

Санкт-Петербургский государственный университет

Овсянников Андрей Вячеславович

Выпускная квалификационная работа

*Исследование сверхпроводящего фазового перехода в
слоистых системах на основе сходящейся теории
возмущений*

Уровень образования: бакалавриат

Направление 03.03.02 "Физика"

Образовательная программа СВ.5011.2015 "Физика"

Научный руководитель:

профессор,
кафедра статистической физики,
д.ф-м.н. Налимов М. Ю.

Рецензент:

профессор,
кафедра физики высоких энергий
и элементарных частиц,
д.ф-м.н. Компаниец М.В.

Санкт-Петербург

2019

Оглавление

1. Введение	3
2. Описание сверхпроводящего фазового перехода	6
3. Сходящееся разложение в матричной модели	9
4. Ренормгрупповой анализ модели	15
5. Заключение	22
Приложение А. Построение сходящейся теории возмущений для широкого класса квантово-полевых моделей	23
Приложение Б. Вычисление функций $U_j(z)$	27
Список литературы	28

1. Введение

Объектом неугасающего интереса традиционно являются разнообразные квантовые фермионные системы. В частности, такой интерес вызван наличием в таких системах известного фазового перехода в сверхпроводящее состояние. Например, для электронных систем он проявляется в образовании т.н. куперовских пар – связанных электронных состояний на фермиевской поверхности, для которых в спектре появляется зазор – щель, наличие которого и обеспечивает возможность протекания тока без сопротивления.

Известны два принципиально отличных способа описания сверхпроводимости в таких системах. Первой является классическая теория перехода в сверхпроводящее состояние в электронных системах [1], в рамках которой было предложено в качестве параметра порядка использовать т.н. аномальное решение уравнения Дайсона, появляющееся выше точки фазового перехода в виде ненулевых средних $\langle \hat{\psi}_\uparrow^+ \hat{\psi}_\downarrow^+ \rangle$ и $\langle \hat{\psi}_\uparrow \hat{\psi}_\downarrow \rangle$ от операторов поля. Такой подход позволяет в рамках теории возмущений (ТВ) обнаружить факт фазового перехода и вычислить его температуру, однако имеет существенный недостаток в виде невозможности построения теории среднего поля как нулевого приближения для функционала свободной энергии, поскольку такая теория не может быть построена в грассмановых переменных. Второй способ, фактически представляющий из себя эффективную теорию типа ϕ^4 [2; 3], позволяет в небольшой окрестности фазового перехода построить для предполагаемого параметра порядка инфракрасно-эффективное (ИК-эффективное) действие в форме функционала Гинзбурга-Ландау, в котором учтены только существенные в критическом режиме вклады. Для такого действия теория среднего поля может быть построена исходя из общих соображений о структуре параметра порядка.

Наряду с частицами со спином $s = 1/2$ большой интерес представляет исследование систем фермионов с высшими спинами. Известно [4], что взаимодействие в таких системах может быть описано $U(r)$ -симметричным потенциалом, где r есть число возможных проекций спина на выбранную ось квантования. Однако такая симметрия не обязательно является причиной наличия у частиц старших спинов, она может иметь место, например, в твёрдых телах, где электроны проводимости описываются волновыми функциями с дополнительными

индексами, т.н. псевдоспиновыми степенями свободы, связанными с особенностями геометрии и зонной структуры. Далее мы, для определённости, будем говорить только о спиновых степенях свободы, имея в виду вышеизложенное.

В работе [5] в рамках второго подхода к описанию сверхпроводимости рассматривалась микроскопическая модель с локальным $U(r)$ -симметричным взаимодействием типа “плотность-плотность”. Для этой модели было построено ИК-эффективное действие при помощи введённых тензорных бозонных полей χ и χ^+ и, в рамках мацубаровского формализма, установлена их связь с параметрами порядка исходной модели.

Для описания окрестности фазового перехода полученное действие исследовалось методами квантово-полевой ренормализационной группы (РГ) на основе $(4 - \varepsilon)$ -разложения в [5–7], на основе одно-, трёх- и пятипетлевого приближения. Была обнаружена нетривиальная зависимость характера фазового перехода от спина фермионов. А именно, при $r = 1/2$ наблюдается известный фазовый переход второго рода, однако в случае старших спинов $r \geq 4$ происходит флуктуационный срыв непрерывного фазового перехода к переходу первого рода, который имеет место при более высокой температуре. Для получения количественных ответов в реальных размерностях пространства авторам пришлось решать стандартную для квантовой теории поля (КТП) проблему расходимости получаемых рядов теории возмущений. Из-за факториального роста коэффициентов разложения для пересуммирования получаемых рядов использовался метод Бореля-Лероя. Следствием асимптотичности рядов ГВ явилось также то, что пересуммированные уравнения на инвариантные заряды стали интегро-дифференциальными, численное решение которых, как известно, сопряжено со значительными трудностями.

Попыткой справиться с этой проблемой является реализованный в настоящей работе метод построения сходящейся теории возмущений. Такая идея построения таких сходящихся теоретико-возмущенческих разложений, сама по себе, не является новой. Для скалярной модели ϕ^4 такой подход был реализован в работе [8] и уточнён в [9; 10]. В данной работе мы применим его к полученной в [5] тензорной модели, попутно обобщив сам способ построения на достаточно большой класс моделей КТП, и исследуем получающиеся в рамках такого подхода уравнения на инвариантные заряды.

Структура работы такова: в разделе 1 описывается построение ИК-эффективного действия для нашей модели в терминах бозонных полей χ и χ^+ . В разделе 2 происходит построение сходящейся ТВ, для полученной в 1 тензорной модели. В разделе 3 выводятся уравнения ренормгруппы, модифицированные для случая сходящегося разложения, с помощью которых проводится анализ критического поведения модели.

2. Описание сверхпроводящего фазового перехода

Отправной точкой для нашего анализа служит, стандартно применяемая при описании критического поведения [1], квантово-полевая модель с действием

$$S = \psi_l^+ \left(\partial_t - \frac{\Delta}{2m} - \mu \right) \psi_l + \frac{\lambda}{2} \psi_l^+ \psi_l \psi_{l'}^+ \psi_{l'}, \quad (1)$$

в котором $\psi_l(\mathbf{x}, t)$, $\psi_l^*(\mathbf{x}, t)$ – комплексно-сопряженные грассмановы поля, связанные по своей природе с фермионными волновыми функциями, индексы $l', l = 1, 2, \dots, 2p$ отражают возможность наличия у полей дополнительной значковой структуры связанной, например, с возможными значениями проекций спина. Зависимость компонент полей от D -мерных координат \mathbf{x} и “мнимого времени” $t \in [0, \beta \equiv 1/T]$ (предполагается эвклидов разворот) всюду подразумевается. Здесь Δ – оператор Лапласа, T – температура в энергетических единицах, m – масса фермиона, μ – химический потенциал системы и λ – положительная константа взаимодействия. Граничные условия по времени для функций ψ_l , ψ_l^* стандартно предполагаются антипериодическими

$$\psi_l(\mathbf{x}, t) = -\psi_l(\mathbf{x}, t + \beta), \quad \psi_l^*(\mathbf{x}, t) = -\psi_l^*(\mathbf{x}, t + \beta).$$

Все необходимые интегрирования по t и \mathbf{x} в формуле (1) и аналогичных формулах, а также суммирование по повторяющимся значкам в дальнейшем всюду, где это не оговорено отдельно, подразумеваются.

