ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(СПбГУ)
Кафедра статистической физики

Евдокимов Даниил Александрович

Выпускная квалификационная работа:

Использование d-1 разложения при вычислении динамического критического индекса А-модели

Уровень образования: бакалавриат:
Направление: 03.03.02 «Физика»
Основная образовательная программа: СВ.5011.2017 «Физика»

Научный руководитель:
профессор,
кафедра Статистической физики, д.ф.-м.н., проф.
Аджемян Л.Ц.

Рецензент:
профессор,
кафедра Физики высоких энергий и элементарных частиц,
д.ф.-м.н.
Антонов Н.В.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

Предметом исследования данной дипломной работы является учет $d-1$ разложения при расчете динамического критического индекса z для A модели.

1 Введение

Фазовые переходы второго рода и критические явления характеризуются аномальным возрастанием радиуса корреляции r_c, который при приближении температуры T к критической T_c растет степенным образом $r_c \sim |\tau|^{-\nu}$, $\tau = (T-T_c)/T_c$, а также явлением критического замедления – аномальным возрастанием времени релаксации

$$t_c \sim r_c^z$$

Целью настоящей работы является нахождение индекса z в рамках так называемой модели A критической динамики, описывающей критическую точку ферромагнетика с несохраняющимся параметром порядка. Метод ренормгруппы позволяет вычислять критические показатели в виде разложений по параметру

$$\varepsilon = 4 - d, \tag{1}$$

где d – размерность пространства. Сложность расчета динамических индексов значительно превышает сложность расчета статических, таких как ν. Для индекса z в настоящее время известно 5 членов ε-разложения [1]:

$$\begin{gathered} z(\varepsilon,n) = 2 + \varepsilon^2 \frac{(2+n)}{2(8+n)^2}(6\log[4/3]-1) + \varepsilon^3 \frac{(2+n)}{8(8+n)^4}(162.4619 + 31.90236n - 1.273517n^2) + \\ +\varepsilon^4 \frac{(2+n)}{32(8+n)^6}(-23752.4 - 6929.0n - 770.28n^2 - 170.470n^3 - 4.24423n^4) + \varepsilon^5 \frac{(2+n)}{128(8+n)^8}\cdot \\ \cdot(1.986\cdot 10^7 + 1.038\cdot 10^7 n + 2.15\cdot 10^6 n^2 + 1.92\cdot 10^5 n^3 + 3.8\cdot 10^3 n^4 - 626 n^5 + 7.5005 n^6) \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь n – число компонент параметра порядка, мы будем рассматривать случай $n=1$, для которого

$$z = 2 + 0.0134461561\varepsilon^2 + 0.0110367\varepsilon^3 - 0.0055791\varepsilon^4 + 0.01773\varepsilon^5 + O(\varepsilon^6). \tag{3}$$

Ряды ε-разложения являются асимптотическими, поэтому, как правило, непосредственная подстановка в них реальных значений $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 2$ для трехмерных и двумерных систем не дает надежных результатов. При наличии достаточного числа членов разложения ряды можно пересуммировать. В некоторых случаях удается получить удовлетворительный результат, если воспользоваться дополнительной информацией о величине z. Так, после вычисления в работе [2] коэффициента при ε^2, в работе [3] был получен начальный отрезок ряда для разложения индекса z по параметру $\varepsilon' = d-1$:

$$z = 2 + \varepsilon' - \varepsilon'^2/2 + O(\varepsilon'^3). \tag{4}$$

Это позволило авторам работы [3], используя имеющуюся информацию, построить Паде-аппроксимацию вида

$$z - 2 = \frac{(d-1)(4-d)^2}{c_0 + c_1 d + c_2 d^2}, \tag{5}$$

определив коэффициенты c_i из условия совпадения с известными коэффициентами разложений (2), (4). Это значительно улучшило согласие с имеющимися численными расчетами индекса z. Аналитический расчет коэффициента при ε^3 в разложении (2) проведен в работе [4]. Коэффициент при ε^4 был численно рассчитан в работе [5] и затем, с большей точностью, в работе [6]. Знание четырех членов разложения позволило провести конформ-борелевское суммирование ряда [7]. В работе [8] это разложение, совместно с разложением (4) было использовано для построения Паде-аппроксимации вида (5), с дополнительным полиномом первого порядка в числителе и дополнительным слагаемым $\sim d^3$ в знаменателе. Все это позволило значительно увеличить точность расчета индекса z при $d=3$ и $d=2$.

В настоящей работе мы используем недавно полученное выражение для пятого члена разложения в (3) для дальнейшего уточнения результатов. Будет применена модифицированная техника конформ-борелевского пересуммирования с учетом асимптотики сильной связи. Будут найдены Паде-аппроксимации – как непосредственно для ряда (2), так и с учетом разложения (4).

2 Аппроксимация Паде

Наиболее простым и широко применяемым способом получения оценок для величин, представленных в виде начального отрезка их асимптотического ряда, является аппроксимация Паде. В отличие от метода борелевского пересуммирования, который будет рассмотрен далее в Главе 4, он позволяет получить физичные ответы даже в случае малого числа известных коэффициентов разложения, а также не требует знания их асимптотических свойств. В данной главе аппроксимация Паде будет применена для получения значения индекса z по пяти членам его ε-разложения (3).

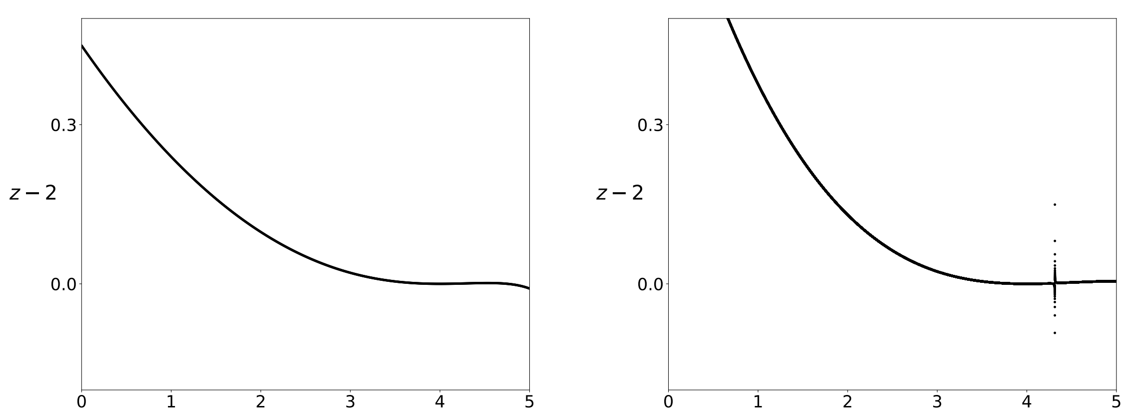
Пусть известны первые N коэффициентов разложения f_n в ряд функии $f(x)$. Аппроксимацией Паде $[L/M]$ такой функциии будет называться отношение двух полиномов, суммарная степень $L+M$ которых равняется N. Их коэффициенты ищутся из условия равенства разложений аппроксимации и исходной функции вплоть до порядка $O(x^{N+1})$:

$$f(x) = \frac{P^{(L)}(x)}{Q^{(M)}(x)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{L} p_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{M} q_n x^n} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n x^n + O(x^N)\,. \tag{6}$$

