

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Копалиани Роман Алексеевич
Выпускная квалификационная работа
Особенности рассеяния света в двухосных жидких кристаллах

Уровень образования: бакалавриат
Направление 03.03.02 "Физика"
Образовательная программа: СВ.5011.2015 "Физика"
Кафедра: статистическая физика

Научный руководитель:
профессор,
кафедра статистической физики,
д.ф.-м.н. **Аксенова Е.В.**

Рецензент:
профессор,
кафедра общей физики – 1,
д.ф.-м.н. **Венедиктов В.Ю.**

Санкт-Петербург
2019

Содержание

1	Введение	3
2	Рассеяние света в двухосном жидком кристалле	6
3	Флуктуации ориентации и их корреляции в нематических двухосных жидких кристаллах	11
4	Корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости	15
5	Интенсивность рассеяния в зависимости от поляризации падающей и рассеянной волны	18
6	Заключение	21
	Список литературы	22

1 Введение

До открытия жидких кристаллов (ЖК) оптическая анизотропия рассматривалась как функция кристаллической структуры. Под анизотропией мы подразумеваем, что скорости световых волн в определенном направлении зависят от поляризации волн. Альтернативный способ рассмотрения этого состоит в том, чтобы отметить, что луч света, падающий в анизотропную среду, обычно разделяется на два луча внутри этой среды; такая среда считается двулучепреломляющей. Двулучепреломляющие среды делятся на два типа: одноосные и двухосные.

Из них одноосные среды гораздо проще. К одноосным относятся кристаллы ромбоэдрической, тетрагональной и гексагональной систем [1]. Все такие материалы обладают единственной оптической осью, которая также является осью симметрии для кристалла. Происхождение термина одноосный происходит от этой одной оси. В общем случае лучи, распространяющиеся в любом направлении внутри одноосной среды, делятся на обыкновенные (направление волновых векторов совпадает с направлением вектора Пойтинга) и необыкновенные (направление волновых векторов не совпадает с направлением вектора Пойтинга). Скорость обыкновенных волн определяется компонентами диэлектрического тензора в плоскости, перпендикулярной оптической оси. Диэлектрическая составляющая в направлении оптической оси влияет только на распространение необыкновенной волны. Обыкновенные и необыкновенные лучи соответствуют собственным модам уравнения Максвелла для распространения в рассматриваемом направлении. Ключевым свойством одноосной среды является то, что существует единственное направление распространения волн - оптическая ось - вдоль которой скорости двух волн с перпендикулярными поляризациями равны.

Когда мы сравниваем оптические свойства двухосных кристаллических структур с одноосными структурами, мы обнаруживаем, что теперь есть две разные оси, вдоль которых скорость света не зависит от поляризации. Именно существование этих двух оптических осей является источником термина двухосный. Такое поведение проявляется в кристаллических структурах моноклинного, триклинного и ромбического типов [1–3].

Оптические свойства кристаллов зависят в первую очередь от симметрии тензора диэлектрической проницаемости ϵ_{ik} . В одноосной среде два главных значения тензора диэлектрической проницаемости совпадают, тогда как в двухосной среде все три значения различны.

$$n^2(\epsilon_x n_x^2 + \epsilon_y n_y^2 + \epsilon_z n_z^2) - [n_x^2 \epsilon_x (\epsilon_y + \epsilon_z) + n_y^2 \epsilon_y (\epsilon_x + \epsilon_z) + n_z^2 \epsilon_z (\epsilon_x + \epsilon_y)] + \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{n} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k}$, \mathbf{k} - волновой вектор. Уравнение (1) – уравнение Френеля – одно из основных уравнений кристаллооптики. Оно определяет в неявном виде закон дисперсии, то есть зависимость

Хочется также сказать пару слов по поводу актуальности данной работы: просмотрев достаточно большое число источников, решение данной задачи в полном объеме отсутствует: частично некоторые задачи были решены А.Ю. Вальковым и В.П. Романовым в работах [6-7]. Так, например, в работе [6] была получена функция Грина для электромагнитной волны в двухосном нематическом жидком кристалле (в дальнейшем ДНЖК), что является одной из важнейших задач при нахождении интенсивности рассеянного света. В работе [7] получено выражение для корреляционной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости. В моей работе выражение для коррелятора флуктуаций диэлектрической проницаемости предлагается получить иным способом. Таким образом, задача является актуальной и открытой для исследования.

2 Рассеяние света в двухосном жидком кристалле

Оптические свойства немагнитной анизотропной среды характеризуются её тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$. В общем случае двухосной среды его можно представить в виде:

$$\hat{\varepsilon} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \mathbf{x}_i^0 \otimes \mathbf{x}_i^0, \quad (2)$$

где ε_i – собственные значения тензора $\hat{\varepsilon}$, а \mathbf{x}_i^0 – орты его главных осей. Значок \otimes обозначает тензорное произведение векторов.

Изучение оптических свойств двухосных кристаллов связано с исследованием уравнения Френеля в его общем виде (1). Направление \mathbf{k} , соответствующее точкам самопересечения поверхности волновых векторов, определяет две оси - бинормали. Удобно представить поверхность волновых векторов как объединение двух замкнутых частей - внешней и внутренней. Известно, что в общем случае при заданном направлении волнового вектора $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{k}}{k}$ в анизотропной среде могут распространяться два различных типа нормальных волн: обыкновенная волна и необыкновенная волна. В двухосной среде обе волны являются необыкновенными [4].

Волна может описываться не только с помощью вектора \mathbf{n} , но и в терминах лучевого вектора \mathbf{m} . Направление лучевого вектора совпадает с направлением вектора Пойтинга \mathbf{S} и не совпадает с направлением вектора \mathbf{n} . Мы будем определять абсолютную величину вектора \mathbf{m} , следуя [6]:

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (3)$$

Угол δ между векторами \mathbf{n} и \mathbf{m} для волны, распространяющейся в анизотропной среде, равен углу между векторами напряженности электрического поля \mathbf{E} и электрической индукции \mathbf{D} векторами электрической индукции:

$$\cos \delta = \frac{1}{mn} = \frac{(\mathbf{s}\hat{\varepsilon}\mathbf{s})}{\sqrt{\mathbf{s}\hat{\varepsilon}^2\mathbf{s}}}. \quad (4)$$

Между лучевыми и волновыми векторами имеется следующее соотношение двойственности:

$$\hat{\varepsilon} \rightarrow \hat{\varepsilon}^{-1}, \quad \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{m}, \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{D}, \quad (5)$$

замена в любом уравнении, содержащем величины $\hat{\varepsilon}$, \mathbf{n} , \mathbf{E} приводит к верному уравнению.

Исходя из [1], для заданного направления $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{m}}{m}$ лучевого вектора в анизотропной среде могут распространяться две необыкновенные волны с модулями лучевых векторов (в дальнейшем: j

= 1 и j = 2):

$$m^{(j)}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{Sp\hat{\varepsilon} - (\mathbf{r}\hat{\varepsilon}\mathbf{r}) + (-1)^j \Delta_m^{1/2}(\mathbf{r})}{2(\mathbf{r}\hat{\varepsilon}^{-1}\mathbf{r})\det(\hat{\varepsilon})}}, \quad (6)$$

где

$$\Delta_m(\mathbf{r}) = [Sp\hat{\varepsilon} - \mathbf{r}\hat{\varepsilon}\mathbf{r}]^2 - 4(\mathbf{r}\hat{\varepsilon}^{-1}\mathbf{r})\det(\hat{\varepsilon}), \quad (7)$$

являющиеся корнями уравнения:

$$(\mathbf{r}\hat{\varepsilon}^{-1}\mathbf{r})m^4\det(\hat{\varepsilon}) - [Sp\hat{\varepsilon} - (\mathbf{r}\hat{\varepsilon}\mathbf{r})]m^2 + 1 = 0. \quad (8)$$

Далее в выражениях, которые будут приведены ниже, мы используем верхние индексы (1) и (2) для обозначения величин, соответствующих этим двум волнам. Направления их векторов поляризации для двухосной среды обозначим через $\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{r})$. Согласно [6], $\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{r})$ определяются из соотношения:

$$\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{r}) = \beta \hat{Q}^{(j)}(\mathbf{r})\mathbf{r}, \quad (9)$$