При помощи преобразования Хаббарда-Стратоновича в работе [5] действие (1) было преобразовано к виду

$$S_{HS} = \psi_l^+ \left(\partial_t - \frac{\Delta}{2m} - \mu \right) \psi_l + \text{Tr}(\chi^+ \chi) + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \chi_{ll'} (\psi_l^+ \psi_{l'}^+) + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \chi_{ll'}^+ (\psi_l \psi_{l'}). \quad (2)$$

Здесь и далее в работе под символом Tr всюду будет пониматься матричная операция взятия следа. Переменные χ и χ^+ следует понимать как эрмитово-сопряженные антисимметричные матрицы ранга $r = 2p$, уже с периодическими граничными условиями по времени. Их средние значения, как было показано [5], напрямую связаны с параметрами порядка в исходной модели (1), а сами пере-

менные χ , χ^+ являются безмассовыми критическими модами в точке фазового перехода.

Структура полученного действия (2) позволила выполнить гауссово интегрирование по фермионным полям ψ , ψ^+ и перейти к чисто бозонному действию в форме гамильтониана Гинзбурга-Ландау, существенная при дальнейшем анализе часть которого имеет вид

$$S_e = \text{Tr}(\chi^+ (-\Delta + \tau) \chi) + \frac{g_1}{4} \text{Tr}(\chi^+ \chi \chi^+ \chi) + \frac{g_2}{4} (\text{Tr}(\chi^+ \chi))^2. \quad (3)$$

Заметим, что интегрирование в (3) ведется только по D -мерным координатам ввиду того, что в критической области поля χ и χ^+ можно считать t -независимыми. Соответствующие интегралы порождают множители вида $1/T$, устранимые растяжением полей.

Константу g_2 пришлось включить в действие для обеспечения мультипликативной ренормируемости теории. При $p = 1$ (обычные электроны проводимости) члены взаимодействия в выражении для S_e оказываются линейно-зависимыми, константы взаимодействия представляют собой один параметр $g = g_1 + 2g_2$, что сразу приводит нас к $O(2)$ -симметричной теории ϕ^4 . Однако для любого другого p действие (3) независимо содержит в себе уже обе константы связи. Такими значениями p могут характеризоваться как обычные электронные поля, имеющие по каким-то причинам дополнительные индексы (индекс подрешётки, индекс, соответствующий вырождению зонной структуры и т.п.), так и носители заряда с высшими спинами.

Не ограничивая общность рассуждений, весь дальнейший анализ можно проводить в предположении, что матрицы χ и χ^+ приведены к пфаффово́й форме некоторым ортогональным преобразованием, т.е.

$$\chi = \begin{pmatrix} s_1 \sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 \sigma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_p \sigma \end{pmatrix}, \quad \chi^+ = \begin{pmatrix} -s_1^* \sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -s_2^* \sigma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -s_p^* \sigma \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и функции $s_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, p$ являются комплекснозначными отображениями, т.е. $s_i(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{C}$.

Для действия в форме (3) условие устойчивости (положительной определённости) можно сформулировать в виде следующего неравенства¹

$$g_1 + r g_2 > 0 \tag{5}$$

¹Для его получения достаточно к формальному требованию положительной определённости члена взаимодействия: $g_1 \text{Tr } \chi^+ \chi \chi^+ \chi + g_2 (\text{Tr } \chi^+ \chi)^2 \geq 0$ применить неравенство Коши-Буняковского-Шварца, считая что матрицы χ и χ^+ имеют указанный в (4) блочно-диагональный вид.

3. Сходящееся разложение в матричной модели

Диаграммная техника для матричной модели (3) была построена в работе [6]. Петлевые интегралы в ней совпадают со скалярной теорией ϕ^4 , отличие состоит лишь в симметричных коэффициентах перед диаграммами. Здесь существенную роль играет то, что пропагатор имеет тензорную структуру. В представлении Фурье затравочный пропагатор устроен так:

$$\begin{aligned} \Pi_{i_1, i_2}^{j_1, j_2} &= \frac{W_{i_1, i_2}^{j_1, j_2}}{\mathbf{k}^2 + \tau}, \\ W_{i_1, i_2}^{j_1, j_2} &= \frac{1}{2} (\delta_{i_1, j_1} \delta_{i_2, j_2} - \delta_{i_1, j_2} \delta_{i_2, j_1}), \end{aligned}$$

где $\delta_{n, m}$ – символ Кронекера.

Также в [6] для петлевых разложений¹ в модели (3) было проведено исследование асимптотики высоких порядков (АВП). Как всегда [11], поиск АВП осуществлялся при $\tau = 0$ и $D = 4$. Рассматривались $2k$ -хвостые функции Грина, для которых были найдены нетривиальные решения $\chi_{(st)}$, $\chi_{(st)}^+$ вариационных уравнений в методе перевала и соответствующая им точка стационарности. Матрицы $\chi_{(st)}$, $\chi_{(st)}^+$ – пфаффовы, на главных диагоналях у них расположены блоки с инстантонами вида

$$s_i^{(st)}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_i(z_{st})}{|\mathbf{x}|^2 + 1}, \quad (6)$$

каждый из которых представляет из себя, по существу, известный анзац для аналогичных уравнений в скалярной теории ϕ^4 [11]. Параметры α_i оказываются определёнными неоднозначно, а с точностью до произвольного фазового множителя. Их абсолютные значения устроены следующим образом: в матрицах χ_{st} и χ_{st}^+ существует m блоков с $|\alpha_i| = 0$ и n одинаковых блоков с $|\alpha_i|^2 = -16/(2nzg_2 + zg_1)$, причем $m + n = p$. С учетом указанной блочной

¹При этом константы взаимодействия g_1 и g_2 можно считать пропорциональными, т.е. $g_i = zg_i$, $i = 1, 2$ и строить разложение по степеням z

структуры точка стационарности была получена в виде

$$z_{st}(n) = -\frac{4n}{3} \frac{1}{2ng_2 + g_1}. \quad (7)$$

По известному инстантону и точке стационарности сама АВП функций Грина определяется стандартно [11; 12].

Знание АВП модели (3) позволяет нам применить к ней подход, разработанный для теории ϕ^4 в работах [8–10], использующий некоторую модификацию действия теории и приводящий к *сходящимся* рядам.

Напишем модифицированное действие (3) в виде

$$S = \frac{1}{2} \text{Tr}(\chi^+ (-\Delta + \tau) \chi) + \frac{a}{2} [\text{Tr}(\chi^+ (-\Delta) \chi)]^2 + \zeta \left(\frac{g_1}{4} \text{Tr}(\chi^+ \chi \chi^+ \chi) + \frac{g_2}{4} (\text{Tr}(\chi^+ \chi))^2 - \frac{a}{2} [\text{Tr}(\chi^+ (-\Delta) \chi)]^2 \right), \quad (8)$$

здесь a – произвольная положительная вещественная постоянная, ζ – новый параметр разложения и под символом $[\dots]$ здесь и далее подразумевается интегрирование соответствующего выражения в скобках. Модель (8) совпадает с исходной при “физическом” значении $\zeta = 1$. Поэтому, по окончании всех вычислений, все ряды, полученные в модели (8), следует считать в точке $\zeta = 1$. При этом нетрудно видеть, что разложение по ζ приводит к тем же диаграммам, что и для исходного действия (3), т.е. к диаграммам скалярной ϕ^4 -модели.

Для ответа на вопрос о сходимости теории возмущений в модели (8) следует провести аналогичный [6] анализ АВП коэффициентов разложения в ряды по параметру ζ . Рассмотрим $2k$ -хвостые функции Грина модели (8) при $\tau = 0$

$$G(x_1, \dots, x_{2k}, \zeta) = \int D\chi D\chi^+ \chi(x_1) \chi^+(x_2) \dots \chi(x_{2k-1}) \chi^+(x_{2k}) e^{-S}, \quad (9)$$

где переменная x это четырёхвектор $x = (\mathbf{x}, t)$.

