Санкт-Петербургский государственный университет

Криворољ Вячеслав Александрович

Выпускная квалификационная работа

Динамика равновесных флуктуаций в фермионных системах

Уровень образования: бакалавриат
Направление 03.03.02 "Физика"
Образовательная программа СВ.5011.2016 "Физика"

Научный руководитель:
профессор,
кафедра статистической физики,
д.ф-м.н. Налимов М. Ю.

Рецензент:
профессор,
кафедра физики высоких энергий
и элементарных частиц,
д.ф-м.н. Компаниец М.В.

Санкт-Петербург
2020

Оглавление

1. Введение 3

2. Формализм временных функций Грина при конечной температуре 6

3. О снятии регуляризации 14

4. Заключение 18

Приложение А. Вычисление некоторых диаграмм 19

Приложение Б. Вычисление асимптотик первых членов тейлоровского разложения $I(\mathbf{p}, \omega)$ 22

Список литературы 27

1. Введение

В этой работе будем интересоваться динамикой равновесных флуктуаций, которая играет важную роль в различных задачах статистической физики, таких как теория сверхпроводимости, сверхтекучести, кинетики и так далее. Стандартно подход к исследованию динамики основан на феноменологической стохастической динамике [1], в которой диссипация вводится в систему посредством добавления в уравнения случайной силы, для которой обычно выбирается статистика типа "белого шума". Однако сложность подхода состоит в правильном выборе, описывающим реальную физическую систему, одной из множества различных моделей, к которым относятся модели A, B, $C\ldots$ и прочие. К примеру, ранее считалось, что критическая динамика перехода в сверхтекучее состояние описывается моделями F или E, однако в последних работах есть указание на то, что правильной является наиболее простая модель A [2].

Однако можно развить альтернативный и, в некотором смысле, более прямой метод анализа динамики флуктуаций, основанный на микроскопической квантовой динамике. Этот метод носит название "временные функции Грина при конечной температуре". В нем основным объектом изучения является T-произведение операторов квантового поля в гейзенберовском представлении, усредненных с некоторым статистическим оператором $\hat{\rho}$, характеризующим распределение системы в начальный момент времени. Если оператор $\hat{\rho}$ характеризует некое неравновесное состояние, то такая функция Грина называется неравновесной, или, коротко, NEGF[1]. Если же статистический оператор характеризует равновесное состояние, то говорят о временных функциях Грина при конечной температуре (GF@FT[2]). Для нужд кинетической теории аппарат таких функций Грина был разработан в [3], диаграммная техника была предложена в [4]. При этом оказывается, что теория возмущений представляет из себя теорию поля на некотором комплексном контуре, что приводит к формальному увеличению количества полей, а, следовательно, и количеству пропагаторов, необходимых для описания. Преимущества техники Келдыша по сравнению с более стандартной техникой температурных функций Грина обсуждается в [5].

[1] Non-equilibrium Green function.
[2] Green function at finite temperature.

В частности, их огромным плюсом является возможность исследования систем, сколь угодно далеких от равновесия. Вычисления в этом формализме являются довольно громоздкими, однако в нем можно получить довольно интересные результаты. В рамках этого подхода только в недавнее время, например, и был сделан вывод в пользу модели A [2] для перехода в сверхтекучее состояние, на операторном языке построена кинетическая теория бозонного газа со слабым локальным взаимодействием [6], и даже найдены некоторые приложения к теории стохастических дифференциальных уравнений [7]. Хотя, конечно, этим и не ограничиваются все результаты, полученные в рамках NEGF.

Интересным является вопрос о том, каким образом в квантовых системах возникает механизм диссипации. Было установлено [6], что в диаграммной технике Келдыша — Швингера имеются необычные для квантово-полевой теории возмущений сингулярности, которые можно устранить, вводя в осциллирующие пропагаторы затухание с некоторым параметром диссипации γ, связанный с конечным временем жизни элементарных возбуждений. В этой же работе для построения ИК-эффективной теории было предложено из размерных соображений выбирать γ пропорциональным квадрату волнового числа. Такой выбор, однако, кажется неслучайным в силу того, что именно в таком виде появляется затухание в гидродинамических моделях [8]. Даже после снятия регуляризации, вследствие частичного суммирования изначально сингулярных вкладов, параметр затухания эффективно должен оставаться конечным из-за перенормировки. Ранее эти рассуждения применялись к бозонным системам, однако рассмотрение фермионной системы не будет принципиально отличаться.

Целью данной работы ставится установление факта наличия диссипации и создание “базы”, необходимой для вычисления параметра затухания в ферми-системе как функции её параметров, таких как температуры и химического потенциала, для модельного локального взаимодействия “плотность—плотность”, традиционно применяемую для описания фазового перехода в сверхпроводящее (сверхтекучее) состояние [9]. В дальнейших исследованиях хочется распространить анализ на другие типы взаимодействия, в том числе хочется понять, как ведут себя указанные необычные сингулярности при разных выборах потенциала. Так-же предполагается посмотреть в этих рамках на принципиально другие модели, в частности планируется модифицировать вычисления для их приложений к электронам в графене, так как на этом поле возможна экспериментальная проверка [10] в силу активного развития этой области физики.

В разделе 1 на языке функционального интеграла построена теория возмущений для функции Грина, обсуждаются некоторые особенности и расходимости диаграммной техники, а также их регуляризация. В разделе 2 рассматривается вопрос снятия регуляризации и связанной с ней перенормировки.

2. Формализм временных функций Грина при конечной температуре

В работе используется система единиц $\hbar = k_B = 1$, где $\hbar$ — редуцированная постоянная Планка, k_B — постоянная Больцмана. Прямое и обратное преобразования Фурье определяются как:

$$f(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}, \qquad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}.$$

Преобразование Фурье по времени определяется с обратным знаком по отношению к координатному преобразованию в показателе экспоненты.

Будем рассматривать газ нерелялитивистских фермионов со слабым локальным взаимодействием типа “плотность—плотность”, считая систему однородной и изотропной. Эта модель не только удобна в смысле теоретического описания, но и является неплохим приближением для описания электронов проводимости в металле в окрестности критической точки. Действительно, ввиду механизма экранировки [11] можно пренебречь кулоновским взаимодействием между электронами и учитывать лишь электрон-фононное взаимодействие. Учитывая, что основной вклад в проводимость дают электроны в узком слое вблизи поверхности Ферми [12; 13], возможно заменить электрон—фононное взаимодействие на локальное взаимодействие “плотность—плотность” [9] с некоторым потенциалом $U(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. Предполагая несущественным микроскопическую структуру взаимодействия в окресности критической точки [1], выберем $U(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \lambda\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, где λ может быть связана с экспериментально измеряемой амплитудой s-рассеяния. Стандартно, переход к полевому описанию многочастичных систем происходит с помощью перехода в так называемое “представление вторичного квантования” [14; 15]. Свободный нерелятивистский фермион удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\partial_t \Psi(\mathbf{x},t) = \hat{H}_1 \Psi(\mathbf{x},t), \quad \hat{H}_1 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \mu, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}$ –трехмерная координата, μ — химпотенциал, $\hat{\mathbf{p}} = (-i\vec{\nabla})$ — оператор импульса, $\vec{\nabla}$ — трехмерный градиент, m — масса фермиона. Энергия одночастичного состояния есть

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu, \tag{2}$$

где трехмерный вектор $\mathbf{p}$ есть собственное число оператора импульса. Операторы поля традиционно вводятся как

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x},t) = \sum_{\varepsilon} \Psi_{\varepsilon}(\mathbf{x},t)\,\hat{a}_{\varepsilon}\ , \qquad \hat{\Psi}^{+}(\mathbf{x},t) = \sum_{\varepsilon} \Psi^{*}_{\varepsilon}(\mathbf{x},t)\,\hat{a}^{+}_{\varepsilon}\ , \tag{3}$$

где Ψ_{ε} – волновая функция состояния с энергией ε, $\hat{a}^{+}_{\varepsilon}$ и $\hat{a}_{\varepsilon}$ – операторы рождения и уничтожения состояния с энергией ε в фоковском пространстве. Значковая структура волновых функций, указывающая спиновое состояние, здесь и далее будет опущена. Гамильтониан полной системы должен выглядеть следующим образом:

$$\hat{H} = \int d\mathbf{x}\,\hat{\Psi}^{+}(\mathbf{x},t)\hat{H}_1\hat{\Psi}(\mathbf{x},t) + \frac{g}{4}\int d\mathbf{x}\ \hat{\Psi}^{+}(\mathbf{x},t)\hat{\Psi}(\mathbf{x},t)\hat{\Psi}^{+}(\mathbf{x},t)\hat{\Psi}(\mathbf{x},t), \tag{4}$$

где $g = 4\lambda$. Здесь и далее сумма по опущенным спиновым значкам подразумевается.