где β - постоянная, задаваемая условием $e^{(j)} = 1$, а

$$\hat{Q}^{(j)}(\mathbf{r}) = (m^{(j)})^{-2}\hat{\varepsilon} + (m^{(j)})^{-2} [(m^{(j)})^{-2} - Sp\hat{\varepsilon}] \hat{I} + (\det \hat{\varepsilon})\hat{\varepsilon}^{-1}. \quad (10)$$

Выражения для волн с заданным направлением лучевого вектора [6]:

$$\mathbf{n}^{(j)}(\mathbf{r}) = \hat{W}^{(j)}(\mathbf{r})\mathbf{r}, \quad (11)$$

где

$$\hat{W}^{(j)}(\mathbf{r}) = (-1)^j \frac{m^{(j)}}{\Delta_m^{1/2}} \hat{Q}^{(j)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{m^{(j)}} \hat{I}. \quad (12)$$

При обычной постановке задачи светорассеяния предполагается, что на образец падает плоская волна, верхний индекс (i) будет соответствовать падающей волне, а индекс (s) будет соответствовать рассеянной волне:

$$\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{R}) = E_0 \mathbf{e}^{(i)}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}^{(i)} \cdot \mathbf{r}}, \quad (13)$$

где E_0 – амплитуда, $\mathbf{e}^{(i)}(\mathbf{R})$ - поляризация, $\mathbf{k}^{(i)}$ – волновой вектор. Также предполагается, что рассеянное поле с вектором поляризации $\mathbf{e}^{(s)}$ регистрируется на больших расстояниях от рассеивающего объема V . Тогда можно считать рассеянное поле – квазиплоской волной с волновым вектором $\mathbf{k}^{(s)}$. Будем работать в приближении однократного рассеяния.

Будем рассматривать среду, в которой происходят спонтанные тепловые флуктуации, тогда тензор диэлектрической проницаемости удобно представить в виде:

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^0 + \delta\hat{\varepsilon}, \quad (14)$$

где $\hat{\varepsilon}^0$ – равновесное значение, а $\delta\hat{\varepsilon}$ – флуктуационная добавка.

Введем вектор поляризации, наведенной флуктуациями,

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi} \delta\hat{\varepsilon} \mathbf{H}, \quad (15)$$

тогда волновое уравнение примет вид:

$$[n^2(\hat{I} - \mathbf{s} \otimes \mathbf{s})] \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = 4\pi \mathbf{P}(\omega, \mathbf{k}). \quad (16)$$

Определим функцию Грина $\hat{T}(\omega, \mathbf{k})$ электромагнитного поля как:

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = 4\pi \hat{T}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{P}(\omega, \mathbf{k}). \quad (17)$$

Согласно [6], функция Грина электромагнитного поля в двухосной среде:

$$\hat{T}(\omega, \mathbf{R}) = \sum_{j=1}^2 \hat{G}^{(j)}(\omega, \mathbf{R}), \quad (18)$$

где

$$\hat{G}^{(j)}(\omega, \mathbf{R}) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\sigma_n^{(j)} n^{(j)} \cos \delta^{(j)}}{4\pi R \sqrt{|K_{\sigma_n^{(j)}}^{(j)}|}} \hat{Y}^{(j)} e^{i\mathbf{k}^{(j)} \cdot \mathbf{R}}, \quad (19)$$

где $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{R}}{R}$, $\hat{Y}^{(j)}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{s}) \otimes \mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{s})}{(\mathbf{e}^{(j)} \hat{\varepsilon} \mathbf{e}^{(j)})}$. Здесь все величины вычислены в стационарной точке $\mathbf{n}^{(j)} = \mathbf{n}_{st}^{(j)}$. Условие стационарной фазы задает на поверхностях интегрирования стационарные точки, в которых нормаль к этим поверхностям параллельна направлению \mathbf{r} , при этом направление нормали к этой поверхности совпадает с направлением лучевого вектора [6]. В частности $K_{\sigma_n^{(j)}}^{(j)}$ – гауссова кривизна волновой поверхности в стационарной точке. Скалярные множители $\sigma_n^{(j)}$ зависят от знаков двух главных кривизн λ_1 и λ_2 волновой поверхности в стационарной точке (более подробно о выражении (19), см. [6]).

Переходим непосредственно к поставленной задаче. Перепишем функцию Грина (19) в виде:

$$T_{\alpha\beta}^{(j)}(\omega, \mathbf{R}) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\sigma_n^{(j)} n^{(j)} \cos \delta^{(j)} e_\alpha^{(j)} e_\beta^{(j)}}{4\pi R \sqrt{|K_{\sigma_n^{(j)}}^{(j)}|} \mathbf{e}^{(j)} \hat{\varepsilon} \mathbf{e}^{(j)}} e^{i\mathbf{k}^{(j)} \cdot \mathbf{R}}, \quad (20)$$

и пусть

$$A = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\sigma_n^{(j)} n^{(j)} \cos \delta^{(j)}}{4\pi \sqrt{|K_{\sigma_n^{(j)}}^{(j)}|} \mathbf{e}^{(j)} \hat{\varepsilon} \mathbf{e}^{(j)}}. \quad (21)$$

Тогда (20) преобразуется к виду:

$$T_{\alpha\beta}^{(j)}(\omega, \mathbf{R}) = A e_\alpha^{(j)} e_\beta^{(j)} \frac{e^{i\mathbf{k}^{(j)} \cdot \mathbf{R}}}{R}. \quad (22)$$

В приближении дальней зоны, когда $R \gg \lambda$, выражение для \mathbf{R} :

$$R = |\mathbf{R}'' - \mathbf{R}'| \approx R'' - \frac{(\mathbf{R}'', \mathbf{R}')}{R''} + O\left(\frac{1}{R''^2}\right), \quad (23)$$

где R'' - радиус-вектор приемника, R' радиус-вектора источника.

Следовательно, выражение (20) для поля рассеянной волны:

$$T_{\alpha\beta}^{(j)}(\omega, \mathbf{R}'') = A e_{\alpha}^{(j)} e_{\beta}^{(j)} \frac{e^{i\mathbf{k}^{(j)}\mathbf{R}''}}{R''} e^{-i\mathbf{k}^{(s)}\mathbf{R}'}, \quad (24)$$

где $k^{(s)} = k^{(j)} \frac{\mathbf{R}''}{R''}$ - волновой вектор рассеянной волны.

Записав волновое уравнение в интегральной форме, получаем:

$$E_{\alpha} = E_{0\alpha} + k_0^2 \int_V d\mathbf{R}' T_{\alpha\beta}^{(j)}(\mathbf{R}'' - \mathbf{R}') \delta\varepsilon_{\beta\gamma}(\mathbf{R}') E_{\gamma}^{(i)}(\mathbf{R}'), \quad (25)$$

где $E_{\gamma}^{(i)} = E_0 e_{\gamma}^{(i)} e^{i\mathbf{k}^{(i)}\mathbf{R}'}$.

Рассмотрим второй член в правой части уравнения (25). Ему соответствует рассеянное поле $\mathbf{E}^{(s)}$, порожденное падающим полем $\mathbf{E}^{(i)}$. Тогда:

$$E^{(s)}(\mathbf{R}'') = A E_0^{(i)} \frac{e^{i\mathbf{k}^{(s)}\mathbf{R}''}}{R''} e_{\alpha}^{(s)} k_0^2 \int_V d\mathbf{R}' e^{-i\mathbf{k}^{(s)}\mathbf{R}'} e^{i\mathbf{k}^{(i)}\mathbf{R}'} e_{\beta}^{(s)} \delta\hat{\varepsilon}_{\beta\gamma} e_{\gamma}^{(i)}. \quad (26)$$

Здесь в качестве рассеянной волны рассматривается волна какого-то одного типа $s = 1$ или $s = 2$.

