Санкт-Петербургский государственный университет

Жаворонков Юрий Александрович

Выпускная квалификационная работа

Гидродинамика сверхтекучего фазового перехода

Уровень образования: магистратура
Направление *011200 «Физика»*

Научный руководитель:
докторт ф.-м. наук,
профессор СПбГУ
Налимов Михаил Юрьевич

Рецензент:
кандидат ф.-м. наук,
ведущий научный сотрудник
Санкт-Петербургсокого отделения
Математического Института им. В.А.Стеклова РАН
Деркачев Сергей Эдуардович

Санкт-Петербург
2019

Содержание

1 Введение

Настоящая работа посвящена изучению явления Бозе-конденсации, явлению возникающему в окрестности точки фазового перехода. Описание систем в окрестности точки фазового перехода является важной физической задачей, которая активно изучается как теоретиками, так и экспериментаторами. В этой работе мы изучаем динамическое поведение такой системы.

На протяжении долгого времени описание таких систем в рамках критической динамики проводилось на основе одной из двух моделей: модели F или модели E [5]. В этих моделях система стохастических уравнений строится из феноменологических соображений и обязана удовлетворять определенным условиям.

Построение стохастических уравнений критической динамики базируется на известной статической (равновесной) модели критического поведения. Такая модель строится из феноменологических соображений и в общем представляет из себя определенный t-локальный функционал:

$$S_{st} = U(x; \varphi(x)),$$

где $x \equiv (t, \vec{x})$, $\varphi(x)$ — поле (система полей), $U(x; \varphi)$ — заданный функционал.

В соответствии с классической монографией [1], система стохастических уравнений для описания критических равновесных флуктуаций должна иметь вид

$$\partial_t \varphi_a = (\alpha_{ab} + \beta_{ab}) \frac{\delta S_{st}}{\delta \varphi_b} + \eta_a,$$

где η_a — случайная внешняя сила. Для η_a предполагается гауссово распределение с нулевым средним $\langle \eta_a = 0$ (белый шум). В стандартной постановке задачи также принято считать, что поле (система полей) φ обращается в нуль при $t \to -\infty$, и при $|x| \to \infty$. На коэффициенты Онзагера $\alpha_{a,b}$ и коэффициенты межмодовой связи $\beta_{a,b}$ накладываются следующие условия:

$$\alpha_{ab} = \alpha^T_{ba}, \quad \beta_{ab} = -\beta^T_{ba}, \quad \frac{\delta \beta_{ab}(\vec{x}; \varphi)}{\delta \varphi_a(\vec{x})} = 0$$

символ транспонирования T относится также к операциям типа ∂ .

Явление Бозе-конденсации, как известно, наблюдается вблизи нулевой температуры, то есть в окрестности λ-точки фазового перехода. На сегодняшний день в большинстве работ, относящихся к данной тематике, используются модели, подразумевающие, что исследуемое вещество представляет собой газ щелочного металла, а не жидкий гелий, как это было ранее. Поэтому видится очевидной необходимость учёта сжимаемости в таких системах.

В первой части работы была предпринята попытка построения модели, способной описывать динамику квантовой жидкости на основе стохастических уравнений типа Ланжевена, приводящих на больших временах к равновесному распределению в рамках критической гидродинамики. Данная модель представляет из себя известную модель Fh критической динамики, в которой была учтена несжимаемость жидкости [2]. Таким образом была построена устойчивая модель критической динамики с необходимыми нам свойствами.

Во второй же части был произведен размерный анализ полученной модели. В результате анализа удалось установить, что учёт сжимаемости приводит нас к тому, что используемая нами модель F по сути сводится к известной и наиболее простой (из моделей критической динамики) – модели A.

2 Традиционное описание

Традиционное описание критической динамики производится с помощью уравнений Ланжевена, приводящих при больших временах к равновесному распределению Гиббса. Равновесное распределение имеет вид $f \sim e^{S_{st}}$. S_{st} — стационарное действие, вид которого зависит от природы изучаемого явления.

В данном разделе предлагается взглянуть на некоторые модели стохастической динамики, которые использовались для описания критической динамики перехода от нормальной к сверхтекучей жидкости в He_4. Так же, как и большинство других моделей стохастической динамики, они оказываются применимы и для описания магнетиков. Отметим, что правомерность использования моделей как для для описания магнетиков, так и для описания жидкого гелия вблизи точка фазового перехода была доказана в ранних работах.

Итак, сравним модели A, F, E, Fh.

Рассмотрение стоит начать с простейшей модели критической динамики – A модели. Приведем вид её статического и динамического действия:

$$S_{st} = -(\partial\psi)^2 - g_1\psi^2/2 - g_2\psi^4/24,$$

здесь ψ-поле параметра порядка, а g_1, g_2-константы связи.

Динамическое действие (MSR):

$$S = g_2\psi'^2 + \psi'(-\partial_t\psi + g_2(\partial^2\psi - g_1\psi - g_2\psi^3/6))$$

В качестве статического действия для модели F стохастической динамики принимается:

$$S_{st} = -\partial\psi^+\partial\psi - \frac{g_1}{6}(\psi^+\psi)^2 + g_2 m\psi^+\psi - \frac{1}{2}m^2 + mh, \tag{1}$$

где поля ψ, ψ^+ — комплексный параметр порядка (средние бозонных операторов поля $\widehat{\psi}$, $\widehat{\psi}^+$), m — линейная комбинация внутренней энергии и плотности, эффективно описывающая флуктуации температуры, h-внешнее поле, которое в работе полагается отсутствующим (h=0).

Уравнения Ланжевена для такой модели известны [1]:

$$\partial_t\psi = \lambda(1+ib)[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big] + i\lambda g_3\psi\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + \eta_{\psi^+}, \tag{2}$$

$$\partial_t m = -\lambda u\partial^2\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + i\lambda g_3\big[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+\big] + \eta_m, \tag{3}$$

$$\partial_t\psi^+ = \lambda(1-ib)\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] - i\lambda g_3\psi^+\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + \eta_\psi. \tag{4}$$

Стоит отметить, что модель E по своей сути является частным случаем F-модели при $g_2 = 0$. Выделять отдельно её мы не будем.

Для учёта гидродинамики в модель F необходимо добавить максвелловский член $v^2/2$. Сначала приведем модель, в которой жидкость полагалась несжимаемой
F_h-модель ($\partial_i v_i = 0$). Эта модель была подробно изучена в работе [2]. В таком случае S_{st} имеет вид:

$$S_{st} = -\partial\psi^+\partial\psi - \frac{g_1}{6}(\psi^+\psi)^2 + g_2 m\psi^+\psi - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}v^2 + mh, \tag{5}$$

где v — добавленное поле скорости.

Аналогично со случаем модели F без гидродинамических мод пишется уравнения Ланжевена, соответствующие данному действию:

$$\partial_t\psi + \partial_i(v_i\psi) = \lambda(1+ib)\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big] + i\lambda g_3\psi\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + \eta_{\psi^+}, \quad (6)$$

$$\partial_t m + \partial_i(v_i m) = -\lambda u\partial^2\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + i\lambda g_3\big[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+\big] + \eta_m, \quad (7)$$

$$\partial_t\psi^+ + \partial_i(v_i\psi^+) = \lambda(1-ib)\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] - i\lambda g_3\psi^+\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + \eta_{\psi}, \quad (8)$$

$$\partial_t v = \nu\partial^2 v - \partial_i(v_i v) - \psi^+\partial\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big]$$

$$-\psi\partial\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] - m\partial\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + \eta_v. \quad (9)$$

Здесь и далее ∂ — дифференцирование по пространственной компоненте, ∂^2 — оператор Лапласа.