Сам анализ АВП коэффициентов ряда теории возмущений для (9) стандартно [11] основывается на представлении N -го коэффициента разложения в виде

$$G^{(N)}(x_1, \dots, x_{2k}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta^{N+1}} G(x_1, \dots, x_{2k}, \zeta) \quad (10)$$

и последующем применении метода перевала в функциональном интеграле. Интеграл в (10) берётся по контуру γ , охватывающему ноль в комплексной плоскости.

Для использования метода перевала в (10) требуется “остановить” перевальную точку. Это возможно сделать, если сделать в обоих интегралах (9) растяжение переменных $\chi^+ \rightarrow \sqrt[4]{N}\chi^+$ и $\chi \rightarrow \sqrt[4]{N}\chi$. Введём обозначение $G_{2k}^{(N)} \equiv G^{(N)}(x_1, \dots, x_{2k})$, тогда интеграл в правой части (10) после замены переменной перейдёт в

$$G_{2k}^{(N)} = \frac{N^{k/2}}{2\pi i} \int D\chi D\chi^+ \oint_{\gamma} d\zeta F(\chi, \chi^+, \zeta) e^{-N(\mathcal{J} + \ln \zeta)}, \quad (11)$$

где преэкспонента \mathcal{F} и функционал \mathcal{J} , соответственно, суть

$$F(\chi, \chi^+, \zeta) = \prod_{j=1}^k \chi(x_{2j-1})\chi^+(x_{2j}) \exp\left(-\frac{\sqrt{N}}{2} \text{Tr}(\chi^+(-\Delta)\chi) - \ln \zeta\right), \quad (12)$$

$$\mathcal{J} = (1 - \zeta) \frac{a}{2} [\text{Tr}(\chi^+(-\Delta)\chi)]^2 + \zeta \left(\frac{g_1}{4} \text{Tr}(\chi^+\chi\chi^+\chi) + \frac{g_2}{4} (\text{Tr}(\chi^+\chi))^2 \right). \quad (13)$$

Система уравнений стационарности $\delta\mathcal{I}/\delta\chi = 0$, $\delta\mathcal{I}/\delta\chi^+ = 0$ и $\partial\mathcal{I}/\partial\zeta = 0$ для функционала $\mathcal{I} = \mathcal{J} + \ln \zeta$ записывается в виде

$$\begin{aligned} -\Delta\chi \ a(1 - \zeta) [\text{Tr}(\chi^+(-\Delta)\chi)] + \frac{g_1\zeta}{2} \chi\chi^+\chi + \frac{g_2\zeta}{2} \chi\text{Tr}(\chi^+\chi) &= 0, \\ -\Delta\chi^+ \ a(1 - \zeta) [\text{Tr}(\chi^+(-\Delta)\chi)] + \frac{g_1\zeta}{2} \chi^+\chi\chi^+ + \frac{g_2\zeta}{2} \chi^+\text{Tr}(\chi^+\chi) &= 0, \\ \zeta \int \left\{ \frac{g_1}{4} \text{Tr}(\chi^+\chi\chi^+\chi) + \frac{g_2}{4} (\text{Tr}(\chi^+\chi))^2 \right\} d\mathbf{x} - \frac{a\zeta}{2} [\text{Tr}(\chi^+(-\Delta)\chi)]^2 &= -1. \end{aligned} \quad (14)$$

Напомним, что поля χ , χ^+ всегда можно привести к виду (4). Также можно заметить, что первое и второе уравнение системы (14) отличаются эрмитовым сопряжением, поэтому можно рассматривать только одно из них, например, первое.

Нам уже известна точка стационарности (7) и структура инстантонного решения (6) для аналогичной системы уравнений в четырёхмерном простран-

стве

$$-\Delta s_i(\mathbf{x}) + \frac{g_1 z}{2} |s_i(\mathbf{x})|^2 s_i(\mathbf{x}) + g_2 z s_i(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^p |s_k(\mathbf{x})|^2 = 0, \quad (15)$$

$$\int \left\{ \frac{g_1}{2} \sum_{k=1}^p |s_k(\mathbf{x})|^4 + g_2 \left(\sum_{k=1}^p |s_k(\mathbf{x})|^2 \right)^2 \right\} d\mathbf{x} = -\frac{1}{z}. \quad (16)$$

Это система уравнений стационарности из [6], написанная для матриц приведённых к пфаффово́й форме. В общем случае, она состоит из $2p$ дифференциальных уравнений и одного интегрального. Однако здесь мы приводим только первые p дифференциальных уравнений, записанных в форме (15), поскольку остальные отличаются от них только комплексным сопряжением.

Рассмотрим первое и третье уравнение в системе (14) и представим их в аналогичной форме

$$-\Delta s_i - 2a(1 - \zeta) \left(\int \sum_{k=1}^p \partial s_k^* \partial s_k d\mathbf{x} \right) + \frac{g_1 \zeta}{2} |s_i|^2 s_i + g_2 \zeta s_i \sum_{k=1}^p |s_k|^2 = 0, \quad (17)$$

$$\int \left\{ \frac{g_1}{2} \sum_{k=1}^p |s_k|^4 + g_2 \left(\sum_{k=1}^p |s_k|^2 \right)^2 \right\} d\mathbf{x} - a \left(\int \sum_{k=1}^p \partial s_k^* \partial s_k d\mathbf{x} \right)^2 = -\frac{1}{\zeta}, \quad (18)$$

здесь и далее мы пользуемся обозначениями $s_i \equiv s_i(\mathbf{x})$ и $\partial \equiv \partial/\partial \mathbf{x}$, где под производной по вектору понимается вектор, составляющие которого равны производным по составляющим вектора. Под произведением таких векторов всюду подразумевается скалярное произведение.

Дифференциальные уравнения (17) определяют инстантон в нашей модели. Видно, что они тривиально приводятся к виду (15), благодаря чему наш инстантон оказывается линейно зависящим от своего аналога χ_{st} , являющегося решением (15). Таким образом, решение (17) можно искать в виде: $\tilde{s}_i^{(st)}(\mathbf{x}) = \eta_i s_i^{(st)}(\mathbf{x})$ (здесь нет суммирования по значкам), где $s_i^{(st)}$ определено в (6) и η_i не зависит от \mathbf{x} . Блочная структура получаемого инстантона полностью совпадает с таковой для χ_{st} , фактически, происходит просто переопределение коэффициентов $\alpha_i \rightarrow \eta_i \alpha_i$. Отметим, что фаза η_i остаётся неопределённой и её можно объединить с фазой α_i в один новый произвольный параметр.

В [6] для определения z_{st} использовалось интегральное уравнение (16) с функциями $s_i^{(st)}$. Аналогично, мы воспользуемся уравнением (18) с функциями

$\tilde{s}_i^{(st)}$ для поиска ζ_{st} . Поскольку решения (15) и (17) пропорциональны, то первое слагаемое уравнения (18) в точности равно $-|\eta_i|^4/z_{st}$, что позволяет нам из (18) определить связь между $|\eta_i|$ и ζ_{st} .

Функции $s_i^{(st)}$ и точка стационарности z_{st} обращают уравнение (15) в тождество. Аналогично, функции $\tilde{s}_i^{(st)}$ и точка ζ_{st} должны обращать в тождество уравнение (17). Воспользуемся тем, что в таком случае первые слагаемые этих уравнений оказываются определённым образом пропорциональны друг другу. Это даёт нам второе условие на $|\eta_i|$ и ζ_{st} .