Учитывая, что

$$\int_V d\mathbf{R}' e^{i(\mathbf{k}^{(i)} - \mathbf{k}^{(s)})\mathbf{R}'} \delta\hat{\varepsilon} = V \delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{q}). \quad (27)$$

Рассеянное поле определяется трехмерной Фурье компонентой флуктуации диэлектрической проницаемости $\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{q})$ в объеме V , где $\mathbf{q} = \mathbf{k}^{(s)} - \mathbf{k}^{(i)}$ - вектор рассеяния. Тогда выражение (26) преобразуется к виду:

$$E_{\alpha}^{(s)}(\mathbf{R}'') = AV E_0^{(i)} \frac{e^{i\mathbf{k}^{(s)}\mathbf{R}''}}{R''} e_{\alpha}^{(s)} e_{\beta}^{(s)} \delta\varepsilon_{\beta\gamma} e_{\gamma}^{(i)}. \quad (28)$$

Понимая под интенсивностью рассеянного света среднее по времени значение модуля вектора Пойтинга, можем написать:

$$I_{(s)}^{(i)} = \frac{c}{4\pi} \langle |E^{(s)}|^2 \rangle n_{(s)} \cos \delta_{(s)}. \quad (29)$$

Рассмотрим подробнее множитель $\langle |E^{(s)}|^2 \rangle$:

$$\langle |E^{(s)}|^2 \rangle = \frac{(AV E_0^{(i)} k_0^2)^2}{R''^2} e_{\beta}^{(s)} e_{\mu}^{(s)} \langle \delta\varepsilon_{\beta\gamma} \delta\varepsilon_{\mu\nu}^* \rangle e_{\gamma}^{(i)} e_{\nu}^{(i)}. \quad (30)$$

Вводя: $VG_{\beta\gamma\mu\nu}(\mathbf{q}) = \langle \delta\varepsilon_{\beta\gamma}(\mathbf{q})\delta\varepsilon_{\mu\nu}^*(\mathbf{q}) \rangle$ – трехмерный Фурье-образ корреляционной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости, получаем выражение для интенсивности:

$$I_{(s)}^{(i)} = I_{(0)}^{(i)} \frac{A^2 k_0^4 V n^{(s)} \cos \delta^{(s)}}{R^{n_2} n^{(i)} \cos \delta^{(i)}} e_{\beta}^{(s)} e_{\mu}^{(s)} \hat{G}_{\beta\gamma\mu\nu}(\mathbf{q}) e_{\gamma}^{(i)} e_{\nu}^{(i)}, \quad (31)$$

где $I_0^{(i)} = E_0^{(i)2}$.

3 Флуктуации ориентации и их корреляции в нематических двухосных жидких кристаллах

В случае двухосной фазы, симметрия молекулы может быть визуализирована как регулярная прямоугольная пластинка со сторонами длиной a , b , c причем, $a > b > c$. Ориентацию этой пластины можно описать через три взаимно ортогональных единичных вектора $\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{l}$, которые зависят от пространственной переменной x и времени t , как показано на рисунке 2. В этой модели вектор \mathbf{n} будет "старшим" директором, а вектор \mathbf{m} будет "младшим" директором. Вращение двухосной пластины вокруг направления главного директора \mathbf{n} однозначно определяется ориентацией \mathbf{m} , тогда как единичный вектор \mathbf{l} просто определяется из соотношения $\mathbf{l} = \mathbf{n} \times \mathbf{m}$ и, таким образом, знание ориентации \mathbf{n} и \mathbf{m} является достаточным для описания двухосного выравнивания, причем \mathbf{l} в основном используется для упрощения обозначения и определения третьей оси симметрии [5].

В статических задачах обычно сводят к минимуму, используя подходящие уравнения Эйлера-

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0.$$

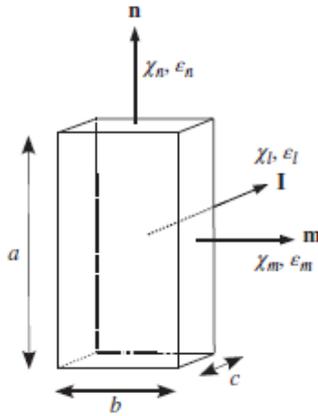


Рис. 2: Оси ориентации ДНЖК.

Лагранжа, свободную энергию, основанную на возможных искажениях директора. Эта энергия как правило включает вклады от упругой энергии, электрического и магнитных полей. Также может присутствовать вклад, связанный с поверхностной энергией, но здесь мы его рассматривать не будем. Полная энергия W задается формулой:

$$W(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \nabla \mathbf{n}, \nabla \mathbf{m}) = \int_V \{w_{el}(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \nabla \mathbf{n}, \nabla \mathbf{m}) + w_m(\mathbf{n}, \mathbf{m}) + w_e(\mathbf{n}, \mathbf{m})\} dV, \quad (32)$$

где V - объем образца, а w_{el}, w_m, w_e - плотности упругой, магнитной и электрической энергии. Далее будем считать, что $w_e(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = 0$.

Также должно выполняться требование:

$$W(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \nabla \mathbf{n}, \nabla \mathbf{m}) = W(-\mathbf{n}, \mathbf{m}, -\nabla \mathbf{n}, \nabla \mathbf{m}) = W(\mathbf{n}, -\mathbf{m}, \nabla \mathbf{n}, -\nabla \mathbf{m}). \quad (33)$$

Плотность энергии также должна быть инвариантна к произвольным наложенным вращениям тела как целого. В континуальном случае упругая энергия получается как разложение вокруг неискаженного основного состояния по отношению к градиентам директора. Общий вид которого: ([8],[9])

$$\begin{aligned} w_{el}(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \nabla \mathbf{n}, \nabla \mathbf{m}) = & \frac{1}{2} [K_1(\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + K_2(\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n}))^2 + K_3(\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n}))^2 + \\ & + K_4(\nabla \cdot \mathbf{m})^2 + K_5(\mathbf{m} \cdot (\nabla \times \mathbf{m}))^2 + K_6(\mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{m}))^2 + \\ & + K_7(\nabla \cdot \mathbf{l})^2 + K_8(\mathbf{l} \cdot (\nabla \times \mathbf{l}))^2 + K_9(\mathbf{l} \times (\nabla \times \mathbf{l}))^2 + \\ & + K_{10}(\mathbf{m} \cdot (\nabla \times \mathbf{n}))^2 + K_{11}(\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{l}))^2 + K_{12}(\mathbf{l} \cdot (\nabla \times \mathbf{m}))^2, \end{aligned} \quad (34)$$

где K_1 – K_{12} –упругие постоянные (модули Франка).

Для описания магнитных свойств двухосных нематиков необходимо ввести три магнитные восприимчивости, соответствующие каждой главной оси двухосной пластины. Магнитная восприимчивость вдоль главной оси i обозначена μ_i , где i принимает любой из символов \mathbf{n} , \mathbf{m} или \mathbf{l} , если это необходимо. Аналогично континуальной теории для одноосных нематиков также удобно ввести соответствующую магнитную анизотропию [5]:

$$\chi_{ij} = \chi_i - \chi_j. \quad (35)$$

Выражение для плотности энергии магнитного поля принимает вид:

$$w_m = -\frac{1}{2}\mu_0[\chi_{nl}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})^2 + \chi_{ml}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{m})^2 + \chi_l \mathbf{H}^2], \quad (36)$$

где $H = |\mathbf{H}|$ – величина поля.

