнения, и выбираются данные параметры из приведенных значений.

Метод	K	ρ			
		-0.5	0	0.3	0.8
Bj	-20	2×10^{-4}	6×10^{-4}	8×10^{-4}	1×10^{-3}
C-D		8×10^{-6}	2×10^{-5}	3×10^{-5}	4×10^{-6}
Kirk		6×10^{-2}	4×10^{-2}	3×10^{-2}	8×10^{-3}
DLZ		2×10^{-3}	6×10^{-4}	2×10^{-3}	7×10^{-3}
LBA		$\mathbf{4 \times 10^{-6}}$	$\mathbf{1 \times 10^{-5}}$	$\mathbf{1 \times 10^{-5}}$	$\mathbf{2 \times 10^{-6}}$
QBA		8×10^{-6}	2×10^{-5}	3×10^{-5}	4×10^{-6}
Bj	-10	4×10^{-5}	8×10^{-5}	1×10^{-4}	3×10^{-4}
C-D		3×10^{-6}	1×10^{-5}	2×10^{-5}	9×10^{-6}
Kirk		2×10^{-2}	2×10^{-2}	2×10^{-2}	1×10^{-2}
DLZ		4×10^{-4}	3×10^{-4}	7×10^{-5}	1×10^{-3}
LBA		$\mathbf{2 \times 10^{-6}}$	$\mathbf{6 \times 10^{-6}}$	$\mathbf{9 \times 10^{-6}}$	$\mathbf{5 \times 10^{-6}}$
QBA		3×10^{-6}	1×10^{-5}	2×10^{-5}	9×10^{-6}
Bj	0	1×10^{-9}	2×10^{-9}	4×10^{-9}	1×10^{-10}
C-D		2×10^{-9}	3×10^{-9}	5×10^{-9}	7×10^{-10}
Kirk		6×10^{-10}	7×10^{-10}	1×10^{-9}	6×10^{-10}
DLZ		1×10^{-8}	2×10^{-8}	2×10^{-8}	2×10^{-8}
LBA		$\mathbf{2 \times 10^{-12}}$	$\mathbf{1 \times 10^{-13}}$	$\mathbf{4 \times 10^{-13}}$	$\mathbf{1 \times 10^{-12}}$
QBA		6×10^{-10}	7×10^{-10}	1×10^{-9}	6×10^{-10}
Bj	5	2×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-5}	4×10^{-5}
C-D		1×10^{-6}	6×10^{-6}	1×10^{-5}	2×10^{-5}
Kirk		2×10^{-3}	2×10^{-3}	3×10^{-3}	4×10^{-3}
DLZ		4×10^{-5}	7×10^{-5}	8×10^{-5}	1×10^{-4}
LBA		$\mathbf{6 \times 10^{-7}}$	$\mathbf{3 \times 10^{-6}}$	$\mathbf{5 \times 10^{-6}}$	$\mathbf{1 \times 10^{-5}}$
QBA		1×10^{-6}	6×10^{-6}	1×10^{-5}	2×10^{-5}
Bj	15	1×10^{-4}	1×10^{-4}	2×10^{-4}	4×10^{-4}
C-D		1×10^{-5}	6×10^{-5}	1×10^{-4}	3×10^{-4}
Kirk		1×10^{-2}	1×10^{-2}	1×10^{-2}	1×10^{-2}
DLZ		3×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-4}	4×10^{-4}
LBA		$\mathbf{6 \times 10^{-6}}$	$\mathbf{3 \times 10^{-5}}$	$\mathbf{5 \times 10^{-5}}$	$\mathbf{1 \times 10^{-4}}$
QBA		1×10^{-5}	6×10^{-5}	1×10^{-4}	3×10^{-4}
Bj	25	2×10^{-4}	4×10^{-4}	6×10^{-4}	9×10^{-4}
C-D		3×10^{-5}	1×10^{-4}	2×10^{-4}	2×10^{-4}
Kirk		4×10^{-2}	3×10^{-2}	2×10^{-2}	8×10^{-3}
DLZ		9×10^{-4}	5×10^{-4}	2×10^{-4}	2×10^{-3}
LBA		$\mathbf{1 \times 10^{-5}}$	$\mathbf{6 \times 10^{-5}}$	$\mathbf{1 \times 10^{-4}}$	$\mathbf{1 \times 10^{-4}}$
QBA		3×10^{-5}	1×10^{-4}	2×10^{-4}	2×10^{-4}

Таблица 1: Стоимость опциона на 2 актива. В этой таблице представлены абсолютные ошибки для стоимости опциона на 2 актива, полученные различными методами. Параметры взяты из работ [16, 17]: $r = 0.05$, $q_1 = 0.03$, $q_2 = 0.02$, $S_{01} = 110$, $S_{02} = 100$, $T = 1$, $\sigma_1 = 0.1$, $\sigma_2 = 0.15$. Жирным шрифтом выделен самый точный результат.

