Санкт-Петербургский государственный университет

Афоничев Семён Владимирович

Выпускная квалификационная работа

Построение сходящейся теории возмущений в фермионных и векторных моделях

Уровень образования: бакалавриат
Направление 03.03.02 "Физика"
Образовательная программа СВ.5011.2015 "Физика"

Научный руководитель:
профессор,
кафедра статистической физики,
д.ф-м.н. Налимов М. Ю.

Рецензент:
профессор,
кафедра физики высоких энергий
и элементарных частиц,
д.ф-м.н. Компаниец М.В.

Санкт-Петербург
2019

Содержание

1 Введение

На сегодняшний день метод теории возмущений (ТВ) является основным методом решения задач квантовой теории поля (КТП). Но хорошо известно, что для подавляющего большинства моделей стандартное разложение по константе связи приводит к асимптотическим рядам, первые несколько вычесленных порядков для некоторых из них хоть и демонстрируют хорошее согласие с экспериментом, но всё же пользоваться такими разложениеми некорректно по крайней мере с математической точки зрения. К тому же реально использование таких рядов возможно только если теории весьма близки к свободным, однако в некоторых случаях возникает задача исследовать теорию в области, где взаимодействие велико и стандартная теория возмущений перестаёт работать. Поэтому существуют и разрабатываются различные методы пересуммирования расходящихся рядов КТП.

В первой части данной работы предпринята попытка построить сходящуюся теорию возмущений для фермионных и векторных моделей на примере квантовой электродинамики (КЭД). Расходимость стандартного разложения этой науки по константе связи описана например в книге [1]. Используемый метод основан на специфическом разделении функционала действия на "возмущённую" и "невозмущённую" части. С помощью этого метода был построен сходящийся ряд ТВ для скалярной теории поля [2], однако в результате применения его к упрощенной модели КЭД удалось получить ненулевой радиус сходимости. Поэтому можно надеяться на успех и с настоящей квантовой электродинамикой.

В следующем разделе работы, используя ряд теории возмущений из первой части, было получено выражение для бета-функции с помощью уравнения ренормгруппы, линейного дифференциального уравнения на корреляционную функцию. Бета-функция является важнейшим объектом ренормгруппового анализа, так как определяет зависимость изменения константы связи (заряда) от масштаба рассмотрения, а заряд в свою очередь определяет силу взаимодействия частиц. Результаты численного расчёта, представленные в виде графиков зависимости бета-функции от заряда, и их анализ приведены в третьей части данной работы.

2 Построение сходящейся теории возмущений

Стандартное действие квантовой электродинамики (КЭД) имеет вид:

$$S = \int d\mathbf{x}\ \bar{\psi}(\mathbf{x})\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi(\mathbf{x}) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\mathbf{x})F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) - e\,\bar{\psi}(\mathbf{x})\gamma^{\mu}A_{\mu}(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}),$$

где $\bar{\psi}(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})$ — биспиноры, соответствующие частицам с полуцелым спином, являются грассмановыми, $A(\mathbf{x})$ — четырёхмерное поле, соответствующее четырёхмерному векторному потенциалу электромагнитного поля, $\mathbf{x}$ — вектор в четырёхмерном пространстве, $\int dx(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\mathbf{x})F^{\mu\nu}(\mathbf{x}))$ — лагранжиан электромагнитного поля, где x — вектор в трёхмерном пространстве, m — масса, e — константа связи (заряд). Суммирование по повторяющимся индексам подразумевается. В дальнейшем интегрирование по координатам, за исключением некоторых случаев, будет опускаться. В настоящей работе рассматривается безмассовая модель, то есть $m = 0$. С учётом этого исходное действие примет следующий вид:

$$S = \bar{\psi}i\partial\!\!\!/\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\,\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi. \tag{1}$$

Как уже было отмечено в введении, стандартное разложение по константе связи приводит к расходящимся рядам. Поэтому для получения аддекватных результатов необходимо перестроить теорию возмущений таким образом, чтобы она стала сходящейся. Этого можно добиться добавлением в действие слагаемых с некоторыми параметрами, и производя разложение в ряд по одному из этих параметров. Вид слагаемых определяется таким образом, чтобы они не "испортили"действие, то есть подходили по размерности, а именно имели нулевую размерность, и удовлетворяли симметриям науки.

