

Санкт–Петербургский государственный университет

**СМИРНОВ Кирилл Андреевич**

**Выпускная квалификационная работа**

**Современные методы численного расчета диаграмм  
Фейнмана**

Уровень образования: бакалавриат

Направление: 03.03.02 «Физика»

Основная образовательная программа: СВ.5011.2015 «Физика»

Научный руководитель:  
профессор, кафедра Статистической физики, д.ф.-м.н. **Аджемян Л.Ц.**

Рецензент:  
профессор, кафедра Физики высоких энергий и элементарных частиц, д.ф.-м.н.  
**Компаниец М.В.**

Санкт-Петербург  
2019

# Содержание

<b>1 Введение</b>	<b>3</b>
<b>2 Фейнмановское представление</b>	<b>4</b>
<b>3 Метод Sector Decomposition</b>	<b>5</b>
<b>4 Расчет верхней оценки <math>\mathcal{H}(\gamma)</math> безподграфных диаграмм</b>	<b>7</b>
<b>5 Заключение</b>	<b>11</b>
<b>Список литературы</b>	<b>12</b>

# 1 Введение

Метод ренормгруппы (РГ) является эффективным методом изучения фазовых переходов второго рода и критических явлений [1]. Он позволяет не только обосновать критический скейлинг, но и дает рецепт расчета критических индексов в виде  $\varepsilon$ -разложений, где  $\varepsilon = 4 - d$  — отклонение размерности пространства  $d$  от критического значения  $d_c = 4$ . Основной технической задачей является расчет так называемых ренормгрупповых функций, которая решается посредством расчета констант ренормировок. Ряды теории возмущений являются асимптотическими и для получения высокоточных значений критических показателей необходимо вычислить по возможности большее число членов ряда с последующим суммированием по Борелю. В последнее время в наиболее известной теории  $\varphi^4$  были проведены рекордные аналитические расчеты ренормгрупповых функций до шестого порядка теории возмущений (6-петлевое приближение) [2]<sup>1</sup>. В этой же работе был предложен оригинальный способ приближенной оценки старших членов разложения. Он основан на том, что наибольший вклад в ответ дают безподграфные диаграммы, часть из которых в старших порядках удалось рассчитать аналитически [3]. Для определения оставшихся диаграмм авторы работы [2] предложили процедуру, основанную на использовании фейнмановского представления диаграмм в сочетании с методом Sector Decomposition (SD) [6].

В последнее время этот метод широко используется для численных расчетов диаграмм, в работе [2] использовали другое известное его свойство. Сами по себе расчеты методом SD весьма трудоемки, однако он позволяет достаточно просто получить верхние оценки  $\mathcal{H}(\gamma)$  (Hepp bound) для безподграфных диаграмм. В работе [2] было показано, что присутствует достаточно простая корреляция между упомянутыми верхними оценками  $\mathcal{H}(\gamma)$  и фактическими значениями диаграмм  $\mathcal{P}(\gamma)$ <sup>2</sup>. Это позволяет, вычислив  $\mathcal{H}(\gamma)$  для неизвестных диаграмм, восстановить с достаточно высокой точностью их фактическое значение  $\mathcal{P}(\gamma)$ .

Целью работы является освоение вычисления диаграмм в фейнмановском представлении методом SD и проведение уточненных расчетов  $\mathcal{H}(\gamma)$  в пятипетлевом приближении с целью выяснения, как такое уточнение изменяет результат.

---

<sup>1</sup>Совсем недавно были получены семи-петлевые результаты [4]

<sup>2</sup>в обозначениях статьи [2]

## 2 Фейнмановское представление

Использование метода Sector Decomposition предполагает работу с фейнмановским представлением диаграмм. В этом разделе будет кратко описано мнемоническое правило его написания, а также проиллюстрировано на примерах 4-х петлевых диаграмм.

Рассмотрим модель  $\varphi^4$  с нулевым внешним полем. Тогда исходное действие определяется соотношением :

$$S(\varphi) = - \int [(\partial\varphi)^2/2 + \tau\varphi^2/2 + g\varphi^4/24]dx, \quad (1)$$

где  $g$  – константа связи.