Метод	K	ρ			
		-0.5	0	0.3	0.8
Bj	-20	6×10^{-4}	1×10^{-3}	2×10^{-3}	1×10^{-3}
C-D		4×10^{-7}	2×10^{-6}	3×10^{-6}	$\mathbf{1\times10^{-6}}$
Kirk		6×10^{-4}	1×10^{-3}	2×10^{-3}	1×10^{-3}
DLZ		4×10^{-4}	5×10^{-4}	4×10^{-4}	1×10^{-4}
LBA		2×10^{-4}	4×10^{-4}	4×10^{-4}	7×10^{-5}
QBA		$\mathbf{3\times10^{-7}}$	$\mathbf{1\times10^{-6}}$	$\mathbf{2\times10^{-6}}$	$\mathbf{1\times10^{-6}}$
Bj	-10	6×10^{-3}	2×10^{-4}	2×10^{-4}	1×10^{-3}
C-D		1×10^{-7}	7×10^{-7}	1×10^{-6}	2×10^{-6}
Kirk		6×10^{-4}	2×10^{-4}	2×10^{-4}	1×10^{-3}
DLZ		9×10^{-5}	2×10^{-4}	2×10^{-4}	3×10^{-4}
LBA		2×10^{-4}	4×10^{-4}	4×10^{-4}	2×10^{-4}
QBA		$\mathbf{2\times10^{-8}}$	$\mathbf{2\times10^{-7}}$	$\mathbf{6\times10^{-7}}$	$\mathbf{1\times10^{-6}}$
Bj	0	2×10^{-10}	2×10^{-10}	3×10^{-10}	3×10^{-10}
C-D		5×10^{-9}	4×10^{-10}	2×10^{-8}	1×10^{-9}
Kirk		$\mathbf{4\times10^{-12}}$	2×10^{-11}	2×10^{-11}	$\mathbf{1\times10^{-11}}$
DLZ		4×10^{-10}	5×10^{-10}	6×10^{-10}	7×10^{-10}
LBA		1×10^{-11}	$\mathbf{9\times10^{-14}}$	$\mathbf{4\times10^{-12}}$	9×10^{-11}
QBA		1×10^{-11}	6×10^{-13}	2×10^{-11}	9×10^{-11}
Bj	5	7×10^{-4}	7×10^{-4}	7×10^{-4}	9×10^{-4}
C-D		$\mathbf{2\times10^{-8}}$	$\mathbf{1\times10^{-7}}$	$\mathbf{3\times10^{-7}}$	$\mathbf{1\times10^{-6}}$
Kirk		7×10^{-4}	7×10^{-4}	7×10^{-4}	9×10^{-4}
DLZ		4×10^{-6}	1×10^{-5}	2×10^{-5}	5×10^{-5}
LBA		1×10^{-4}	3×10^{-4}	5×10^{-4}	9×10^{-4}
QBA		2×10^{-7}	8×10^{-7}	2×10^{-6}	4×10^{-6}
Bj	15	2×10^{-3}	2×10^{-3}	2×10^{-3}	1×10^{-3}
C-D		$\mathbf{6\times10^{-8}}$	$\mathbf{5\times10^{-7}}$	$\mathbf{2\times10^{-6}}$	2×10^{-5}
Kirk		2×10^{-3}	2×10^{-3}	2×10^{-3}	1×10^{-3}
DLZ		9×10^{-6}	2×10^{-5}	3×10^{-5}	9×10^{-5}
LBA		5×10^{-4}	1×10^{-3}	2×10^{-3}	3×10^{-3}
QBA		4×10^{-7}	2×10^{-6}	3×10^{-6}	$\mathbf{2\times10^{-6}}$
Bj	25	1×10^{-3}	4×10^{-4}	2×10^{-4}	1×10^{-3}
C-D		8×10^{-7}	5×10^{-6}	1×10^{-5}	5×10^{-5}
Kirk		1×10^{-3}	4×10^{-4}	2×10^{-4}	1×10^{-3}
DLZ		3×10^{-5}	7×10^{-5}	1×10^{-4}	3×10^{-4}
LBA		7×10^{-4}	2×10^{-3}	2×10^{-3}	2×10^{-3}
QBA		$\mathbf{1\times10^{-7}}$	$\mathbf{3\times10^{-6}}$	$\mathbf{9\times10^{-6}}$	$\mathbf{4\times10^{-5}}$

Таблица 2: Интеграл I_1 из формулы (56) для опциона на 2 актива. Представлены абсолютные ошибки для I_1, рассчитанного различными методами. Параметры берутся такие же как в Таблице 1.