К наиболее важным объектам квантовой динамики относится полная n-точечная функция Грина [7]

$$G = \mathrm{Sp}\big(\mathrm{T}\big[\hat{\Psi}(\mathbf{x}_n,t_n)\ldots\hat{\Psi}(\mathbf{x}_2,t_2)\hat{\Psi}(\mathbf{x}_1,t_1)\big]\hat{\rho}\big), \tag{5}$$

где Sp — операция взятия следа, $\hat{\rho}$ — статистический оператор, описывающий начальное распределение, β — обратная температура, квантовые поля рассматриваются в представлении Гейзенберга, то есть развиваются во времени в соответствии с эволюционным соотношением

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x},t_k) = e^{i\hat{H}(t_k-t_0)}\hat{\Psi}(\mathbf{x})e^{-i\hat{H}(t_k-t_0)}, \qquad k = 1,2\ldots n, \tag{6}$$

где $\hat{\Psi}(\mathbf{x})$ – оператор поля, не зависящий от времени и совпадающий с оператором поля в представлении Шредингера в момент t_0. Далее будем опускать процедуру T-упорядочивания, считая, что времена расставлены корректно, увеличиваясь, $t_1 \le t_2 \le t_3 \le \ldots \le t_n$. Частным случаем (5), которым мы и будем в дальнейшем интересоваться, является временная функция Грина при конечной температуре, которая соответствует выбору равновесного по большому каноническому ансамблю статистического оператора $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho} = \frac{\exp{(-\beta\hat{H})}}{\mathrm{Sp}\exp{(-\beta\hat{H})}}. \tag{7}$$

В будущем такой выбор можно будет оправдать, считая, что начальные условия поставлены в бесконечно далеком прошлом.

Используя соображения, практически аналогичные доказательству формулы Фейнмана—Каца [16], можно показать, что временную функцию Грина при конечной температуре можно представить в виде функционального интеграла по грассмановым переменным:

$$G = \int \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\Psi^{+}\ \Psi(\mathbf{x}_n,t_n)\Psi(\mathbf{x}_{n-1},t_{n-1})\ldots\Psi(\mathbf{x}_1,t_1)e^{-S} \tag{8}$$

с действием

$$S = \int\limits_{\gamma} dt\left[\Psi^{+}(\mathbf{x},t)(\partial_t + i\hat{H}_1)\Psi(\mathbf{x},t) + \frac{ig}{4}\Psi^{+}(\mathbf{x},t)\Psi(\mathbf{x},t)\Psi^{+}(\mathbf{x},t)\Psi(\mathbf{x},t)\right], \tag{9}$$

где первое слагаемое в правой части формулы (9) будем называть действием свободной науки и обозначать S_0, второе слагаемое будем называть взаимодействием и обозначать S_{int}, пропущенное интегрирование по совпадающим координатным аргументам здесь и далее подразумевается. Контур γ в комплексной плоскости – так называемый контур Келдыша-Швингера [4; 7; 17]:

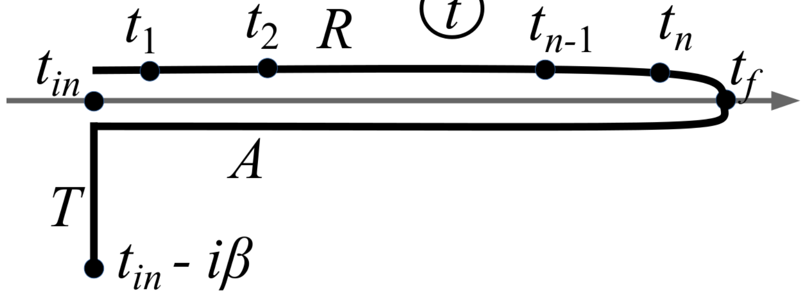


Рис. 1 Контур Келдыша-Швингера

Здесь t_{in} и t_f такие, что $t_{in} = t_0 < t_1 < ... < t_n < t_f$, причем легко убедиться, что вычисляемое выражение (8) не зависит от выбора t_{in} и t_f. Интегрирование по данному контуру разбивается на интегрирование по трем прямолинейным участкам, каждому из которых будем соотносить индексы R, A, T, как указано на рис. 1. Полям Ψ и Ψ^+, интегрирующимся на некотором прямолинейном промежутке, будем приписывать индекс данного промежутка. Являются необходимыми следующие граничные условия на концах контура:

$$\Psi_R(t_f) = \Psi_A(t_f), \qquad \Psi_A(t_{in}) = \Psi_T(t_{in}), \qquad \Psi(t_{in}) = -\Psi(t_{in} - i\beta), \tag{10}$$

где первые два условия (10) есть следствие непрерывности полей на контуре Келдыша-Швингера, а третье — стандартное антисшивание фермионных полей, аналогичное теории температурных функций Грина [18].

Таким образом, в нашей модели имеется шесть полей: Ψ_R, Ψ_A, Ψ_T и сопряженные к ним. Далее встает вопрос о построении теории возмущений. Первым шагом всегда является вычисление матрицы пропагаторов G, которая в нашем случае есть матрица 6 на 6:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

а блоки A и B есть, соответственно,

$$A = \begin{pmatrix} \langle\hat{\Psi}_R\hat{\Psi}^+_R\rangle_0 & \langle\hat{\Psi}_R\hat{\Psi}^+_A\rangle_0 & \langle\hat{\Psi}_R\hat{\Psi}^+_T\rangle_0 \\ \langle\hat{\Psi}_A\hat{\Psi}^+_R\rangle_0 & \langle\hat{\Psi}_A\hat{\Psi}^+_A\rangle_0 & \langle\hat{\Psi}_A\hat{\Psi}^+_T\rangle_0 \\ \langle\hat{\Psi}_T\hat{\Psi}^+_R\rangle_0 & \langle\hat{\Psi}_T\hat{\Psi}^+_A\rangle_0 & \langle\hat{\Psi}_T\hat{\Psi}^+_T\rangle_0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \langle\hat{\Psi}^+_R\hat{\Psi}_R\rangle_0 & \langle\hat{\Psi}^+_R\hat{\Psi}_A\rangle_0 & \langle\hat{\Psi}^+_R\hat{\Psi}_T\rangle_0 \\ \langle\hat{\Psi}^+_A\hat{\Psi}_R\rangle_0 & \langle\hat{\Psi}^+_A\hat{\Psi}_A\rangle_0 & \langle\hat{\Psi}^+_A\hat{\Psi}_T\rangle_0 \\ \langle\hat{\Psi}^+_T\hat{\Psi}_R\rangle_0 & \langle\hat{\Psi}^+_T\hat{\Psi}_A\rangle_0 & \langle\hat{\Psi}^+_T\hat{\Psi}_T\rangle_0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

и $\langle\ldots\rangle_0$ обозначает усреднение соответствующих операторов поля с весом $\exp(-S_0)$. Определение матрицы пропагаторов для фермиевских систем дано в [18]. Нам достаточно определить элементы блока A, так как элементы блока B однозначно восстанавливаются из элементов блока A в силу коммутационных соотношений операторов поля. Введем обозначения

$$\langle\hat{\Psi}_i(\mathbf{x},t)\hat{\Psi}^+_j(\mathbf{x}',t')\rangle_0 = G_{ij^+}(\mathbf{x},\,\mathbf{x}',\,t,\,t'), \quad \hat{K} = \big(\partial_t + i\hat{H}_1\big). \tag{13}$$

Здесь и далее договоримся, что значки $i,j \in \{R,A,T\}$. Так как система предполагается однородной и изотропной, то пропагаторы в (13) на самом деле являются функциями разности пространственных аргументов, что позволяет везде, где это потребуется, переходить в Фурье-представление по переменной $(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$.