Этот метод был применён к упрощённой модели, в которой вместо биспиноров $\bar{\psi}(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})$ и векторного поля $A(\mathbf{x})$ были рассмотрены два семейства грассмановых переменных $\left\{\bar{\psi}_j, \psi_j\right\}_{j=1}^{M}$ и вещественный вектор A соответственно, а вместо оператора $i\partial\!\!\!/$ и действия электродинамики $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ — соответственно вещественная антисимметричная матрица и квадратичная по A форма с вещественной симметричной изображающей матрицей. В результате был получен ненулевой радиус сходимости ряда теории возмущений (ТВ) по новому параметру разложения. Поэтому предполагается, что с помощью обсуждаемого метода можно будет получить сходящийся ряд ТВ и для действия (1). Добавленные в упрощённую модель слагаемые имеют следующий вид:

$$S_2 = \bar{\psi}_i K_{ij}\psi_j A\,a(1-\zeta),$$

где K_{ij} — антисимметричная матрица, a — произвольная вещественная положительная константа, ζ — новый параметр разложения.

Так как $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$, всем вышеописанным требованиям удовлетворяют следующие, с необходимостью билокальные, слагаемые:

$$S_2 = \int d\mathbf{x_1}\ \bar{\psi}(\mathbf{x_1})i\partial\!\!\!/\psi(\mathbf{x_1})\left(i\int d\mathbf{x_2}\ \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\mathbf{x_2})F^{\mu\nu}(\mathbf{x_2})\right)^{\frac{1}{2}} a(1-\zeta) \tag{2}$$

Мнимая единица нужна для того, чтобы в дальнейшем получать вещественные результаты.

Удобно ввести обозначения:

$$\int d\mathbf{x}\ \bar{\psi}(\mathbf{x})i\partial\!\!\!/\psi(\mathbf{x}) = [\psi]\,, \qquad \int d\mathbf{x}\ \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\mathbf{x})F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = [A]\,, \qquad \int d\mathbf{x}\ \bar{\psi}(\mathbf{x})\gamma^{\mu}A_{\mu}(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) = \left[\bar{\psi}A\psi\right].$$

С учётом введённых обозначений и домножения описывающего взаимодействие полей члена в исходном действии (1) на ζ, исходный и модифицированный функционалы действия примут вид:

$$S = [\psi] - [A] - e\left[\bar{\psi}A\psi\right] \tag{3}$$

$$S = [\psi] - [A] - e\zeta\left[\bar{\psi}A\psi\right] + [\psi]\left(i\,[A]\right)^{\frac{1}{2}} a(1-\zeta) \tag{4}$$

Видно, что новое действие совпадает с исходным при $\zeta = 1$.

Для дальнейшего будет удобно привести модифицированное действие (4) к структуре исходного (3). Для этого преобразуем e^{iS_2} (2). Воспользуемся определением дельта-функции:

$$\exp(iS_2) = \exp\left(i\,[\psi]\left(i\,[A]\right)^{\frac{1}{2}} a(1-\zeta)\right) = \int dx \int dy\; \delta\left(x - [\psi]\right)\delta\left(y - [A]\right)\;\exp\left(ix(iy)^{\frac{1}{2}}a(1-\zeta)\right) =$$

используя преобразование фурье дельта-функции:

$$= \int dx' \int dy' \int dx \int dy \quad \exp\left(ix'(x - [\psi]) + iy'(y - [A]) + ix(iy)^{\frac{1}{2}}a(1-\zeta)\right) =$$