4.2 Случай трех активов

Рассмотрим задачу (54) в случае $N = 3$:

$$P = e^{-rT}\left(\sum_{i=1}^{3} w_i F_i I_i - K I_4\right), \tag{112}$$

где I_i дается формулой (55). Интегралы (55) можно свести к двукратным интегралам со спецфункцией:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi\Sigma_{11}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\det\Sigma}} e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\frac{1}{2}(\Sigma_{22}^{-1}y^2+\Sigma_{33}^{-1}z^2+2\Sigma_{23}^{-1}yz-\frac{1}{\Sigma_{11}^{-1}}(\Sigma_{12}^{-1}y+\Sigma_{13}^{-1}z-1)^2)}\times$$

$$\times N\left(\omega(y,z) + 1/\Sigma_{11}^{-\frac{1}{2}}\right), \tag{113}$$

$$I_2 = \frac{-1}{2\pi\Sigma_{11}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\det\Sigma}} e^{-\frac{1}{2}\sigma_2^2 T}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{y-\frac{1}{2}(\Sigma_{22}^{-1}y^2+\Sigma_{33}^{-1}z^2+2\Sigma_{23}^{-1}yz-\frac{1}{\Sigma_{11}^{-1}}(\Sigma_{12}^{-1}y+\Sigma_{13}^{-1}z)^2)} N\left(\omega(y,z)\right), \tag{114}$$

$$I_3 = \frac{-1}{2\pi\Sigma_{11}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\det\Sigma}} e^{-\frac{1}{2}\sigma_3^2 T}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{z-\frac{1}{2}(\Sigma_{22}^{-1}y^2+\Sigma_{33}^{-1}z^2+2\Sigma_{23}^{-1}yz-\frac{1}{\Sigma_{11}^{-1}}(\Sigma_{12}^{-1}y+\Sigma_{13}^{-1}z)^2)} N\left(\omega(y,z)\right), \tag{115}$$

$$I_4 = \frac{1}{2\pi\Sigma_{11}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\det\Sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\frac{1}{2}(\Sigma_{22}^{-1}y^2+\Sigma_{33}^{-1}z^2+2\Sigma_{23}^{-1}yz-\frac{1}{\Sigma_{11}^{-1}}(\Sigma_{12}^{-1}y+\Sigma_{13}^{-1}z)^2)} N\left(\omega(y,z)\right), \tag{116}$$

где

$$\omega(y,z) = -(\Sigma_{11}^{-\frac{1}{2}})\left(\frac{1}{\Sigma_{11}^{-1}}(\Sigma_{12}^{-1}y + \Sigma_{13}^{-1}z) + \Omega(y,z)\right), \tag{117}$$

$$\Omega(y,z) = \ln\left(S_2(y) + S_3(z) + K\right) - \ln\left(F_1 e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T}\right), \tag{118}$$

$$S_i(u) = F_i e^{\frac{1}{2}\sigma_i^2 T + u}, \qquad i = 2, 3. \tag{119}$$

Ниже приведены результаты приближенных аналитических формул для опциона из 3 активов. В таблицах 3 и 4 приведено сравнение точности наших методов LBA и QBA с методом DLZ [7, 19,21] (формула (30)) для стоимости спред опциона[7]. В таблицах 5 и 6 представлена абсолютная ошибка вычисления значения греческого символа Δ для каждого из активов. Параметры взяты из работы [21]: $S_{01} = 150$, $S_{02} = 60$, $S_{03} = 50$, $\rho_{12} = 0.2$, $\rho_{13} = 0.8$, $\rho_{23} = 0.4$, $r = 0.05$, $T = 0.25$, при этом $K = [-20,\ -10,\ 0,\ 5,\ 15,\ 25]$ — цена исполнения, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = [0.3, 0.6]$.

[7] Формула (30) приведена в работах 2006 и 2008 годов, в которой рассматривается случай спред опциона из двух активов [7, 19]. В 2010 году авторы этих работ обобщили результаты на случай спред опциона на N активов и предложили изменить точку разложения [21].