Пропагатор теории с действием (1) в импульсном представлении равен

$$\langle\varphi\varphi\rangle = \frac{1}{q^2 + \tau} .$$

Диаграммы теории возмущений имеют вид:

$$J_n = \frac{1}{(2\pi)^{nd}} \int d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_n A_1^{-\lambda_1} \dots A_n^{-\lambda_l}, \quad A_j = q_j^2 + 1, \quad (2)$$

где  $\mathbf{q}_j$  – линейная комбинация импульсов интегрирования  $\mathbf{k}_s$ , измеренных в единицах  $\sqrt{\tau}$ , и внешних импульсов (у нас будет один внешний импульс  $\mathbf{p}$ ), число  $\lambda_j$  показывает, сколько раз встречается в диаграмме линия с импульсом  $\mathbf{q}_j$ .

Формула Фейнмана основана на том, что интеграл от произвольной степени квадратичной формы

$$B(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \equiv v_{is}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) + 2(\mathbf{a}_i, \mathbf{k}_i) + c \quad (3)$$

вычисляется в явном виде:

$$\frac{1}{(2\pi)^{nd}} \int \dots \int \frac{d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_n}{B^\alpha} = \frac{(4\pi)^{-dn/2} \Gamma(\alpha - dn/2) (\det v)^{-d/2}}{\Gamma(\alpha) [c - (v^{-1})_{is}(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_s)]^{\alpha - dn/2}}, \quad (4)$$

а произведение квадратичных форм в (2) сводится к степени квадратичной формы с помощью интегрирования по вспомогательным параметрам Фейнмана  $u_i$ :

$$A_1^{-\lambda_1} \dots A_n^{-\lambda_l} = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^l \lambda_i)}{\prod_{i=1}^l \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 \dots \int_0^1 du_1 \dots du_l \frac{\delta\left(\sum_{i=1}^l u_i - 1\right) \prod_{i=1}^l u_i^{\lambda_i - 1}}{[\sum_{i=1}^l A_i u_i]^{\sum_{i=1}^l \lambda_i}} \quad (5)$$

Соответствующая (5) квадратичная форма (3) находится из выражения

$$B = u_1(q_1^2 + 1) + u_2(q_2^2 + 1) + \dots + u_l(q_l^2 + 1), \quad (6)$$

в котором вектора  $\mathbf{q}_i$  надо заменить заданными линейными комбинациями векторов  $\mathbf{k}_i$  и внешнего импульса и найти таким образом матрицу  $v_{is}$ , вектора  $\mathbf{a}_i$  и константу  $c$  в (3), параметр  $\alpha$  в (4) равен числу линий диаграммы (2)

$$\alpha = \sum_{i=1}^l \lambda_i. \quad (7)$$

Нас будут интересовать диаграммы теории (1) для 1-неприводимой четыреххвостки на нулевых внешних импульсах. Число линий  $n$ -петлевой четыреххвостки равно  $\alpha = 2n$ , на

нулевом импульсе  $\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ , а коэффициент  $c$  в (5) равен единице с учетом  $\sum_i u_i = 1$ . Вместо исходного заряда  $g$  мы будем использовать заряд

$$u = \frac{S_d}{(2\pi)^d} g, \quad S_d \equiv \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}, \quad (8)$$

где  $S_d$  – площадь  $d$ -мерной сферы единичного радиуса. Вводя в связи с этим в (2) дополнительный множитель  $\frac{(2\pi)^{nd}}{S_d^n}$ , получаем для коэффициента при  $u^n$

$$J_n^{(4)} = \frac{\Gamma(n\varepsilon/2)\Gamma^n(2 - \varepsilon/2)}{2^n \prod_i \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 du_1 \cdots \int_0^1 du_l \frac{\prod_i u_i^{\lambda_i-1} \delta(1 - \sum_{i=1}^l u_i)}{(\det v)^{2-\varepsilon/2}}. \quad (9)$$

Выражение для  $\det v$  может быть получено непосредственно по виду диаграммы, миную импульсное представление:  $\det v$  равен сумме всевозможных произведений параметров Фейнмана с числом сомножителей, равным числу петель, исключая "запреты" (комбинации Фейнмановских параметров, определяемые законами сохранения импульсов в вершине).