Здесь полагаем $q_0 = 1$. Перебирая различные комбинации степеней полиномов L и M, можно получить различные аппроксимации, которые при подстановке в них интересующего значения ε и будут давать пересуммированное значение индекса z. Так как первые два члена разложения $z-2$ (3) равны нулю, то аппроксимацию Паде можно записать в виде:

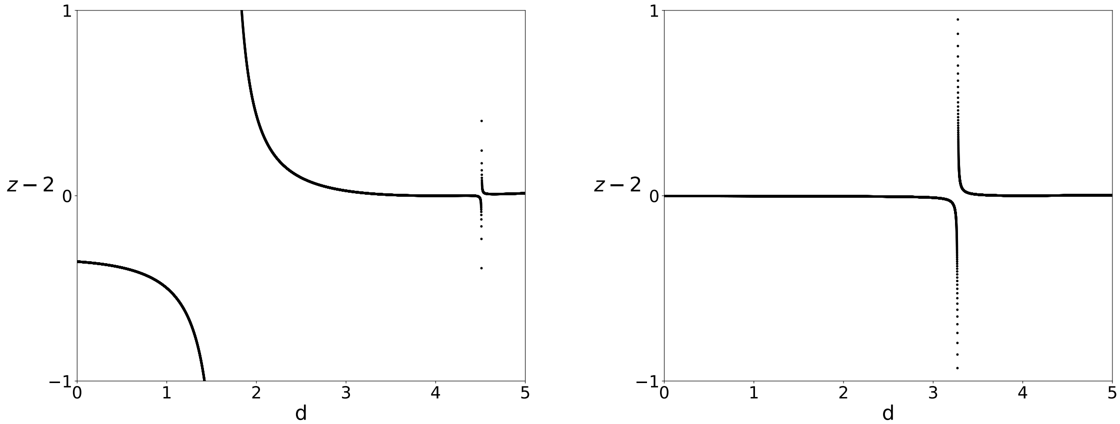
$$z - 2 \approx (4-d)^2 \frac{P^{(L)}(d)}{Q^{(M)}(d)} \quad , \quad L + M = 3\,. \tag{7}$$

Полученные аппроксиманты будут иметь полюса в нулях знаменателя. Наличие полюсов существенно влияет на качество аппроксимаций, поэтому следует обговорить критерий их отбора. Интересующие нас размерности лежат в интервале $d \in [1;4]$. Наличие полюса в этой области приводит к сильному искажению результатов, поэтому подобные аппроксимации не принимаются к рассмотрению. Наличие особенности в непосредственной близости к интервалу $[1;4]$ также может вносить существенную погрешность, однако в этом случае нельзя выделить однозначное правило отбора. Как показывает практика, зачастую полюса правее 4 не оказывают значительного влияния на качество аппроксимации в силу того, что нули числителя и знаменателя находятся очень близко, и полюс почти "сокращается". На Рис.1 приведены графики аппроксимаций [1/1] для учета 4 членов и [2/1] для 5 членов. Остальные варианты были откинуты из-за наличия "опасных"полюсов. Примеры подобных аппроксимаций приведены на Рис.2.



(a) Паде [1/1] по четырем членам (b) Паде [2/1] по пяти членам

Рис. 1: Графики учтенных Паде аппроксимаций без "опасных"полюсов



(a) Паде [1/2] по пяти членам

(b) Паде [0/3] по пяти членам

Рис. 2: Примеры неучетнных аппроксимаций

Так как известны только 5 членов ε-разложения индекса z, причем первый коэффициент равен нулю, то для 4 и 5 порядка остается пять возможных аппроксимаций: $[0/2], [1/1], [0/3], [1/2]$, и $[2/1]$. Из них только две оказываются пригодными для использования (Таблица 1), что не позволяет набрать выборку и оценить погрешность результатов. Для увеличения точности можно учитывать дополнительную информацию об индексе z, такую как его ε'-разложение в Главе 3 или асимптотику коэффициентов ε-разложения методом борелевского пересуммирования в Главе 4.

	[1/1]	[2/1]
$d = 2$	2.0980	2.1300
$d = 3$	2.0208	2.0231

Таблица 1: Значения индекса z, полученные Паде аппроксимацией ε-разложения

3 Аппроксимация Паде с учетом ε'=d-1 разложения

Следуя идее, предложенной в работе [3], вместе с ε-разложением (3) используем два известных коэффициента ε'-разложения (4) в качестве дополнительной информации для улучшения оценки индекса z. Метод аппроксимаций Паде позволяет симметрично учесть оба разложения, добавив два новых условия на коэффициенты. Суммарная степень полиномов также увеличится на два, что позволит учесть большее количество аппроксимаций. Теперь индекс z можно представит как

$$z - 2 \approx (4-d)^2(d-1)\frac{P^{(L)}(d)}{Q^{(M)}(d)} \quad , \quad L + M = 5\,. \tag{8}$$

Правило отбора аппроксимаций по наличию полюсов остается аналогичным описанному в предыдущей главе. На Рис. 3 приведен график учтенной аппроксимации [2/3], на котором наглядно видна зависимость индекса z от размерности пространства. Он имеет два нуля в точках $d = 1$ и $d = 4$, между этими значениями имеется максимум.