Уравнения на пропагаторы из блока A формально можно записать как

$$\hat{K}A = \delta(t-t')\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\ \mathrm{diag}\{1,-1,1\}. \tag{14}$$

Подразумевается, что каждое из времен t и t' в аргументе пропагатора задано на соответствующем индексу своего поля участку контура. Решениями уравнений (14) с учетом граничных условий (10) в импульсно-временном представлении являются

$$G_{RR^+} = (\theta(t-t') + C_{RR^+})e^{-i\varepsilon(t-t')}, \tag{15}$$
$$G_{AA^+} = (-\theta(t-t') + C_{AA^+})e^{-i\varepsilon(t-t')}, \tag{16}$$
$$G_{TT^+} = (\theta(t-t') + C_{TT^+})e^{-i\varepsilon(t-t')}, \tag{17}$$
$$G_{ij^+} = C_{ij^+}e^{-i\varepsilon(t-t')}, \quad i \neq j, \tag{18}$$

где $\theta(t-t')$ — функция Хевисайда, а константы C_{ij^+} имеют вид

$$\mathrm{C}_{RR^+} = -n(\varepsilon), \quad \mathrm{C}_{RA^+} = n(-\varepsilon), \quad \mathrm{C}_{RT^+} = -n(\varepsilon),$$

$$\mathrm{C}_{AR^+} = n(-\varepsilon), \quad \mathrm{C}_{AA^+} = -n(-\varepsilon), \quad \mathrm{C}_{AT^+} = -n(\varepsilon),$$

$$\mathrm{C}_{TR^+} = n(-\varepsilon), \quad \mathrm{C}_{TA^+} = -n(-\varepsilon), \quad \mathrm{C}_{TT^+} = -n(\varepsilon).$$

Здесь использовано обозначение для среднего числа заселенности уровня с энергией ε в свободном ферми-газе: $n(\varepsilon) = (e^{\beta\varepsilon}+1)^{-1}$. Перейдем к пределу $t_{in} \to -\infty$, $t_f \to +\infty$, который будем называть *келдышевским предельным переходом.* После этого система становится однородной во времени, а начальное равновесное распределение оказывается заданным в бесконечно далеком прошлом.

Оказывается удобным сделать некоторую линейную замену полей в функциональном интеграле и перейти к новым переменным, которые будем называть *келдышевскими переменными:*

$$\xi = \frac{\Psi_R + \Psi_A}{\sqrt{2}}, \qquad \eta = \frac{\Psi_R - \Psi_A}{\sqrt{2}}, \qquad \xi^+ = \frac{\Psi_R^+ + \Psi_A^+}{\sqrt{2}}, \qquad \eta^+ = \frac{\Psi_R^+ - \Psi_A^+}{\sqrt{2}}. \tag{19}$$

Пропагаторы, связанные с этими полями, имеют вид

$$G_{\eta\xi^+} = -e^{-i\varepsilon(t-t')}\theta(t'-t), \tag{20}$$

$$G_{\xi\eta^+} = e^{-i\varepsilon(t-t')}\theta(t-t'), \tag{21}$$

$$G_{\xi\xi^+} = e^{-i\varepsilon(t-t')}\big(1-2n(p)\big), \tag{22}$$

$$G_{\eta\eta^+} = 0. \tag{23}$$

Взаимодействие в келдышевских переменных будет иметь структуру

$$S_{int} = \frac{g}{4}(\xi^+\xi\xi^+\eta + \xi^+\xi\eta^+\xi + \xi^+\eta\xi^+\xi + \eta^+\xi\xi^+\xi), \tag{24}$$

необходимые интегрирования подразумеваются. Заканчивая построение теории возмущений, введем следующие правила диаграммной техники:

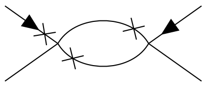
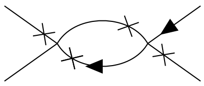
$$G_{\eta\xi^+} = \leftarrow\!\!\times, \qquad G_{\xi\eta^+} = \rightarrow\!\!\times, \qquad G_{\xi\xi^+} = -\!\!\!-\!\!\times. \tag{25}$$

Обозначения введены таким образом, что крест на линии указывает на сопряженное поле, а стрелка показывает направление увеличения времени, в этом легко убедиться из вида (20-22). Из этих правил следуют некоторые важные свойства, относящиеся к структуре диаграмм.

– Из (24) следует, что в каждую вершину в диаграмме входит либо одна, либо три стрелки, и у вершины всегда стоит два креста.
– Из (20-21), аналогично диаграммной технике Уальда [19], следует, что любые диаграммы, содержащие замкнутые циклы из стрелок, тождественно равны нулю.

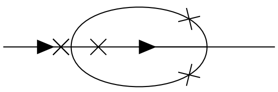
По принципу ослабления корреляций система через достаточно большой промежуток времени забывает свое начальное состояние, поэтому эффективно пропагаторы, связанные с полем с индексом T, выпадают из рассмотрения. В этом можно непосредственно убедиться из вида пропагаторов (17-18), учитывая, что время, заданное на части контура с индексом T — чисто комплексное, а также принимая во внимание тот факт, что поля ξ, η и их сопряженные не дают вклада в средние от “температурных” полей ψ_T и ψ_T^+ [2].

Прямым суммированием можно показать, что в диаграммной технике произойдет сокращение всех ампутированных диаграмм типа “рыбка”, например

 ,  ,

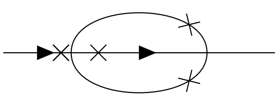
а также других диаграмм с аналогичной топологической структурой и всевозможной допустимой расстановкой линий (25). За счет этого свойства диаграммы такого вида не нужно будет учитывать при последующей ренормировке.

За счет осцилляций в (20-21), в данной диаграммной технике появляются необычные сингулярности. Рассмотрим для примера диаграмму в импульсном представлении:



$$= \frac{-g^2}{16(2\pi)^6} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q}\; e^{-i\varepsilon(\mathbf{k})(t-t')} \big(1 - 2n(\mathbf{k})\big) e^{-i\varepsilon(\mathbf{q})(t-t')} \times$$
$$\times \big(1 - 2n(\mathbf{q})\big) e^{i\varepsilon(\mathbf{p}-\mathbf{k}-\mathbf{q})(t-t')} \theta(t - t'). \tag{26}$$

Здесь и далее внешние хвосты диаграмм в импульсном представлении подразумеваются ампутированными. Используя теорему Сохоцкого, можно показать, что эта диаграмма на нулевых импульсах и частотах содержит в себе сингулярности:



$$\Big|_{\mathbf{p}=0,\ \omega=0} = \frac{-g^2}{16(2\pi)^6} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} \Bigg(\pi\delta\big(\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{q})\big) +$$
$$+ i\mathcal{P}\left(\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{q})}\right)\Bigg), \tag{27}$$

где $\mathcal{P}(\cdot)$ — обозначение для обобщенной функции “главное значение”. Этот интеграл расходится, и такого рода расходимости есть суть так называемые *пинчевые сингулярности* [8; 20]. Именно эти расходимости вызывают наибольший интерес, так как для остальных, то есть для ультрафиолетовых и инфракрасных расходимостей уже хорошо разработаны способы их анализа [1]. Проблема пинчевых сингулярностей обсуждалась в работе [6]. Там переход к более регулярной теории было предложено осуществить с помощью формального введения в осциллирующие экспоненты, входящие во все ненулевые пропагаторы (20-21), затухания:

$$e^{-i\varepsilon(t-t')} \to e^{-i\varepsilon(t-t')-\gamma|t-t'|}, \tag{28}$$

где $\gamma > 0$ – некоторый параметр затухания. Его можно рассматривать как некоторую функцию импульса $\gamma = \gamma(\mathbf{p})$. Так как обратное ядро квадратичной формы определяется свободным действием, то естественно, что после преобразования (28) изменится и сама квадратичная форма. Поэтому после регуляризации свободное действие будет выглядеть как

$$S_0 = \eta^+\big(2\gamma(1-2n(\mathbf{p}))\big)\eta + \xi^+(\partial_t + i\varepsilon - \gamma)\eta + \eta^+(\partial_t + i\varepsilon + \gamma)\xi. \tag{29}$$