проинтегрируем по переменной x:

$$= \int dx' \int dy' \int dy\; \delta\Big(x' + (iy)^{\frac{1}{2}}a(1-\zeta)\Big)\exp\left(-ix'\,[\psi] + iy'(y - [A])\right) =$$

проинтегрируем по переменной x':

$$= \int dy' \int dy\; \exp\left(i(iy)^{\frac{1}{2}}a(1-\zeta)\,[\psi] - iy'\,[A] + iy'y\right)$$

Перепишем $e^{iS} = e^{iS_1 + iS_2}$ с учётом проделанных преобразований:

$$\begin{aligned}\exp(iS) &= \int dy' \int dy\; \exp\left(i\,[\psi] - i\,[A] - ie\zeta\left[\bar{\psi}A\psi\right] + i(iy)^{\frac{1}{2}}a(1-\zeta)\,[\psi] - iy'\,[A] + iy'y\right) = \\ &= \int dy' \int dy\; \exp\left(i\,[\psi]\left(1 + (iy)^{\frac{1}{2}}a(1-\zeta)\right) - i\,[A]\,(1+y') - ie\zeta\left[\bar{\psi}A\psi\right] + iy'y\right)\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим выражение для корреляционной функции G_{nm}:

$$\begin{aligned}G_{nm} = \int dy' \int dy \int &\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}A\;\; A^n\left(\bar{\psi}\psi\right)^{2m} \times \\ &\times \exp\left(i\,[\psi]\left(1 + (iy)^{\frac{1}{2}}a(1-\zeta)\right) - i\,[A]\,(1+y') - ie\zeta\left[\bar{\psi}A\psi\right] + iy'y\right),\end{aligned}$$

где $\int\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}A$ означает континуальное интегрирование по соответствующим полям. Растягивая поля:

$$\bar{\psi} \to \frac{\bar{\psi}}{\sqrt{1 + (iy)^{\frac{1}{2}}a(1-\zeta)}}, \qquad \psi \to \frac{\psi}{\sqrt{1 + (iy)^{\frac{1}{2}}a(1-\zeta)}}, \qquad A \to \frac{A}{\sqrt{1+y'}},$$

и вводя обозначения:

$$\begin{aligned}p &= \sqrt{1 + (iy)^{\frac{1}{2}}a(1-\zeta)} \\ q &= \sqrt{1+y'} \\ U_{nm} &= \int dy' \int dy\; \frac{e^{iyy'}}{p^{2m}q^n},\end{aligned}$$

получаем выражение для корреляционной функции:

$$G_{nm} = \int dy' \int dy \ \frac{e^{iyy'}}{p^{2m}q^n} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A \ \ A^n (\bar{\psi}\psi)^m \exp\left(i\,[\psi] - i\,[A] - i\frac{e\zeta}{p^2 q}\left[\bar{\psi} A \psi\right] \right). \qquad (5)$$

Видно, что новое действие (4) совпадает с исходным (3) с точностью до растяжения заряда $e \to e/p^2 q$ и замены $e \to e\zeta$. В дальнейшем везде $e = e\zeta$.

Таким образом удалось добиться того, что диаграммы теории возмущений по параметру ζ имеют тот же вид, что и исходные диаграммы разложения по константе связи e, но из-за интегрирования по переменным y и y' домножаются на множитель вида U.

3 Вычисление бета-функции КЭД

Ренормированное согласно $\overline{\text{MS}}$ схеме, предложенной в [3], действие выглядит следующим образом[1]:

$$S_R = \left(\tilde{\mathcal{Z}}_{\overline{\psi}}\bar{\psi}\right) i\partial\!\!\!/ \left(\tilde{\mathcal{Z}}_{\psi}\psi\right) + \left(\tilde{\mathcal{Z}}_A A\right)\Box\left(\tilde{\mathcal{Z}}_A A\right) - \mu^{\varepsilon}\frac{\tilde{\mathcal{Z}}_e e}{p^2 q}\left(\tilde{\mathcal{Z}}_{\overline{\psi}}\bar{\psi}\right)\gamma^{\mu}A_{\mu}\tilde{\mathcal{Z}}_A\left(\tilde{\mathcal{Z}}_{\psi}\psi\right),$$