В уравнениях (6)–(9) возникают члены вида $\partial(v\varphi_a)$, где φ_a — поля m,ψ,ψ^+, v. Отметим, что $\partial(v\varphi_a) = v\partial(\varphi_a)$ ввиду равенства нулю ∂v, следующего из того, что жидкость является несжимаемой.

Заметим, что уравнение (9)по своей структуре является уравнением Навье-Стокса с добавочными членами, необходимыми для существования статического предела в модели Fh.

Известно, что для того, чтобы система уравнений (6)–(9) при больших временах приводила к равновесному распределению $f \sim e^{s_{st}}$, где S_{st} взято из (5), необходимо выполнение уравнения Фоккера-Планка [1]:

$$\partial_t F = -\frac{\delta}{\delta\varphi_a}\Big((\alpha_{a,b} + \beta_{a,b})\frac{\delta S_{st}}{\delta\varphi_b} - \alpha_{a,b}\frac{\delta}{\delta\varphi_b}\Big)F, \quad (10)$$

где F — функция распределения одновременных флуктуаций, $\alpha_{a,b}$ — коэффициенты Онзагера, $\beta_{a,b}$ — коэффициенты межмодовой связи соответствующей пары полей, а φ_a, φ_b — одно из полей m,v,ψ,ψ^+. Само уравнение (10) возникает из уравнений движения. С учётом того, что для F также должно выполняться $F \sim e^{S_{st}}$, уравнение (10) принимает вид:

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_a}\Big((\alpha_{a,b} + \beta_{a,b})\frac{\delta S_{st}}{\delta\varphi_b} - \alpha_{a,b}\frac{\delta}{\delta\varphi_b}\Big)e^{S_{st}} = 0, \quad (11)$$

Уравнение Фоккера-Планка указывает нам на то, что уравнения Ланжевена являются связанными между собой, что приводит нас к необходимости внесения изменений в одно уравнение при изменении другого.

Из уравнения (11) явно следуют достаточные условия, налагаемые на коэффициенты Онзагера и коэффициенты межмодовой связи:

$$\beta_{ab} = -\beta_{ba}^T, \quad (12)$$

$$\frac{\delta\beta_{ab}(\vec{x};\varphi)}{\delta\varphi_a(\vec{x})} = 0, \quad (13)$$

$$\alpha_{ab} = \alpha_{ba}^T. \tag{14}$$

Символ транспонирования «T» относится к операциям типа ∂ в коэффициентах α_{ab} и β_{ab}, то есть в целом $\alpha = \alpha^T$, $\beta = -\beta^T$.

Нетрудно заметить, что общий вид уравнения Ланжевена в задачах стохастической динамики имеет вид:

$$\partial_t \varphi_a = (\alpha_{ab} + \beta_{ab}) \frac{\delta S_{st}}{\delta \varphi_b} + \eta_a. \tag{15}$$

Для дальнейших выкладок будет удобно показать справедливость уравнения (11) для этой модели [2]. Итак, покажем как будет записываться уравнение (11) в таком случае:

$$\frac{\delta}{\delta\psi}\Big[- v_i\partial_i\psi + \lambda(1+ib)[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi] + i\lambda g_3\psi[g_2\psi^+\psi - m + h] - \lambda\frac{\delta}{\delta\psi^+}\Big] e^{S_{st}}$$

$$+\frac{\delta}{\delta\psi^+}\Big[- v_i\partial_i\psi^+ + \lambda(1-ib)[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+] - i\lambda g_3\psi^+[g_2\psi^+\psi - m + h] - \lambda\frac{\delta}{\delta\psi}\Big] e^{S_{st}}$$

$$+\frac{\delta}{\delta m}\Big[- \partial_i(v_i m) - \lambda u\partial^2[g_2\psi^+\psi - m + h] + i\lambda g_3[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+] + \lambda u\partial^2\frac{\delta}{\delta m}\Big] e^{S_{st}}$$

$$+\frac{\delta}{\delta v}\Big[\nu\partial^2 v - \partial_i(v_i v) - \psi^+\partial[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\Big] - \psi\partial[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+]$$

$$-m\partial\Big[g_2\psi^+\psi - m + h] - \nu\partial^2\frac{\delta}{\delta v}\Big] e^{S_{st}} = 0 \tag{16}$$

Удобно записать матрицу коэффициентов Онзагера и матрицу коэффициентов межмодовой связи [4]:

$$\alpha_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda u\partial^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu\partial^2 \end{pmatrix},$$

$$\beta_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & i\lambda b & i\lambda g_3\psi & \psi\partial \\ -i\lambda b & 0 & -i\lambda g_3\psi^+ & \psi^+\partial \\ -i\lambda g_3\psi & i\lambda g_3\psi^+ & 0 & m\partial \\ -\psi\partial & -\psi^+\partial & -m\partial & 0 \end{pmatrix}.$$

Из уравнения (16) и полученных матриц можно сделать следующие заключения:

1) Члены с множителями β уравнения Фоккера-Планка действительно сокращаются согласно (12).

2) Члены с множителями α, в свою очередь, как видно из уравнения Фоккера-Планка (16), сокращаются с $\delta/\delta\varphi_b$ из (11).

Отдельных комментариев заслуживает тот факт, что в β-матрице равным нулю оказался член β_{vv}. Это объясняется тем, что этот член сокращается сам с собой в уравнении (16), что нетрудно продемонстрировать:

$$-\frac{\delta}{\delta v}[\partial_i(v_i v)]e^{S_{st}} = -\frac{\delta}{\delta v}[v\partial_i(v_i) + v_i\partial_i(v)]e^{S_{st}} = -\frac{\delta}{\delta v}[v_i\partial_i(v)]e^{S_{st}},$$

Здесь было учтено, что $\partial_i v_i = 0$. Теперь, подействовав вариационной производной на выражения, и учтя, что $e^{S_{st}}$ сокращается всюду в уравнении Фоккера-Планка как множитель, стоящий при каждом из членов, получим:

$$-\frac{\delta}{\delta v}[v_i\partial_i(v)]e^{S_{st}} \Rightarrow -[v_i\partial_i] - [v_i\partial_i(v)]v = [\partial_i(v_i)] - [v_i\partial_i(\frac{v^2}{2})]$$

$$= -[\partial_i(v_i\frac{v^2}{2})] + [(\frac{v^2}{2})\partial_i(v_i)] = 0.$$

Окончательный результат был получен путём взятия каждого из интегралов по частям.Член $[(\frac{v^2}{2})\partial_i(v_i)]$ оказался равным нулю как интеграл от полной производной при учёте соглашения $v(\infty) = v(-\infty) = 0$.

3 Учёт сжимаемости и построение стохастических уравнений

Для того чтобы определить, каким образом должны измениться уравнения движения, обратимся к стандартному виду уравнения Навье-Стокса [3]:

$$\rho\big[\partial_t\vec{v} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}\big] = -\mathrm{grad}P + \gamma\Delta\vec{v} + (\zeta + \frac{\gamma}{3})\mathrm{grad}\,\mathrm{div}(\vec{v}), \tag{17}$$

где γ — сдвиговая вязкость, ζ — объёмная вязкость, P — давление, ρ — плотность.