Метод	K				
	30	35	40	45	50
LBA	$\mathbf{3 \times 10^{-6}}$	$\mathbf{5 \times 10^{-6}}$	2×10^{-5}	4×10^{-5}	6×10^{-5}
QBA	1×10^{-3}	2×10^{-3}	2×10^{-3}	2×10^{-3}	2×10^{-3}
DLZ	1×10^{-4}	1×10^{-4}	$\mathbf{8 \times 10^{-6}}$	$\mathbf{1 \times 10^{-5}}$	$\mathbf{1 \times 10^{-5}}$

Таблица 3: Стоимость спред опциона на 3 актива. В таблице представлены абсолютные ошибки. Жирным шрифтом выделен самый точный результат. Параметры взяты из работы [21]: $S_{01} = 150$, $S_{02} = 60$, $S_{03} = 50$, $\rho_{12} = 0.2$, $\rho_{13} = 0.8$, $\rho_{23} = 0.4$, $r = 0.05$, $T = 0.25$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.3$.

Метод	K				
	30	35	40	45	50
LBA	$\mathbf{7 \times 10^{-5}}$	$\mathbf{2 \times 10^{-5}}$	2×10^{-4}	4×10^{-4}	6×10^{-4}
QBA	1×10^{-2}	1×10^{-2}	2×10^{-2}	2×10^{-2}	2×10^{-2}
DLZ	2×10^{-4}	1×10^{-4}	$\mathbf{3 \times 10^{-5}}$	$\mathbf{3 \times 10^{-4}}$	$\mathbf{4 \times 10^{-4}}$

Таблица 4: То же, что и в предыдущей таблице, кроме значений: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.6$.

Метод	Δ_i	K				
		30	35	40	45	50
LBA	Δ_1	7×10^{-3}	8×10^{-3}	9×10^{-3}	9×10^{-3}	9×10^{-3}
QBA	Δ_1	$\mathbf{5 \times 10^{-5}}$	4×10^{-5}	1×10^{-5}	2×10^{-5}	5×10^{-5}
DLZ	Δ_1	$\mathbf{5 \times 10^{-5}}$	–	–	–	–
LBA	Δ_2	7×10^{-3}	8×10^{-3}	9×10^{-3}	9×10^{-3}	9×10^{-3}
QBA	Δ_2	$\mathbf{4 \times 10^{-5}}$	2×10^{-5}	7×10^{-6}	4×10^{-5}	6×10^{-5}
DLZ	Δ_2	6×10^{-5}	–	–	–	–
LBA	Δ_3	7×10^{-3}	8×10^{-3}	9×10^{-3}	9×10^{-3}	8×10^{-3}
QBA	Δ_3	$\mathbf{5 \times 10^{-5}}$	3×10^{-5}	3×10^{-5}	6×10^{-6}	5×10^{-5}
DLZ	Δ_3	$\mathbf{5 \times 10^{-5}}$	–	–	–	–
LBA	Δ_4	7×10^{-3}	8×10^{-3}	9×10^{-3}	9×10^{-3}	8×10^{-3}
QBA	Δ_4	$\mathbf{4 \times 10^{-5}}$	3×10^{-5}	1×10^{-6}	3×10^{-5}	6×10^{-5}
DLZ	Δ_4	$\mathbf{4 \times 10^{-5}}$	–	–	–	–

Таблица 5: Грек — *Delta* для случая спред опциона на 3 актива. В этой таблице представлены абсолютные ошибки для $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$. Жирным выделен самый точный результат. Параметры взяты из работы [21]: $S_{01} = 150$, $S_{02} = 60$, $S_{03} = 50$, $\rho_{12} = 0.2$, $\rho_{13} = 0.8$, $\rho_{23} = 0.4$, $r = 0.05$, $T = 0.25$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.3$. Прочерки соответствуют наборам параметров для которых результаты в работе [21] отсутствуют.