Проиллюстрируем это правило на примере следующей 3-х петлевой диаграммы

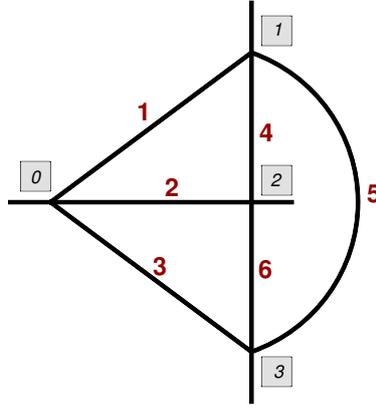


Рис. 1: диаграмма  $e123|e23|e3|e|$   
(номенклатура Никеля)

Красными цифрами на диаграмме обозначены номера Фейнмановских параметров  $u_i$  соответствующих линий. Детерминант  $\det v$  этой трехпетлевой диаграммы представляет собой сумму произведений трех различных параметров Фейнмана. Из 6 параметров можно образовать  $C_6^3 = 20$  таких произведений, из них произведения  $u_1 u_2 u_3$ ,  $u_1 u_4 u_5$ ,  $u_2 u_4 u_6$ ,  $u_3 u_5 u_6$  запрещены законами сохранения в вершинах. Таким образом,

$$\begin{aligned} \det v = & u_4 u_1 u_2 + u_5 u_1 u_2 + u_6 u_1 u_2 + u_4 u_1 u_3 + u_5 u_1 u_3 + u_6 u_1 u_3 + \\ & + u_4 u_6 u_1 + u_5 u_6 u_1 + u_4 u_3 u_2 + u_5 u_3 u_2 + u_6 u_3 u_2 + u_5 u_4 u_2 + \\ & + u_5 u_6 u_2 + u_5 u_4 u_3 + u_4 u_6 u_3 + u_5 u_4 u_6. \end{aligned} \quad (10)$$

### 3 Метод Sector Decomposition

Интересующие нас безподграфные диаграммы имеют только полюс первого порядка по  $\varepsilon$ . В представлении (9) этот полюс выделен в явном виде в множителе  $\Gamma(n\varepsilon/2) \sim \frac{1}{n\varepsilon}$ , поэтому

в оставшемся выражении можно положить  $\varepsilon = 0$ . Интеграл в (9) будет при этом сходящимся, несмотря на то, что  $\det v$  в знаменателе подынтегрального выражения обращается в ноль в некоторой области интегрирования. Метод SD позволяет путем разбиения области интегрирования на сектора и определенной замены переменных интегрирования привести интеграл к сумме собственных интегралов с плавно меняющимися подынтегральными выражениями.

Вся процедура делится на два шага. Во-первых, область интегрирования делится на сектора, где одна из переменных Фейнмана является "основной", т.е. больше всех оставшихся. После этого в каждом секторе необходимо заменой переменных вернуть область интегрирования к единичному кубу. Эти два шага необходимо повторять, пока не исчезнут нули знаменателя в подынтегральном выражении. Можно показать, что количество повторений в каждом секторе соответствует количеству петель в графе.

Существует ряд стратегий разделения на сектора, мы будем пользоваться следующей:

Обозначим подынтегральное выражение в (9) через  $J$  и  $f(\{u_i\})$ . Разделим области интегрирования на части так, чтобы в каждой из них одна из фейнмановских переменных  $u_i$  была больше остальных ("главная переменная" сектора  $u_i > \{u_1 \dots u_{i-1}, u_{i+1} \dots u_N\}$ ):

$$\begin{aligned}
J &= \left[ \prod_{i=1}^l \int_0^1 du_i \right] f(\{u_i\}) = \\
&= \int_0^1 du_1 \int_0^{u_1} du_2 \dots \int_0^{u_1} du_l f(\{u_i\}) + \int_0^1 du_2 \int_0^{u_2} du_1 \dots \int_0^{u_2} du_l f(\{u_i\}) + \dots + \\
&+ \int_0^1 du_l \int_0^{u_l} du_1 \dots \int_0^{u_l} du_{l-1} f(\{u_i\})
\end{aligned} \tag{11}$$