Рассмотрение случая несжимаемой жидкости приводит к необходимости учёта дополнительных членов в уравнении (9).

По аналогии с уравнением Навье-Стокса в уравнении (9) будут присутствовать член с давлением и член с объёмной вязкостью. Их отсутствие ранее объясняется равенством нулю $\mathrm{div}v$, следующим из поперечности поля скорости. Таким образом, в уравнение (9) в случае сжимаемой жидкости необходимо добавить отсутствовавшие в случае несжимаемой жидкости члены вида:

$$1) \quad \frac{1}{\rho}(\zeta + \frac{\gamma}{3})\mathrm{graddiv}(\vec{v}), \tag{18}$$

$$2) \quad \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}P. \tag{19}$$

Также необходимо учесть и то, что члены вида $\varphi_a\partial_i v_i$ более не являются нулевыми. Это приводит нас к необходимости делать выбор в пользу вида записи в качестве конвективного члена $\partial(v\varphi_a)$ или члена соответствующего переносу поля $v\partial(\varphi_a)$ в уравнениях движения нашей модели. Выбор формы записи будет определяться наличием закона сохранения на то или иное поле.

Рассмотрим как в таком случае будет меняться система уравнений по сравнению с моделью F, в которой поле скорости считается поперечным. Поясним, каким образом осуществлялся выбор вида системы уравнений, а также покажем, что так записанная система обладает стационарным пределом, то есть для неё выполняется уравнение (11).

Сперва стоит пояснить, почему использование модели F с учётом поперечности поля скорости не годится для описания гидродинамики сжимаемой жидкости.

Во-первых, как было указано выше, сама система уравнений (6)–(9) более не является точно определённой ввиду того, что равенство $\partial(v\varphi_a) = v\partial(\varphi_a)$ теперь не выполняется, а следовательно, возникает необходимость в выборе того или иного вида записи этих членов. Этот выбор не является произвольным, из-за того что для одних полей справедливо наличие закона сохранения, а для других — нет. А потому выбор из двух вариантов наиболее простого и удобного невозможен.

Во-вторых, уравнение на поле скорости v в нашем случае необходимо дополнить членами, которые справедливы для уравнения Навье-Стокса, описывающего сжимаемую жидкость. Добавление новых членов в одно из уравнений приведёт к изменению других, связанных с данным, уравнений.

Как будет показано далее, учёт сжимаемости главным образом влияет на вид записи уравнения на поле v.

Итак, начнём с того, что определим, для каких из полей следует писать закон сохранения.

Для полей ψ,ψ^+ как для полей параметра порядка закона сохранения нет, а потому форма записи соответствующих членов выбирается в виде $v_i\partial_i\varphi'$, где φ' поле ψ или ψ^+.

Поле m есть поле, отвечающее за плотность и внутреннюю энергию. Для него, очевидно, наличие закона сохранения является физически обоснованным. В таком случае необходимо соответствующий член из уравнения на m записывать в виде $\partial_i(mv_i)$.

В уравнении на поле v необходимо использовать член вида $v_i\partial_i v$, так как соответствующая форма записи используется в уравнении Навье-Стокса (17).

Таким образом, по сравнению с моделью [2] мы получили следующие изменения рассматриваемых членов:

$$\partial_i(v_i\psi) \to v_i\partial_i(\psi),$$

$$\partial_i(v_i\psi^+) \to v_i\partial_i(\psi^+),$$

$$\partial_i(v_i v) \to v_i\partial_i(v).$$

Для того чтобы написать уравнение на поле скорости v, нужно определиться с тем, как член со второй вязкостью и член с градиентом давления из уравнения (17) будут выглядеть в рамках нашей модели.

В качестве члена, представленного в уравнении (18), будем использовать $\xi\partial_j\partial_i v_i$, здесь $\xi = \frac{1}{\rho}(\zeta + \frac{\gamma}{3})$. В свою очередь, член (19) требуется преобразовать таким образом, чтобы он мог быть представлен через используемые в модели поля. Для этого достаточно воспользоваться формулой, связывающей плотность с давлением. Приведем её:

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S,$$

где c — скорость звука. В таком случае (19) можно записать в виде:

$$\frac{c^2}{\rho}\partial_i\rho.$$

Однако известно, что в данной науке оказывается удобно члены в уравнениях Ланжевена представлять в виде $\delta S_{st}/\delta\varphi_a$ с некоторым множителем (даже записывая их иначе такой вид впоследствии будет получен в результате ренормировки), а потому окончательно добавка в уравнение на поле v будет выглядеть:

$$\frac{c^2}{\rho}\partial_i\frac{\delta S_{st}}{\delta m},$$

где

$$\frac{\delta S_{st}}{\delta m} = g_2\psi^+\psi - m + h.$$

Выбор $\delta S_{st}/\delta m$ также обусловлен наличием в нём поля m, отвечающего в том числе и за плотность.

Итак, покажем уравнения, полученные на данном этапе:

$$\partial_t\psi + v_i\partial_i(\psi) = \lambda(1+ib)\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big] + i\lambda g_3\psi\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + \eta_{\psi^+}, \quad (20)$$

$$\partial_t m + \partial_i(v_i m) = -\lambda u \partial^2\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + i\lambda g_3\big[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+\big] + \eta_m, \tag{21}$$

$$\partial_t\psi^+ + v_i\partial_i(\psi^+) = \lambda(1-ib)\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] - i\lambda g_3\psi^+\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + \eta_\psi, \tag{22}$$

$$\partial_t v = \nu\partial^2 v + \xi\partial\partial_i v_i - v_i\partial_i(v) - \psi^+\partial\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big] \tag{23}$$

$$-\frac{c^2}{\rho}\partial(g_2\psi^+\psi - m + h) - \psi\partial\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] - m\partial\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + \eta_v.$$

Однако, как нетрудно видеть, такая система не является системой уравнений Ланжевена с известным статическим пределом. В частности, $v_i\partial_i(v)$, а также $\frac{c^2}{\rho}\partial_i(g_2\psi^+\psi - m + h)$ из (23), нарушают выполнение соотношения (11). Также учёт сжимаемости привёл к появлению ещё одного препятствия к получению системы, приводящей к стационарности. Члены уравнения Фоккера-Планка, порождённые $-\psi\partial[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+]$ из (23) и $v_i\partial_i(\psi)$ из (20), более не сокращают друг друга. Покажем это, воспользовавшись уже известным подходом:

$$-\frac{\delta}{\delta v_i}\Big[\psi\partial[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+]\Big]e^{S_{st}} - \frac{\delta}{\delta\psi}[v_i\partial_i(\psi)]e^{S_{st}}$$

$$= -\Big[\psi\partial[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+]\Big]\frac{\delta S_{st}}{\delta v_i}e^{S_{st}} - [v_i\partial_i(\psi)]\frac{\delta S_{st}}{\delta\psi}e^{S_{st}}$$

$$= -\psi\partial_i[\frac{\delta S_{st}}{\delta\psi}]\frac{\delta S_{st}}{\delta v_i}e^{S_{st}} - \partial_i(\psi)\frac{\delta S_{st}}{\delta\psi}\frac{\delta S_{st}}{\delta v_i}e^{S_{st}}$$

$$= -\Big[\psi\partial[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+]\Big]v_i e^{S_{st}} - [v_i\partial_i(\psi)]\Big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\Big]e^{S_{st}}$$

Здесь были подставлены $\partial S_{st}/\partial\psi$ и $\partial S_{st}/\partial v_i$. Очевидно, это равенство выполнялось в случае несжимаемой жидкости, теперь же, ввиду того, что $\partial_i v_i \neq 0$, члены не сокращаются. Для решения данной проблемы было предложено изменить коэффициент межмодовой связи в уравнении на поле v:

$$-\psi\partial \to -\partial(\psi).$$

Как нетрудно заметить такая замена позволить сократить соответствующие члены в уравнении Фоккера-Планка. Применение аналогичных рассуждений справедливо и для членов $v_i\partial_i(\psi^+)$ из (22) и -$\psi^+\partial[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi]$ из (23), поскольку эта пара членов отличается от предыдущей лишь комплексным сопряжением.