Метод	Δ_i	K				
		30	35	40	45	50
LBA QBA DLZ	Δ_1	2×10^{-2} $\mathbf{2\times10^{-4}}$ $\mathbf{2\times10^{-4}}$	2×10^{-2} 1×10^{-4} –	2×10^{-2} 7×10^{-5} –	2×10^{-2} 7×10^{-7} –	2×10^{-2} 9×10^{-5} –
LBA QBA DLZ	Δ_2	2×10^{-2} $\mathbf{8\times10^{-5}}$ 3×10^{-4}	2×10^{-2} 8×10^{-6} –	2×10^{-2} 7×10^{-5} –	2×10^{-2} 1×10^{-4} –	2×10^{-2} 2×10^{-4} –
LBA QBA DLZ	Δ_4	2×10^{-2} $\mathbf{2\times10^{-4}}$ 3×10^{-4}	2×10^{-2} 9×10^{-5} –	2×10^{-2} 2×10^{-5} –	2×10^{-2} 6×10^{-5} –	2×10^{-2} 1×10^{-4} –
LBA QBA DLZ	Δ_4	2×10^{-2} 1×10^{-4} $\mathbf{5\times10^{-5}}$	2×10^{-2} 5×10^{-5} –	2×10^{-2} 4×10^{-5} –	2×10^{-2} 1×10^{-4} –	2×10^{-2} 2×10^{-4} –

Таблица 6: То же, что и в предыдущей таблице, кроме значений $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.6$.

Заключение

Основными результатами работы являются аналитические приближения LBA и QBA для стоимости спред опциона на N активов (86), основанная на теории возмущений. Не менее важными являются точные аналитические выражения для греческих символов в интегральной форме (92)-(100) и приближения для них (106)-(107).

В частности, метод LBA реализует первый порядок теории возмущений, а метод QBA, фактически, можно считать третьим порядком теории возмущений. Из Таблицы 1, где представлены численные результаты расчета стоимости опциона на 2 актива, видно, что наш метод LBA является наиболее точным во всех случаях, которые там рассматриваются. В Таблицах 3 и 4 представлены численные результаты расчета стоимости опциона на 3 актива, по этим данным видно, что метод LBA также показывает весьма высокую точность, но в некоторых случаях проигрывает методу DLZ [21]. Обратим внимание на то, что метод QBA проигрывает во всех случаях методу LBA для расчета стоимости опциона, что, на первый взгляд, является достаточно странным, поскольку QBA реализует третий порядок теории возмущений, а LBA — первый. В тоже время, если обратиться к Таблицам 2, 5 и 6, которые демонстрируют результаты вычисления отдельных интегралов I_j в формуле (54), то мы видим, что, преимущественно, метод QBA оказывается самым точным для вычисления I_j.

Естественно полагать, что тогда и значение стоимости опциона, который представляет из себя линейную комбинацию интегралов I_j должно получаться в методе QBA точнее по сравнению с другими методами. Однако, как мы указали выше, это, в большинстве случаев, оказывается не так. Наш численные анализ показал, что причина в следующем. После вычисления отдельных интегралов, их необходимо умножить на константы F_j, которые увеличивают порядок абсолютной ошибки каждого интеграла примерно в 100 раз, а затем сложить с весами $w_j = \pm 1$. При этом в методе LBA происходит взаимное сокращение абсолютных ошибок отдельных интегралов, что значительно (примерно на два порядка, а иногда и более) повышает точность вычисления итоговой стоимости опциона. В результате, точность вычисления стоимости опциона методом LBA обычно заметно превышает точность вычисления отдельных интегралов этим методом. Причину такого существенного взаимного сокращения ошибок в методе LBA мы в настоящее время объяснить не можем. В методе же QBA (который вычисляет отдельные интегралы точнее, чем LBA) такого взаимного сокращения ошибок не происходит, и точность оценки опциона соответствует точности расчета отдельного интеграла, умноженной на ≈ 100.

Итоговый вывод из этого анализа наших численных результатов таков: для вычисления стоимости опциона лучше применять более простой метод LBA, а для расчета «греков», где существенную роль играют отдельные интегралы — метод QBA.

Благодарности

Выражаю благодарность моему научному руководителю — Валькову Алексею Юрьевичу за постановку новой и интересной для меня задачи из области приложения статистической физики к экономике и финансам. От начала работы до её завершения Алексей Юрьевич давал четкое руководство, ценные советы, консультацию и помощь в решении проблем, возникающих по ходу написания ВКР.

Я благодарен коллективу кафедры статистической физики СПбГУ за лояльность, отзывчивость и поддержку.

Выражаю также благодарность рецензенту Владимиру Леонидовичу Кузьмину, который прочитал мою магистерскую работу и сделал полезные замечания, которые будут способствовать успешному продолжению моей работы в данном направлении.

Список литературы

[1] J. Volt, *The Statistical Mechanics of Financial Markets (Theoretical and Mathematical Physics)*. Springer, 3rd ed., 2005.

[2] T. Lux, “Applications of statistical physics in finance and economics,” Kiel Working Papers 1425, Kiel Institute for the World Economy (IfW), 2008.