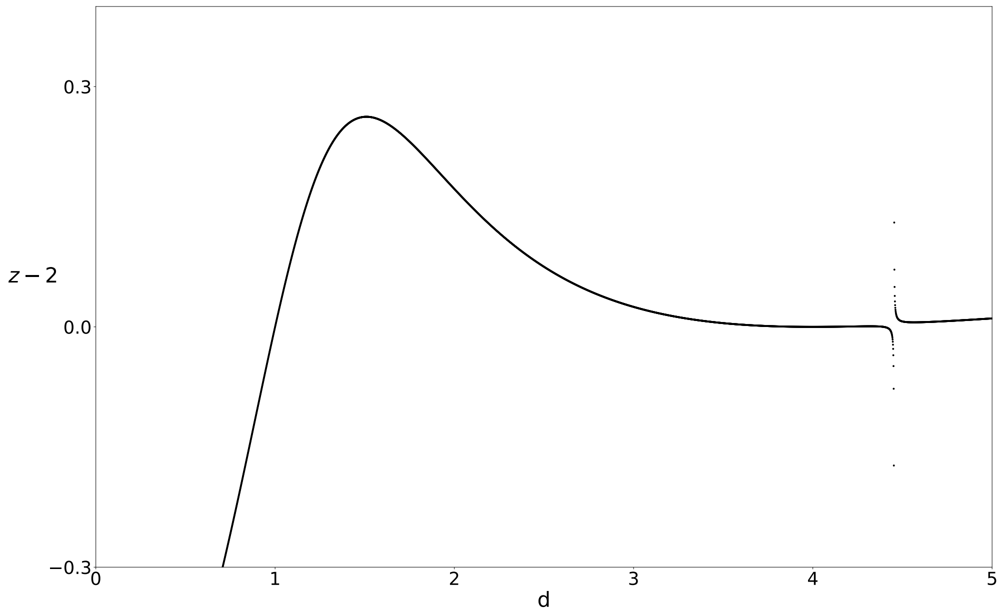


Рис. 3: Учтенная аппроксимация [2/3]

В Таблице 2 приведены значения индекса z, полученные как результат аппроксимаций Паде для разного количества учтенных членов ε-разложения вместе с двумя учтенными членами ε'-разложения. Несмотря на увеличившееся число возможных аппроксимаций, многие из них были откинуты из-за наличия "опасных"полюсов. Так, только в одном порядке было учтено больше одной аппркосимации - при учете всех возможных членов разложения. Как и при пересуммировании только по ε-разложению в предыдущей главе, это не позволяет сформировать выборку и оценить погрешность полученных значений. Однако можно сказать, что учет ε'-разложения заметно приближает оценку индекса z к значениям, полученным в других работах, что свидетельствует о его эффективности. Подробное сравнение результатов будет приведено в Главе 6.

Число учтенных членов ε-разложения	2	3	4	5	
	[0/2]	[1/2]	[1/3]	[1/4]	[2/3]
d=2	2.1260	2.2060	2.1520	2.1820	2.1720
d=3	2.0194	2.0286	2.0235	2.0252	2.0250

Таблица 2: Значения индекса z, полученные Паде аппроксимацией нескольких членов ε-разложения и двух членов ε'-разложения.

4 Конформ-борелевское пересуммирование

4.1 Общий алгоритм

Частные суммы асимптотических рядов сходятся к значению вычисляемой величины до тех пор, пока члены ряда убывают. Несмотря на то, что формально ε является малым параметром разложения, в данной работе будут рассматриваться значения $\varepsilon = \{1, 2, 3\}$, отвечающие интересующим нас размерностям $d = \{3, 2, 1\}$ соответственно. Но коэффициенты разложения рассматриваемых рядов растут факториально, поэтому убывание членов ряда заканчивается на члене с небольшим, а иногда и первым, номером. Это является причиной невозможности получения точных результатов путем прямой подстановки значения ε в известный отрезок ряда [9].

Широко распространенным методом повышения точности результатов является борелевское пересуммирование. К его преимуществам относится возможность учета асимптотических свойств ряда, если таковые известны. Ниже приводится алгоритм построения конформ-борелевского представления и его модификация путем учета граничного условия.

Рассмотрим функцию $A(\varepsilon)$, для которой известны первые N коэффициентов разложения:

$$A(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varepsilon^n \,, \tag{9}$$

Также считаем известными коэффициенты a и b асимптотики высоких порядков (АВП) и показатель степени асимптотики сильной связи ν:

$$A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} cn! n^{b_0} (-a)^n \tag{10}$$

$$A(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to\infty}{\sim} \varepsilon^{\nu} \,. \tag{11}$$

Перейдем к борелевским коэффициентам разложения $B^{(N)} = A^N / \Gamma(N + b + 1)$, которые уже не обладают факториальным ростом. Тогда борелевское представление исходного ряда можно записать как

$$\sum_n A_n \varepsilon^n = \sum_n \Gamma(n + b + 1) B_n \varepsilon^n = \int_0^{\infty} dt\, e^{-t} t^b \sum_n B_n (\varepsilon t)^n = \int_0^{\infty} dt\, e^{-t} t^b F(\varepsilon t) \,. \tag{12}$$

Функция $F(\varepsilon t)$ имеет конечный радиус сходимости, равный $1/a$. Это не позволяет провести интегрирование по положительной оси, что ставит задачу об аналитическом продолжении функции $F(\varepsilon t)$. Существует два способа решения этой проблемы: метод Паде-Борель-Леруа и метод конформ-Бореля. Первый основан на аппроксимации функции $F(\varepsilon t)$ полиномами Паде. Его характерной особенностью является использование параметра b не как коэффициента АВП, а как варьируемого подгоночного параметра, выбираемого из условия минимизации сверднеквадратичного отклонения для результатов, полученных с помощью различных аппроксимантов Паде. Данный метод был применен для пересуммирования индекса z, обсуждаемого в данной работе. Однако для этого случая оказалось невозможным выбрать оптимальное значение b, поэтому далее этот метод рассматриваться не будет. Метод конформ-Бореля основан на использовании отображения комплексной плоскости. Для этого введем конформную переменную $w(\varepsilon t)$ и выразим через нее переменную интегрирования t:

$$w(\varepsilon t) = \frac{\sqrt{1 + a\varepsilon t} - 1}{\sqrt{1 + a\varepsilon t} + 1} \tag{13}$$

$$\varepsilon t(\omega) = \frac{4\omega}{a(\omega - 1)^2} \tag{14}$$

Тогда выражение (12) можно переписать как

$$\int_0^\infty dt\, e^{-t}\, t^b\, (\frac{\varepsilon t}{w(\varepsilon t)})^\nu \sum_n B_n^{(\omega)} \omega^n\,. \tag{15}$$