При помощи полученных выше условий параметры $|\eta_i|$ и ζ_{st} однозначно выражаются через z_{st} и $s_i^{(st)}$

$$|\eta_i|^4 = \frac{1 + 2acz_{st}}{2ac(1 + az_{st}c^2)}, \quad \zeta_{st} = \frac{2acz_{st}}{1 + 2acz_{st}}, \quad (19)$$

где c – функционал от $s_i^{(st)}$, определяемый как

$$c = \int \sum_k \partial s_k^{(st)*}(\mathbf{x}) \partial s_k^{(st)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = n \frac{4}{3} \pi^2 |\alpha_i(z_{st})|^2. \quad (20)$$

Используя найденный инстантон и точку стационарности, можно сразу же заключить, что в старшем по N порядке

$$G_{2k}^{(N)} \sim const_{2k} N^b d^{N+1} \exp\left(-\frac{\sqrt{N}}{2} \text{Tr}(\chi_{st}^+ (-\Delta) \chi_{st})\right), \quad (21)$$

где $d = \max_n |d(n)|$ и $d(n) = 1/\zeta_{st}$. Отметим, что величина ζ_{st} зависит от зарядов, поэтому главный вклад в асимптотику даёт наибольшее по модулю значение $d(n)$, вклады же остальных – экспоненциально малы. Константа $const_{2k}$ здесь несущественна, о методах её вычисления можно посмотреть в [12–14], показатель b вычислен для произвольных функций Грина в [15].

Знания общего вида АВП $G_{2k}^{(N)}$ достаточно для того, чтобы сразу же получить радиус сходимости теории возмущений по ζ , поскольку он, очевидно, определяется наиболее быстрорастущим вкладом в асимптотику.

$$R = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{G_{2k}^{(N)}}{G_{2k}^{(N+1)}} = \zeta_{st}, \quad \text{где} \quad \zeta_{st} = \frac{1}{1 - 1/(32a\pi^2(-z_{st}))}. \quad (22)$$

Мы получили радиус сходимости, который стремится к бесконечности при стремлении $a \rightarrow 1/(32\pi^2(-z_{st}))$, что согласуется с результатом, полученным в работе [10] для $O(n)$ -симметричной модели ϕ^4 . Для исследования модели при “физическом” значении $\zeta = 1$ достаточно, чтобы радиус сходимости превышал единицу. Это происходит при выборе параметра $a \geq 3(2ng_2 + g_1)/(256\pi^2 n)$, таким образом, чем большим выбирается a , тем для больших значений зарядов можно использовать нашу теорию возмущений.

Здесь мы рассматривали неренормированные функции Грина (9) в пространстве $D = 4$, однако этот факт не является существенным при определении радиуса сходимости рядов по ζ .

Итак, нами предъявлена сходящаяся теория возмущений для модели (8), радиус сходимости которой даётся формулой (22). Следует отметить, что эта задача может быть решена в рамках существенно более общей постановки (см. Приложение А).

4. Ренормгрупповой анализ модели

В этой главе существенно различать ренормированные и неренормированные переменные, поэтому переобозначим исходные константы взаимодействия g_1 и g_2 теории (8) следующим образом: $g_1 \equiv g_{10}$, $g_2 \equiv g_{20}$. Рассмотрим разложение $2k$ -хвостых ненормированных функций Грина G_{2k} модели (8) по ζ при $\tau = 0$. Следуя [9; 10] определение (9) можно эквивалентно переписать в виде

$$G_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\sigma e^{-\sigma^2/2} \int D\chi D\chi^+ \chi_1 \chi_2^+ \dots \chi_{2k-1} \chi_{2k}^+ \exp \left(-\frac{1}{2} \text{Tr}(\partial\chi\partial\chi^+) \right) \times \left(1 + 2i\sigma \sqrt{a(1-\zeta)} \right) - \zeta \left(\frac{g_{10}}{4} \text{Tr}(\chi\chi^+\chi\chi^+) + \frac{g_{20}}{4} (\text{Tr}(\chi\chi^+))^2 \right), \quad (23)$$

здесь для удобства введены обозначения $\chi_{2j-1} \equiv \chi(x_{2j-1})$ и $\chi_{2j} \equiv \chi(x_{2j})$, $j = 1, \dots, k$. Действительно, гауссово интегрирование по σ возвращает нас к определению в форме (9). Таким преобразованием мы фактически привели наше действие в показателе экспоненты к исходной форме (3). Чтобы аналогия была полной удобно сделать растяжение полей в виде $\chi \rightarrow \chi / (1 + 2i\sigma \sqrt{a(1-\zeta)})^{1/2}$ и $\chi^+ \rightarrow \chi^+ / (1 + 2i\sigma \sqrt{a(1-\zeta)})^{1/2}$, после которой выражение (23) преобразуется к виду

$$G_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\sigma e^{-\sigma^2/2} \int D\chi D\chi^+ \frac{\chi_1 \chi_2^+ \dots \chi_{2k-1} \chi_{2k}^+}{\left(1 + 2i\sigma \sqrt{a(1-\zeta)} \right)^k} \times \exp \left(-\frac{1}{2} \text{Tr}(\partial\chi\partial\chi^+) - \zeta \left(\frac{g_{10} \text{Tr}(\chi\chi^+\chi\chi^+) + g_{20} (\text{Tr}(\chi\chi^+))^2}{4 \left(1 + 2i\sigma \sqrt{a(1-\zeta)} \right)^2} \right) \right). \quad (24)$$

Эффективно, такая замена переменных лишь переопределяет константы взаимодействия g_{10} и g_{20} и поля $\chi_1 \dots \chi_{2k}$. Здесь существенно отметить, что для выражения в форме (24) обычные соотношения между связными, полными и 1-неприводимыми функциями Грина выполняется только для σ -зависимых функций Грина (заданных функциональным интегралом (24) при фиксированной σ), а не для самих G_{2k}^R , где интеграл по σ взят.

Ренормированное действие нашей модели (3) имеет вид

$$S_R = \frac{1}{2} \mathcal{Z}_\chi \mathcal{Z}_{\chi^+} (1 + \mathcal{Z}_\tau \tau) \text{Tr}(\chi^+ (-\Delta) \chi) + \mathcal{Z}_\chi^2 \mathcal{Z}_{\chi^+}^2 \left(\frac{g_1 \mu^\varepsilon \mathcal{Z}_{g_1}}{4} \text{Tr}(\chi \chi^+ \chi \chi^+) + \frac{g_2 \mu^\varepsilon \mathcal{Z}_{g_2}}{4} (\text{Tr}(\chi \chi^+))^2 \right), \quad (25)$$

где \mathcal{Z}_τ , \mathcal{Z}_χ , \mathcal{Z}_{χ^+} , \mathcal{Z}_{g_1} и \mathcal{Z}_{g_2} – соответствующие константы ренормировки, μ – ренормировочная масса, а параметры g_1 , g_2 теперь понимаются как безразмерные ренормированные заряды.

В рамках разложения по ζ гриновские функции (23) ренормируются обычным образом под знаком интеграла по σ , за тем исключением, что константы ренормировки при этом перестают зависеть только от пары зарядов g_1 и g_2 и начинают зависеть от σ

$$\tilde{\mathcal{Z}}_i(\sigma) = \mathcal{Z}_i \left(g_1 \zeta / \left(1 + 2i\sigma \sqrt{a(1-\zeta)} \right)^2, g_2 \zeta / \left(1 + 2i\sigma \sqrt{a(1-\zeta)} \right)^2 \right), \quad (26)$$

где индекс $i = (g_1, g_2)$. В работе используется размерная регуляризация в пространстве $D = 4 - \varepsilon$, где ε – отклонение размерности пространства от логарифмической размерности теории, а в качестве схемы перенормировок \overline{MS} -схема, в которой, как известно, константы ренормировки представляются главной частью ряда Лорана по параметру ε

$$\tilde{\mathcal{Z}}_i = 1 + \frac{Z_i^{(1)}}{\varepsilon} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right), \quad \text{где } Z_i^{(1)} = \sum_{m,n} \frac{C_{mn}^{(i)} g_1^m g_2^n \zeta^{m+n}}{\left(1 + 2i\sigma \sqrt{a(1-\zeta)} \right)^{m+n}}. \quad (27)$$

Здесь $i = (g_1, g_2, \chi, \chi^+)$ и $C^{(i)}$ – матрица коэффициентов разложения для вычета в простом полюсе соответствующей константы ренормировки.