Далее рассмотрим случай, когда \mathbf{H} направлен вдоль оси z . Удобно представить \mathbf{n} , \mathbf{m} и \mathbf{l} в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^0 = \mathbf{n}^0_{(1)} = (0, 0, 1), \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}_{(1)} = \mathbf{n}^0_{(1)} + \delta \mathbf{n}_{(1)}, \quad \delta \mathbf{n}_{(1)} = (n_x, n_y, 0) = (\delta n_x, \delta n_y, 0) \\ \mathbf{m}^0 = \mathbf{n}^0_{(2)} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{m} = \mathbf{n}_{(2)} = \mathbf{n}^0_{(2)} + \delta \mathbf{n}_{(2)}, \quad \delta \mathbf{n}_{(2)} = (m_x, 0, m_z) = (\delta m_x, 0, \delta m_z) \\ \mathbf{l}^0 = \mathbf{n}^0_{(3)} = (-1, 0, 0), \quad \mathbf{l} = \mathbf{n}_{(3)} = \mathbf{n}^0_{(3)} + \delta \mathbf{n}_{(3)}, \quad \delta \mathbf{n}_{(3)} = (0, m_x, n_x) = (0, \delta m_x, \delta n_x) \end{aligned} \quad (37)$$

где \mathbf{n}^0 , \mathbf{m}^0 , \mathbf{l}^0 – равновесный директор для \mathbf{n} , \mathbf{m} и \mathbf{l} соответственно. С точностью до второго порядка малости, упругая энергия w_{el} выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} w_{el} = & \frac{1}{2} [K_1(\partial_x n_x + \partial_y n_y)^2 + K_2(\partial_y n_x - \partial_x n_y)^2 + K_3((\partial_z n_x)^2 + (\partial_z n_y)^2) + \\ & + K_4(\partial_x m_x + \partial_z m_z)^2 + K_5(\partial_z m_x - \partial_x m_z)^2 + K_6((\partial_y m_x)^2 + (\partial_y m_z)^2) + \\ & + K_7(\partial_y m_x + \partial_z n_x)^2 + K_8(\partial_z m_x - \partial_y n_x)^2 + K_9((\partial_x m_x)^2 + (\partial_x n_x)^2) + \\ & + K_{10}(\partial_z n_x)^2 + K_{11}(\partial_x m_x)^2 + K_{12}(\partial_y m_z)^2]. \end{aligned} \quad (38)$$

А выражение (36) преобразуется к виду:

$$w_m = -\frac{1}{2}\mu_0 [\chi_{nl}H^2(1 - (n_x^2 + n_y^2)) + \chi_{ml}m_z^2H^2 + \chi_lH^2], \quad (39)$$

где слагаемые типа $\chi_{nl}H^2$ и χ_lH^2 не зависят от ориентации молекул и их можно опустить.

Далее выражая полную энергию через фурье-компоненты, получаем:

$$n_x(\mathbf{q}) = \int_V n_x(\mathbf{r})e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \quad \text{и т.д.} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} W = W_0 + \frac{1}{2V} \sum_q \{ & K_1 |n_x(\mathbf{q})q_x + n_y(\mathbf{q})q_y|^2 + K_2 |n_x(\mathbf{q})q_y - n_y(\mathbf{q})q_x|^2 + \\ & + (K_3q_z^2 + \mu_0\chi_{nl}H^2)(|n_x(\mathbf{q})|^2 + |n_y(\mathbf{q})|^2) + K_4 |m_x(\mathbf{q})q_x + m_z(\mathbf{q})q_z|^2 + \\ & + K_5 |m_x(\mathbf{q})q_z - m_z(\mathbf{q})q_x|^2 + K_6 [|m_x(\mathbf{q})|^2 + |m_z(\mathbf{q})|^2]q_y^2 + \\ & + K_7 |m_x(\mathbf{q})q_y + n_x(\mathbf{q})q_z|^2 + K_8 |m_x(\mathbf{q})q_z - n_x(\mathbf{q})q_y|^2 + \\ & + K_9 [|m_x(\mathbf{q})|^2 + |n_x(\mathbf{q})|^2]q_x^2 + K_{10} |n_x(\mathbf{q})|^2q_z^2 + \\ & + K_{11} |m_x(\mathbf{q})|^2q_x^2 + (K_{12}q_y^2 - \mu_0\chi_{ml}H^2)|m_z(\mathbf{q})|^2 \}. \end{aligned} \quad (41)$$

Далее учтем связь, которую можно получить из условия:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0 = \mathbf{n}_0\delta\mathbf{m} + \mathbf{m}_0\delta\mathbf{n}. \quad (42)$$

Отсюда следует, что $m_z = -n_y$. Запишем квадратичную форму (41) в матричном виде:

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} n_x & n_y & m_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x^* \\ n_y^* \\ m_x^* \end{bmatrix}, \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= q_x^2(K_1 + K_9) + q_y^2(K_2 + K_3 + K_8) + q_z^2(K_7 + K_{10}) - \frac{1}{2}\mu_0\chi_{nl}H^2 \\ a_{22} &= q_x^2(K_2 + K_5) + q_y^2(K_1 + K_3 + K_6 + K_{12}) + q_z^2K_4 - \frac{1}{2}\mu_0(\chi_{nl} + \chi_{ml})H^2 \\ a_{33} &= q_x^2(K_4 + K_9 + K_{11}) + q_y^2(K_6 + K_7) + q_z^2(K_5 + K_8) \\ a_{12} &= a_{21} = q_xq_y(K_1 - K_2) \\ a_{31} &= a_{13} = q_yq_z(K_7 - K_8) \\ a_{32} &= a_{23} = q_xq_z(K_5 - K_4). \end{aligned} \quad (44)$$

Найдем обратную матрицу квадратичной формы, для этого введем:

$$\det(A) = \Delta. \quad (45)$$

Найдем матрицу миноров:

$$M_* = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}, \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned}b_{11} &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) \\b_{12} &= b_{21} = a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\b_{13} &= b_{31} = a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\b_{22} &= a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) \\b_{23} &= b_{32} = a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \\b_{33} &= a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).\end{aligned}\tag{47}$$

Учитывая симметричность, матрица алгебраических дополнений:

$$M = \begin{bmatrix} b_{11} & -b_{12} & b_{13} \\ -b_{21} & b_{22} & -b_{23} \\ b_{31} & -b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}.\tag{48}$$

Итого, обратная матрица квадратичной формы:

$$A^{-1} = \frac{M}{\Delta}.\tag{49}$$

Теперь мы можем определить тепловое среднее значение $\langle n_\alpha n_\beta \rangle$. Для этого мы предполагаем справедливой теорему о равномерном распределении: для классической системы при свободной энергии, квадратичной по n_α , среднее значение на одну степень свободы в тепловом равновесии равно [10]:

$$\langle n_\alpha n_\beta \rangle = V k_b T (A^{-1})_{\alpha\beta}.\tag{50}$$

4 Корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости

Теперь получим выражение для коррелятора диэлектрической проницаемости и его связь с выражением выше. Здесь и далее подразумевается: $\hat{\varepsilon}(\mathbf{q})$ и $\mathbf{n}(\mathbf{q})$. Учитывая выражение (2), тензор диэлектрической проницаемости представим в виде:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_1 n_\alpha n_\beta + \varepsilon_2 m_\alpha m_\beta + \varepsilon_3 l_\alpha l_\beta . \quad (51)$$

Далее введем переобозначение:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{n}_{(1)} &= (\delta n_x, \delta n_y, 0) = (\xi_1, \xi_2, 0) \\ \delta \mathbf{n}_{(2)} &= (\delta m_x, 0, -\delta n_y) = (\xi_3, 0, -\xi_2) \\ \delta \mathbf{n}_{(3)} &= (0, \delta m_x, \delta n_x) = (0, \xi_3, \xi_1) \quad . \end{aligned} \quad (52)$$

Тогда флуктуации тензора диэлектрической проницаемости:

$$\delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^0 = \sum_i \varepsilon_i (n_{(i)\alpha}^0 \delta n_{(i)\beta} + n_{(i)\beta}^0 \delta n_{(i)\alpha}) . \quad (53)$$

Таким образом, выражение для коррелятора флуктуаций диэлектрической проницаемости:

$$\begin{aligned} \langle \delta \varepsilon_{\beta\gamma} \delta \varepsilon_{\mu\nu}^* \rangle &= \sum_{i,j} \langle \delta \varepsilon_{\beta\gamma}^{(i)} \delta \varepsilon_{\mu\nu}^{*(j)} \rangle = \sum_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon_j \left\{ n_{(i)\beta}^0 n_{(j)\gamma}^0 \langle \delta n_{(i)\mu} \delta n_{(j)\nu}^* \rangle + \right. \\ &\left. + n_{(i)\beta}^0 n_{(j)\nu}^0 \langle \delta n_{(i)\mu} \delta n_{(j)\gamma}^* \rangle + n_{(i)\mu}^0 n_{(j)\gamma}^0 \langle \delta n_{(i)\beta} \delta n_{(j)\nu}^* \rangle + n_{(i)\mu}^0 n_{(j)\nu}^0 \langle \delta n_{(i)\beta} \delta n_{(j)\gamma}^* \rangle \right\} . \end{aligned} \quad (54)$$