В секторе с главной переменной  $u_k$  делаем замены  $u_i \rightarrow u_i \cdot u_k$ ,  $i = 1..l$ ,  $i \neq k$ , после чего область интегрирования возвращается к  $l$ -мерному кубу:

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^1 du_1 \left( \prod_{i=2..l} \int_0^1 du_i \right) u_1^{l-1} f(u_1, u_2 u_1, \dots, u_l u_1) + \dots \\
&+ \int_0^1 du_l \left( \prod_{i=1..l-1} \int_0^1 du_i \right) u_l^{l-1} f(u_1 u_l, \dots, u_{l-1} u_l).
\end{aligned} \tag{12}$$

В каждом секторе из детерминанта вынесется множитель  $u_k^n$  и, таким образом, степень минимального монома в сумме уменьшится на единицу. Процедура повторяется, пока эта степень не станет равной нулю.

На каждом шаге декомпозиции важно правильно выбирать "пространство декомпозиции" – совокупность переменных, которые последовательно объявляются главными. На первом шаге в пространство декомпозиции включают все переменные, на следующих шагах его сужают – не включают в него переменные, которые были главными на предыдущих шагах, а также те, что в совокупности с использованными главными "запрещены" законами сохранения.

Рассмотрим вышесказанное на примере 3-х петлевой диаграммы рис.1. Соответствующую

ший ей интеграл имеет вид:

$$J = \int_0^1 du_1 du_2 du_3 du_4 du_5 du_6 \frac{\delta(1 - (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6))}{(\det v)^{d/2}}, \quad (13)$$

где  $d = 4$ , а  $\det v$  задан формулой (10). Введем обозначения для результатов декомпозиции по шагам: например,  $J_4$  будет означать вклад в интеграл после первого шага декомпозиции, в котором главной переменной являлась  $u_4$ ,  $J_{41}$  – вклад, в котором на втором шаге главной была переменная  $u_1$ , а  $J_{412}$  – вклад, в котором на третьем шаге главной была переменная  $u_2$ . Совокупность таких трехзначковых вкладов представляет собой окончательный набор секторов декомпозиции. Их число равно, очевидно, числу членов в детерминанте, умноженному на  $3!$ , т.е. 96.

Приведем результаты вычисления указанных шагов декомпозиции, полученные с использованием  $\delta$ -функции в (13):

$$J_4 = \prod_{i=1,2,3,5,6} \int du_i \quad (u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 + u_2 u_5 + u_1 u_2 u_5 + u_3 u_5 + u_1 u_3 u_5 + u_2 u_3 u_5 + u_1 u_6 + u_1 u_2 u_6 + u_3 u_6 + u_1 u_3 u_6 + u_2 u_3 u_6 + u_5 u_6 + u_1 u_5 u_6 + u_2 u_5 u_6)^{-2} \quad (14)$$

$$J_{41} = \prod_{i=1,2,3,5,6} \int du_i \quad (u_2 + u_3 + u_2 u_3 + u_2 u_5 + u_1 u_2 u_5 + u_3 u_5 + u_1 u_3 u_5 + u_1 u_2 u_3 u_5 + u_6 + u_1 u_2 u_6 + u_3 u_6 + u_1 u_3 u_6 + u_1 u_2 u_3 u_6 + u_5 u_6 + u_1 u_5 u_6 + u_1 u_2 u_5 u_6)^{22} \quad (15)$$

$$J_{412} = \prod_{i=1,2,3,5,6} \int du_i \quad (1 + u_3 + u_2 u_3 + u_5 + u_1 u_5 + u_3 u_5 + u_1 u_3 u_5 + u_1 u_2 u_3 u_5 + u_6 + u_1 u_2 u_6 + u_2 u_3 u_6 + u_1 u_2 u_3 u_6 + u_1 u_2^2 u_3 u_6 + u_5 u_6 + u_1 u_5 u_6 + u_1 u_2 u_5 u_6)^{-2} \quad (16)$$

Отметим, что в окончательном выражении  $J_{412}$  отсутствие нулей в знаменателе обеспечивается единицей, которая стоит на месте произведения  $u_1 u_2 u_4$  в детерминанте (10). Укажем также, что на первом шаге пространство декомпозиции включало переменные с номерами (1,2,3,4,5,6), на втором – с номерами (1,2,3,5,6), на третьем, с учетом запрета (415), – (2,3,6).