Все остальные члены системы уравнений Ланжевена не претерпели изменений, а значит, для них всё ещё справедливыми оказываются выкладки из модели [2]. Можно записать вклад члена $v_i\partial_i(v)$ в уравнение Фоккера-Планка:

$$-\frac{\delta}{\delta v_i}[v_j\partial_j(v_i)]e^{S_{st}} = \delta_{ij}\partial_j(v_i)e^{S_{st}} - \partial_j(v_j)e^{S_{st}} + [v_j\partial_j(v_i)]\frac{\delta S_{st}}{\delta v_i}e^{S_{st}}$$

здесь второе слагаемое было получено путем взятия интеграла по частям. Заметим, что первое и второе слагаемые обнуляются как интегралы от полной производной. Таким образом, следует отдельно рассмотреть третье слагаемое. Для этого учтём, что $\delta S_{st}/\delta v_i = -v_i$:

$$\frac{\delta}{\delta v_i}[v_j\partial_j(v_i)]e^{S_{st}} = -[v_j\partial_j(v_i)]v_i e^{S_{st}} \neq 0. \tag{24}$$

В случае со вторым членом достаточно внести необходимую поправку в уравнение на поле m. Эту поправку можно представить в виде:

$$\frac{c^2}{\rho}\partial_i(v_i).$$

Однако, если учесть тот факт, что ρ не является величиной постоянной, а должно зависеть от поля m, которое, как упоминалось ранее, есть поле, ответственное, в частности, за флуктуации плотности, выясняется, что и такая замена не помогает добиться желаемого результата. Покажем это, выписав соответствующие члены из уравнения Фоккера-Планка:

$$\frac{\delta}{\delta v}[\frac{c^2}{\rho}\partial_i(g_2\psi^+\psi - m + h)]e^{S_{st}} + \frac{\delta}{\delta m}[\frac{c^2}{\rho}\partial_i(v_i)]e^{S_{st}} \neq 0. \tag{25}$$

Связь ρ с m можно представить в виде:

$$\rho = \rho_\lambda + (\frac{\partial\rho}{\partial m})m,$$

где $\partial\rho/\partial m$ некоторая постоянная величина, которая может быть приравнена единице путём растяжения полей, а ρ_λ — некоторая постоянная плотность исследуемого флюида вблизи λ-точки.

Итак, мы приходим к выводу, что данная модель всё ещё нуждается в доопределении. Последующие изменения должны быть направлены на устранение упомянутых проблем модели и уже несут искусственный характер.

Для этого было предложено, в первую очередь, внести изменения в вид стационарного действия. Максвелловский член $v^2/2$ из уравнения (5) необходимо заменить на $\rho v^2/2$. Такая необходимость вызвана тем, что плотность вещества в модели со сжимаемой жидкостью перестаёт быть величиной постоянной, а значит, невозможно добиться равенства её единице путём растяжения, как было сделано в модели [2].

Таким образом, статическое действие нашей модели приобретает вид:

$$S_{st} = -\partial\psi^+\partial\psi - \frac{g_1}{6}(\psi^+\psi)^2 + g_2 m\psi^+\psi - \frac{1}{2}m^2 - \rho\frac{v^2}{2} + mh, \tag{26}$$

Такое изменение моментально приводит к новому виду всей системы уравнений:

$$\partial_t\psi + \rho v_i\partial_i(\psi) = \lambda(1+ib)\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big] + i\lambda g_3\psi\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}\big] + \eta_{\psi^+}, \tag{27}$$

$$\partial_t m + \partial_i[v_i\rho m] = -\lambda u\partial^2\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}\big] + i\lambda g_3\big[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+\big] + \frac{c^2}{\rho}\partial_i(v_i) + \eta_m, \tag{28}$$

$$\partial_t\psi^+ + \rho v_i\partial_i(\psi^+) = \lambda(1-ib)\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] - i\lambda g_3\psi^+\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}\big] + \eta_\psi, \tag{29}$$

$$\partial_t v = \nu\partial^2[\rho v] + \xi\partial\partial_i v_i - \rho v_i\partial_i[v] - \partial(\psi^+)\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big]$$

$$-\frac{c^2}{\rho}\partial(g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}) - \partial(\psi)\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] - \rho\partial\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}\big] + \eta_v. \tag{30}$$

Как можно заметить, во всех уравнениях системы, как и в S_{st}, появляются члены вида ρv_i, поэтому будет удобно ввести новое поле:

$$p_i \equiv \rho v_i. \tag{31}$$

Введённое поле импульса p_i заменит в нашей системе поле скорости v_i. Такая замена приводит к появлению нового уравнения движения.

При построении уравнения на поле v, мы отталкивались от вида уравнения Навье-Стокса (17), теперь посмотрим, как изменится (17) при замене $p = \rho v$:

$$\partial_t p = -\nabla_i(p v_i) - \mathrm{grad}P + \gamma\Delta\vec{v} + (\zeta + \frac{\gamma}{3})\mathrm{graddiv}(\vec{v}). \tag{32}$$

Стационарное действие модели при замене (31):

$$S_{st} = -\partial\psi^+\partial\psi - \frac{g_1}{6}(\psi^+\psi)^2 + g_2 m\psi^+\psi - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho} + mh, \tag{33}$$

Приведём систему уравнений с учётом (31) и (32):

$$\partial_t\psi + v_i\partial_i(\psi) = \lambda(1+ib)\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big] \tag{34}$$

$$+i\lambda g_3\psi\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{1}{2}v^2\big] + \eta_{\psi^+},$$

$$\partial_t\psi^+ + v_i\partial_i(\psi^+) = \lambda(1-ib)\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] \tag{35}$$

$$-i\lambda g_3\psi^+\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{1}{2}v^2\big] + \eta_{\psi},$$

$$\partial_t m + \partial_i(p_i) = -\lambda u\partial^2\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{1}{2}v^2\big] \tag{36}$$

$$+i\lambda g_3\big[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+\big] - c^2\partial_i(v_i) + \eta_m,$$

$$\partial_t p_i = \gamma\partial^2 v_i + (\zeta + \frac{\gamma}{3})\partial_j\partial_i v_i - \partial_j(p_i v_j) - \partial_i(\psi^+)\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big] \tag{37}$$

$$-\partial_i(\psi)\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] - c^2\partial_i\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}\big]$$

$$-\rho\partial_i\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}\big] + \eta_p.$$

Для нас оказалось удобным, что $\delta S_{st}/\delta p = -v$, это заметно упростило запись уравнений Ланжевена. Более того, переход к полю импульса позволил нам избавиться от проблемы, возникшей в (28), поскольку $c^2\partial_i[g_2\psi^+\psi - m + h + \frac{v^2}{2}]$ из (37) не содержит в качестве множителя $1/\rho$, а значит, подобрать компенсирующий его в уравнении Фоккера-Планка член из уравнения на поле m становится нетрудно, и в нашем случае он равен $c^2\partial_i(v_i)$.