Далее перейдем к виду, независящему от системы координат:

$$\begin{cases} \mathbf{n}^0_{(1)} = -\xi_1 \mathbf{n}^0_{(3)} + \xi_2 \mathbf{n}^0_{(2)} \\ \mathbf{n}^0_{(2)} = -\xi_3 \mathbf{n}^0_{(3)} - \xi_2 \mathbf{n}^0_{(1)} \\ \mathbf{n}^0_{(3)} = \xi_3 \mathbf{n}^0_{(2)} + \xi_1 \mathbf{n}^0_{(1)} \quad . \end{cases} \quad (55)$$

Напишем выражения для всевозможных значений i, j коррелятора вида $\langle \delta n_{(i)\alpha} \delta n_{(j)\beta}^* \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \delta n_{(1)\alpha} \delta n_{(1)\beta}^* \rangle &= \langle |\xi_1|^2 \rangle n_{(3)\alpha}^0 n_{(3)\beta}^0 + \langle |\xi_2|^2 \rangle n_{(2)\alpha}^0 n_{(2)\beta}^0 + \\ &+ \langle \xi_1 \xi_2^* \rangle n_{(3)\alpha}^0 n_{(2)\beta}^0 + \langle \xi_2 \xi_1^* \rangle n_{(2)\alpha}^0 n_{(3)\beta}^0 , \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta n_{(2)\alpha} \delta n_{(2)\beta}^* \rangle &= \langle |\xi_3|^2 \rangle n_{(3)\alpha}^0 n_{(3)\beta}^0 + \langle |\xi_2|^2 \rangle n_{(1)\alpha}^0 n_{(1)\beta}^0 + \\ &+ \langle \xi_3 \xi_2^* \rangle n_{(3)\alpha}^0 n_{(1)\beta}^0 + \langle \xi_2 \xi_3^* \rangle n_{(1)\alpha}^0 n_{(3)\beta}^0 , \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta n_{(3)\alpha} \delta n_{(3)\beta}^* \rangle &= \langle |\xi_3|^2 \rangle n_{(2)\alpha}^0 n_{(2)\beta}^0 + \langle |\xi_1|^2 \rangle n_{(1)\alpha}^0 n_{(1)\beta}^0 + \\ &+ \langle \xi_3 \xi_1^* \rangle n_{(2)\alpha}^0 n_{(1)\beta}^0 + \langle \xi_1 \xi_3^* \rangle n_{(1)\alpha}^0 n_{(2)\beta}^0 , \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} < \delta n_{(1)\alpha} \delta n_{(2)\beta}^* > = < \xi_1 \xi_3^* > n_{(3)\alpha}^0 n_{(3)\beta}^0 - < |\xi_2|^2 > n_{(2)\alpha}^0 n_{(1)\beta}^0 + \\ & + < \xi_1 \xi_2^* > n_{(3)\alpha}^0 n_{(1)\beta}^0 - < \xi_2 \xi_3^* > n_{(2)\alpha}^0 n_{(3)\beta}^0 , \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} < \delta n_{(1)\alpha} n_{(3)\beta}^* > = < \xi_2 \xi_3^* > n_{(2)\alpha}^0 n_{(2)\beta}^0 + < \xi_2 \xi_1^* > n_{(2)\alpha}^0 n_{(1)\beta}^0 - \\ & - < \xi_1 \xi_3^* > n_{(3)\alpha}^0 n_{(2)\beta}^0 - < |\xi_1|^2 > n_{(3)\alpha}^0 n_{(1)\beta}^0 , \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} < \delta n_{(2)\alpha} \delta n_{(1)\beta}^* > = < \xi_3 \xi_1^* > n_{(3)\alpha}^0 n_{(3)\beta}^0 - < \xi_3 \xi_2^* > n_{(3)\alpha}^0 n_{(2)\beta}^0 + \\ & + < \xi_2 \xi_1^* > n_{(1)\alpha}^0 n_{(3)\beta}^0 - < |\xi_2|^2 > n_{(1)\alpha}^0 n_{(2)\beta}^0 , \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} < \delta n_{(2)\alpha} \delta n_{(3)\beta}^* > = - < |\xi_3|^2 > n_{(3)\alpha}^0 n_{(2)\beta}^0 - < \xi_3 \xi_1^* > n_{(3)\alpha}^0 n_{(1)\beta}^0 - \\ & - < \xi_2 \xi_3^* > n_{(1)\alpha}^0 n_{(2)\beta}^0 - < \xi_2 \xi_1^* > n_{(1)\alpha}^0 n_{(1)\beta}^0 , \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} < \delta n_{(3)\alpha} \delta n_{(1)\beta}^* > = < \xi_3 \xi_2^* > n_{(2)\alpha}^0 n_{(2)\beta}^0 - < \xi_3 \xi_1^* > n_{(2)\alpha}^0 n_{(3)\beta}^0 + \\ & + < \xi_1 \xi_2^* > n_{(1)\alpha}^0 n_{(2)\beta}^0 - < |\xi_1|^2 > n_{(1)\alpha}^0 n_{(3)\beta}^0 , \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} < \delta n_{(3)\alpha} \delta n_{(2)\beta}^* > = - < \xi_3 \xi_2^* > n_{(2)\alpha}^0 n_{(1)\beta}^0 - < |\xi_3|^2 > n_{(2)\alpha}^0 n_{(3)\beta}^0 - \\ & - < \xi_1 \xi_3^* > n_{(1)\alpha}^0 n_{(3)\beta}^0 - < \xi_1 \xi_2^* > n_{(1)\alpha}^0 n_{(1)\beta}^0 . \end{aligned} \quad (64)$$

Учитывая выражение (56), преобразуем выражение с коррелятором (53), получим:

$$\begin{aligned} < \delta \varepsilon_{\beta\gamma}^{(1)} \delta \varepsilon_{\mu\nu}^{*(1)} > = \varepsilon_1^2 \{ < |\xi_1|^2 > [n_{(1)\beta}^0 n_{(1)\mu}^0 n_{(3)\gamma}^0 n_{(3)\nu}^0 + n_{(1)\beta}^0 n_{(1)\nu}^0 n_{(3)\gamma}^0 n_{(3)\mu}^0 + \\ & + n_{(1)\gamma}^0 n_{(1)\mu}^0 n_{(3)\beta}^0 n_{(3)\nu}^0 + n_{(1)\gamma}^0 n_{(1)\nu}^0 n_{(3)\beta}^0 n_{(3)\mu}^0] + < |\xi_2|^2 > [n_{(1)\beta}^0 n_{(1)\mu}^0 n_{(2)\gamma}^0 n_{(2)\nu}^0 + \\ & + n_{(1)\beta}^0 n_{(1)\nu}^0 n_{(2)\gamma}^0 n_{(2)\mu}^0 + n_{(1)\gamma}^0 n_{(1)\mu}^0 n_{(2)\beta}^0 n_{(2)\nu}^0 + n_{(1)\gamma}^0 n_{(1)\nu}^0 n_{(2)\beta}^0 n_{(2)\mu}^0] + \\ & + < \xi_1 \xi_2^* > [n_{(1)\beta}^0 n_{(1)\mu}^0 n_{(3)\gamma}^0 n_{(2)\nu}^0 + n_{(1)\beta}^0 n_{(1)\nu}^0 n_{(3)\gamma}^0 n_{(2)\mu}^0 + n_{(1)\gamma}^0 n_{(1)\mu}^0 n_{(3)\beta}^0 n_{(2)\nu}^0 + \\ & + n_{(1)\gamma}^0 n_{(1)\nu}^0 n_{(3)\beta}^0 n_{(2)\mu}^0] + < \xi_2 \xi_1^* > [n_{(1)\beta}^0 n_{(1)\mu}^0 n_{(2)\gamma}^0 n_{(3)\nu}^0 + n_{(1)\beta}^0 n_{(1)\nu}^0 n_{(2)\gamma}^0 n_{(3)\mu}^0 + \\ & + n_{(1)\gamma}^0 n_{(1)\mu}^0 n_{(2)\beta}^0 n_{(3)\nu}^0 + n_{(1)\gamma}^0 n_{(1)\nu}^0 n_{(2)\beta}^0 n_{(3)\mu}^0] . \end{aligned} \quad (65)$$