Недостатком метода SD является сильный рост числа секторов с увеличением порядка теории возмущений. Число вычисляемых интегралов можно сильно сократить, приведя подобные члены, которые находятся путем максимального использования свойств симметрии диаграмм [5]. Так, для диаграммы 1 имеется лишь 4 нетривиальных сектора.

## 4 Расчет верхней оценки $\mathcal{H}(\gamma)$ безподграфных диаграмм

Получающиеся в результате декомпозиции вклады в безподграфные диаграммы описываются интегралами вида (16), в которых в числителях возможны полиномы по фейнмановским параметрам. Для таких интегралов простейшая оценка сверху состоит в отбрасывании в знаменателе всех  $u_i$  (оставляем только единицу). Так и производился расчет верхней границы  $\mathcal{H}(\gamma)$  в работе [2]. Получающийся интеграл легко берется, дополнительным упрощающим обстоятельством является появление дополнительных подобных членов. Не представляет затруднений вычисление уточненного значения  $\tilde{\mathcal{H}}(\gamma)$  путем учета линейных по параметрам Фенмана вкладов в знаменателе.

Для 3-х петлевой диаграммы рис.1 независимыми при вычислении верхних границ  $\mathcal{H}(\gamma)$  и  $\tilde{\mathcal{H}}(\gamma)$  оказываются вклады двух секторов, в качестве которых выберем сектора

- $S_{412} - u_4(u_1, u_2, u_3, u_5, u_6), u_1(u_3, u_2, u_5, u_6), u_2(u_3, u_6)$
- $S_{543} - u_5(u_1, u_2, u_3, u_4, u_6), u_4(u_1, u_3, u_4, u_6), u_3(u_3, u_4, u_6),$

где мы указали главные переменные и соответствующие пространства декомпозиции. Для рассматриваемых далее диаграмм оказывается возможным более удобная запись, в которой секторам сопоставляется не полное поле декомпозиций, как написано выше, а набор чисел, показывающий только количество растяжений (размерность пространства декомпозиции) на каждом шаге декомпозиции,  $S_{412} - (5, 4, 2)$ ,  $S_{543} - (5, 4, 3)$ . Секторов, идентичных первому типу, оказывается 72, второму типу – 24.

Для каждого сектора по отдельности посчитаем  $\mathcal{H}(\gamma)$  и  $\tilde{\mathcal{H}}(\gamma)$ .

Сектор  $S_{412}$ :

- $\mathcal{H}(\gamma) \Rightarrow \int_0^1 du_1 du_2 du_3 du_5 du_6 \frac{1}{1} = 1$
- $\tilde{\mathcal{H}}(\gamma) \Rightarrow \int_0^1 du_1 du_2 du_3 du_5 du_6 \frac{1}{(1+u_3+u_5+u_6)^2} = 0.18345$

Аналогично для сектора  $S_{543}$ :

- $\mathcal{H}(\gamma) \Rightarrow \int_0^1 du_1 du_2 du_3 du_5 du_6 \frac{u_1}{1} = 1/2$
- $\tilde{\mathcal{H}}(\gamma) \Rightarrow \int_0^1 du_1 du_2 du_3 du_5 du_6 \frac{u_1}{(1+u_3+u_4+u_6)^2} = 0.09173$

В итоге, учитывая количество секторов каждого вида, напомним верхнюю оценку диаграммы и ее уточненное значение для всей диаграммы  $e123|e23|e3|e|$  в целом:

$$\mathcal{H}(\gamma) \Rightarrow 72 \cdot 1 + 24 \cdot 1/2 = 84 \quad (17)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}(\gamma) \Rightarrow 72 \cdot 0.18345 + 24 \cdot 0.0917 = 15.4 \quad (18)$$