Обратим внимание на уравнение (36). В отличие от (28), где имелся член $\partial_i[v_i\rho m]$ теперь в (36) мы пишем $\partial_i[p_i] \equiv \partial_i[\rho v_i]$. Такое изменение оказалось возможным благодаря тому что, мы фактически перешли от уравнение на m к уравнению на ρ, воспользовавшись тем, как связаны эти величины, а также формой уравнения (28), позволяющей провести такую замену без изменения структуры уравнения.

В результате многочисленных преобразований, в уравнении на поле p у нас появились члены, требующие дополнительного анализа на предмет их влияния на существование стационарного предела. Это члены:

$$c^2\partial_i[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}], \tag{38}$$

$$(\zeta + \frac{\gamma}{3})\partial_i(\partial_j v_j), \tag{39}$$

$$\partial_j(p_i v_j). \tag{40}$$

С влиянием (38) мы разобрались в одном из предыдущих шагов, введя новый член в уравнение на поле m.

Члены (39), (40) стоит обсудить подробнее. Член (39) совместно с $\gamma\partial^2 v_i$ можно представить в виде $\alpha(\delta S_{st}/\delta p)$, следовательно, он не влияет на существование стационарного предела.

Член (40) в уравнении Фоккера-Планка частично сокращается благодаря $\partial_i(p_i)$ из (36). Покажем это:

$$-\frac{\delta}{\delta m}\big[\partial_i(p_i)\big]e^{S_{st}} - \frac{\delta}{\delta p_i}\big[\partial_j(p_i v_j)\big]e^{S_{st}} = \big[\partial_i(p_i)\big]\frac{\delta S_{st}}{\delta m}e^{S_{st}} - \big[\partial_j(p_i v_j)\big]\frac{\delta S_{st}}{\delta p_i}e^{S_{st}}$$

$$= -[\partial_i(p_i)]\big[g_2\psi^+\psi - m + h + -\frac{v^2}{2}\big]e^{S_{st}} - \big[\partial_j(p_i v_j)\big]v_i e^{S_{st}} = -[\partial_i(p_i)]\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big]e^{S_{st}}. \tag{41}$$

То, что остаётся, должно сокращаться с единственным нерассмотренным членом уравнения (37):

$$-\rho\partial_i[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}], \tag{42}$$

который в уравнении Фоккера-Планка образует слагаемое

$$-\frac{\delta}{\delta p_i}\Big[\rho\partial_i[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}]\Big]e^{S_{st}}. \tag{43}$$

Очевидно, что для того, чтобы (41) было равно (43), необходимо внести изменение в член (42) из уравнения на поле p. Вместо (42) нам следует писать:

$$-\rho\partial_i[g_2\psi^+\psi - m + h]. \tag{44}$$

Тогда (43) переписывается в виде:

$$-\frac{\delta}{\delta p_i}\Big[\rho\partial_i[g_2\psi^+\psi - m + h]\Big]e^{S_{st}}. \tag{45}$$

Теперь, проинтегрировав (45) по частям, мы получаем то же выражение, что и (46), только с обратным знаком, что и доказывает наличие стационарного предела нашей модели.

Приведём окончательный вид уравнений Ланжевена и S_{st}:

$$S_{st} = -\partial\psi^+\partial\psi - \frac{g_1}{6}(\psi^+\psi)^2 + g_2 m\psi^+\psi - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho} + mh, \tag{46}$$

$$\partial_t\psi + v_i\partial_i(\psi) = \lambda(1+ib)\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big] \tag{47}$$

$$+i\lambda g_3\psi\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{1}{2}v^2\big] + \eta_{\psi^+},$$

$$\partial_t\psi^+ + v_i\partial_i(\psi^+) = \lambda(1-ib)\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] \tag{48}$$

$$-i\lambda g_3\psi^+\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{1}{2}v^2\big] + \eta_{\psi},$$

$$\partial_t m + \partial_i(p_i) = -\lambda u\partial^2\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{1}{2}v^2\big] \tag{49}$$

$$+i\lambda g_3\big[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+\big] - c^2\partial_i(v_i) + \eta_m,$$

$$\partial_t p_i = \gamma\partial^2 v_i + (\zeta + \frac{\gamma}{3})\partial_j\partial_i v_i - \partial_j(p_i v_j) - \partial_i(\psi^+)\big[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi\big] \tag{50}$$

$$-\partial_i(\psi)\big[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+\big] - c^2\partial_i\big[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}\big]$$

$$-\rho\partial_i\big[g_2\psi^+\psi - m + h\big] + \eta_p,$$

где γ — переобозначенная во избежание совпадения со случайной силой η_{φ_a} первая вязкость из уравнения Навье-Стокса.

Как можно заметить, учёт сжимаемости жидкости усложняет вид уравнений Ланжевена по сравнению с моделью, в которой жидкость полагалась несжимаемой.

Приведем формулу:

$$S_{dyn} = \frac{\varphi_a^{'} D_{\varphi_a}\varphi_a^{'}}{2} - \varphi_a^{'}\Big(\partial_t\varphi_a + (\alpha_{a,b} + \beta_{a,b})\frac{\delta S_{st}}{\delta\varphi_b}\Big). \tag{51}$$

С её помощью можно записать динамическое действие нашей модели.

Для случайных сил η_{φ_a} корреляторы представимы в виде:

$$D_{\varphi_a} = \langle\eta_{\varphi_a}\eta_{\varphi_a}\rangle = 2\alpha_{a,a}\delta(t-t') \tag{52}$$

По (51) стандартным образом несложно построить MSR динамическое действие теории:

$$S_{dyn} = 2\lambda(\psi^+)'\psi' - \lambda u m'\partial^2 m' + p' D_p p' - \psi'\Big(-v_i\partial_i(\psi) + \lambda(1+ib)[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi]$$

$$+i\lambda g_3\psi[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{1}{2}v^2]\Big) - \psi^{+\prime}\Big(-v_i\partial_i(\psi^+) + \lambda(1-ib)[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+]$$

$$-i\lambda g_3\psi^+[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{1}{2}v^2]\Big) - m'\Big(-\partial_i(p_i) - \lambda u\partial^2[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{1}{2}v^2]$$

$$+i\lambda g_3[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+] - c^2\partial_i(v_i)\Big) - p'\Big(\gamma\partial^2 v_i + (\zeta + \frac{\gamma}{3})\partial_j\partial_i v_i - \partial_j(p_i v_j) - \partial_i(\psi^+)[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2 m\psi])$$

$$-\partial_i(\psi)[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2 m\psi^+] - c^2\partial_i[g_2\psi^+\psi - m + h + -\frac{v^2}{2}] - \rho\partial_i[g_2\psi^+\psi - m + h]\Big) \tag{53}$$

MSR действие удобно представить для дальнейшего анализа в следующем виде, где был вновь выполнен переход к полю скорости v, выражения конкретных коэффициентов a_i, b_j $(i = 1, 2, ...25\ j = 1, 2, 3)$ через физические параметры приведены в таблице ниже.