3. О снятии регуляризации

После введение регуляризации (28) для перехода к исходной модели необходимо устремить параметр $\gamma \to 0$. Заметим, что из структуры действия (29) параметр γ будет входить в элементы обратной матрицы пропагаторов в уравнении Дайсона [18]:

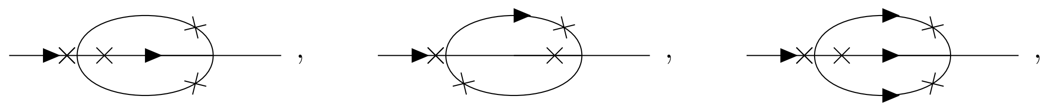
$$D^{-1} = K - \Sigma, \tag{30}$$

где D – матрица полных пропагаторов, K – матрица квадратичной формы, Σ – собственная энергия. Это означает, что если диаграммы, входящие в Σ, имеют нетривиальную вещественную асимптотику при $\gamma \to 0$, то это приведет к перенормировке параметра γ. Это можно увидеть, например, из вида следующего уравнения из системы (30):

$$D^{-1}_{\eta^+\xi} = \partial_t + i\varepsilon + \gamma - \Sigma_{\eta^+\xi}, \tag{31}$$

где $D^{-1}_{\eta^+\xi}$, $\Sigma_{\eta^+\xi}$ — матричные элементы обратной матрицы полных пропагаторов и свободной энергии соответственно. Из вида этого уравнения следует более явный физический смысл параметра γ. Действительно, вещественная добавка к члену $i\varepsilon$ будет означать сдвиг полюсов функции Грина, которые имеют смысл спектра возбуждений [21]. Мнимая добавка в энергию естественно отвечает за затухание волновых функций соответствующих одночастичных возбуждений, а значит о γ действительно можно говорить как о параметре затухания.

Прямым вычислением можно показать, что ненулевой вклад в перенормировку в двух петлях будут давать только следующие диаграммы:



все пропагаторы в которых регуляризованны по правилу (28). Считаем, что регуляризованные пропагаторы имеют графические обозначения, совпадающие с (25). Условимся считать, что в координатно-временном представлении левые вершины имеют аргументы $(\mathbf{x},\ t)$ а правые $(\mathbf{x}',\ t')$. Сумму данных диаграмм в импульсно-частотном представлении будем обозначать как $I(\mathbf{p},\ \omega)$, где ω –

двойственная переменная в смысле Фурье к $(t - t')$. Переход к ω возможен из-за того, что после келдышевского предельного перехода рассматриваемая система становится однородной по времени. Рассматривая крупномасштабное поведение, будем интересоваться пределом $(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \to \infty$, $(t - t') \to \infty$, или, что эквивалентно, пределом $\mathbf{p} \to 0$, $\omega \to 0$. Ограничимся учетом лишь первых поправок к $I(\mathbf{p} = 0, \omega = 0)$ по импульсу и частоте, то есть

$$I(\mathbf{p}, \omega) \approx I(\mathbf{p} = 0, \omega = 0) + \omega \cdot \left.\frac{\partial I(\mathbf{p} = 0, \omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega=0} + \frac{p_\alpha p_\beta}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 I(\mathbf{p}, \omega = 0)}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\right|_{\mathbf{p}=0}, \quad (32)$$

где p_α – α-ая компонента импульса $\mathbf{p}$, суммирование по повторяющимся значкам подразумевается. Учитывая отсутствие в системе выделенного направления, можно убедиться, что линейные по компонентам импульса члены разложения отсутствуют.

Так как импульсно-частотное представление оказывается не слишком удобным для вычислений, можно переписать (32), используя импульсно-временное представление. Действительно, используя определение преобразования Фурье по времени, нетрудно получить формулы

$$I(\mathbf{p} = 0, \omega = 0) = \int d(t - t')\ I(\mathbf{p} = 0, t - t'), \quad (33)$$

$$\left.\frac{\partial I(\mathbf{p} = 0, \omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega=0} = \int d(t - t')\ I(\mathbf{p} = 0, t - t') \cdot (t - t'), \quad (34)$$

$$\left.\frac{\partial^2 I(\mathbf{p}, \omega = 0)}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\right|_{\mathbf{p}=0} = \int d(t - t')\ \left.\frac{\partial^2 I(\mathbf{p}, t - t')}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\right|_{\mathbf{p}=0}. \quad (35)$$

Для удобства будем условно называть слагаемые (33-35) нулевым, линейным по частоте и квадратичным по импульсу вкладами соответственно.

Ранее упоминалось, что γ можно рассматривать как некоторую функцию импульса. Выберем, для определенности, $\gamma(\mathbf{p}) = \alpha \mathbf{p}^2/2m$, где $\alpha \to 0$ при снятии регуляризации. Данный выбор оправдывается тем, что похожим образом выглядит коэффициент затухания в гидродинамических моделях [8].

Напрямую вычисляя диаграммы (см. Приложение А), получим явные выражения для (33-35):

$$I(\mathbf{p}=0,\,\omega=0) = \frac{-g^2 m}{16(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}d\mathbf{q}\,\frac{f(\mathbf{k},\mathbf{q})}{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+m\mu)-\alpha(\mathbf{k}^2+\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+\mathbf{q}^2)}, \tag{36}$$

$$\left.\frac{\partial I(\mathbf{p}=0,\,\omega)}{\partial\omega}\right|_{\omega=0} = \frac{-g^2 m^2}{16(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}d\mathbf{q}\,\frac{f(\mathbf{k},\mathbf{q})}{\big[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+m\mu)-\alpha(\mathbf{k}^2+\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+\mathbf{q}^2)\big]^2}, \tag{37}$$

в квадратичном слагаемом нужно также взять производные по компонентам импульса:

$$\left.\frac{\partial^2 I(\mathbf{p},\,\omega=0)}{\partial p_\alpha\partial p_\beta}\right|_{\mathbf{p}=0} = \frac{-g^2 m}{16(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}d\mathbf{q}\Bigg(\frac{i\cdot\delta_{\alpha\beta}\cdot f(\mathbf{k},\mathbf{q})}{\big[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+m\mu)-\alpha(\mathbf{k}^2+\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+\mathbf{q}^2)\big]^2}+$$
$$+\frac{2}{3}\frac{\delta_{\alpha\beta}\cdot f(\mathbf{k},\mathbf{q})\cdot(\mathbf{k}+\mathbf{q})^2}{\big[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+m\mu)-\alpha(\mathbf{k}^2+\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+\mathbf{q}^2)\big]^3}+\frac{\partial_{p_\alpha}\partial_{p_\beta}f(\mathbf{P},\mathbf{k},\mathbf{q})\big|_{\mathbf{P}=0}}{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+m\mu)-\alpha(\mathbf{k}^2+\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+\mathbf{q}^2)}-$$
$$-\frac{2i\cdot(\mathbf{k}_\beta+\mathbf{q}_\beta)\cdot\partial_{p_\alpha}f(\mathbf{P},\mathbf{k},\mathbf{q})\big|_{\mathbf{P}=0}}{\big[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+m\mu)-\alpha(\mathbf{k}^2+\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+\mathbf{q}^2)\big]^2}\Bigg), \tag{38}$$

где $f(\mathbf{P},\mathbf{k},\mathbf{q}) = 4n(\mathbf{k})n(\mathbf{q}) + 4n(\mathbf{P}-\mathbf{k}-\mathbf{q}) - 8n(\mathbf{k})n(\mathbf{P}-\mathbf{k}-\mathbf{q})$, $f(\mathbf{k},\mathbf{q}) = f(\mathbf{P},\mathbf{k},\mathbf{q})\big|_{\mathbf{P}=0}$, а все производные по компонентам импулься в явном виде указаны в Приложении А. Из соображений симметрии под знаком интеграла в (38) можно заменить все выражения вида $(\mathbf{k}_\alpha+\mathbf{q}_\alpha)\cdot(\mathbf{k}_\beta+\mathbf{q}_\beta)$ на $\delta_{\alpha\beta}/3\cdot(\mathbf{k}+\mathbf{q})^2$.