В таблице ниже приведены результаты вычислений:

номенклатура	тип сектора	количество секторов одного вида	$\mathcal{H}(\gamma)$	$\tilde{\mathcal{H}}(\gamma)$
3 loop				
$e123 e23 e3 e $	(5, 4, 3)	24	1/2	0.09173
	(5, 4, 2)	72	1	0.18345
			84	15.4098

В 4-х петлевом приближении имеется одна безподграфная диаграмма  $e123|e24|34|e4|e|$ , в пятипетлевом приближении таких диаграмм 3:  $e123|e24|35|45|e5|e|$ ,  $e123|e23|45|45|e5|e|$  и  $e123|e45|e45|e45|5|$ . Их вычисление – значительно более трудоемкая задача (суммарное число секторов составляет 1080 в 4-х петлевом приближении и (15600, 15360, 16200) – в пятипетлевом). Это потребовало автоматизации вычислений. Результаты приведены в соответствующих таблицах:

номенклатура	тип сектора	количество секторов одного вида	$\mathcal{H}(\gamma)$	$\tilde{\mathcal{H}}(\gamma)$
4 loop				
$e_{123} e_{24} 34 e_4 e $	(7, 6, 5, 4)	120	1/6	0.0210152
	(7, 6, 4, 2)	288	1	0.1260912
	(7, 6, 4, 3)	96	1/2	0.0630456
	(7, 6, 5, 3)	288	1/4	0.0315228
	(7, 6, 5, 2)	288	1/2	0.0630456
			572	72.1242

номенклатура	тип сектора	количество секторов одного вида	$\mathcal{H}(\gamma)$	$\tilde{\mathcal{H}}(\gamma)$
5 loop				
$e_{123} e_{24} 35 45 e_5 e $	(9, 8, 7, 4, 2)	864	1/2	0.0458075
	(9, 8, 7, 4, 3)	288	1/4	0.0229037
	(9, 8, 7, 5, 3)	2112	1/8	0.0114519
	(9, 8, 7, 6, 4)	1800	1/12	0.0076347
	(9, 8, 7, 5, 4)	960	1/12	0.0076346
	(9, 8, 7, 5, 2)	2592	1/12	0.0076346
	(9, 8, 7, 6, 5)	720	1/24	0.0078807
	(9, 8, 7, 6, 2)	1296	1/6	0.0152692
	(9, 8, 6, 5, 4)	360	1/6	0.0152692
	(9, 8, 6, 5, 3)	864	1/4	0.0229037
	(9, 8, 6, 4, 3)	288	1/2	0.0458075
	(9, 8, 6, 4, 2)	864	1	0.0916149
	(9, 8, 7, 6, 3)	1728	1/4	0.0229037
	(9, 8, 6, 5, 2)	864	1/2	0.0458075
			3702	339.2

номенклатура	тип сектора	количество секторов одного вида	$\mathcal{H}(\gamma)$	$\tilde{\mathcal{H}}(\gamma)$
5 loop				
$e123 e23 45 45 e5 e $	(9, 8, 7, 4, 2)	576	1/2	0.0458075
	(9, 8, 7, 6, 3)	576	1/12	0.0076346
	(9, 8, 7, 5, 3)	2688	1/8	0.0114519
	(9, 8, 7, 6, 4)	1440	1/18	0.0050897
	(9, 8, 7, 5, 4)	960	1/12	0.0076346
	(9, 8, 6, 5, 4)	480	1/6	0.0152692
	(9, 8, 7, 4, 3)	192	1/4	0.0229037
	(9, 8, 7, 6, 5)	576	1/12	0.0038173
	(9, 8, 7, 6, 2)	1440	1/6	0.0152692
	(9, 8, 6, 5, 3)	1344	1/4	0.0229037
	(9, 8, 6, 4, 3)	192	1/2	0.0458075
	(9, 8, 6, 4, 2)	576	1	0.0916149
	(9, 8, 7, 5, 2)	3456	1/4	0.0229037
	(9, 8, 6, 5, 2)	864	1/2	0.0458075
			3528	323.2