Здесь $B_n^{(\omega)}$ - это новые коэффициенты, полученные путем переразложения функции $F(\varepsilon t)$ по переменной ω. Введенный множитель $(\varepsilon t/w(\varepsilon t))^\nu$ отвечает за учет асимптотики сильной связи (11), что способствует уточнению результатов. Примененное конформное отображение переводит положительную ось на отрезок $[0; 1)$, радиус сходимости теперь равен единице. Таким образом, контур интегрирования лежит внутри круга сходимости. Первые N коэффициентов разложения полученного выражения (15) по ε совпадают с известными коэффициентами исходной функции (9). Коэффициенты АВП представления (15) совпадают с исходными (10) при следующем выборе b:

$$b = b_0 + \frac{3}{2}\,. \tag{16}$$

Описанный метод конформ-Бореля позволяет путем численного интегрирования выражения (15) получить пересуммированное значение, которое унаследует асимптотические свойства исходного ряда.

4.2 Критерий сходимости

Исследуется ряд для критического индекса z, в которого известны первые 5 членов разложения (3). Параметры АВП для данной модели были получены в работе [10]:

$$a = \frac{1}{3}\,, \quad b_0 = \frac{7}{2}\,. \tag{17}$$

Для этого ряда можно провести процедуру конформ-борелевского пересуммирования. Учет параметра асимптотики сильной связи ν заметно улучшает точность пересуммированных результатов, однако для рассматриваемой динамической А модели его значение неизвестно. В работе [1] было предложено использовать ν в качестве подгоночного параметра. Критерием отбора является скорость сходимости пересуммированных результатов при последовательном учете известных членов разложения. На Рис.4 показана зависимость борелевского представления вида (15) в точке $\varepsilon = 1$ от числа учтенных членов разложения N при различных значениях параметра ν, которым соответствуют разные линии.

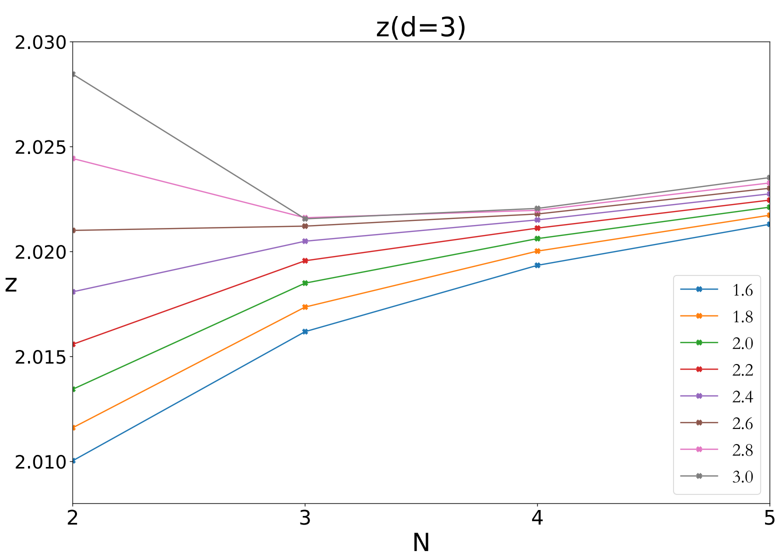


Рис. 4: Значение пересуммированного ряда при различных N и ν.

График показывает тенденцию сходимости результатов вычислений к определенному предельному значению по мере увеличения числа учтенных членов разложения. Оптимальным ν будем считать такое, которое обеспечивает лучшую сходимость к этому значению при меньшем числе учтенных членов. Это соответствует наискорейшему уменьшению угла наклона прямой при увеличении N. Для формализации критерия сходимости запишем уравнение прямой, проходящей через точки $z^{(4)}$ и $z^{(5)}$ четырехпетлевого и пятипетлевого приближения в виде

$$z(n) = a(\nu)(n-5) + b(\nu)\,, \tag{18}$$

где

$$a(\nu) = z^{(5)} - z^{(4)}\ \ ,\quad b(\nu) = z^{(5)}\,. \tag{19}$$

Максимальной плотности поля прямых (18) соответствуют наименьшие значения производных $\partial_\nu a$ и $\partial_\nu b$. Поэтому в качестве критерия сходимости можно выбрать требование минимума величины

$$Q = \sqrt{(\partial_\nu a)^2 + (\partial_\nu b)^2 + a^2}. \tag{20}$$

В критерий было введено третье слагаемое, отвечающее разности значений при учете последнего и предпоследнего члена. Строго говоря, оно не входит в уравнение прямой (18), и было выбрано из соображений более точного соответствия ν, определенного по критерию, с наискорейшей сходимостью по графику. Вопрос выбора универсального критерия остается открытым, и, как показывает практика работы с другими рядами, он требует корректировки для каждого конкретного случая.

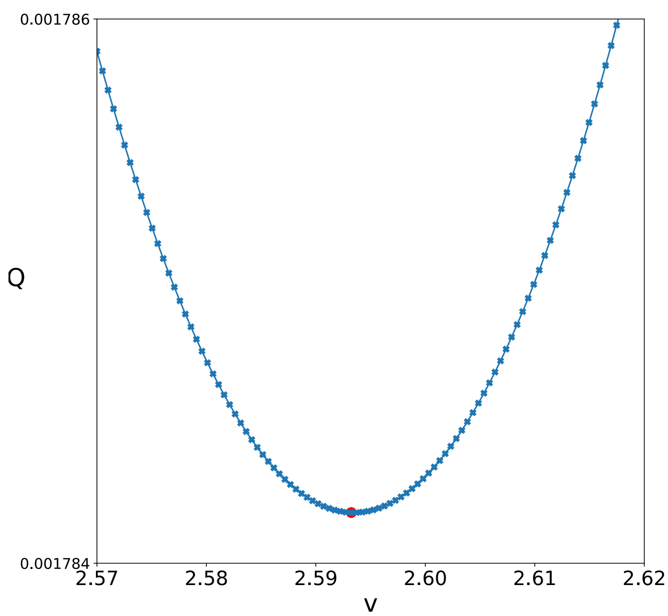


Рис. 5: Критерий сходимости по ν.