Далее, для удобства, сделаем замену исходя из того, что значковая структура в скобках при различных корреляторах типа $< \xi_i \xi_j^* >$ сохраняется, но меняются индексы векторов, то есть:

$$n_{(1)\beta}^0 n_{(1)\mu}^0 n_{(3)\gamma}^0 n_{(3)\nu}^0 = \Lambda_{\beta\mu\gamma\nu}^{(1133)} . \quad (66)$$

Тогда, например, множитель при корреляторе $< |\xi_1|^2 >$ принимает вид:

$$\begin{aligned} n_{(1)\beta}^0 n_{(1)\mu}^0 n_{(3)\gamma}^0 n_{(3)\nu}^0 + n_{(1)\beta}^0 n_{(1)\nu}^0 n_{(3)\gamma}^0 n_{(3)\mu}^0 + n_{(1)\gamma}^0 n_{(1)\mu}^0 n_{(3)\beta}^0 n_{(3)\nu}^0 + n_{(1)\gamma}^0 n_{(1)\nu}^0 n_{(3)\beta}^0 n_{(3)\mu}^0 = \\ = \Lambda_{\beta\mu\gamma\nu}^{(1133)} + \Lambda_{\beta\nu\gamma\mu}^{(1133)} + \Lambda_{\gamma\mu\beta\nu}^{(1133)} + \Lambda_{\gamma\nu\beta\mu}^{(1133)} . \end{aligned} \quad (67)$$

Это выражение может принять ещё более компактный вид: как сказано выше, значковая структура в скобках при каждом корреляторе не изменяется, удобно сделать следующую замену:

$$\Lambda_{\beta\mu\gamma\nu}^{(abcd)} + \Lambda_{\beta\nu\gamma\mu}^{(abcd)} + \Lambda_{\gamma\mu\beta\nu}^{(abcd)} + \Lambda_{\gamma\nu\beta\mu}^{(abcd)} = [\lambda^{(abcd)}] , \quad (68)$$

где a, b, c, d принимают значения от 1 до 3.

Таким образом, выражения для $\langle \delta\varepsilon_{\beta\gamma}^{(i)} \varepsilon_{\mu\nu}^{*(j)} \rangle$ при различных значениях i, j :

$$\begin{aligned} \langle \delta\varepsilon^{(1)} \delta\varepsilon^{*(1)} \rangle &= \varepsilon_1^2 \{ \langle |\xi_1|^2 \rangle [\lambda^{1133}] + \langle |\xi_2|^2 \rangle [\lambda^{1122}] + \\ &+ \langle \xi_1 \xi_2^* \rangle [\lambda^{1132}] + \langle \xi_2 \xi_1^* \rangle [\lambda^{1123}] \} , \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta\varepsilon^{(2)} \delta\varepsilon^{*(2)} \rangle &= \varepsilon_2^2 \{ \langle |\xi_3|^2 \rangle [\lambda^{2233}] + \langle |\xi_2|^2 \rangle [\lambda^{2211}] + \\ &+ \langle \xi_3 \xi_2^* \rangle [\lambda^{2231}] + \langle \xi_2 \xi_3^* \rangle [\lambda^{2213}] \} , \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta\varepsilon^{(3)} \delta\varepsilon^{*(3)} \rangle &= \varepsilon_3^2 \{ \langle |\xi_3|^2 \rangle [\lambda^{3322}] + \langle |\xi_1|^2 \rangle [\lambda^{3311}] + \\ &+ \langle \xi_3 \xi_1^* \rangle [\lambda^{3321}] + \langle \xi_1 \xi_3^* \rangle [\lambda^{3312}] \} , \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta\varepsilon^{(1)} \delta\varepsilon^{*(2)} \rangle &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \{ \langle \xi_1 \xi_3^* \rangle [\lambda^{1233}] - \langle |\xi_2|^2 \rangle [\lambda^{1221}] + \\ &+ \langle \xi_1 \xi_2^* \rangle [\lambda^{1231}] - \langle \xi_2 \xi_3^* \rangle [\lambda^{1223}] \} , \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta\varepsilon^{(1)} \delta\varepsilon^{*(3)} \rangle &= \varepsilon_1 \varepsilon_3 \{ \langle \xi_2 \xi_3^* \rangle [\lambda^{1322}] - \langle |\xi_1|^2 \rangle [\lambda^{1331}] + \\ &+ \langle \xi_2 \xi_1^* \rangle [\lambda^{1321}] - \langle \xi_1 \xi_3^* \rangle [\lambda^{1332}] \} , \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta\varepsilon^{(2)} \delta\varepsilon^{*(1)} \rangle &= \varepsilon_2 \varepsilon_1 \{ \langle \xi_3 \xi_1^* \rangle [\lambda^{2133}] - \langle |\xi_2|^2 \rangle [\lambda^{2112}] + \\ &+ \langle \xi_2 \xi_1^* \rangle [\lambda^{2113}] - \langle \xi_3 \xi_2^* \rangle [\lambda^{2132}] \} , \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta\varepsilon^{(2)} \delta\varepsilon^{*(3)} \rangle &= -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \{ \langle \xi_3 \xi_1^* \rangle [\lambda^{2331}] + \langle |\xi_3|^2 \rangle [\lambda^{2332}] + \\ &+ \langle \xi_2 \xi_3^* \rangle [\lambda^{2312}] + \langle \xi_2 \xi_1^* \rangle [\lambda^{2311}] \} , \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta\varepsilon^{(3)} \delta\varepsilon^{*(1)} \rangle &= \varepsilon_3 \varepsilon_1 \{ \langle \xi_3 \xi_2^* \rangle [\lambda^{3122}] - \langle |\xi_1|^2 \rangle [\lambda^{3113}] + \\ &+ \langle \xi_1 \xi_2^* \rangle [\lambda^{3112}] - \langle \xi_3 \xi_1^* \rangle [\lambda^{3123}] \} , \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta\varepsilon^{(3)} \delta\varepsilon^{*(2)} \rangle &= -\varepsilon_3 \varepsilon_2 \{ \langle \xi_1 \xi_3^* \rangle [\lambda^{3213}] + \langle |\xi_3|^2 \rangle [\lambda^{3223}] + \\ &+ \langle \xi_3 \xi_2^* \rangle [\lambda^{3221}] + \langle \xi_1 \xi_2^* \rangle [\lambda^{3211}] \} . \end{aligned} \quad (77)$$

Тогда итоговое выражение для коррелятора флуктуаций диэлектрической проницаемости:

$$\begin{aligned} \langle \delta\varepsilon^{(i)} \delta\varepsilon^{*(j)} \rangle &= \langle |\xi_1|^2 \rangle \{ \varepsilon_1^2 [\lambda^{1133}] - \varepsilon_1 \varepsilon_3 [\lambda^{1331}] - \varepsilon_3 \varepsilon_1 [\lambda^{3113}] + \varepsilon_3^2 [\lambda^{3311}] \} + \\ &+ \langle |\xi_2|^2 \rangle \{ \varepsilon_2^2 [\lambda^{2211}] - \varepsilon_2 \varepsilon_1 [\lambda^{2112}] - \varepsilon_1 \varepsilon_2 [\lambda^{1221}] + \varepsilon_1^2 [\lambda^{1122}] \} + \\ &+ \langle |\xi_3|^2 \rangle \{ \varepsilon_3^2 [\lambda^{3322}] - \varepsilon_2 \varepsilon_3 [\lambda^{2332}] - \varepsilon_3 \varepsilon_2 [\lambda^{3223}] + \varepsilon_2^2 [\lambda^{2233}] \} + \\ &+ \langle \xi_1 \xi_3^* \rangle \{ \varepsilon_3^2 [\lambda^{3312}] + \varepsilon_1 \varepsilon_2 [\lambda^{1221}] - \varepsilon_1 \varepsilon_3 [\lambda^{1332}] - \varepsilon_3 \varepsilon_2 [\lambda^{3213}] \} + \\ &+ \langle \xi_3 \xi_1^* \rangle \{ \varepsilon_3^2 [\lambda^{3321}] + \varepsilon_2 \varepsilon_1 [\lambda^{2133}] - \varepsilon_1 \varepsilon_3 [\lambda^{3123}] - \varepsilon_3 \varepsilon_2 [\lambda^{2331}] \} + \\ &+ \langle \xi_1 \xi_2^* \rangle \{ \varepsilon_1^2 [\lambda^{1132}] - \varepsilon_3 \varepsilon_2 [\lambda^{3211}] + \varepsilon_1 \varepsilon_3 [\lambda^{3112}] + \varepsilon_1 \varepsilon_2 [\lambda^{1231}] \} + \\ &+ \langle \xi_2 \xi_1^* \rangle \{ \varepsilon_1^2 [\lambda^{1123}] - \varepsilon_3 \varepsilon_2 [\lambda^{2311}] + \varepsilon_1 \varepsilon_3 [\lambda^{1321}] + \varepsilon_1 \varepsilon_2 [\lambda^{2113}] \} + \\ &+ \langle \xi_2 \xi_3^* \rangle \{ \varepsilon_2^2 [\lambda^{2213}] - \varepsilon_3 \varepsilon_2 [\lambda^{2312}] + \varepsilon_1 \varepsilon_3 [\lambda^{1322}] - \varepsilon_1 \varepsilon_2 [\lambda^{1223}] \} + \\ &+ \langle \xi_3 \xi_2^* \rangle \{ \varepsilon_2^2 [\lambda^{2231}] - \varepsilon_3 \varepsilon_2 [\lambda^{3221}] + \varepsilon_1 \varepsilon_3 [\lambda^{3122}] - \varepsilon_1 \varepsilon_2 [\lambda^{1232}] \} . \end{aligned} \quad (78)$$

5 Интенсивность рассеяния в зависимости от поляризации падающей и рассеянной волны

Рассмотрим выражение (31) для интенсивности рассеяния и проанализируем часть, связанную с корреляционной функцией флуктуаций диэлектрической проницаемости и поляризаций падающей и рассеянной волны. Выберем поляризации следующим образом:

$$\begin{cases} (\mathbf{n}_{(2)}^0 \cdot \mathbf{e}^{(i)}) = 0 \\ (\mathbf{n}_{(2)}^0 \cdot \mathbf{e}^{(s)}) = 0. \end{cases} \quad (79)$$

Приведем для примера, что происходит с первым слагаемым в множителе при $\langle |\xi_2|^2 \rangle$, то есть рассмотрим выражение вида:

$$\langle |\xi_2|^2 \rangle: \quad \varepsilon_1^2 e_\beta^{(s)} e_\mu^{(s)} (\Lambda_{\beta\mu\gamma\nu}^{(2211)} + \Lambda_{\beta\nu\gamma\mu}^{(2211)} + \Lambda_{\gamma\mu\beta\nu}^{(2211)} + \Lambda_{\gamma\nu\beta\mu}^{(2211)}) e_\gamma^{(i)} e_\nu^{(i)} \quad (80)$$

Рассмотрим далее каждое слагаемое по отдельности и раскроем по определению символ $\Lambda_{\alpha\beta\mu\nu}^{(abcd)}$:

$$\begin{aligned} (1) : & \quad \varepsilon_1^2 e_\beta^{(s)} e_\mu^{(s)} (n_{(2)\beta}^0 n_{(2)\mu}^0 n_{(1)\gamma}^0 n_{(1)\nu}^0) e_\gamma^{(i)} e_\nu^{(i)} \\ (2) : & \quad \varepsilon_1^2 e_\beta^{(s)} e_\mu^{(s)} (n_{(2)\beta}^0 n_{(2)\nu}^0 n_{(1)\gamma}^0 n_{(1)\mu}^0) e_\gamma^{(i)} e_\nu^{(i)} \\ (3) : & \quad \varepsilon_1^2 e_\beta^{(s)} e_\mu^{(s)} (n_{(2)\gamma}^0 n_{(2)\mu}^0 n_{(1)\beta}^0 n_{(1)\nu}^0) e_\gamma^{(i)} e_\nu^{(i)} \\ (4) : & \quad \varepsilon_1^2 e_\beta^{(s)} e_\mu^{(s)} (n_{(2)\gamma}^0 n_{(2)\nu}^0 n_{(1)\beta}^0 n_{(1)\mu}^0) e_\gamma^{(i)} e_\nu^{(i)} \quad , \end{aligned} \quad (81)$$

где (1), (2), (3), (4) слагаемые в выражении (80) соответственно.

Учитывая выражение (79), видим, что каждое из слагаемых в (81) обнуляется. Заметим, что введя таким образом поляризации, в выражении для интенсивности обнулятся все вклады, когда в символе $[\lambda^{abcd}]$ какой-либо из индексов a, b, c или d принимает значение равное 2.

Таким образом, в выражении для интенсивности выживает только одно слагаемое с $\langle |\xi_1|^2 \rangle$, так как в множителе при данном корреляторе каждое слагаемое имеет символ, в котором индексы символа $[\lambda^{abcd}]$ не принимают значение 2:

$$I_{(s)}^{(i)} = I_{(0)}^{(i)} \frac{A^2 k_0^4 V n^{(s)} \cos \delta^{(s)}}{R'^2 n^{(i)} \cos \delta^{(i)}} \mathbf{e}^{(s)} \mathbf{e}^{(s)} \langle |\xi_1|^2 \rangle \{ \varepsilon_1^2 [\lambda^{1133}] - \varepsilon_1 \varepsilon_3 [\lambda^{1331}] - \varepsilon_3 \varepsilon_1 [\lambda^{3113}] + \varepsilon_3^2 [\lambda^{3311}] \} \mathbf{e}^{(i)} \mathbf{e}^{(i)}. \quad (82)$$

Далее, можно упростить выражение (82) ещё сильнее, задав более жесткое условие на поляризации, введем дополнительно:

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{(i)} \parallel \mathbf{n}_{(1)}^0, \text{ то есть } (\mathbf{n}_{(3)}^0 \cdot \mathbf{e}^{(i)}) = 0 \\ \mathbf{e}^{(s)} \parallel \mathbf{n}_{(3)}^0, \text{ то есть } (\mathbf{n}_{(1)}^0 \cdot \mathbf{e}^{(s)}) = 0, \end{cases} \quad (83)$$

и посмотрим, как изменится выражение (82), для этого рассмотрим, например, вклад с ε_1^2 и учтем сразу новые условия на поляризации:

$$\begin{aligned}
(1) : \quad & \varepsilon_1^2 e_\beta^{(s)} e_\mu^{(s)} (n_{(1)\beta}^0 n_{(1)\mu}^0 n_{(3)\gamma}^0 n_{(3)\nu}^0) e_\gamma^{(i)} e_\nu^{(i)} = 0 \\
(2) : \quad & \varepsilon_1^2 e_\beta^{(s)} e_\mu^{(s)} (n_{(1)\beta}^0 n_{(1)\nu}^0 n_{(3)\gamma}^0 n_{(3)\mu}^0) e_\gamma^{(i)} e_\nu^{(i)} = 0 \\
(3) : \quad & \varepsilon_1^2 e_\beta^{(s)} e_\mu^{(s)} (n_{(1)\gamma}^0 n_{(1)\mu}^0 n_{(3)\beta}^0 n_{(3)\nu}^0) e_\gamma^{(i)} e_\nu^{(i)} = 0 \\
(4) : \quad & \varepsilon_1^2 e_\beta^{(s)} e_\mu^{(s)} (n_{(1)\gamma}^0 n_{(1)\nu}^0 n_{(3)\beta}^0 n_{(3)\mu}^0) e_\gamma^{(i)} e_\nu^{(i)} \neq 0.
\end{aligned} \tag{84}$$

Соответственно, видим, что выживает только одно слагаемое из 4, так будет происходить и с другими вкладами. В итоге, из 16 слагаемых выживает только 4. Тогда выражение для интенсивности примет вид:

$$I_{(s)}^{(i)} = I_{(0)}^{(i)} \frac{A^2 k_0^4 V n^{(s)} \cos \delta^{(s)}}{R''^2 n^{(i)} \cos \delta^{(i)}} \mathbf{e}_\beta^{(s)} \mathbf{e}_\mu^{(s)} \langle |\xi_1|^2 \rangle \left\{ \varepsilon_1^2 \Lambda_{\gamma\nu\beta\mu}^{(1133)} - \varepsilon_1 \varepsilon_3 \Lambda_{\gamma\mu\beta\nu}^{(1331)} - \varepsilon_3 \varepsilon_1 \Lambda_{\beta\nu\gamma\mu}^{(3113)} + \varepsilon_3^2 \Lambda_{\beta\mu\gamma\nu}^{(3311)} \right\} \mathbf{e}_\gamma^{(i)} \mathbf{e}_\nu^{(i)}. \tag{85}$$

Таким образом, максимально упростив выражение для интенсивности, появляется возможность, с использованием выражения (50), найти некоторые соотношения на модули Франка.