Применения схемы минимальных вычитаний вместе с размерной регуляризацией в безмассовом пределе $\tau \rightarrow 0$ для модели (25) позволяет не рассматривать перенормировку вакуумных петель зависящих от σ функций Грина, поскольку они и соответствующие им контрчлены исчезают в этом пределе [15; 16].

В рамках \overline{MS} -схемы ренормированные функции Грина G_{2k}^R можно представить выражением (24) в котором проведено дополнительное растяжение полей $\chi \rightarrow \chi/\mathcal{Z}_\chi$ и $\chi^+ \rightarrow \chi^+/\mathcal{Z}_{\chi^+}$

$$G_{2k}^R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\sigma \frac{e^{-\sigma^2/2}}{\left(\tilde{\mathcal{Z}}_\chi \tilde{\mathcal{Z}}_{\chi^+}\right)^k} \int D\chi D\chi^+ \frac{\chi_1 \chi_2^+ \cdots \chi_{2k-1} \chi_{2k}^+}{\left(1 + 2i\sigma \sqrt{a(1-\zeta)}\right)^k} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\text{Tr}(\partial\chi\partial\chi^+) - \mu^\varepsilon \zeta \left(\frac{g_1 \mathcal{Z}_{g_1} \text{Tr}(\chi\chi^+ \chi\chi^+) + g_2 \mathcal{Z}_{g_2} (\text{Tr}(\chi\chi^+))^2}{4 \left(1 + 2i\sigma \sqrt{a(1-\zeta)}\right)^2}\right)\right) \quad (28)$$

Структура действия в (28) аналогична таковой в случае модели ϕ^4 , поэтому при построении ренормгрупповых уравнений применимы аналогичные [9;17] соображения, приводящие к уравнению вида

$$\mathcal{D}_{RG} G_{2k}^R \equiv [\mu\partial_\mu + \beta_1\partial_{g_1} + \beta_2\partial_{g_2} + \beta_{11}\partial_{g_1}^2 + \beta_{12}\partial_{g_1}\partial_{g_2} + \dots + 2k\gamma] G_{2k}^R = 0, \quad (29)$$

в котором коэффициенты β перед соответствующими производными по зарядам и γ зависят от порядка разложения функции Грина и параметров g_1, g_2, a, ζ . При наличии фиксированной точки исследование РГ уравнения в форме (29) позволяет, кроме всего прочего, ответить на вопрос о её ИК-устойчивости. Наша двухзарядная модель не позволяет аналогично [9] предъявить асимптотическое решение уравнения (29) в явном виде, однако мы можем строить его по теории возмущений и аналогично показать, что в некоторой окрестности фиксированной точки вклады со старшими производными по зарядам можно отбросить, ограничившись исследованием уравнения

$$[\mu\partial_\mu + \beta_1\partial_{g_1} + \beta_2\partial_{g_2} + 2k\gamma] G_{2k}^R = 0. \quad (30)$$

Будем искать РГ-функции (29) пользуясь методом, предложенным в [9;18]. Введем функции $\mu\partial_\mu G_{2k}^R, \partial_{g_1} G_{2k}^R, \partial_{g_2} G_{2k}^R, \partial_{g_1}^2 G_{2k}^R, \dots$, где G_{2k}^R даётся формулой (28) и разложим их по степеням составных операторов $[\text{Tr}(\chi\chi^+ \chi\chi^+)]$ и $[(\text{Tr}(\chi\chi^+))^2]$, после чего проинтегрируем полученный ряд по σ . Полученный результат представляется в виде рядов по степеням указанных составных операторов, усреднённых с весом $\int D\chi D\chi^+ \chi_1 \dots \chi_{2k}^+ \exp(-\frac{1}{2}\text{Tr}(\partial\chi\partial\chi^+))$ ¹. Отметим, что как сами эти операторы, вследствие разной тензорной структуры вершин,

¹Фактически, система средних этих операторов есть аналог полной системы моментов гауссова распределения.

так и любые их степени, являются независимыми. Последнее верно, поскольку, при усреднении они представляются различными диаграммами с разной зависимостью от координат.

Из указанных свойств независимости составных операторов следует, что коэффициент при каждом порядке разложения G_{2k}^R по ним обязан обращаться в ноль независимо от остальных. Это позволяет, аналогично [10] для теории ϕ^4 , получить выражения для коэффициентов β_1 , β_2 и γ в (30).

Строя разложение по составным операторам $[\text{Tr}(\chi\chi^+\chi\chi^+)]$ и $[(\text{Tr}(\chi\chi^+))^2]$ мы, в нулевом порядке, имеем ненулевые функции $\partial_{g_1} G_{2k}^R$, $\partial_{g_2} G_{2k}^R$ и G_{2k}^R , выраженные через среднее от единичного оператора. В первом порядке к описанным функциям добавляется ещё одна $\mu\partial_\mu G_{2k}^R$ и все они выражаются уже через нулевую и первые степени указанных операторов. Таким образом, мы получаем систему линейных уравнений, определяющих РГ-функции в (30). Обозначим нулевой порядок разложения G_{2k}^R по составным операторам за $G_{2k}^{R[0]}$, а первый, соответственно, за $G_{2k}^{R[1]}$, тогда

$$[\beta_1\partial_{g_1} + \beta_2\partial_{g_2} + 2k\gamma] G_{2k}^{R[0]} = 0, \quad (31)$$

$$[\mu\partial_\mu + \beta_1\partial_{g_1} + \beta_2\partial_{g_2} + 2k\gamma] G_{2k}^{R[1]} = 0. \quad (32)$$

Используя явное представление (28) для ренормированных $2k$ -хвостых гриновских функций можно написать уравнения (31), (32) в виде

$$\left[\int d\sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \frac{[\beta_1\partial_{g_1} + \beta_2\partial_{g_2} + 2k\gamma]}{(1 + 2i\sigma\sqrt{a(1-\zeta)})^k} \right] \left(\tilde{\mathcal{Z}}_\chi \tilde{\mathcal{Z}}_{\chi^+} \right)^{-k} = 0, \quad (33)$$

$$\left[\int d\sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \frac{[\mu\partial_\mu + \beta_1\partial_{g_1} + \beta_2\partial_{g_2} + 2k\gamma]}{(1 + 2i\sigma\sqrt{a(1-\zeta)})^k} \right] \left(\frac{g_1\mu^\varepsilon \tilde{\mathcal{Z}}_{g_1} + g_2\mu^\varepsilon \tilde{\mathcal{Z}}_{g_2}}{(\tilde{\mathcal{Z}}_\chi \tilde{\mathcal{Z}}_{\chi^+})^k} \right) = 0. \quad (34)$$

Здесь мы воспользовались очевидной коммутативностью интегрального оператора с ядром $e^{-\sigma^2/2}/(1 + 2i\sigma\sqrt{a(1-\zeta)})^k$, действующего на зависящие от σ функции, и дифференциальных операторов из (31), (32).