$$\begin{aligned}
S_{dyn} = b_1(\psi^+)'\psi' + b_2 m'\partial^2 m' + b_3\partial_i v_j'\partial_i v_j' + b_4\partial_j v_j'\partial_i v_i' + a_1{\psi^+}'\partial^2\psi + a_2\psi'\partial^2\psi^+ \\
+a_3 m'\partial_i(v_i) + a_4 m'\partial^2 m + a_5 v'\partial^2 v_i + a_6 v'\partial_i\partial_j v_j + a_7 v'\partial_i m + {\psi^+}'\partial_t\psi + \psi'\partial_t\psi^+ \\
+m'\partial_t m + v'\partial_t v - {\psi^+}'\Big(- v_i\partial_i(\psi) + a_8\psi^+\psi\psi + a_9 m\psi + a_{10}\psi v^2\Big) \\
-\psi'\Big(- v_i\partial_i(\psi^+) + a_{11}\psi^+\psi\psi^+ + a_{12} m\psi^+ + a_{13}\psi^+ v^2\Big) \\
-m'\Big(- m\partial_i(v_i) + a_{14}\partial^2(\psi^+\psi) + a_{15}\partial^2 v^2 + a_{16}\psi^+\partial^2\psi + a_{17}\psi\partial^2\psi^+\Big) \\
-v_i'\Big(- \partial_j(v_i v_j) + a_{18}\partial_i(\psi^+)\partial^2\psi + a_{19}\partial_i(\psi^+)\psi^+\psi\psi + a_{20}\partial_i(\psi^+)m\psi \\
+a_{21}\partial_i(\psi)\partial^2\psi^+ + a_{22}\partial_i(\psi)\psi^+\psi\psi^+ + a_{23}\partial_i(\psi)m\psi^+ + a_{24}\partial_i(\psi^+\psi) + a_{25}\partial_i(v^2)\Big).
\end{aligned} \tag{54}$$

В таблице ниже приведена расшифровка скомбинированных параметров модели. Введение такой замены оправдывается значительным сокращением записи уравнений модели.

b_1	-2λ	a_5	$-\frac{\gamma}{\rho_0}$	a_{12}	$-\lambda(1-ib)g_2 - i\lambda g_3 g_2$	a_{19}	$-\frac{g_1}{3\rho_o}$
b_2	λu	a_6	$-\frac{\zeta}{\rho_0} - \frac{\gamma}{3\rho_0}$	a_{13}	$-\frac{i\lambda g_3}{2}$	a_{20}	$\frac{g_2}{\rho_0}$
b_3	$-g_4\frac{\gamma}{\rho_0}$	a_7	$-\frac{c^2}{\rho_0}$	a_{14}	$-\lambda u g_2$	a_{21}	$-\frac{1}{\rho_0}$
b_4	$-g_4(\frac{\gamma}{3\rho_0} + \frac{\zeta}{\rho_0})$	a_8	$i\lambda g_3 g_2 - \lambda(1+ib)\frac{g_1}{3}$	a_{15}	$\frac{-\lambda u}{2}$	a_{22}	$-\frac{g_1}{3\rho_o}$
a_1	$-\lambda(1+ib)$	a_9	$\lambda(1+ib)g_2 - i\lambda g_3 g_2$	a_{16}	$i\lambda g_3$	a_{23}	$\frac{g_2}{\rho_0}$
a_2	$\lambda(ib-1)$	a_{10}	$-\frac{i\lambda g_3}{2}$	a_{17}	$-i\lambda g_3$	a_{24}	$-g_2(\frac{c^2}{\rho_0}+1)$
a_3	$\rho_0 + c^2$	a_{11}	$-i\lambda g_3 g_2 - \lambda(1-ib)\frac{g_1}{3}$	a_{18}	$-\frac{1}{\rho_0}$	a_{25}	$-\frac{c^2}{2\rho_0}$
a_4	$-\lambda u$						

Таблица 1: Соответствие коэффициентов a_i, b_j параметрам модели.

4 Размерный анализ

В данном разделе мы займемся изучением размерностей полей и параметров модели. Все расчеты выполнялись стандартным для критической динамики области. Стоит отдельно отметить, что интересующая нас область - инфракрасная область (ИК). Интерес именно к этой области характерен, как для задачи статистической физики.

Как и положено произвольному действию MSR модели (54) обладает одновременно и пространственной и временной масштабной инвариантностью [1], поэтому для всех полей и параметров можно ввести независимые пространственную d^p и временную d^ω канонические размерности. Данные размерности приведены в Таблицах 2,3,4. Традиционно полагается $d_x^p = d_t^\omega = -1$, $d_t^p = d_x^\omega = 0$.

Действие (54) диктует дисперсионное соотношение в форму $i\omega \sim k^2$. Поэтому полная каноническая размерность d_F определяется формулой $d_F = 2d_F^\omega + d_F^p$ [1]. Именно эти размерности определяют ИК существенность или несущественность отдельных членов действия (54), и они также приведены в Таблицах 2,3,4.

F	ψ, ψ^+	$\psi', \psi^{+'}$	m, m'	v	v'	b_1	b_2	b_3, b_4
d_F^p	$\frac{d}{2}-1$	$\frac{d}{2}+1$	$\frac{d}{2}$	-1	$d+1$	-2	-2	-8
d_F^ω	0	0	0	1	-1	1	1	3
d_F	$\frac{d}{2}-1$	$\frac{d}{2}+1$	$\frac{d}{2}$	1	$d-1$	0	0	-2

Таблица 2: Канонические размерности полей и параметров модели

F	a_1, a_2, a_4, a_5, a_6	a_8, a_{11}	$a_9, a_{12}, a_{14}, a_{16}, a_{17}$	a_{10}, a_{13}	a_3	a_{15}
d_F^p	-2	$2-d$	$-\frac{d}{2}$	2	$\frac{d}{2}$	$-\frac{d}{2}$
d_F^ω	1	1	1	-1	0	1
d_F	0	$4-d$	$2-\frac{d}{2}$	0	$\frac{d}{2}$	$-2-\frac{d}{2}$

Таблица 3: Канонические размерности полей и параметров модели. Продолжение 1

F	a_{18}, a_{21}	a_{19}, a_{22}	a_{20}, a_{23}	a_{24}	a_7	a_{25}
d_F^p	$-2-d$	$2-2d$	$-\frac{3d}{2}$	$-d$	$-\frac{d}{2}-2$	0
d_F^ω	2	2	2	2	2	0
d_F	$2-d$	$6-2d$	$4-\frac{3d}{2}$	$4-d$	$2-\frac{d}{2}$	0

Таблица 4: Канонические размерности полей и параметров модели. Продолжение 2

В соответствие с приведенной таблицей размерностей наиболее ИК существенным параметром теории является a_3. Если бы этот параметр являлся пертурбативным зарядом, для построения ИК эффективной теории следовало бы в динамическом действии просто отбросить все прочие, менее существенные члены взаимодействия. Однако, в данном случае a_3 является коэффициентом при квадратичном по полям члене действия $m'\partial_i(v_i)$, поэтому его влияние на диаграммы теории возмущений неочевидно. Аналогичная ситуация имеет место в H модели критической динамики фазового перехода жидкость – пар, и в соответствии [1] требует специального анализа.