Аналогичным образом получаются выражения для интенсивности, когда выживают члены с $\langle |\xi_2|^2 \rangle$ и $\langle |\xi_3|^2 \rangle$. Приведем выражения для этих корреляционных функций. Начнем с $\langle |\xi_2|^2 \rangle$, для этого введем поляризации следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{(3)}^0 \cdot \mathbf{e}^{(i)} = 0 \\ \mathbf{n}_{(3)}^0 \cdot \mathbf{e}^{(s)} = 0 \end{cases} \tag{86}$$

Тогда выражение для интенсивности принимает следующий вид:

$$I_{(s)}^{(i)} = I_{(0)}^{(i)} \frac{A^2 k_0^4 V n^{(s)} \cos \delta^{(s)}}{R''^2 n^{(i)} \cos \delta^{(i)}} \mathbf{e}^{(s)} \mathbf{e}^{(s)} \langle |\xi_2|^2 \rangle \left\{ \varepsilon_2^2 [\lambda^{2211}] - \varepsilon_2 \varepsilon_1 [\lambda^{2112}] - \varepsilon_1 \varepsilon_2 [\lambda^{1221}] + \varepsilon_1^2 [\lambda^{1122}] \right\} \mathbf{e}^{(i)} \mathbf{e}^{(i)}. \tag{87}$$

Зададим более жесткое условие на поляризации:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{(1)}^0 \parallel \mathbf{e}^{(i)}, & (\mathbf{n}_{(2)}^0 \cdot \mathbf{e}^{(i)}) = 0 \\ \mathbf{n}_{(2)}^0 \parallel \mathbf{e}^{(s)}, & (\mathbf{n}_{(1)}^0 \cdot \mathbf{e}^{(s)}) = 0 \end{cases} \tag{88}$$

Тогда выражение (80) принимает следующий вид:

$$I_{(s)}^{(i)} = I_{(0)}^{(i)} \frac{A^2 k_0^4 V n^{(s)} \cos \delta^{(s)}}{R''^2 n^{(i)} \cos \delta^{(i)}} \mathbf{e}^{(s)} \mathbf{e}^{(s)} \langle |\xi_2|^2 \rangle \left\{ \varepsilon_2^2 \Lambda_{\beta\mu\gamma\nu}^{(2211)} - \varepsilon_2 \varepsilon_1 \Lambda_{\beta\nu\gamma\mu}^{(2112)} - \varepsilon_2 \varepsilon_1 \Lambda_{\gamma\mu\beta\nu}^{(1221)} + \varepsilon_1^2 \Lambda_{\gamma\nu\beta\mu}^{(1122)} \right\} \mathbf{e}^{(i)} \mathbf{e}^{(i)}. \tag{89}$$

Теперь напишем выражение аналогичное (87) для $\langle |\xi_3|^2 \rangle$. Введем поляризации следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{(1)}^0 \cdot \mathbf{e}^{(i)} = 0 \\ \mathbf{n}_{(1)}^0 \cdot \mathbf{e}^{(s)} = 0 \end{cases} \tag{90}$$

Тогда выражение для интенсивности принимает следующий вид:

$$I_{(s)}^{(i)} = I_{(0)}^{(i)} \frac{A^2 k_0^4 V n^{(s)} \cos \delta^{(s)}}{R''^2 n^{(i)} \cos \delta^{(i)}} \mathbf{e}^{(s)} \mathbf{e}^{(s)} < |\xi_3|^2 > \{ \varepsilon_3^2 [\lambda^{3322}] - \varepsilon_2 \varepsilon_3 [\lambda^{2332}] - \varepsilon_3 \varepsilon_2 [\lambda^{3223}] + \varepsilon_2^2 [\lambda^{2233}] \} \mathbf{e}^{(i)} \mathbf{e}^{(i)}. \quad (91)$$

Зададим более жесткое условие на поляризации:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{(3)}^0 \parallel \mathbf{e}^{(i)}, & (\mathbf{n}_{(2)}^0 \cdot \mathbf{e}^{(i)}) = 0 \\ \mathbf{n}_{(2)}^0 \parallel \mathbf{e}^{(s)}, & (\mathbf{n}_{(3)}^0 \cdot \mathbf{e}^{(s)}) = 0 \end{cases} \quad (92)$$

Тогда выражение (91) принимает следующий вид:

$$I_{(s)}^{(i)} = I_{(0)}^{(i)} \frac{A^2 k_0^4 V n^{(s)} \cos \delta^{(s)}}{R''^2 n^{(i)} \cos \delta^{(i)}} \mathbf{e}^{(s)} \mathbf{e}^{(s)} < |\xi_2|^2 > \{ \varepsilon_3^2 \Lambda_{\gamma\nu\beta\mu}^{(3322)} - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \Lambda_{\beta\nu\gamma\mu}^{(2332)} - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \Lambda_{\gamma\mu\beta\nu}^{(3223)} + \varepsilon_2^2 \Lambda_{\beta\mu\gamma\nu}^{(2233)} \} \mathbf{e}^{(i)} \mathbf{e}^{(i)}. \quad (93)$$

6 Заключение

Результаты данной работы:

1. Было получено выражение для интенсивности рассеянного света в ДНЖК вида (31).
2. Построена корреляционная функция флуктуаций директора (50), которая дает нам связь с модулями Франка.
3. Построена корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости (78).
4. Основным результатом работы являются нахождение геометрий (79), (86), (90) и (83), (88), (92), при которых полученные выражения для интенсивности рассеянного света (31) в ДНЖК, сильно упрощаются и приводят нас к (82), (87), (91) и (85), (89), (93) соответственно.

В дальнейшем планируется получение угловых зависимостей интенсивности. Также при исследовании интенсивности не было учтено какого типа падающую и рассеянную волны мы исследуем. Как говорилось в параграфе 1, в двухосном ЖК распространяется две волны необычного типа.

Список литературы

- [1] Miller, A. *Fundamental optical properties of solids, in Handbook of Optics, Fundamentals, Techniques and Design*, McGraw-Hill, London, 1995, vol. 1, pp. 9.1–9.33.
- [2] Winchell, A. N. *Elements of Optical Mineralogy: an Introduction to Microscopic Petrography*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 2nd edn, 1951.
- [3] Wahlstrom, E. E. *Optical Crystallography*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 5th edn, 1979.
- [4] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, Pergamon, Oxford, 1984.
- [5] Geoffrey, R.Luckhurst, Timothy, J.Sluckin, *Biaxial nematic liquid crystals: theory, simulation, and experiment*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1st edn, 2015.
- [6] D. N. Moskvin, V. P. Romanov, A. Yu. Val'kov *Green's function of the electromagnetic field in biaxial media*. Phys. Rev. E V. 48, P. 1436, 1993.
- [7] А.Ю. Вальков *Флуктуации и рассеяние света в нематических жидких кристаллах*. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ленинград, 1986.
- [8] A.Saupe, *Elastic and flow properties of biaxial nematics*. The Journal of Chemical Physics V. 75, P. 5118, 1981.
- [9] H.-R. Trebin, J. Physique V. 42, P. 1573, 1981.
- [10] P.G. de Gennes, *The physics of liquid crystals*. Clarendon Press, Oxford, 1974.