В \overline{MS} -схеме константы ренормировки нам известны вплоть до $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$, поэтому из (31) следует, что соответствующие бета-функции следует искать в виде $\beta_i = \alpha_i\varepsilon + X_i(g_1, g_2)$, где индекс $i = 1, 2$. Константы α_i определяются из

асимптотики уравнения (34) при $\zeta \rightarrow 0$ и оказываются равными $\alpha_1 = -g_1$ и $\alpha_2 = -g_2$ соответственно. Тогда из (33) нетрудно получить выражение для γ -функции в виде

$$2A_k(a(1-\zeta))\gamma = -A_k(a(1-\zeta)) \left[g_1 \partial_{g_1} + g_2 \partial_{g_2} \right] \tilde{\mathcal{Z}}_{\chi, \chi^+}^{(1)}, \quad (35)$$

где интергральный оператор $A_k(z)$ определяется соотношением

$$A_k(z) \equiv \int d\sigma \frac{e^{-\sigma^2/2}}{(1 + 2i\sigma\sqrt{z})^j} \quad (36)$$

и $\tilde{\mathcal{Z}}_{\chi, \chi^+}^{(1)}$ – вычет в простом полюсе по ε произведения констант ренормировки $\tilde{\mathcal{Z}}_\chi$ и $\tilde{\mathcal{Z}}_{\chi^+}$. Здесь и во всех последующих выражениях $A_k(a(1-\zeta)) \equiv A_k$.

Рассматривая нулевой порядок разложения по обратным степеням ε в (34) можно найти поправки $X_i(g_1, g_2)$ к бета-функциям. Замечая, что величины $X_1(g_1, g_2)$ и $X_2(g_1, g_2)$ домножаются только на соответствующие им производные по зарядам можно получить для них следующие выражения

$$A_k X_1 = A_k \left[g_1^2 \partial_{g_1} \left(\tilde{\mathcal{Z}}_{g_1}^{(1)} - k \tilde{\mathcal{Z}}_{\chi, \chi^+}^{(1)} \right) + g_1 g_2 \partial_{g_1} \left(\tilde{\mathcal{Z}}_{g_2}^{(1)} - k \tilde{\mathcal{Z}}_{\chi, \chi^+}^{(1)} \right) - 2k g_1 \gamma \right], \quad (37)$$

$$A_k X_2 = A_k \left[g_2^2 \partial_{g_2} \left(\tilde{\mathcal{Z}}_{g_2}^{(1)} - k \tilde{\mathcal{Z}}_{\chi, \chi^+}^{(1)} \right) + g_1 g_2 \partial_{g_2} \left(\tilde{\mathcal{Z}}_{g_1}^{(1)} - k \tilde{\mathcal{Z}}_{\chi, \chi^+}^{(1)} \right) - 2k g_2 \gamma \right]. \quad (38)$$

Для сравнения результатов, аналогично [10], построим по оператору $A_j(z)$ спецфункцию $U_j(z)$ (см. Приложение Б) и, учитывая то, что $\tilde{\mathcal{Z}}_{\chi, \chi^+}^{(1)} = Z_\chi^{(1)} + Z_{\chi^+}^{(1)}$, получим из формул (37), (38) и (35) явные выражения для β_1 , β_2 и γ при $k = 1$. Введем обозначение B для матрицы коэффициентов разложения $\tilde{\mathcal{Z}}_{\chi, \chi^+}^{(1)}$. Тогда

$$\gamma = -\frac{1}{2U_1(a(1-\zeta))} \left[g_1 \partial_{g_1} \left(\sum_{m,n} B_{mn} g_1^m g_2^n \zeta^{m+n} U_{m+n+1}(a(1-\zeta)) \right) + g_2 \partial_{g_2} \left(\sum_{m,n} B_{mn} g_1^m g_2^n \zeta^{m+n} U_{m+n+1}(a(1-\zeta)) \right) \right] \quad (39)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{U_1(a(1-\zeta))} \left[g_1^2 \partial_{g_1} \left(\sum_{m,n} \zeta^{m+n} (C_{mn}^{(g_1)} - B_{mn}) g_1^m g_2^n U_{m+n+1}(a(1-\zeta)) \right) \right. \\ \left. + g_1 g_2 \partial_{g_1} \left(\sum_{m,n} \zeta^{m+n} (C_{mn}^{(g_2)} - B_{mn}) g_1^m g_2^n U_{m+n+1}(a(1-\zeta)) \right) \right] - g_1(2\gamma + \varepsilon) \quad (40)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{U_1(a(1-\zeta))} \left[g_2^2 \partial_{g_2} \left(\sum_{m,n} \zeta^{m+n} (C_{mn}^{(g_2)} - B_{mn}) g_1^m g_2^n U_{m+n+1}(a(1-\zeta)) \right) \right. \\ \left. + g_1 g_2 \partial_{g_2} \left(\sum_{m,n} \zeta^{m+n} (C_{mn}^{(g_1)} - B_{mn}) g_1^m g_2^n U_{m+n+1}(a(1-\zeta)) \right) \right] - g_2(2\gamma + \varepsilon) \quad (41)$$

Строго говоря, полученные бета-функции β_1 и β_2 корректно использовать только в некоторой окрестности фиксированной точки РГ-уравнения. Мы будем пользоваться ими в более широкой области, в предположении, что для них известно достаточно порядков разложения по ζ и, в этом смысле, они достаточно близки к бета-функциям из [6]. Поскольку в однопетлевом приближении в модели не удалось ни обнаружить ИК-устойчивых фиксированных точек, ни привести аналитического выражения для инвариантных зарядов при $r > 2$ [5], мы будем пользоваться численным решением полученной в [6] системы на инвариантные заряды. Сама система для функций β_1, β_2 может быть записана в виде

$$\partial_\xi \bar{g}_i = \beta_i(\bar{g}_1, \bar{g}_2), \quad i = 1, 2, \quad (42)$$

$$\bar{g}_i|_{\xi=0} = g_i. \quad (43)$$

Здесь динамическая переменная РГ-уравнения $\xi = \ln(\tau/\mu^2)$ и ренормированные заряды g_i связаны с “затравочными” g_{0i} соотношением $g_{0i} = \mu^\varepsilon g_i \tilde{Z}_{g_i}$.

Анализ системы (42) проводился на основе бета-функций, вычисленных в [7] в пятипетлевом приближении. Для расчёта фазовых траекторий при физических значениях $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 2$ использовался программный пакет Maple. Результаты численного анализа системы в пятипетлевом по ε порядке для случая $r = 4$ приведены на рис. 1. Здесь проявляется ситуация аналогичная об-

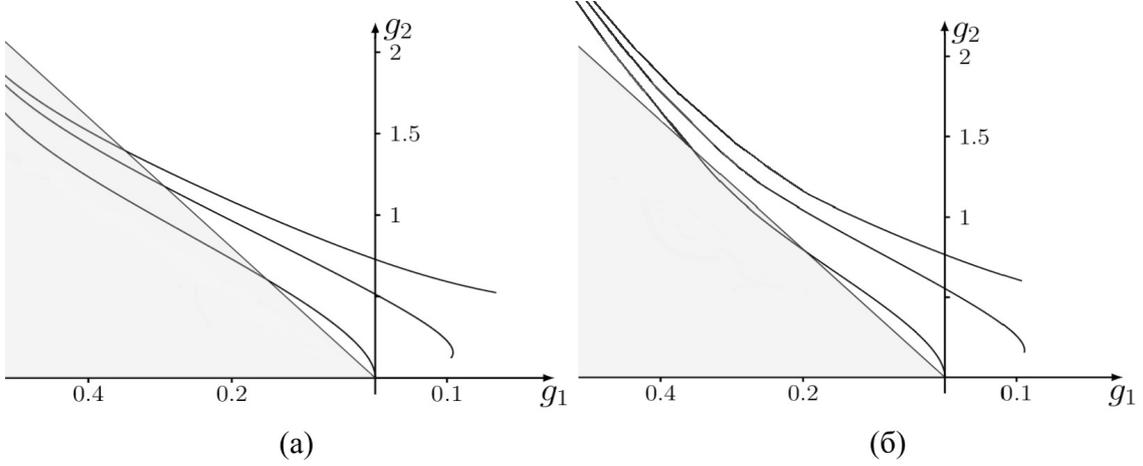


Рис. 1 Траектории инвариантных зарядов с различными начальными условиями при $D = 3$ (а) и $D = 2$ (б). Заштрихованная часть соответствует области, в которой положительная определённость действия нарушается.