Для подробноого изучения вкладов, входящих в MSR-действие, нам понадобятся пропагаторы теории. Квадратичная часть действия (54) определяет пропагаторы полей в достаточно громоздкой форме, поэтому мы привели полученные выражения в Приложении. Поскольку коэффициенты при квадратичных членах свободной части динамического MSR действия имеют разные канонические размерности, неудивительно, что пропагаторы содержат вклады в разной степени существенные в ИК области. В полном соответствии с приведенным выше размерным анализом в пропагаторах полей $m, m', v_\parallel, v'_\parallel$ главными оказываются члены с коэффициентом a_3. Отбрасывая в пропагаторах, представленных в приложении, ИК несущественные вклады, получим данные пропагаторы ИК эффективной теории

$$G_{v_\parallel m} = \Big(\frac{-1}{(a_3a_7)^2k^4}\Big)\Big((i\omega - a_4k^2)ib_3k^2a_3k_i - a_7ik_ib_2k^2(i\omega + (a_6+a_5)k^2)\Big) \tag{55}$$

$$G_{v_\parallel v_\parallel} = \Big(\frac{1}{(a_3a_7)^2k^4}\Big)\Big(b_3k^2(i\omega + a_4k^2)(i\omega - a_4k^2) + (a_8)^2b_2k^4\Big)P_\parallel$$

$$G_{mm} = \frac{-b_2k^2(i\omega + (a_6+a_5)k^2)}{(i\omega - a_4k^2)(a_3a_7k^2)}$$

$$+\Big(\frac{a_3ik_i}{a_3a_7k^2}\Big)\Big(\frac{(i\omega - a_4k^2)ib_3k^{\varepsilon-\delta}a_3k_i - a_7ik_ib_2k^2(i\omega + (a_6+a_5)k^2)}{(a_3a_7k^2)(i\omega - a_4k^2)}\Big)$$

$$G_{v'_\parallel m} = \frac{ik_i}{a_7k^2} \qquad G_{v'_\parallel v_\parallel} = \frac{-i\omega + a_4k^2}{a_3a_7k^2}P_\parallel$$

$$G_{m'v_\parallel} = \frac{ik_i}{a_3k^2} \qquad G_{m'm} = \frac{-i\omega - (a_6+a_5)k^2}{a_3a_7k^2}$$

$$G_{v'_\perp v_\perp} = \frac{P_\perp}{i\omega + a_5k^2} \qquad G_{v_\perp v_\perp} = \frac{b_4k^2}{\omega^2 + a_5^2k^4}P_\perp$$

Здесь $P_\perp$ и $P_\parallel$ представляют из себя поперечный и продольный проекторы, причем $P_\perp\partial^2 = \partial_i\partial_j$ и $P_\perp + P_\parallel = 1$

Особый интерес вызывают не столько пропагатора, сколько диаграммы, которые можно образовать с их использованием. Попробуем рассмотреть, какие диаграммы могут быть образованы с использованием этих пропагаторов. Для этого рассмотри все возможные спаривания посредством пропагаторов полей $m, m', v_\parallel, v'_\parallel$ и определим канонические размерности полученных конструкций. Нетрудно увидеть, что существует большое число спариваний.

Однако, процесс можно упростить, если вспомнить, что нам известны размерности всех параметров и полей S_{dyn}. Запишем формулу:

$$d[\varphi_a] + d[\varphi_b] - d[G_{\varphi_a\varphi_b}] - D - 2 + d[a_j] + d[a_i] = d[a_{ij}],$$

здесь φ_a, φ_b– одно из полей $m, m', v_\parallel, v'_\parallel$, D–размерность пространства, a_i, a_j-параметры при спаривающихся вершинах, $a_{i,j}$–параметр образовавшейся конструкции. Проанализировав все возможные спаривания, получили, что ИК сущетвенные конструкции можно образовать посредством только одного пропагатора:

$$G_{v'_\parallel m} = \frac{ik_i}{a_7k^2}$$

Посредством этого пропагатора образуются конструкции строго определенного вида, вид которых говорит нам о том что в действии (54) из размерных соображений должны выжить лишь члены, имееющие отношение к А-модели.

В выражениях (55) мы оставили лишь главные, однородные с учетом используемого дисперсионного уравнения члены в числителях и знаменателях пропагаторов. Тем не менее из приведенных соотношений видно, что наличие коэффициента a_3 с положительной канонической размерностью в квадратичной части действия привело к тому, что в числителях пропагаторов $G_{v_\parallel m}$,$G_{v_\parallel v_\parallel}$,$G_{mm}$ встречается маргинальная (с нулевой канонической размерностью) комбинация параметровb_3a_3, включающая в себя ИК несущественный по формальному размерному параметру коэффициент b_3.

Однако, более важно, что все пропагаторы (55), кроме $G_{v'_\parallel m}$, $G_{v'_\perp v_\perp}$, содержат ИК существенный коэффициент a_3 в знаменателе (а $G_{v_\perp v_\perp}$ – ИК несущественный параметр b_3 в числителе). Это делает ИК несущественным вклад всех диаграмм со вставками этих пропагаторов. Здесь важно отметить, что в соответствии с результатами Таблиц 2,3,4 в теории (54) нет зарядов при вершинах с положительной канонической размерностью.

В первую очередь нас интересует критическая динамика основных полей ψ, ψ^+. Все пропагаторы, содержащие поля m', оказались ИК несущественными, поэтому вершины с полем m' не дают вклада в ведущие члены ИК асимптотик функций Грина основных полей. Поэтому, обращая матрицу оставшихся маргинальных пропагаторов $G_{\psi'\psi^+}$, $G_{\psi\psi'^+}$, $G_{\psi\psi^+}$, $G_{v'_\parallel m}$, $G_{v'_\perp v_\perp}$, и отбрасывая все ИК несущественные вершины действия (54) мы можем написать ИК эффективный производящий функционал функций Грина основных полей в виде

$$G_{eff} = \int D\psi^+ D\psi D\psi'^+ D\psi' Dm Dm' D\mathbf{v} D\mathbf{v}' \delta(m') e^{-S'_{dyn} + A\psi^+ + A^+\psi + A'\psi'^+ + A'^+\psi'}, \qquad (56)$$

где различные A введены в качестве источников полей, $\delta(...)$ – функциональная δ - функция, а действие имеет вид

$$\begin{aligned} S'_{dyn} = b_1(\psi^+)'\psi' + a_1\psi^{+'}\partial^2\psi + a_2\psi'\partial^2\psi^+ + a_5 v'_\perp \partial^2 v_\perp + a_7 v'\partial_i m \qquad (57) \\ +\psi^{+'}\partial_t\psi + \psi'\partial_t\psi^+ + v'_\perp\partial_t v_\perp - \psi^{+'}\Big(- v_i\partial_i(\psi) + a_8\psi^+\psi\psi + a_9 m\psi + a_{10}\psi v^2\Big) \\ -\psi'\Big(- v_i\partial_i(\psi^+) + a_{11}\psi^+\psi\psi^+ + a_{12}m\psi^+ + a_{13}\psi^+ v^2\Big) \\ -m'\Big(- m\partial_i(v_i) + a_{14}\partial^2(\psi^+\psi) + a_{16}\psi^+\partial^2\psi + a_{17}\psi\partial^2\psi^+\Big) \\ -v'\Big(- \partial_j(v_i v_j) + a_{24}\partial_i(\psi^+\psi) + a_{25}\partial_i(v^2)\Big). \end{aligned}$$