Из-за сдвига полюсов в комплексную плоскость можно видеть, что для $\alpha\neq 0$ все интегралы являются сходящимися. Стоит заметить, что вещественная часть вклада (38) возникает вследствие введения регуляризации (28), так как интегралы в этом выражении при $\alpha = 0$ не содержат вещественной части, а именно она ответственна за перенормировку параметра диссипации γ в уравнении (31).

Здесь асимптотический анализ довольно сложен и нетривиален, так как интегралы демонстрируют крайне неравномерное поведение по параметру α. Идея вычислительной схемы состоит в том, чтобы преобразовать (36-38) таким образом, чтобы после перехода $\alpha\to 0$ в подынтегральном выражении сами интегралы остались сходящимися. С этой точки зрения (36-37) представляют интерес не только как поправки теории возмущений, но и как более простые по отношению к (38) примеры, на основании которых можно разработать методологию вычисления асимптотик. Целесообразно также исследовать предел $\alpha \to 0$ в отдельности для вещественной и мнимой части каждого из выражений (36-38). Это связано с тем, что, как видно из уравнения (31), $\mathrm{Re}\Sigma_{\eta+\xi}$ и $\mathrm{Im}\Sigma_{\eta+\xi}$ дают ренормировку разных параметров.

Учитывая вышесказанное, данные трудности могут быть преодолены. В этой работе был непосредственно вычислен вклад (36) (см. Приложение B), ответы для вещественной и мнимой части даются выражениями

$$\mathrm{Re}I_0 = \frac{-g^2 m}{512\pi^3} \int\limits_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int\limits_0^{\infty} dU \int\limits_{2m\mu - U}^{\frac{U}{3}+2m\mu} dT\ \partial_T\big(F_1(T,U,\theta)\big) \cdot \mathrm{sign}(T), \tag{39}$$

$$\mathrm{Im}I_0 = \frac{-g^2 m}{512\pi^4} \int\limits_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int\limits_0^{\infty} dU \int\limits_{2m\mu - U}^{\frac{U}{3}+2m\mu} dT\ \partial_T\big(F_1(T,U,\theta)\big) \cdot \ln\left(T^2\right), \tag{40}$$

где $F_1(U,T,\theta) = \sqrt{U - 3T + 6m\mu} \cdot \sqrt{T + U - 2m\mu}\ f(U,T,\theta)$.

Также удалось вычислить мнимую часть часть вклада (37) при $\alpha \to 0$, которая также являетя константой при данных μ и β, хоть и итоговое выражение является довольно громоздким (см. Приложение B). Вклад (38) удалось существенно упростить для анализа, его полное вычисление планируется представить в следующих работах.

Заметим, что в (38) входит слагаемое, с точностью до мнимой единицы в числителе и константных множителей совпадающее с (37). Так как было выяснено, что мнимая часть линейного по частотам вклада является константой при $\alpha \to 0$, то вещественная часть аналогичного выражения в квадратичном по импульсу вкладе также будет иметь константную асимптотику. Это, как уже упоминалось, заведомо будет означать о существовании в системе затухания, что является довольно интересным результатом.

4. Заключение

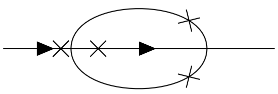
Была построена диаграммная техника для n-точечной временной функции Грина при конечной температуре в модели фермионного газа со слабым локальным взаимодействием, были выявлены некоторые специфические особенности этой теории. Путем вычисления соответствующих диаграмм были найдены явные выражения, асимптотика $\alpha \to 0$ которых дает вклад в перенормировку параметров теории, а так-же в параметр затухания. Вычисление асимптоки вклада нулевых импульсов и частот, а также мнимой части линейного по частотам вклада, было проведено в явном виде. Установлено наличие затухания в данной системе. В последующих работах предполагается усовершенствовать схему, предложенную здесь применительно к нулевому и линейному по частоте вкладам, для взятия предела в (38), найти параметр затухания γ как функцию химического потенциала и температуры, а также обобщить наши рассуждения на случай других потенциалов межчастичного взаимодействия и на модель электронов в графене.

Приложение A

Вычисление некоторых диаграмм

Вычислим основные диаграммы, дающие вклад в ренормировку в двухпетлевом приближении. В этом разделе введем обозначение $\tau = (t - t')$.

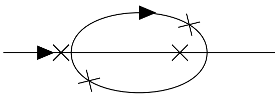
Вклад нулевых импульсов и частот:



$$\Big|_{\mathbf{p},\omega=0} = \frac{-g^2}{16(2\pi)^6}\int\limits_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k}d\mathbf{q}\big(1-2n(\mathbf{k})\big)\big(1-2n(\mathbf{q})\big)\times$$

$$\times \exp\Big(i\tau\big(\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})-\varepsilon(\mathbf{k})-\varepsilon(\mathbf{q})\big)-|\tau|\big(\gamma(\mathbf{k})+\gamma(\mathbf{q})+\gamma(\mathbf{k}+\mathbf{q})\big)\Big) =$$

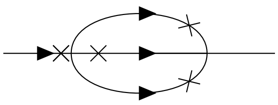
$$= \frac{-g^2}{16(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}d\mathbf{q}\,\frac{\big(1-2n(\mathbf{k})\big)\big(1-2n(\mathbf{q})\big)}{i\Big(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{m}+\mu\Big)-\gamma(\mathbf{k})-\gamma(\mathbf{q})-\gamma(\mathbf{k}+\mathbf{q})}. \tag{41}$$



$$\Big|_{\mathbf{p},\omega=0} = \frac{g^2}{8(2\pi)^6}\int\limits_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k}d\mathbf{q}\big(1-2n(\mathbf{k})\big)\big(1-2n(\mathbf{k}+\mathbf{q})\big)\times$$

$$\times \exp\Big(i\tau\big(\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})-\varepsilon(\mathbf{k})-\varepsilon(\mathbf{q})\big)-|\tau|\big(\gamma(\mathbf{k})+\gamma(\mathbf{q})+\gamma(\mathbf{k}+\mathbf{q})\big)\Big) =$$

$$= \frac{g^2}{8(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}d\mathbf{q}\,\frac{\big(1-2n(\mathbf{k})\big)\big(1-2n(\mathbf{k}+\mathbf{q})\big)}{i\Big(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{m}+\mu\Big)-\gamma(\mathbf{k})-\gamma(\mathbf{q})-\gamma(\mathbf{k}+\mathbf{q})}. \tag{42}$$



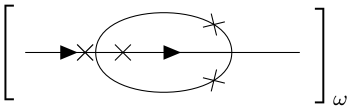
$$\Big|_{\mathbf{p},\omega=0} = \frac{-g^2}{16(2\pi)^6}\int\limits_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k}d\mathbf{q}\exp\Big(i\tau\big(\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})-\varepsilon(\mathbf{k})-\varepsilon(\mathbf{q})\big)\Big)\times$$

$$\times \exp\Big(-|\tau|\big(\gamma(\mathbf{k})+\gamma(\mathbf{q})+\gamma(\mathbf{k}+\mathbf{q})\big)\Big) =$$

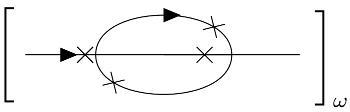
$$= \frac{-g^2}{16(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}d\mathbf{q}\,\frac{1}{i\Big(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{m}+\mu\Big)-\gamma(\mathbf{k})-\gamma(\mathbf{q})-\gamma(\mathbf{k}+\mathbf{q})}. \tag{43}$$

Сумма этих диаграмм при учете явного вида γ дает выражение (36).