наруженной в [5], [6] и [7] для одно-, трех- и пятипетлевого приближения соответственно. А именно, не смотря на отсутствие фиксированной точки, фазовые траектории при $D = 3$, стартуя с разных начальных условий, начинают сближаться и пересекать границу устойчивости действия при некотором значении ξ_0 параметра ξ . При $D = 2$ только при достаточно малых начальных условиях траектории пересекают границу положительной определённости, поэтому судить о наличии или типе фазового перехода, используя β_1 и β_2 , известные только до пятого порядка по ζ , не представляется возможным.

Отметим, что анализ РГ-уравнений в форме (42) позволяет пролить свет на природу возникающего явления примерной универсальности в поведении траекторий. Дело в том, на уровне численного анализа удалось установить, что система дифференциальных уравнений (42) является жёсткой. Жесткость могла бы объясняться наличием в системе сепаратриссы, однако уже в ведущем порядке по ζ не сложно аналитически показать отсутствие таковой. Поэтому сближение траекторий может объясняться присутствием своеобразного “желоба” в фазовой плоскости системы (42), попадая в который в какой-то момент они уже не могут выбраться обратно и необратимо начинают сближаться. Под “желобом” здесь понимается область в фазовой плоскости, где существует направление, производная вдоль которого, по абсолютной величине, много меньше производной в перпендикулярном направлении.

5. Заключение

Мы исследовали квантовую равновесную систему нерелятивистских фермионов с r спиновыми степенями свободы в окрестности фазового перехода методом сходящейся теории возмущений. Основные результаты работы можно сформулировать в виде следующих трёх пунктов:

П.1. Разработаны приёмы построения сходящейся теории возмущений для достаточно широкого класса квантово-полевых моделей (см. Приложение А). В частности, построена сходящаяся теория возмущений для модели с $O(n)$ -симметричным матричным полем.

П.2. Получены уравнения РГ в нашей модели (8) и было показано, что фазовые траектории, определяемые соответствующими бета-функциями ведут себя, по крайней мере качественно, также как в традиционной схеме с пересуммированием по Борелю [6].

П.3. На основе анализа полученных ренормгрупповых уравнений (42) стало понятно, чем объясняется некоторая сходимость фазовых траекторий, выходящих из разных достаточно близких точек. В нашей модели, в отличие от [5; 6] система уравнений на инвариантные заряды является системой дифференциальных уравнений и такое поведение их траекторий объясняется жёсткостью решаемой системы, наличие которой было очень сложно заметить в стандартной схеме, по причине того, что там приходилось решать интегро-дифференциальные уравнения.

Приложение А

Построение сходящейся теории возмущений для широкого класса квантово-полевых моделей

Для очень большого класса полевых моделей действие можно символически записать в виде

$$S = \frac{1}{2}\phi_\alpha K_{\alpha\beta}\phi_\beta + gF[\phi], \quad (44)$$

где символ $\phi \equiv \phi(x)$ обозначает весь набор полей модели, аргумент x включает в себя все непрерывные переменные модели, возможная значковая структура полей отражена мультииндексами α, β , а числовой параметр g – константа взаимодействия теории. Интегрирование по непрерывным аргументам и суммирование по дискретным в формуле (45) и аналогичных подразумевается. Мы всюду будем рассматривать случай диагональной K и, для краткости, опускать значки полей. Относительно непрерывных переменных K , без ограничения общности, можно считать интегральной операцией с некоторым симметричным ядром. Также, далее всюду будет предполагаться, что функционал $F[\phi]$ – однородный функционал от полей ϕ , т.е. $F[\lambda\phi] = \lambda^m F[\phi]$ с некоторым показателем однородности $m \geq 2$.

Будем считать, что в теории с действием (45) известен инстантон, т.е. у системы уравнений стационарности в методе перевала

$$K\phi + g\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi} = 0, \quad (45)$$

$$F[\phi] = -1/g, \quad (46)$$

существует нетривиальное решение в виде точки стационарности g_c и инстантона ϕ_c .

В таком случае, хорошо известно [11], что старший член асимптотики для N -го коэффициента стандартного теоретико-полевого разложения некоторой физической величины $F(g)$ по исходной константе взаимодействия g при боль-

ших N имеет вид

$$F^{(N)} \approx e^{N \ln N - N} a^N N^{b_F} C_F, \quad (47)$$

где a , b_F и C_F некоторые константы. Таким образом, коэффициенты разложения $F(g)$ факториально растут с ростом N и соответствующий ряд является расходящимся в классическом смысле.

Покажем, что если над исходным действием S совершить преобразование в стиле [8]

$$\tilde{S} = \frac{1}{2} \phi K \phi + \frac{a}{2} \mathcal{F}([\phi K \phi]^{1/2}) + \zeta \left(g F[\phi] - \frac{a}{2} \mathcal{F}([\phi K \phi]^{1/2}) \right), \quad (48)$$

то ряды теории возмущений по новому параметру ζ окажутся сходящимися. Здесь функция $\mathcal{F}(\phi)$ – плотность функционала $F[\phi]$, a – пока никак не фиксированное вещественное число и символ $[\dots]$ здесь и далее обозначает интегрирование стоящего в скобках выражения по непрерывным аргументам и суммирование по дискретным. Выбор в (48) контрчлена в форме $\sim \mathcal{F}([\phi K \phi]^{1/2})$ обусловлен тем, что разложение по ζ тогда приводит, к тем же, с точки зрения топологии, диаграммам, что и в модели (48).

Получим АВП $G_s^{(N)}$ – коэффициентов разложения s -хвостых функций Грина G_s модели (48) по ζ , воспользуемся тем, что согласно [11]

$$G_s^{(N)} = \frac{1}{2\pi i} \int D\phi \oint_{\gamma} d\zeta \phi(x_1) \dots \phi(x_s) e^{-\tilde{S} - (N+1) \ln \zeta}, \quad (49)$$

где γ замкнутый контур вокруг нуля.

Растяжение поля $\phi \rightarrow N^{1/m} \phi$ позволяет выделить в показателе экспоненты большой параметр N и применить метод перевала. При такой замене интеграл (49) преобразуется к виду

$$G_s^{(N)} = \frac{1}{2\pi i} \int D\phi \oint_{\gamma} d\zeta F(\phi) e^{-N\mathcal{I}}, \quad (50)$$

где медленная ¹ функция $F(\phi)$ и функционал $\mathcal{I}[\phi]$ соответственно есть

$$F(\phi) = \phi(x_1) \dots \phi(x_s) \exp \left(-\frac{N^{2/m}}{2} \phi K \phi - \ln \zeta \right), \quad (51)$$

$$\mathcal{I}[\phi] = \frac{a}{2} \mathcal{F}([\phi K \phi]^{1/2}) + \zeta \left(g F[\phi] - \frac{a}{2} \mathcal{F}([\phi K \phi]^{1/2}) \right) + \ln \zeta. \quad (52)$$

Используя предположение об однородности $F[\phi]$, вариационные уравнения для функционала $\mathcal{I}[\phi]$ записываются как

$$\frac{a}{2} \mathcal{F}'(1 - \zeta) [\phi K \phi]^{1/2} K \phi + g \zeta \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi} = 0, \quad (53)$$

$$F[\phi] - \frac{a}{2} \mathcal{F}([\phi K \phi]^{1/2}) = -1/\zeta, \quad (54)$$

здесь и далее в тексте за \mathcal{F}' обозначена производная функции $\mathcal{F}([\phi K \phi]^{1/2})$ по своему аргументу.