На Рис.5 приведен график зависимости критерия Q от значения ν. Он имеет минимум при $\nu = 2.593$, что соответствует наилучшей сходимости процедуры пересуммирования. Для построения подобных кривых были использованы значения $\varepsilon = \{1, 1.5, 2\}$, при этом минимум критерия в каждом случае будет соответствовать различным оптимальным ν. Далее, с использованием полученных значений ν был пересуммирован ряд для индекса z в точках $\varepsilon = \{1, 2\}$ с учетом четырех и пяти членов разложения, и проведено усреднение. Точность определения оптимального ν во всех случаях постоянна и равна ± 0.003. Пересуммированные значения оказываются устойчивыми относительно малых изменений ν, и соответствующая погрешность является незначительной. Полученные результаты приведены в таблице 3.

точка счета критерия	точка пересуммирования	число учтенных членов ε-разложения 4	5
$d = 2.0$	$d = 2$	2.1148 [2.847]	2.1227 [2.409]
	$d = 3$	2.0220 [2.847]	2.0228 [2.409]
$d = 2.5$	$d = 2$	2.1148 [2.846]	2.1248 [2.498]
	$d = 3$	2.0220 [2.846]	2.0229 [2.498]
$d = 3.0$	$d = 2$	2.1148 [2.487]	2.1270 [2.593]
	$d = 3$	2.0220 [2.487]	2.0230 [2.593]
Усредненные результаты	$d = 2$	**2.1148**	**2.1248**
	$d = 3$	**2.0220**	**2.0229**

Таблица 3: Результаты конформ-борелевского пересуммирования индекса z в четырех- и пятипетлевом приближении с учетом параметра сильной связи ν, найденного из условия минимума критерия сходимости (его значение указано в квадратных скобках).

4.3 Свободное граничное условие

В работе [11] при расчете статических индексов модели ϕ^4 было предложено использовать их известые значения в $d = 2$ для повышения точности процедуры пересуммирования. Ниже описан способ учета граничного значения.

Рассмотрим функцию $A(\varepsilon)$, для которой известны первые N коэффициентов разложения

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varepsilon^n \,, \tag{21}$$

и ее точное значение в некоторой точке ε_b. Тогда функцию можно представить как

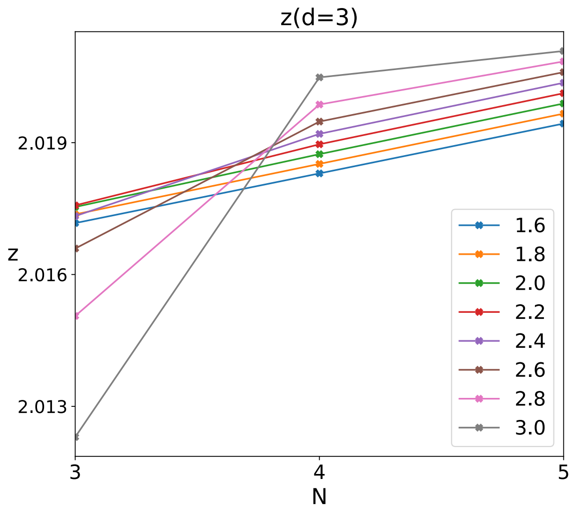
$$f(\varepsilon) = f_b + (\varepsilon_b - \varepsilon) A(\varepsilon) \,, \tag{22}$$

где

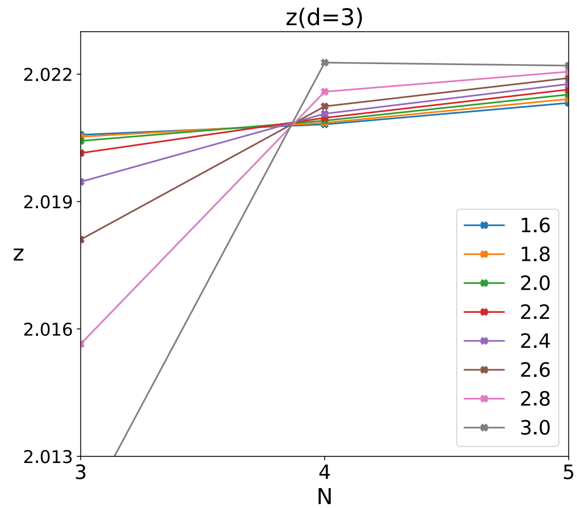
$$f_b = f(\varepsilon_b) \;, \qquad A(\varepsilon) = \frac{f(\varepsilon) - f_b}{\varepsilon_b - \varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varepsilon^n \,. \tag{23}$$

По известным коэффициентам f_n находятся коэффициенты нового ряда A_n. Так как параметры АВП a и b_0 для f_n и A_n совпадат, то возможно провести пересуммирование ряда $A(\varepsilon)$, в котором зашита информация о значении в граничной точке, а затем по формуле (22) получить пересуммированное значение исходной функции $f(\varepsilon)$.

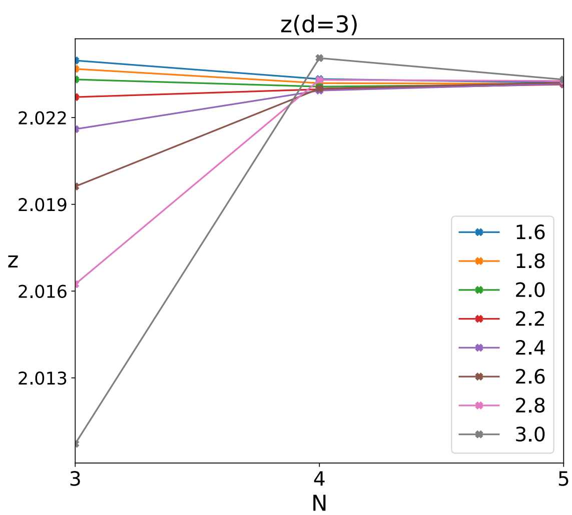
Однако для рассматриваемого в данной работе динамического индекса z точное значение в какой-либо размерности пространства неизвестно. Мы воспользуемся идеей, предложенной в работе [1], согласно которой значение в некоторой граничной точке считается варьируемой величиной, определяемой из условия скорости сходимости процедуры пересуммирования. На рис.(6) приведены результаты пересуммирования ряда (3) с учетом различных значений z_b в граничной точке 2.