где μ^{ε} — ренормировочная масса, $\tilde{\mathcal{Z}}_{\overline{\psi}}, \tilde{\mathcal{Z}}_{\psi}, \tilde{\mathcal{Z}}_A, \tilde{\mathcal{Z}}_e$ — ренормировочные константы. Тильда означает зависимость от растянутого заряда $e \to e/p^2 q$:

$$\tilde{\mathcal{Z}}(e) = \mathcal{Z}\left(\frac{e}{p^2 q}\right).$$

Тогда выражение для корреляционной функции (5):

$$G_{nm} = \int dy' \int dy\ \frac{e^{iyy'}}{p^{2m}q^n}\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}A\ \ A^n\left(\bar{\psi}\psi\right)^m \exp(iS_R). \tag{6}$$

Произведя замену переменных:

$$\bar{\psi} \to \frac{\bar{\psi}}{\tilde{\mathcal{Z}}_{\overline{\psi}}} \qquad \psi \to \frac{\psi}{\tilde{\mathcal{Z}}_{\psi}} \qquad A \to \frac{A}{\tilde{\mathcal{Z}}_A},$$

перейдём к более удобному виду функции (6):

$$G_{nm} = \int dy' \int dy\ \frac{e^{iyy'}}{p^{2m}q^n}\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}A\ \ \frac{A^n\left(\bar{\psi}\psi\right)^m}{\tilde{\mathcal{Z}}_A^{\,n}\left(\tilde{\mathcal{Z}}_{\overline{\psi}}\tilde{\mathcal{Z}}_{\psi}\right)^m}\times \tag{7}$$
$$\times \exp\left(i\bar{\psi}i\partial\!\!\!/\psi + iA\Box A - i\mu^{\varepsilon}\frac{\tilde{\mathcal{Z}}_e e}{p^2 q}\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi\right).$$

Далее разложим экспоненту в ряд по теории возмущений. В качестве возмущения в действии выступает член, соответствующий взаимодействию, а параметром разложения является e:

$$S_0 = \bar{\psi}i\partial\!\!\!/\psi + A\Box A \qquad S_P = -\mu^{\varepsilon}\frac{\tilde{\mathcal{Z}}_e e}{p^2 q}\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi.$$

Разложение будет состоять только из нулевого и первого порядка, так как из-за того, что поля $\bar{\psi}(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})$ грассмановы, более высокие порядки будут зануляться. Запишем их явно как $G_{nm} = G_{nm}^{[1]} + G_{nm}^{[2]}$, где

$$G_{nm}^{[1]} = \int dy' \int dy\ \frac{e^{iyy'}}{p^{2m}q^n}\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}A\ \ \frac{A^n\left(\bar{\psi}\psi\right)^m}{\tilde{\mathcal{Z}}_A^{\,n}\left(\tilde{\mathcal{Z}}_{\overline{\psi}}\tilde{\mathcal{Z}}_{\psi}\right)^m}\exp\left(i\bar{\psi}i\partial\!\!\!/\psi + iA\Box A\right) \tag{8}$$

$$G_{nm}^{[2]} = \int dy' \int dy\ \frac{e^{iyy'}}{p^{2m+2}q^{n+1}}\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}A\ \ \frac{A^n\left(\bar{\psi}\psi\right)^m}{\tilde{\mathcal{Z}}_A^{\,n}\left(\tilde{\mathcal{Z}}_{\overline{\psi}}\tilde{\mathcal{Z}}_{\psi}\right)^m}\times \tag{9}$$
$$\times\left(-i\mu^{\varepsilon}\tilde{\mathcal{Z}}_e e\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi\right)\exp\left(i\bar{\psi}i\partial\!\!\!/\psi + iA\Box A\right)$$

[1] $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \equiv A\Box A$, $\Box$ — волновой оператор.