Нам известно $\phi_c(g)$ – решение уравнения (46), с другой стороны, растяжением поля $\phi \rightarrow 2\phi/(a\mathcal{F}'(1 - \zeta)[\phi K \phi]^{1/2})$ уравнение (53) приводится к виду (46). Такая замена просто переопределяет коэффициент перед вторым слагаемым уравнения $g \rightarrow 2g\zeta/(a\mathcal{F}'(1 - \zeta)[\phi K \phi]^{1/2}) \equiv z[\phi]$, откуда следует, что $\phi_c(g) = \phi_c(z[\phi_c])$. Поскольку $\phi_c(g)$ и $\phi_c(z)$ отличаются растяжением на числовой множитель, а функционал $z[\phi]$ инвариантен относительно такого преобразования, то мы можем искать решение (53) пропорциональным ϕ_c . Заметим, что благодаря однородности F растяжение поля не меняет вид уравнения (53), поэтому для поиска коэффициента пропорциональности воспользуемся второй парой уравнений (46)-(54). В уравнении (54) после замены поля явно выделяется общий множитель, представляющий из себя искомое растяжение в степени m . Дальнейшее решение системы (53)-(54) полностью аналогично описанному в п. 3 случаю уравнений (14).

¹ $N^{2/m} \ll N$ при $m \geq 2$ и $N \rightarrow \infty$

Приведём выражения для η – коэффициента пропорциональности между решениями (53) и (46), а также для новой точки стационарности ζ_c

$$\eta^m = \frac{1 + 2 / (\mathcal{F}' a g_c ([\phi_c K \phi_c]^{1/2}))}{1/g_c + a g_c \mathcal{F}([\phi_c K \phi_c]^{1/2}) / 2}, \quad (55)$$

$$\zeta_c = \frac{1}{1 + 2 / (\mathcal{F}' g_c a ([\phi_c K \phi_c]^{1/2}))}. \quad (56)$$

Поэтому, как уже показано в п. 3, радиус сходимости оказывается конечным и полностью определяется значением параметра ζ_c как функции от a .

Приложение Б

Вычисление функций $U_j(z)$

При построении бета- и гамма-функций РГ-уравнения (30) в наших рассуждениях возникает интегральный оператор (36), действующий на σ -зависимые константы ренормировки (26). Реально нас интересует действие A_k на вычеты в простом полюсе по ε функций (26). Оно происходит следующим образом: $A_k Z_i^{(1)} = \sum_{m,n} C_{mn}^{(i)} g_1^m g_2^n \zeta^{m+n} U_{m+n+k}$, где функции U_{m+n+k} задаются тем же интегралом (36). Получим для них более удобное, с точки зрения численного счёта, представление. Рассмотрим нормированные функции

$$U_j(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\sigma \frac{e^{-\sigma^2/2}}{(1 + 2i\sqrt{z}\sigma)^j} \quad (57)$$

и воспользуемся известным α -представлением для знаменателя подынтегральной функции

$$\frac{1}{(1 + 2i\sqrt{z}\sigma)^j} = \frac{1}{\Gamma(j)} \int dt t^{j-1} e^{-t-2it\sqrt{z}\sigma} \quad (58)$$

При подстановке (58) в (57) получаем

$$U_j(z) = \frac{1}{\Gamma(j)\sqrt{2\pi}} \int d\sigma e^{(-\sigma^2/2-2i\sigma\sqrt{z}t)} \int_0^\infty dt t^{j-1} e^{-t} = \frac{1}{\Gamma(j)} \int_0^\infty dt t^{j-1} e^{-t-2zt^2} \quad (59)$$

Список литературы

- [1] *Abrikosov A. A., Gor'kov L. P., Dzyaloshinskii I. E.* Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics. — Oxford: Pergamon, 1965.
- [2] *Larkin A. I., Varlamov A. A.* Fluctuation Phenomena in Superconductors // Superconductivity: Conventional and Unconventional Superconductors / Ed. by K. H. Bennemann, John B. Ketterson. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. — Pp. 369–458. https://doi.org/10.1007/978-3-540-73253-2_10.
- [3] *Vasilev A. N.* The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics. — Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004. — Pp. xvi+681. — Translated from the 1998 Russian original by Patricia A. de Forerand-Millard and revised by the author. <https://doi.org/10.1201/9780203483565>.
- [4] *Cazalilla Miguel A, Rey Ana Maria.* Ultracold Fermi gases with emergent SU(N) symmetry // *Reports on Progress in Physics*. — 2014. — nov. — Vol. 77, no. 12. — P. 124401.
- [5] *Komarova M. V., Nalimov M. Yu., Honkonen J.* Temperature Green's functions in Fermi systems: The superconducting phase transition // *Theoretical and Mathematical Physics*. — 2013. — Jul. — Vol. 176, no. 1. — Pp. 906–912. <https://doi.org/10.1007/s11232-013-0078-1>.
- [6] *Kalagov G. A., Kompaniets M. V., Nalimov M. Yu.* Renormalization-group study of a superconducting phase transition: Asymptotic behavior of higher expansion orders and results of three-loop calculations // *Theoretical and Mathematical Physics*. — 2014. — Nov. — Vol. 181, no. 2. — Pp. 1448–1458. <https://doi.org/10.1007/s11232-014-0225-3>.
- [7] *Kalagov G.A., Kompaniets M.V., Nalimov M.Yu.* Renormalization-group investigation of a superconducting U(r)-phase transition using five loops calculations. // *Nuclear Physics B*. — 2016. — Vol. 905. — Pp. 16–44.
- [8] *Ushveridze A. G.* // *Yad. Fiz.* — 1983. — Vol. 38, no. 798.

- [9] *Honkonen Juha, Nalimov Mikhail.* Convergent expansion for critical exponents in the $O(n)$ -symmetric ϕ^4 model for large n // *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics.* — 1999. — 1. — Vol. 459, no. 4. — Pp. 582–588.
- [10] *Honkonen J., Komarova M., Nalimov M.* Large order asymptotics and convergent perturbation theory for critical indices of the ϕ^4 model in $4-\epsilon$ expansion // *Acta Phys. Slov.* — 2002. — Vol. 52. — Pp. 303–310.
- [11] *Лунатов Л.Н.* // *ЖЭТФ.* — 1977. — no. 72:2. — Pp. 411–421.
- [12] *Komarova M. V., Nalimov M. Yu.* Asymptotic behavior of renormalization constants in higher orders of the perturbation expansion for the $(4 - \epsilon)$ -dimensionally regularized $O(n)$ -symmetric ϕ^4 theory. // *Theor. Math. Phys.* — 2001. — Vol. 126, no. 3. — Pp. 339–353.
- [13] *McKane Alan J.* Perturbation expansions at large order: results for scalar field theories revisited // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* — 2019. — jan. — Vol. 52, no. 5. — P. 055401.
- [14] *Komarova M. V., Nalimov M. Yu.* Asymptotic Behavior of Renormalization Constants in Higher Orders of the Perturbation Expansion for the $(4 - \epsilon)$ -Dimensionally Regularized $O(n)$ -Symmetric ϕ^4 Theory // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2001. — Mar. — Vol. 126, no. 3. — Pp. 339–353. <https://doi.org/10.1023/A:1010367917876>.
- [15] *Zinn-Justin J.* Quantum Field Theory and Critical Phenomena. — Oxford: Oxford University Press, 2002.
- [16] *Васильев А.Н.* // *ТМФ.* — 1989. — no. 81:3. — P. 336–353.
- [17] *Антонов Н.В., Васильев А.Н.* Квантово-полевая ренормгруппа в задаче о растущей границе раздела. // *ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.* — 1995. — Vol. 108, no. 3(9). — Pp. 885–893.
- [18] *Васильев А.Н., Налимов М.Ю.* Аналог размерной регуляризации для расчета ренормгрупповых функций в $1/n$ - разложении при

произвольной размерности пространства. // *ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*. — 1983. — Vol. 55, no. 2. — Pp. 163 – 175.