Поля $v'_\perp$, $v'_\parallel$ в (57) играют роль множителей Лагранжа, интегрирование по ним в (56) может быть выполнено явно и приводит к появлению новых функциональных δ - функций

$$\delta(\partial_t \mathbf{v}_\perp + P_\perp((\nabla\mathbf{v})\mathbf{v})) - \nu\partial^2\mathbf{v}_\perp), \quad \delta(a_7\nabla m - P_\parallel((\nabla\mathbf{v})\mathbf{v})) + a_{24}\nabla(\psi^+\psi) + a_{25}\nabla(v^2))$$

Диктуемая первой δ - функцией связь представляет собой просто уравнение Навье-Стокса. В рассматриваемой задаче описания равновесных флуктуаций она очевидно разрешается единственным тривиальным способом $\mathbf{v} = 0$. Тогда вторая связь приводит к соотношению $m = -a_{24}(\psi^+\psi)/a_7$. Снимая в (56) интегрирования по полям m, $\mathbf{v}$ и m' с помощью функциональных δ - функцией, получим окончательное ИК эффективное динамическое MSR действие для описания критической динамики основных полей:

$$\begin{aligned} S_{dyn,eff} = b_1(\psi^+)'\psi' + a_1\psi^{+'}\partial^2\psi + a_2\psi'\partial^2\psi^+ \qquad (58) \\ +\psi^{+'}\partial_t\psi + \psi'\partial_t\psi^+ - \psi^{+'}\Big(+ a_8\psi^+\psi\psi - a_9 a_{24}(\psi^+\psi)/a_7\psi\Big) \\ -\psi'\Big(a_{11}\psi^+\psi\psi^+ - a_{12}a_{24}(\psi^+\psi)/a_7\psi^+\Big) \end{aligned}$$

Полученное действие, соответствует, показанному ещё в первом разделе. Оно отвечает модели A критической динамики. По своей сути (58) отличается от действия для модели A лишь учётом комплексности поля паряметра порядка а также растяжением полей и параметров модели.

5 Приложение

Полный набор пропагаторов модели.
(Учитывается условие $G_{\varphi_a\varphi_b} = G^*_{\varphi_b\varphi_a}$)

$$G_{v_\parallel m} = \Big(\frac{-1}{a_3 a_7 k^2 + (i\omega - a_4 k^2)(i\omega - (a_6 + a_5)k^2)}\Big)$$

$$\Big(\frac{(i\omega - a_4k^2)ib_3k^{\varepsilon-\delta}a_3k_i - a_7ik_ib_2k^2(i\omega + (a_6+a_5)k^2)}{-\omega^2 + i\omega a_4k^2 + i\omega(a_6+a_5)k^2 + a_4(a_6+a_5)k^4 + a_3a_7k^2}\Big)$$

$$G_{mm} = \frac{-b_2k^2(i\omega + (a_6+a_5)k^2)}{(i\omega - a_4k^2)(-\omega^2 + i\omega a_4k^2 + i\omega(a_6+a_5)k^2 + a_4(a_6+a_5)k^4 + a_3a_7k^2)} +$$

$$\Big(\frac{a_3ik_i}{a_3a_7k^2 + (i\omega - a_4k^2)(i\omega - (a_6+a_5)k^2)}\Big)$$

$$\Big(\frac{(i\omega - a_4k^2)ib_3k^{\varepsilon-\delta}a_3k_i - a_7ik_ib_2k^2(i\omega + (a_6+a_5)k^2)}{(-\omega^2 + i\omega a_4k^2 + i\omega(a_6+a_5)k^2 + a_4(a_6+a_5)k^4 + a_3a_7k^2)(i\omega - a_4k^2)}\Big)$$

$$G_{v_\parallel v_\parallel} = \Big(\frac{1}{a_3a_7k^2 + (i\omega - a_4k^2)(i\omega - (a_6+a_5)k^2)}\Big)$$

$$\Big(\frac{b_3k^{\varepsilon-\delta}(i\omega + a_4k^2)(i\omega - a_4k^2) + (a_7)^2b_2k^4}{-\omega^2 + i\omega a_4k^2 + i\omega(a_6+a_5)k^2 + a_4(a_6+a_5)k^4 + a_3a_7k^2}\Big)$$

$$G_{v'_\parallel m} = \frac{ia_3}{-\omega^2 + ia_4\omega k^2 + i(a_6+a_5)\omega k^2 + a_4(a_6+a_5)k^4 + a_3a_7k^2}$$

$$G_{v'_\parallel v_\parallel} = \frac{-i\omega - a_4k^2}{-\omega^2 + ia_4\omega k^2 + i(a_6+a_5)\omega k^2 + a_4(a_6+a_5)k^4 + a_3a_7k^2}$$

$$G_{m'v_\parallel} = \frac{ia_7}{-\omega^2 + ia_4\omega k^2 + i(a_6+a_5)\omega k^2 + a_4(a_6+a_5)k^4 + a_3a_7k^2}$$

$$G_{m'm} = \frac{-i\omega - (a_6+a_5)k^2}{-\omega^2 + ia_4\omega k^2 + i(a_6+a_5)\omega k^2 + a_4(a_6+a_5)k^4 + a_3a_7k^2}$$

$$G_{v'_\perp v_\perp} = \frac{-1}{i\omega + a_5k^2}$$

$$G_{v_\perp v_\perp} = \frac{b_4}{\omega^2 + a_5^2}$$

$$G_{\psi\psi^+} = \frac{-b_1}{(i\omega + a_2k^2)(i\omega - a_1k^2)}$$

$$G_{\psi^+\psi'} = \frac{1}{(-i\omega + a_2k^2)}$$

$$G_{\psi'\psi^+} = \frac{1}{(i\omega + a_2k^2)}$$

6 Заключение

В результате проделанной работы удалось написать систему стохастических уравнений Ланжевена с новым физически обоснованным стационарным пределом. Проделанный анализ размерностей привел нас к нетривиальным результатам, касательно оправданности использования той или иной модели для описания сверхтекучей жидкости. В частности нам удалось установить, что использование модели A, которую долгое время не рассматривали в качестве пригодной для описания этого явления оказывается наиболее правильным решением.

Стоит отметить, что подход, используемый в разделах выше, позволяет вычислять критические размерности ИК-несущественных полей v и m как составных операторов, а также определять критическую размерность вязкости — очень важного параметра для описания сверхтекучести. Данная задача сейчас проделывается, но не представлена в этой работе.

Список литературы

[1] А.Н. Васильев, Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике.СПб., 1998. С. 545–606

[2] М. В. Комарова, Д. М. Краснов, М.Ю. Налимов, Бозе-конденсация: критическая размерность вязкости, развитая турбулентность Теорет. Мат. Физ., Том 169, №1, С. 89–99.

[3] Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, Том VI Гидродинамика М. 2006. С. 71–76

[4] M. Dano, M. Hnatich, M. V. Komarova, D. M. Krasnov, T. Luivjansk, L. Miiin, M. Yu. Nalimov, Influence of hydrodynamic fluctuations on the phase transition in the E and F models of critical dynamics Theor. Math. Phys., 2013, Volume 176, Number 1, Pages 888–897

[5] Hohenberg P. C., Halperin B. I.: Theory of dynamic critical phenomena. Rev. Mod. Phys.49, 435–479 (1977), Folk, R., Moser, G.: Critical dynamics: a field-theoretical approach. J. Phys. A 39, R207-R313 (2006)