Рассмотрим уравнение ренормгруппы (РГ), с ренормгрупповым оператором $\mathcal{D}_{\text{РГ}}$:

$$\mathcal{D}_{\text{РГ}} G_{nm} \equiv \left[\mu\partial_\mu + \beta\partial_e + \gamma_{nm}\right] G_{nm} = 0,$$

где $\beta(e)$ и $\gamma_{nm}(e)$ — ренормгрупповые функции. Так как $G^{[1]}_{nm}$ и $G^{[2]}_{nm}$ представляют собой разные диаграммы, то есть являются независимыми функциями, после действия на них оператором РГ приходим к системе двух уравнений:

$$\int dy' \int dy\, \frac{e^{iyy'}}{p^{2m}q^n}\;\; \beta\partial_e\Big(\tilde{\mathcal{Z}}_A^{-n}\tilde{\mathcal{Z}}_{\overline{\psi}}^{-m}\tilde{\mathcal{Z}}_{\psi}^{-m}\Big) + \gamma_{nm}\Big(\tilde{\mathcal{Z}}_A^{-n}\tilde{\mathcal{Z}}_{\overline{\psi}}^{-m}\tilde{\mathcal{Z}}_{\psi}^{-m}\Big) = 0 \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\int dy' \int dy\, \frac{e^{iyy'}}{p^{2m+2}q^{n+1}}\;\; & \varepsilon\Big(e\tilde{\mathcal{Z}}_A^{-n}\tilde{\mathcal{Z}}_{\overline{\psi}}^{-m}\tilde{\mathcal{Z}}_{\psi}^{-m}\tilde{\mathcal{Z}}_e\Big) + \\ & + \beta\partial_e\Big(e\tilde{\mathcal{Z}}_A^{-n}\tilde{\mathcal{Z}}_{\overline{\psi}}^{-m}\tilde{\mathcal{Z}}_{\psi}^{-m}\tilde{\mathcal{Z}}_e\Big) + \gamma_{nm}\Big(e\tilde{\mathcal{Z}}_A^{-n}\tilde{\mathcal{Z}}_{\overline{\psi}}^{-m}\tilde{\mathcal{Z}}_{\psi}^{-m}\tilde{\mathcal{Z}}_e\Big) = 0\end{aligned} \tag{11}$$

Согласно применяемой схеме ренормировки ренормировочные константы имеют вид рядов по обратным степеням ε [4]:

$$\tilde{\mathcal{Z}}_\chi = 1 + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_{\chi k}\, e^{2k}}{(p^2q)^{2k}}. \tag{12}$$

Имеет смысл удерживать только первый порядок по ε^{-1}, так как по самой идее схемы $\overline{\text{MS}}$ расходимости более высоких порядков должны сокращаться, а бета-функция находится из соображений сокращения расходимости ε^{-1}. Раскроем скобки в (10) и (11) и введём удобные обозначения:

$$\Big(\tilde{\mathcal{Z}}_A^{-n}\tilde{\mathcal{Z}}_{\overline{\psi}}^{-m}\tilde{\mathcal{Z}}_{\psi}^{-m}\Big) = 1 - \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_{nmk}\, e^{2k}}{(p^2q)^{2k}} \quad \equiv 1 - \frac{1}{\varepsilon}\left[\tilde{\mathcal{Z}}^3\right]$$

$$\partial_e\Big(\tilde{\mathcal{Z}}_A^{-n}\tilde{\mathcal{Z}}_{\overline{\psi}}^{-m}\tilde{\mathcal{Z}}_{\psi}^{-m}\Big) = -\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k\, C_{nmk}\, e^{2k-1}}{(p^2q)^{2k}} \quad \equiv -\frac{1}{\varepsilon}\left[\partial_e\tilde{\mathcal{Z}}^3\right]$$

где $C_{nmk} = nC_{Ak} + mC_{\bar{\psi}k} + mC_{\psi k}$.