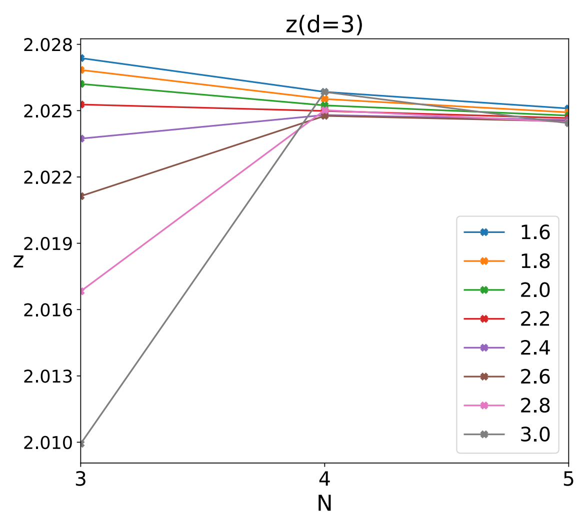
(a) $z_b(d=2) = 2.07$



(b) $z_b(d=2) = 2.10$



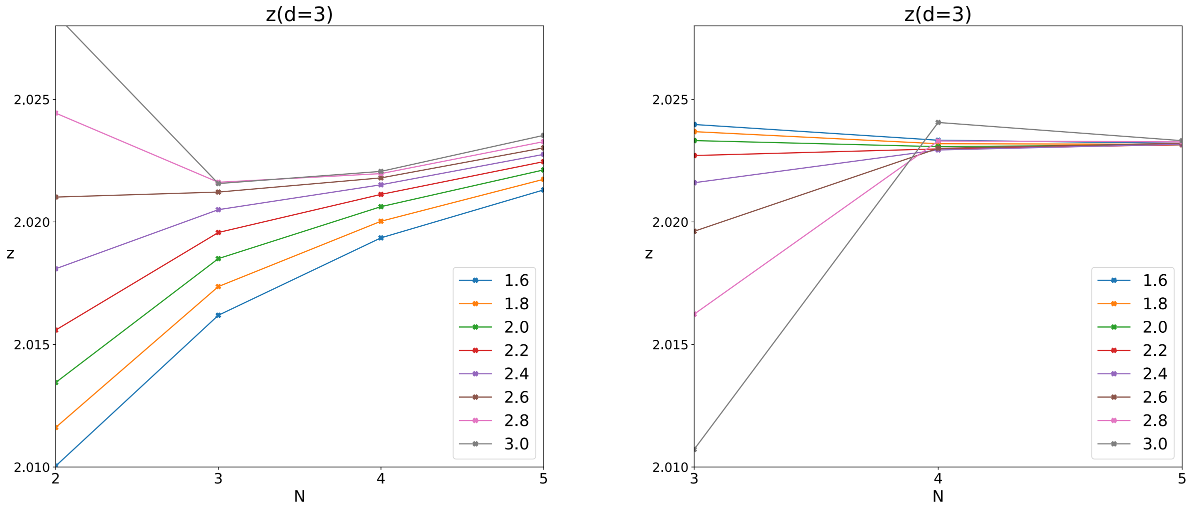
(c) $z_b(d=2) = 2.13$



(c) $z_b(d=2) = 2.16$

Рис. 6: Пересуммированный индекс z в d=3 при различных значениях z_b в граничной точке d=2.

Из приведенных графиков следует, что учет различных значений в граничной точке качественно сказывается на характере сходимости. Так, на графиках (a) и (b) наблюдается пересечение линий и их дальнейшее расхождение при учете пятипетлевого члена. Интуитивно ясно, что из представленных значений наиболее оптимальным является $z_b = 2.13$, обеспечивающее наилучшую сходимость. На рис.(7) для сравнения приведены графики пересуммированного индекса z с учетом граничного условия и без него. Можно заметить, что при выборе оптимального значения z_b его учет существенно улучшает скорость сходимости.



(a) Без граничного условия

(b) С граничным условием $z_b(d = 2) = 2.13$

Рис. 7: Сравнение результатов пересуммирования индекса z в d=3 с учетом граничного условия и без него.

Для поиска оптимального z_b, как и в случае с ν, можно использовать критерий сходимости (20). В этом случае критерий Q будет функцией двух переменных, а его график на рис. 8 представляет собой поверхность с минимумом, которому соответствуют значения ν и z_b, отвечающие наилучшей сходимости. Выбор граничной точки неприципиален в диапазоне не слишком больших ε. Как показала практика, использование значения больше 3 дает результаты, сильно отличающиеся от ожидаемых. Это является следствием того факта, что формально ε считается малым параметром, и использование больших его значений ведет к существенной погрешности.

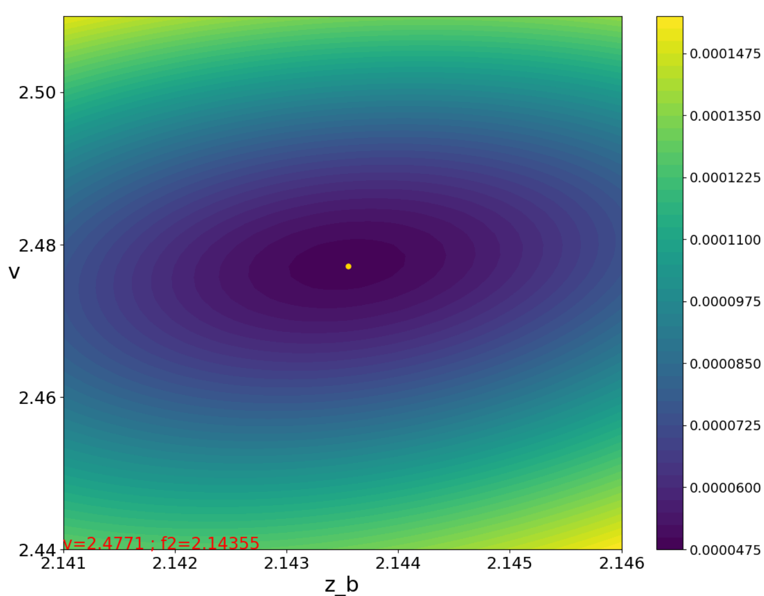


Рис. 8: Критерий сходимости для свободного граничного условия

Для различных граничных точек, кроме очевидного отличия в граничных значениях z_b, будет иметь место и незначительное различие в определяемых оптимальных ν. Поэтому в качестве граничных точек были выбраны несколько значений $d = \{2.0, 2.5, 3.0\}$, соответствующие им полученные результаты приведены в Таблице 4. Значения ν и z_b, указанные в таблице в квадратных скобках, для каждого случая определялись с одинаковой точностью ± 0.003 и ± 0.0003 соответственно. Отвечающая им погрешность пересуммирования, в отличии от случая одномерного критерия, уже является существенной (указана в таблице в круглых скобках). Стоит отметить, что она связана исключительно с точностью определения минимума критерия, и при достаточно точном обсчете может быть сведена до сколь угодно малой величины. Для получения финальных оценок было проведено усреднение как по граничным точкам, так и по точкам счета, выбранным для построения критерия.