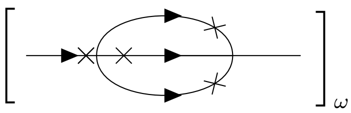
Линейный по частоте вклад. Коэффициенты при линейном члене разложения диаграммы по частоте с нулевым импульсом будем обозначать как исходную диаграмму в скобках $[\,\cdot\,]_\omega$.



$$= \frac{-g^2}{16(2\pi)^6}\int\limits_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k}d\mathbf{q}\;\tau\big(1-2n(\mathbf{k})\big)\big(1-2n(\mathbf{q})\big)\times$$
$$\times\exp\Big(i\tau\big(\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})-\varepsilon(\mathbf{k})-\varepsilon(\mathbf{q})\big)-|\tau|\big(\gamma(\mathbf{k})+\gamma(\mathbf{q})+\gamma(\mathbf{k}+\mathbf{q})\big)\Big)=$$
$$=\frac{-g^2}{16(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}d\mathbf{q}\;\frac{\big(1-2n(\mathbf{k})\big)\big(1-2n(\mathbf{q})\big)}{\Big[i\Big(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{m}+\mu\Big)-\gamma(\mathbf{k})-\gamma(\mathbf{q})-\gamma(\mathbf{k}+\mathbf{q})\Big]^2}. \tag{44}$$



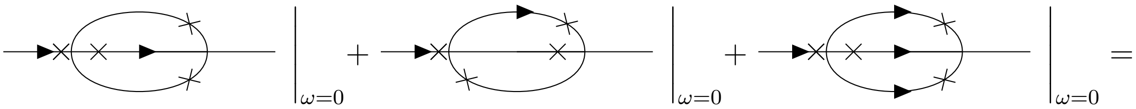
$$= \frac{g^2}{8(2\pi)^6}\int\limits_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k}d\mathbf{q}\;\tau\big(1-2n(\mathbf{k})\big)\big(1-2n(\mathbf{k}+\mathbf{q})\big)\times$$
$$\times\exp\Big(i\tau\big(\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})-\varepsilon(\mathbf{k})-\varepsilon(\mathbf{q})\big)-|\tau|\big(\gamma(\mathbf{k})+\gamma(\mathbf{q})+\gamma(\mathbf{k}+\mathbf{q})\big)\Big)=$$
$$=\frac{g^2}{8(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}d\mathbf{q}\;\frac{\big(1-2n(\mathbf{k})\big)\big(1-2n(\mathbf{k}+\mathbf{q})\big)}{\Big[i\Big(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{m}+\mu\Big)-\gamma(\mathbf{k})-\gamma(\mathbf{q})-\gamma(\mathbf{k}+\mathbf{q})\Big]^2}. \tag{45}$$



$$= \frac{-g^2}{16(2\pi)^6}\int\limits_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k}d\mathbf{q}\;\tau\times$$
$$\times\exp\Big(i\tau\big(\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})-\varepsilon(\mathbf{k})-\varepsilon(\mathbf{q})\big)-|\tau|\big(\gamma(\mathbf{k})+\gamma(\mathbf{q})+\gamma(\mathbf{k}+\mathbf{q})\big)\Big)=$$
$$=\frac{-g^2}{16(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}d\mathbf{q}\;\frac{1}{i\Big(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{m}+\mu\Big)-\gamma(\mathbf{k})-\gamma(\mathbf{q})-\gamma(\mathbf{k}+\mathbf{q})}. \tag{46}$$

Суммируя эти вклады, получаем формулу (37).

Квадратичный по импульсу вклад.



$$= \frac{-g^2}{16(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}d\mathbf{q}\;\frac{4n(\mathbf{k})n(\mathbf{q})+4n(\mathbf{P}-\mathbf{k}-\mathbf{q})-8n(\mathbf{k})n(\mathbf{P}-\mathbf{k}-\mathbf{q})}{i\big(\varepsilon(\mathbf{p}-\mathbf{k}+\mathbf{q})-\varepsilon(\mathbf{k})-\varepsilon(\mathbf{q})\big)-\gamma(\mathbf{k})-\gamma(\mathbf{q})-\gamma(\mathbf{P}-\mathbf{k}-\mathbf{q})}. \tag{47}$$

Дифференцируя это выражение по p_α и p_β, полагая $\mathbf{p}=0$ и пренебрегая α по сравнению с i в числителе (это можно сделать в силу того, что интегралы останутся сходящимися), получим:

$$\left.\frac{\partial^2 I(\mathbf{p},\,\omega=0)}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\right|_{\mathbf{p}=0} = \frac{-g^2 m}{16(2\pi)^6}\int d\mathbf{k}d\mathbf{q}\,\Bigg(\frac{i\cdot\delta_{\alpha\beta}\cdot f(\mathbf{k},\mathbf{q})}{\big[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+m\mu)-\alpha(\mathbf{k}^2+\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+\mathbf{q}^2)\big]^2}+$$
$$+2\frac{(\mathbf{k}_\alpha+\mathbf{q}_\alpha)\cdot(\mathbf{k}_\beta+\mathbf{q}_\beta)\cdot f(\mathbf{k},\mathbf{q})}{\big[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+m\mu)-\alpha(\mathbf{k}^2+\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+\mathbf{q}^2)\big]^3}+\frac{\partial_{p_\alpha}\partial_{p_\beta}f(\mathbf{P},\mathbf{k},\mathbf{q})\big|_{\mathbf{P}=0}}{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+m\mu)-\alpha(\mathbf{k}^2+\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+\mathbf{q}^2)}-$$
$$-\frac{2i\cdot(\mathbf{k}_\beta+\mathbf{q}_\beta)\cdot\partial_{p_\alpha}f(\mathbf{P},\mathbf{k},\mathbf{q})\big|_{\mathbf{P}=0}}{\big[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+m\mu)-\alpha(\mathbf{k}^2+\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+\mathbf{q}^2)\big]^2}\Bigg). \tag{48}$$

Здесь

$$f(\mathbf{P},\mathbf{k},\mathbf{q}) = 4n(\mathbf{k})n(\mathbf{q})+4n(\mathbf{P}-\mathbf{k}-\mathbf{q})-8n(\mathbf{k})n(\mathbf{P}-\mathbf{k}-\mathbf{q}),$$
$$\partial_{p_\alpha}f(\mathbf{P},\mathbf{k},\mathbf{q})\big|_{\mathbf{P}=0} = \frac{4\beta(\mathbf{k}_\alpha+\mathbf{q}_\alpha)e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})}}{m\big(e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})}+1\big)^2}\left(\frac{2}{e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k})}+1}-1\right),$$
$$\partial_{p_\alpha}\partial_{p_\beta}f(\mathbf{P},\mathbf{k},\mathbf{q})\big|_{\mathbf{P}=0} = \frac{-16\beta^2(\mathbf{k}_\alpha+\mathbf{q}_\alpha)(\mathbf{k}_\beta+\mathbf{q}_\beta)\big(e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})}\big)^2}{m^2\big(e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})}+1\big)^3 e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k})}}+$$
$$+\frac{8\beta^2(\mathbf{k}_\alpha+\mathbf{q}_\alpha)(\mathbf{k}_\beta+\mathbf{q}_\beta)e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})}}{m^2\big(e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})}+1\big)^2 e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k})}}+\frac{8\beta^2(\mathbf{k}_\alpha+\mathbf{q}_\alpha)(\mathbf{k}_\beta+\mathbf{q}_\beta)\big(e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})}\big)^2}{m^2\big(e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})}+1\big)^3}-$$
$$-\frac{4\beta e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})}}{m\big(e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})}+1\big)^2}-\frac{4\beta^2(\mathbf{k}_\alpha+\mathbf{q}_\alpha)(\mathbf{k}_\beta+\mathbf{q}_\beta)e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})}}{m^2\big(e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})}+1\big)^3}+\frac{8\beta\big(e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})}\big)^2}{m\big(e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})}+1\big)^2 e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k})}}.$$

Учитывая симметрию слагаемых в подынтегральном выражении, под знаком интеграла можно заменить $(\mathbf{k}_\alpha+\mathbf{q}_\alpha)\cdot(\mathbf{k}_\beta+\mathbf{q}_\beta)$ на $\delta_{\alpha\beta}/3\cdot(\mathbf{k}+\mathbf{q})^2$, тем самым получая формулу (38).