номенклатура	тип сектора	количество секторов одного вида	$\mathcal{H}(\gamma)$	$\tilde{\mathcal{H}}(\gamma)$
5 loop				
$e123 e45 e45 e45 5  $	(9, 8, 7, 4, 2)	864	1/2	0.0458075
	(9, 8, 7, 4, 3)	288	1/4	0.0229037
	(9, 8, 7, 5, 3)	3456	1/8	0.0114519
	(9, 8, 7, 6, 4)	1080	1/18	0.0050898
	(9, 8, 7, 5, 4)	720	1/12	0.0076347
	(9, 8, 7, 5, 2)	1296	1/4	0.0229037
	(9, 8, 7, 6, 5)	864	1/24	0.0038173
	(9, 8, 7, 6, 2)	864	1/6	0.0152692
	(9, 8, 6, 5, 4)	360	1/6	0.0152694
	(9, 8, 6, 5, 3)	1152	1/4	0.0229037
	(9, 8, 6, 4, 3)	288	1/2	0.0458076
	(9, 8, 6, 4, 2)	864	1	0.0916149
	(9, 8, 7, 6, 3)	3456	1/12	0.0076346
	(9, 8, 6, 5, 2)	648	1/2	0.0458075
			3528	323.2

Как видно из приведенных выше таблиц, значения 2-х пятипетлевых диаграмм совпадают. Поэтому в точности проверить предложенный в работе [2] метод восстановления диаграмм, используя верхнюю оценку, не представляется возможным. Но приведем ниже отношение верхней оценки к точному значению диаграмм, взятому из работы [2]:

	$\mathcal{H}(\gamma)/\mathcal{P}(\gamma)$	$\tilde{\mathcal{H}}(\gamma)/\mathcal{P}(\gamma)$
$e123 e24 35 45 e5 e $	333.0	30.5
$e123 e23 45 45 e5 e $	339.1	31.1
$e123 e23 45 45 e5 e $		

## 5 Заключение

В настоящей работе был проведен расчет верхней границы  $\mathcal{H}(\gamma)$  и ее уточненного значения  $\tilde{\mathcal{H}}(\gamma)$  для безподграфных диаграмм теории  $\varphi^4$  в фейнмановском представлении методом Sector Decomposition вплоть до пяти петель. Стоит отметить, что количество "уникальных" секторов, необходимых для расчета  $\tilde{\mathcal{H}}(\gamma)$ , в разы меньше, чем для нахождения точного значения  $\mathcal{P}(\gamma)$ , не говоря уже о сложности соответствующих подынтегральных выражений. Этот факт значительно упрощает вычисления и позволит в будущем продвинуться в старшие порядки теории возмущений. К сожалению, пятипетлевой счет не позволяет проверить методику восстановления фактического значения безподграфных диаграмм, предложенную в статье [2]. Однако, поиск необходимых секторов и численный счет были автоматизированы, что позволит в дальнейшем проанализировать и старшие порядки теории возмущений.

## Список литературы

- [1] Васильев А.Н. Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. – Издательство ПИЯФ, Санкт-Петербург, 1998.
- [2] Kompaniets, M.V. and Panzer, E., Minimally subtracted six-loop renormalization of  $O(n)$ -symmetric  $\phi^4$  theory and critical exponents, Physical Review D, 2017
- [3] E.Panzer, O.Schnetz, Communications in Number Theory and Physics, Vol. 11, 3:657-705 (2017)
- [4] Schnetz, O., Numbers and functions in quantum field theory, Physical Review D, 2018
- [5] L.Ts. Adzhemyan, M.V. Kompaniets, S.V. Novikov, and V.K. Sazonov. “Representation of the  $\beta$ -function and anomalous dimensions by nonsingular integrals: proof of the main relation”. Theoretical and Mathematical Physics, 175(3): 719–728 (2013).
- [6] Gudrun Heinrich, Sector Decomposition – Int.J.Mod.Phys.A23:1457-1486,2008