граничная точка	точка счета критерия	точка пересуммирования	число учтенных членов ε-разложения: 4	число учтенных членов ε-разложения: 5
$d = 2.0$	$d = 3$	$d = 3$	2.02117(2) [1.621, 2.1042]	2.02380(1) [2.476, 2.1436]
$d = 2.5$	$d = 2$	$d = 2$	2.1078(7) [1.626, 2.0549]	2.1446(9) [2.545, 2.0668]
		$d = 3$	2.02147(6) [1.626, 2.0549]	2.02384(4) [2.545, 2.0668]
	$d = 3$	$d = 2$	2.1064(7) [1.649, 2.0544]	2.1453(9) [2.539, 2.0668]
		$d = 3$	2.02136(6) [1.649, 2.0544]	2.0239(4) [2.539, 2.0671]
$d = 3.0$	$d = 2$	$d = 2$	2.1105(3) [1.676, 2.0217]	2.1485(7) [2.660, 2.0240]
Усредненные результаты		$d = 2$	**2.1073(1)**	**2.1457(1)**
		$d = 3$	**2.0214(2)**	**2.0239(3)**

Таблица 4: Результаты конформ-борелевского пересуммирования индекса z в четырех- и пятипетлевом приближении с учетом параметра сильной связи ν и значения в граничной точке z_b, найденных из условия минимума критерия сходимости (соответствующие значения указаны в квадратных скобках).

Сравнение результатов, полученных с учетом свободного граничного условия и без него, показывает, что данная модификация конформ-борелевского пересуммирования дает лучшее согласие с оценками индекса z, полученными в недавних работах [8], [12], [13]. Это говорит как о ее эффективности при расчете этого индекса, так и о возможной обоснованности применения в других моделях, где неизвестны точные значения интересующих величин. Однако нельзя гарантировать, что подобный учет граничных условий существенно улучшит результаты во всех подобных случаях. Так, сами авторы этой идеи отмечают [11], что при расчете статических индексов это не привело к значительным изменениям. Поэтому целесообразность применения данного метода следует анализировать отдельно в каждом случае исходя из получаемых результатов.

5 Пересуммирование с использованием статического индекса Фишера

В работе [2] динамический индекс z был представлен в виде

$$z = 2 + c\eta \,, \tag{24}$$

где c - константа связи, η - статический индекс Фишера. Используя четырехпетлевое приближения для z и полученное в работе [14] разложение для η

$$\eta = 0.0185185\varepsilon^2 + 0.01869\varepsilon^3 - 0.00832875\varepsilon^4 + 0.025656\varepsilon^5 - 0.081271\varepsilon^6 + O(\varepsilon^7)\,, \tag{25}$$

в работе [8] для константы c было получено выражение

$$c = 0.726092(1 - 0.188484\varepsilon + 0.22506\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)) . \tag{26}$$

Учитывая тот факт, что коэффициенты ряда малы, можно надеяться, что сложности в анализе ряда перейдут в η, а асимптотические свойства ряда для c будут менее выражены. Далее авторы с помощью Паде аппроксимации [1/1] и точных известных значений $\eta(\varepsilon = 1) = 0.03630$ и $\eta(\varepsilon = 2) = 1/4$ получили следующие оценки для динамического индекса: $z = 0.0241$ и 2.1613 соответственно.

Используя знание пятипетлевого разложения для z (3), можно продолжить ряд для константы c:

$$c = 0.726093(1.000000000 - 0.18845\varepsilon + 0.22503\varepsilon^2 - 0.37874 * \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)) . \tag{27}$$

Хотя относительное возрастание последнего коэффициента в (27) по сравнению с предыдущим меньше, чем в исходном разложении (3), ряд (27) необходимо пересуммировать. Для этого были построены аппроксимации Паде, соответствующие им значения приведены в Таблице 5.

	[1/1]	[2/1]	[1/2]
$d = 2$	0.6453	0.6021	0.6075
$d = 3$	0.6506	0.6501	0.6511

Таблица 5: Значения константы c, полученные Паде аппроксимацией ε-разложения (27).

Усредняя полученные оценки для c по двум аппроксимациям и используя точное значения $\eta = 1/4$ для d=2 и $\eta = 0.0362978(20)$ для d=3 [15], для индекса z в пятипетлевом приближении получаем 2.1512 и 2.0236 соответственно.

6 Обсуждение результатов. Заключение

В данной работе были полученым оценки для динамического критического индекса z с учетом недавно посчитанного пятипетлевого члена его ε-разложения [1]. Оно является асимптотическим, поэтому для получения физически осмысленных результатов необходимо использовать различные методы пересуммирования. Нами были применены стандартный метод аппроксимаций Паде, его модификация с учетом ε'-разложения и метод конформ-борелевского пересуммирования. Также была получена оценка z через константу c, связывающую динамический и статический индексы. Финальные результаты приведены в Таблице 6.

Число учтенных членов ε-разложения	Паде без учета ε'-разложения	Паде с учетом ε'-разложения	Конформ-Борелевское пересуммирование	Через константу связи c
4	2.0980	2.1520	2.1073	2.1613
	2.0208	2.0235	2.0214	2.0241
5	2.1300	2.1770	2.1457	2.1512
	2.0231	2.0251	2.0239	2.0236

Таблица 6: Оценки индекса z, полученные различными методами пересуммирования. Первое число - значение инлекса в $d = 2$, второе - в $d = 3$.

В Таблице 7 приведены оценки индекса z, полученные в других работах различными методами. Среди прочих в ней представлены результаты нескольких работ, методом исследования которых является численное моделирование динамических систем методом Монте-Карло на решеточных моделях. Долгое время результаты, полученные методом ренормгруппы не стыковались с оценками Монте-Карло - последние заметно отличались в большую сторону.