Приложение Б

Вычисление асимптотик первых членов тейлоровского разложения $I(\mathbf{p},\,\omega)$

Поставим задачу о вычислении асимптотики вещественных и мнимых частей выражения (36) при $\alpha \to 0$. Так как подбор правильной последовательности действий для взятия предела для (36-38) является довольно сложной задачей, имеет смысл привести подробные вычисления. Исходное выражение:

$$I_0 = \frac{-g^2 m}{16(2\pi)^6} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q}\, \frac{f(\mathbf{k},\mathbf{q})}{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q} + m\mu) - \alpha(\mathbf{k}^2 + \mathbf{k}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{q}^2)}. \tag{49}$$

Здесь для краткости введено обозначение $I(\mathbf{p} = 0,\, \omega = 0) = I_0$. На первый взгляд при $\alpha \to 0$ (если положить $\alpha = 0$ в подынтегральном выражении, интеграл имеет логарифмическую особенность) это выражение должно расходиться, однако дальнейший анализ показывает, что подобные интуитивные выводы оказываются неверными.

Первое упрощение состоит в том, что можно избавиться от объектов, представляющих собой скалярное произведение двух разных векторов. Для этого произведем замену переменных единичного якобиана $\mathbf{k} = 1/\sqrt{2}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})$, $\mathbf{q} = 1/\sqrt{2}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. При этом $\mathbf{k}\cdot\mathbf{q} \to 1/2\cdot(\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2)$, $(\mathbf{k}^2+\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+\mathbf{q}^2) \to 1/2\cdot(3\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2)$. В соответствии с этим

$$I_0 = \frac{-g^2 m}{8(2\pi)^6} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \frac{f(\mathbf{x},\mathbf{y})}{i(\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 + 2m\mu) - \alpha(3\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2)}. \tag{50}$$

Здесь и далее условимся, что функцию f после преобразования координат будем обозначать той-же буквой, фиксируя изменения заменой старых аргументов на новые. Сейчас, например, $f(\mathbf{k},\mathbf{q}) \to f(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Учитывая, что знаменатель зависит от модулей $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, но не от их направления, имеет смысл перейти в сферические координаты. Полностью, однако, от угловых зависимостей избавиться на этом этапе нельзя, так как можно убедиться, что $f(\mathbf{k},\mathbf{q})$ зависит от угла между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, который будем обозначать θ. Снимая другие интегралы в сферических координатах, получаем:

$$I_0 = \frac{-g^2 m}{64\pi^4} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^\infty \int_0^\infty dx dy \, \frac{x^2 y^2 \; f(x,y,\theta)}{i(x^2 - y^2 + 2m\mu) - \alpha(3x^2 + y^2)}. \tag{51}$$

Далее удобно сделать замену $x^2 = t$, $y^2 = s$, а также явно выделить вещественную и мнимую части. После этого

$$\mathrm{Re} I_0 = \frac{g^2 m}{256\pi^4} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^\infty \int_0^\infty dt ds \frac{\sqrt{t}\sqrt{s} \; f(t,s,\theta) \cdot \alpha(3t+s)}{(t-s+2m\mu)^2 + \alpha^2(3t+s)^2}, \tag{52}$$

$$\mathrm{Im} I_0 = \frac{g^2 m}{256\pi^4} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^\infty \int_0^\infty dt ds \frac{\sqrt{t}\sqrt{s} \; f(t,s,\theta) \cdot (t-s+2m\mu)}{(t-s+2m\mu)^2 + \alpha^2(3t+s)^2}. \tag{53}$$

Далее сделаем замену $3t + s = U$, $t - s + 2m\mu = T$.
Вводя обозначение $\sqrt{U - 3T + 6m\mu}\sqrt{T + U - 2m\mu} \; f(U,T,\theta) = F_1(U,T,\theta)$, получим:

$$\mathrm{Re} I_0 = \frac{g^2 m}{256\pi^4} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^\infty dU \int_{2m\mu - U}^{\frac{U}{3}+2m\mu} dT \; \frac{F_1(U,T,\theta) \cdot \alpha U}{T^2 + \alpha^2 U^2}, \tag{54}$$

$$\mathrm{Im} I_0 = \frac{g^2 m}{256\pi^4} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^\infty dU \int_{2m\mu - U}^{\frac{U}{3}+2m\mu} dT \; \frac{F_1(U,T,\theta) \cdot T}{T^2 + \alpha^2 U^2}. \tag{55}$$

До этого местом всех проблем являлась окрестность точки $T = 0$, так как при $\alpha \to 0$ в ней подынтегральное выражение становится сингулярным. Однако в этих переменных хорошо видно, как это можно обойти. Тот факт, что первообразная функции $\left(T^2 + \alpha^2 U^2\right)^{-1}$ по переменной T уже не является сингулярной, наталкивает на мысль, что в выражениях (54-55) выгодно применить интегрирование по частям:

$$\mathrm{Re}I_0 = \frac{-g^2 m}{256\pi^4}\int\limits_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int\limits_0^{\infty} dU \int\limits_{2m\mu-U}^{\frac{U}{3}+2m\mu} dT\ \partial_T\big(F_1(T,U,\theta)\big)\cdot \arctan\left(\frac{T}{\alpha U}\right), \tag{56}$$

$$\mathrm{Im}I_0 = \frac{-g^2 m}{512\pi^4}\int\limits_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int\limits_0^{\infty} dU \int\limits_{2m\mu-U}^{\frac{U}{3}+2m\mu} dT\ \partial_T\big(F_1(T,U,\theta)\big)\cdot \ln\big(\alpha^2U^2+T^2\big). \tag{57}$$

В этих выражениях, что и было целью всех преобразований, уже можно совершить переход $\alpha \to 0$, который не приведет к плохо определяемым выражениям, так как $\arctan\left(\frac{T}{\alpha U}\right) \to \pi/2 \cdot \mathrm{sign}(T)$, где $\mathrm{sign}(\cdot)$ — функция знака, а логарифм интегрируем в нуле. Итого, окончательный ответ для асимптотики I_0 будет выглядеть как:

$$\mathrm{Re}I_0 = \frac{-g^2 m}{512\pi^3}\int\limits_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int\limits_0^{\infty} dU \int\limits_{2m\mu-U}^{\frac{U}{3}+2m\mu} dT\ \partial_T\big(F_1(T,U,\theta)\big)\cdot \mathrm{sign}(T), \tag{58}$$

$$\mathrm{Im}I_0 = \frac{-g^2 m}{512\pi^4}\int\limits_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int\limits_0^{\infty} dU \int\limits_{2m\mu-U}^{\frac{U}{3}+2m\mu} dT\ \partial_T\big(F_1(T,U,\theta)\big)\cdot \ln\big(T^2\big). \tag{59}$$

Ввиду громоздкости подынтегральных выражений, аналитическое взятие этих интегралов не представляется возможным, поэтому единственным способом их исследования является численные методы. Несложно показать, что (58-59) являются функциями единого безразмерного параметра отношения химического потенциала к температуре: $\mathrm{Re}I_0(\beta\mu)$, $\mathrm{Im}I_0(\beta\mu)$.