[3] L. Bachelier, “Theorie de la speculation,” *Annales Scientifiques de l‘Ecole Normale Superieure*, vol. 17, no. 3, pp. 21–86, 1900.

[4] F. Black and M. S. Scholes, “The pricing of options and corporate liabilities,” *Journal of Political Economy*, vol. 81, no. 3, pp. 637–54, 1973.

[5] F. Black, “The pricing of commodity contracts,” *Journal of Financial Economics*, vol. 3, no. 1-2, pp. 167–179, 1976.

[6] J. Hull, *Options, futures, and other derivatives*. New York: Pearson, 11. ed. ed., 2021.

[7] M. Li, S.-J. Deng, and J. Zhou, “Closed-form approximations for spread option prices and greeks,” *The Journal of Derivatives*, vol. 15, no. 3, pp. 58–80, 2008.

[8] S.-J. Deng, B. Johnson, and A. Sogomonian, “Exotic electricity options and the valuation of electricity generation and transmission assets,” *Decision Support Systems*, vol. 30, no. 3, pp. 383–392, 2001.

[9] C. Spatt, B. Routledge, and D. Seppi, “The spark spread: An equilibrium model of the cross-commodity price relationships in electricity,” GSIA Working Papers 1999-15, Carnegie Mellon University, Tepper School of Business, 1998.

[10] W. Margrabe, “The value of an option to exchange one asset for another,” *Journal of Finance*, vol. 33, no. 1, pp. 177–186, 1978.

[11] D. Wilcox, “Energy futures and options: Spread options in energy markets,” research paper, Goldman Sachs & Co, New York, March 1990.

[12] D. C. Shimko, “Options on futures spreads: hedging, speculation, and valuation,” *The Journal of Futures Markets*, vol. 14, no. 2, pp. 183–213, 1994.

[13] N. D. Pearson, “An efficient approach for pricing spread options,” *Journal of Derivatives*, vol. 3, no. 1, pp. 76–91, 1995.

[14] E. Kirk, *Managing Energy Price Risk*, ch. Correlation in energy markets, pp. 71–78. London: Risk Publications, Enron Capital & Trade Resources, 1995.

[15] A. Mbanefo, *Mathematics of Derivatives Securities*, ch. Co-movement term structure and the valuation of energy spread options, pp. 89–102. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[16] R. Carmona and V. Durrleman, "Pricing and hedging spread options," *SIAM Review*, vol. 45, no. 4, pp. 627–685, 2003.

[17] P. Bjerksund and G. Stensland, "Closed form spread option valuation," Discussion Papers 2006/20, Department of Finance and Management Science, Norwegian School of Economics, 2006.

[18] P. Bjerksund and G. Stensland, "Closed form spread option valuation," *Quantitative Finance*, vol. 14, no. 10, pp. 1785–1794, 2014.

[19] M. Li, S.-J. Deng, and J. Zhou, "Closed-form approximations for spread option prices and greeks." SSRN, November 2006.

[20] R. Carmona and V. Durrleman, "Generalizing the Black-Scholes formula to multivariate contingent claims," *Journal of Computational Finance*, vol. 9, no. 2, pp. 43–67, 2006.

[21] M. Li, J. Zhou, and S.-J. Deng, "Multi-asset spread option pricing and hedging," *Quantitative Finance*, vol. 10, no. 3, pp. 305–324, 2010.

[22] K. Bae, "Valuation and applications of compound basket options," *Journal of Futures Markets*, vol. 39, no. 6, pp. 704–720, 2019.

[23] R. Caldana, G. Fusai, A. Gnoatto, and M. Grasselli, "General closed-form basket option pricing bounds," *Quantitative Finance*, vol. 16, no. 4, pp. 535–554, 2016.

[24] T. Pellegrino, "A general closed form approximation pricing formula for basket and multi-asset spread options," *Journal of Mathematical Finance*, vol. 6, no. 5, pp. 944–974, 2019.

[25] J. Arismendi and A. De Genaro, "A monte carlo multi-asset option pricing approximation for general stochastic processes," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 88, pp. 75–99, 2016.

[26] J. Van Belle, S. Vanduffel, and J. Yao, "Closed-form approximations for spread options in lévy markets," *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, vol. 35, no. 3, pp. 732–746, 2018.

[27] P. Olivares, *Pricing Basket Options by Polynomial Approximations. Polynomials - Theory and Application.*, pp. 444–510. Mdpi AG, 2019.