Ссылка	Метод	$z_{d=2}$	$z_{d=3}$
[16]	RG	2.0842(39)	2.0237(55)
[17]	RG in fixed space	2.124	2.022
[18]	NPRG	2.16(1)	2.09(4)
[19]	Damage spreading method	2.172(6)	2.032(4)
[20]	Monte-Carlo	2.169(3)	
[21]	Monte-Carlo	2.1667(5)	
[22]	Heisenberg model		2.034(22)
[23]	Blume-Capel model		2.020(8)
[8]	Improved Blume-Capel model	-	2.0245(15)

Таблица 7: Оценки индекса z, полученные методом ренормгруппы и различными вариациями метода Монте-Карло. Первое число - значение инлекса в $d = 2$, второе - в $d = 3$.

Как видно из сранения таблиц, учет пятого члена позволил улучшить согласование оценок, полученных двумя принципиально разными способами. Отдельно стоит выделить улучшение результатов, полученных методом конформ-борелевского пересуммирования, который является требовательным к числу известных членов разложения. Вкупе с использованным способом определения оптимальных значений параметра сильной связи ν и значения в граничной точке по критерию сходимости, полученная этим методом оценка индекса z хорошо согласуется с последними результатами других работ и может считаться надежным результатом. Примененный метод свободного граничного условия заметно ускорил сходимость процедуры пересуммирования, что может говорить о его эффективности его применения для других моделей, где неизвестны точные значения интересующих величин. Учет $\varepsilon' = d-1$ разложения также показал высокую эффективность в уточнении результатов. Особенно сильно это проявляется при учете четырех членов ε-разложения, когда подобный способ учета дополнительный информации позволяет получить заметно более точное значение z по сравнению с другими методами. Это свидельствует в пользу использования подобных альтернативных разложений при процедуре пересуммирования. Так как расчет шестого коэффициента ε-разложения представляет собой сложную вычислительную задачу, полученные результаты могут говорить о целесообразности расчета следующих порядков в ε'-разложении.

Список литературы

[1] Hnatich M Adzhemyan L Ts, Ivanova EV and Kompaniets MV. Five-loop ϵ-expansion of critical exponent z of model a. *To be published.*

[2] BI Halperin, PC Hohenberg, and Shang-keng Ma. Calculation of dynamic critical properties using wilson's expansion methods. *Physical Review Letters*, 29(23):1548, 1972.

[3] R. Bausch, V. Dohm, H.K. Janssen, and R.K.P. Zia. Critical dynamics of an interface in $1 + \varepsilon$ dimensions. *Physical Review Letttrs*, 47(25):1837–1840, 1981.

[4] Nikolai Viktorovich Antonov and Aleksandr Nikolaevich Vasil'ev. Critical dynamics as a field theory. *Theoretical and Mathematical Physics*, 60(1):671–679, 1984.

[5] L Ts Adzhemyan, SV Novikov, and L Sladkoff. Calculation of dynamical exponent in model a of critical dynamics to order ε^4. *Vestnik SPbU*, 4(4):109–112, 2008.

[6] L Ts Adzhemyan, EV Ivanova, MV Kompaniets, and S Ye Vorobyeva. Diagram reduction in problem of critical dynamics of ferromagnets: 4-loop approximation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 51(15):155003, 2018.

[7] M Yu Nalimov, Vladimir Andreevich Sergeev, and L Sladkoff. Borel resummation of the ε-expansion of the dynamical exponent z in model a of the ϕ 4 (o (n)) theory. *Theoretical and Mathematical Physics*, 159(1):499–508, 2009.

[8] Martin Hasenbusch. Dynamical critical exponent z of the three-dimensional ising universality class: Monte carlo simulations of the improved blume-capel model. *Physical Review E*, 101:022126, 2020.

[9] М. Ю. Налимов and Т. Ю. Новожилова. Асимптотики высоких порядков квантово-полевых разложений и пересуммирование по Борелю асимптотических рядов.

[10] Juha Honkonen, MV Komarova, and M Yu Nalimov. Large-order asymptotes for dynamic models near equilibrium. *Nuclear Physics B*, 707(3):493–508, 2005.

[11] Riccardo Guida and Jean Zinn-Justin. Critical exponents of the n-vector model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31(40):8103, 1998.

[12] Charlie Duclut and Bertrand Delamotte. Frequency regulators for the nonperturbative renormalization group: A general study and the model a as a benchmark. *Phys. Rev. E*, 95:012107, Jan 2017.

[13] D. Mesterházy, J. H. Stockemer, and Y. Tanizaki. From quantum to classical dynamics: The relativistic $o(n)$ model in the framework of the real-time functional renormalization group. *Phys. Rev. D*, 92:076001, Oct 2015.

[14] Mikhail V Kompaniets and Erik Panzer. Minimally subtracted six-loop renormalization of o (n)-symmetric ϕ 4 theory and critical exponents. *Physical Review D*, 96(3):036016, 2017.

[15] D. Simmons-Duffin. The lightcone bootstrap and the spectrum of the 3d ising cft. *J. High Energy Phys.*, 03:086, 2017.

[16] AS Krinitsyn, Vladimir Vasil'evich Prudnikov, and Pavel Vladimirovich Prudnikov. Calculations of the dynamical critical exponent using the asymptotic series summation method. *Theoretical and mathematical physics*, 147(1):561–575, 2006.

[17] K Oerding. The dynamic critical exponent of dilute and pure ising systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 28(24):L639–L643, dec 1995.

[18] Léonie Canet and Hugues Chaté. A non-perturbative approach to critical dynamics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(9):1937–1949, feb 2007.

[19] Peter Grassberger. Damage spreading and critical exponents for "model a" ising dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 214(4):547–559, 1995.

[20] Jian-Sheng Wang and Chee Kwan Gan. Nonequilibrium relaxation of the two-dimensional ising model: Series-expansion and monte carlo studies. *Phys. Rev. E*, 57:6548–6554, Jun 1998.

[21] M. P. Nightingale and H. W. J. Blöte. Monte carlo computation of correlation times of independent relaxation modes at criticality. *Phys. Rev. B*, 62:1089–1101, Jul 2000.

[22] A Astillero and JJ Ruiz-Lorenzo. Off-equilibrium computation of the dynamic critical exponent of the three-dimensional heisenberg model. *arXiv preprint arXiv:1906.04518*, 2019.

[23] Mario Collura. Off-equilibrium relaxational dynamics with an improved ising hamiltonian. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2010(12):P12036, dec 2010.