Проблему взятия предела для линейного по частотам и квадратичного по импульсам вклада можно сформулировать как исследование интегралов, похожим по структуре на (54-55). Например, для линейного по частотам вклада в переменных U и T можно написать, проводя аналогичные случаю I_0 вычисления:

$$\mathrm{Re}\frac{\partial I(\mathbf{p}=0,\omega)}{\partial \omega}\bigg|_{\omega=0} = \frac{g^2m^2}{128\pi^4}\int\limits_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int\limits_0^{\infty} dU \int\limits_{2m\mu-U}^{\frac{U}{3}+2m\mu} dT\ \frac{F_1(U,T,\theta)(\alpha^2U^2-T^2)}{\left[T^2+\alpha^2U^2\right]^2}, \tag{60}$$

$$\mathrm{Im}\frac{\partial I(\mathbf{p}=0,\omega)}{\partial \omega}\bigg|_{\omega=0} = \frac{g^2m^2}{64\pi^4}\int\limits_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int\limits_0^{\infty} dU \int\limits_{2m\mu-U}^{\frac{U}{3}+2m\mu} dT\ \frac{F_1(U,T,\theta)\alpha TU}{\left[T^2+\alpha^2U^2\right]^2}. \tag{61}$$

Для мнимой части линейного вклада предел удалось сосчитать явно. Выражение для него приведено на следующей странице. Оказывается, что в этом случае можно также провести всего одно интегрирование по частям, так как после этого происходит удачное сокращение полюса, что и позволяет сразу перейти к пределу. Для удобства ответ приведен в переменных t и s.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Im}\frac{\partial I(\mathbf{p}=0,\,\omega)}{\partial\omega}\Bigg|_{\omega=0} = \frac{3g^2m^2}{16(2\pi)^6}\int\limits_0^{\pi} d\theta\sin\theta\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} dsdt\ \pi\sqrt{s}\ \mathrm{sign}(2m\mu+s-t)\times\\
&\times\Bigg(\Bigg(\frac{s^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}\beta\cos\theta}{2}+\frac{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{s}\beta\cos\theta}{6}-\frac{t^2\beta}{6}-tm-\frac{t\beta s}{6}-ms\Bigg)e^{-\frac{\beta}{4m}(2\sqrt{st}\cos\theta+4m\mu-s-t)}+\\
&+\Bigg(\frac{s^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}\beta\cos\theta}{2}+\frac{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{s}\beta\cos\theta}{6}-\frac{t^2\beta}{6}+tm-\frac{t\beta s}{6}+ms\Bigg)e^{-\frac{\beta}{4m}(2\sqrt{st}\cos\theta+8m\mu-5s-t)}+\\
&+\Bigg(s^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}\cos\theta+\frac{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{s}\cos\theta}{3}+ts+\frac{t}{3}\Bigg)\beta e^{-\frac{\beta}{4m}(2\sqrt{st}\cos\theta+12m\mu-3s-3t)}+\\
&+2m(s+t)e^{\frac{\beta}{4m}(2\sqrt{st}-12m\mu+3s+3t)}-m(s+t)e^{-\frac{\beta}{4m}(2\sqrt{st}\cos\theta+4m\mu-s-t)}+\\
&+\Bigg(-\frac{s^{\frac{3}{2}}\cos\theta\sqrt{t}\beta}{2}-\frac{t^{\frac{3}{2}}\cos\theta\sqrt{s}\beta}{6}-\frac{t^2\beta}{6}+tm-\frac{t\beta s}{6}+ms\Bigg)e^{\frac{\beta}{4m}(2\sqrt{st}\cos\theta-8m\mu+5s+t)}+\\
&+\Bigg(\frac{s^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}\beta\cos\theta}{2}+\frac{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{s}\beta\cos\theta}{6}+\frac{t^2\beta}{6}+tm+\frac{t\beta s}{6}+ms\Bigg)e^{\frac{\beta}{4m}(2\sqrt{st}\cos\theta-4m\mu+s+t)}+\\
&+m(s+t)e^{\frac{\beta}{2m}(2\sqrt{st}\cos\theta-4m\mu+s+t)}+\Bigg(-\frac{t^2\beta}{3}-\beta st+mt+ms\Bigg)e^{\frac{\beta}{2m}(-6m\mu+3s+t)}+\\
&+\Bigg(2s^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}\beta\cos\theta+\frac{2t^{\frac{3}{2}}\sqrt{s}\beta\cos\theta}{3}+\frac{t^2\beta}{3}+ts\beta+tm+ms\Bigg)e^{\frac{\beta}{2m}(-4m\mu+s+t)}+\\
&+m(s+t)\Big(e^{-\frac{\beta}{m}(m\mu-s)}+e^{\frac{\beta}{m}(-4m\mu+s+t)}\Big)\Bigg)\times\\
&\times\Bigg(2\sqrt{t}(m\mu+2s)^2\Big(e^{-\frac{\beta}{m}(m\mu-s)}+1\Big)\Big(e^{\frac{\beta}{4m}(2\sqrt{st}\cos\theta-4m\mu+s+t)}+1\Big)^2\times\\
&\times\Big(e^{-\frac{\beta}{4m}(2\sqrt{st}\cos\theta+4m\mu-s-t)}+1\Big)^2\Bigg)^{-1}.
\end{aligned}
\tag{62}
$$

Список литературы

[1] *Vasilev A. N.* The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics. — Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004. — Pp. xvi+681. — Translated from the 1998 Russian original by Patricia A. de Forerand-Millard and revised by the author. https://doi.org/10.1201/9780203483565.

[2] Критическая динамика фазового перехода в сверхтекучее состояние / Ю. А. Жаворонков, М. В. Комарова, Ю. Г. Молотков, М. Ю. Налимов // *Theoret. and Math. Phys.* — 2019. https://doi.org/10.4213/tmf9674.

[3] *Kadanoff L. P., Baym G.* Quantum Statistical Mechanics. — New York: W.A. Benjamin Inc., 1962.

[4] *Keldysh L. V.* Diagram technique for nonequilibrium processes // *Sov. Phys. JETP.* — 1965. — Vol. 20. — P. 1018. — [Zh. Eksp. Theor. Fiz. **47**, 1515 (1964)].

[5] *Арсеев П. И.* О диаграммной технике для неравновесных систем: вывод, некоторые особенности и некоторые применения // *Усп. физ. наук.* — 2015. — Vol. 185, no. 12. — Pp. 1271–1321. https://ufn.ru/ru/articles/2015/12/b/.

[6] *Комарова М. В., Молотков Ю. Г., Налимов М. Ю.* Кинетическая теория бозонного газа // *Theoret. and Math. Phys.* — 2019. https://doi.org/10.4213/tmf9675.

[7] *Ю Хонконен.* Контурно упорядоченные функции Грина в стохастической теории поля // *Theoret. and Math. Phys.* — 2013. https://doi.org/10.4213/tmf8483.

[8] Квантово-полевая ренормгруппа в теории стохастической ленгмюровской турбулентности / Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, М. Гнатич // *Theoret. and Math. Phys.* — 1989.

[9] *Abrikosov A. A., Gor'kov L. P., Dzyaloshinskii I. E.* Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics. — Oxford: Pergamon, 1965.

[10] *Sulpizio J.A., Ella L., Rozen A. et al.* Visualizing Poiseuille flow of hydrodynamic electrons // *Nature.* — 2019. — P. 75–79. https://doi.org/10.1038/s41586-019-1788-9.

[11] *Куни Ф. М.* Статистическая Физика и Термодинамика. — Москва: Наука, 1981.

[12] *Abricosov A. A.* Bases of the Metal Theory. — Moscow: Nauka, 1987.

[13] *Mattuck R.* A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem: Second Edition. — Courier Corporation, 2012.

[14] *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. — Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, 1957.

[15] *Фейнман Р.* Статистическая механика. — Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, 1978. — Пер. с англ./Под ред. Д. Н. Зубарева.

[16] *Faddeev L. D., Slavnov A. A.* Gauge Fields. Introduction to quantum theory (2-nd edition). — Addison-Wesley Redwood City, 1991. — 217 pp.

[17] *Schwinger Julian.* Brownian Motion of a Quantum Oscillator // *Journal of Mathematical Physics.* — 1961. — Vol. 2, no. 3. — Pp. 407–432. https://doi.org/10.1063/1.1703727.

[18] *Vasil'ev A. N.* Functional Methods in Quantum Field Theory and Statistical Physics. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1998.

[19] *Wyld H. W.* // *Ann. Phys.* — 1961. — Vol. 14, no. 1. — Pp. 143–165.

[20] *Hwa Rudolph C, Teplitz Vigdor L.* Homology and Feynman integrals. Mathematical physics monograph series. — New York, NY: Benjamin, 1966. http://cds.cern.ch/record/102287.

[21] *Левитов Л., Шитов А.* Функции Грина. Задачи и решения. — ЛитРес, 2018.