$$\Big(\tilde{\mathcal{Z}}_A^{-n}\tilde{\mathcal{Z}}_{\overline{\psi}}^{-m}\tilde{\mathcal{Z}}_{\psi}^{-m}\tilde{\mathcal{Z}}_e\Big) = 1 + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k\, e^{2k}}{(p^2q)^{2k}} \quad \equiv 1 + \frac{1}{\varepsilon}\left[\tilde{\mathcal{Z}}^4\right]$$

$$\partial_e\Big(e\tilde{\mathcal{Z}}_A^{-n}\tilde{\mathcal{Z}}_{\overline{\psi}}^{-m}\tilde{\mathcal{Z}}_{\psi}^{-m}\tilde{\mathcal{Z}}_e\Big) = 1 + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)\, C_k\, e^{2k}}{(p^2q)^{2k}} \quad \equiv 1 + \frac{1}{\varepsilon}\left[\partial_e\tilde{\mathcal{Z}}^4\right]$$

где $C_k = C_{ek} - C_{nmk}$.

Далее известно, что $\beta = -e\varepsilon + \sum_{l=1}^{\infty} B_l\, e^{2l+1} \equiv -e\varepsilon + [\beta]$. Перепишем систему уравнений (10)(11) с учётом введённых обозначений:

$$\int dy' \int dy\, \frac{e^{iyy'}}{p^{2m}q^n}\;\left(\left(-e\varepsilon + [\beta]\right)\left(-\frac{1}{\varepsilon}\left[\partial_e\tilde{\mathcal{Z}}^3\right]\right) + \gamma_{nm}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\left[\tilde{\mathcal{Z}}^3\right]\right)\right) = 0 \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\int dy' \int dy\, \frac{e^{iyy'}}{p^{2m+2}q^{n+1}}\;\Bigg(& e\varepsilon\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\left[\tilde{\mathcal{Z}}^4\right]\right) + \\ & + \left(-e\varepsilon + [\beta]\right)\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\left[\partial_e\tilde{\mathcal{Z}}^4\right]\right) + \\ & + e\gamma_{nm}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\left[\tilde{\mathcal{Z}}^4\right]\right)\Bigg) = 0\end{aligned} \tag{14}$$

Для сокращения вида последующих выкладок будет очень эффективно ввести операторы:

$$A \equiv \int dy' \int dy \; \frac{e^{iyy'}}{p^{2m} q^n} \qquad\qquad B \equiv \int dy' \int dy \; \frac{e^{iyy'}}{p^{2m+2} q^{n+1}} \tag{15}$$

Выразим γ_{nm} из (13) и подставим в (14):

$$\gamma_{nm} = \frac{-A\left\{(-e\varepsilon + [\beta])\left(-\frac{1}{\varepsilon}\left[\partial_e \tilde{\mathcal{Z}}^3\right]\right)\right\}}{A\left\{1 - \frac{1}{\varepsilon}\left[\tilde{\mathcal{Z}}^3\right]\right\}} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} B\Bigg\{ & e\varepsilon\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\left[\tilde{\mathcal{Z}}^4\right]\right) + \\ & + (-e\varepsilon + [\beta])\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\left[\partial_e \tilde{\mathcal{Z}}^4\right]\right) + \\ & + e\,\frac{-A\left\{(-e\varepsilon + [\beta])\left(-\frac{1}{\varepsilon}\left[\partial_e \tilde{\mathcal{Z}}^3\right]\right)\right\}}{A\left\{1 - \frac{1}{\varepsilon}\left[\tilde{\mathcal{Z}}^3\right]\right\}}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\left[\tilde{\mathcal{Z}}^4\right]\right)\Bigg\} = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Раскрывая скобки и опуская члены, пропорциональные $1/\varepsilon$, как уже было сказано выше, они должны сокращаться, получаем выражение для $[\beta]$:

$$[\beta]\, A\, B - A\, B\left\{e\left[\partial_e \tilde{\mathcal{Z}}^4\right]\right\} - B\, A\left\{e\left[\partial_e \tilde{\mathcal{Z}}^3\right]\right\} = 0$$

$$[\beta] = \frac{A\, B\left\{e\left[\partial_e \tilde{\mathcal{Z}}^4\right]\right\} + B\, A\left\{e\left[\partial_e \tilde{\mathcal{Z}}^3\right]\right\}}{A\, B} = \frac{B\left\{e\left[\partial_e \tilde{\mathcal{Z}}^4\right]\right\}}{B} + \frac{A\left\{e\left[\partial_e \tilde{\mathcal{Z}}^3\right]\right\}}{A} \tag{18}$$

Видно, что согласно (16) второе слагаемое в правой части равенста (18) это γ_{nm}.

Возвращаясь к исходному виду выражений для сумм и интегралов (15), и вводя функцию:

$$U_{ij}^{[k]}(a,\zeta) = \int \frac{e^{iyy'}}{p^{2m+i+4k}\, q^{n+j+2k}}\, dy dy', \tag{19}$$

получаем окончательные выражения для бета-функции и гамма-функции:

$$\beta(e) = -e\varepsilon + \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(2k\, e^{2k+1}\, C_k\, U_{21}^{[k]}\right)}{U_{21}^{[0]}} + e\gamma_{nm} \qquad\qquad \gamma_{nm}(e) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(2k\, e^{2k+1}\, C_{nmk}\, U_{00}^{[k]}\right)}{U_{00}^{[0]}}. \tag{20}$$

4 Результаты

Для построения графиков бета-функции (20) было необходимо привести интегралы типа (19) к удобному для численного счёта виду. Соответствующая выкладка показана в приложении. Коэффициенты C_k были взяты из [5], где для различных схем ренормировки были посчитаны коэффициенты бета-функции до шестого порядка по $\alpha = e^2/4\pi$. Так как в первом разделе настоящей работы было показано, что модифицированное действие отличается от исходного только растяжением заряда $e \to e/p^2q$, использование коэффициэнтов из приведённой статьи, где все вычисления проводились для стандартного разложения ТВ, корректно. Пересчёт коэффициентов был произведён по формуле:

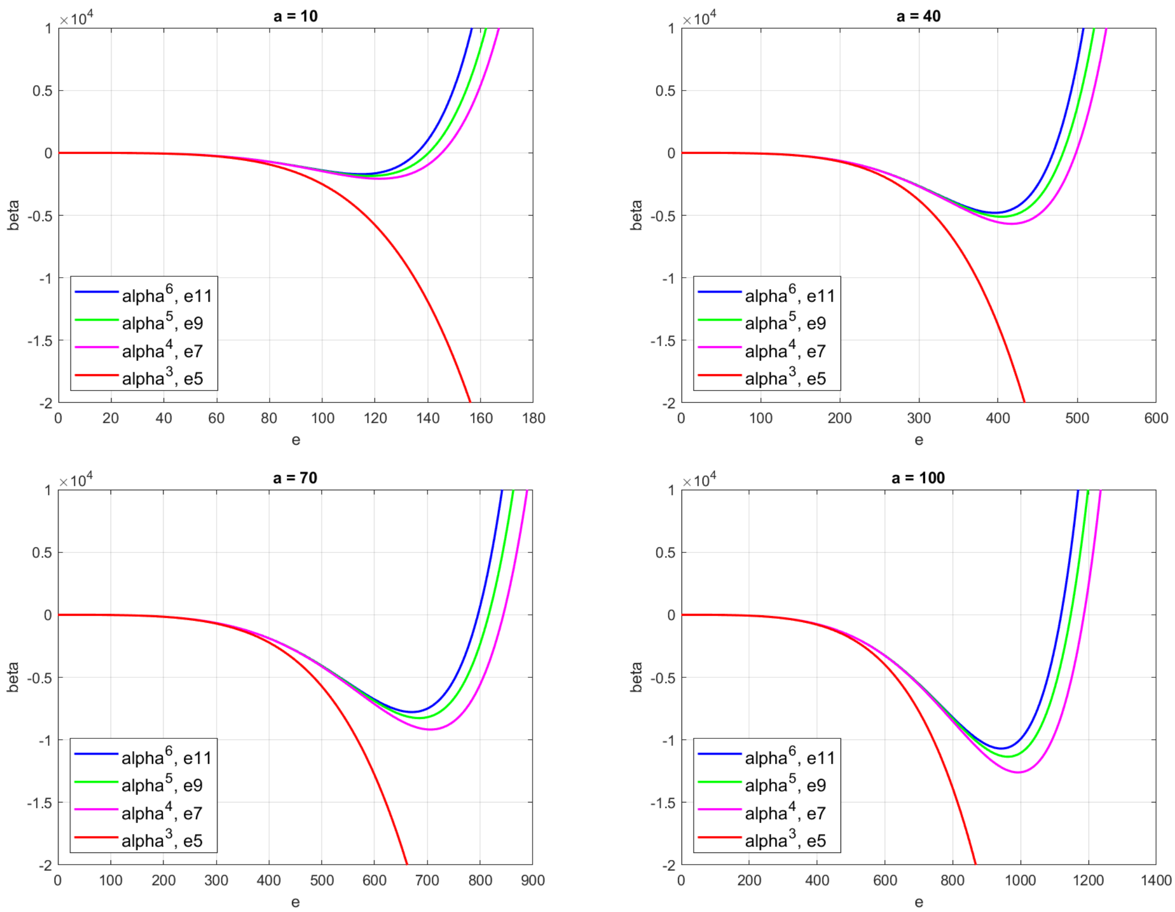
$$\beta(\alpha) = -\varepsilon\alpha - \varepsilon\alpha\,\partial_\alpha \ln\left(\mathcal{Z}(\alpha)\right). \tag{21}$$

Переход от α к e заключается в замене $\alpha = e^2/4\pi$ и делении получившегося выражения на $e/2$. Логарифм в (21) раскладывается в ряд по формуле:

$$\ln\left(\mathcal{Z}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\left[\tilde{Z}\right]\right) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\mathcal{Z}\right].$$

Также важно отметить, что в работе [5] вычисления производились на примере корреляционной функции вида (7) (без растяжения заряда) с $n = 0$ и $m = 0$, а это означает, что $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_e$, а именно $C_k = C_{ek}$, и $\gamma_{nm}(e) \equiv 0$.

На рисунках ниже представлены результаты численного расчёта в виде графиков зависимости разных максимальных порядков бета-функции от константы связи, при различных значениях параметра a из (2) и при "физическом" значении $\zeta = 1$.



5 Заключение

Итак, была предпринята попытка сконструировать сходящуюся теорию возмущений для квантовой электродинамики путём добавления в функционал действия определённых слагаемых (2) и разложения в ряд по новому параметру ζ. Диагрыммы получившейся теории возмущений удалось привести к виду диаграм стандартной ТВ с добавочным множителем, что сильно упрощает дальнейшую работу с этой моделью.

Далее, в рамках модели с модифицированным функционалом действия была получена формула для бета-функции в $\overline{\mathrm{MS}}$ ренормализационной схеме. Из численных расчётов следует, что по крайней мере знаки коэффициентов при разных порядках совпадают с знаками соответствующих коэффициентов в [5]. А представленные графики в разделе 4 позоляют надеяться на сходимость. Тем не менее для дальнеших исследований сходимость теории возмущений необходимо строго обосновать.

A Приложение

Рассмотрим:

$$U_{nm} = \int dy' \int dy \; \frac{e^{iyy'}}{\Big(1 + (iy)^{\frac{1}{2}} a(1-\zeta)\Big)^m (1+y')^{\frac{n}{2}}}$$

Используя определение гамма-функции можно показать:

$$\frac{1}{b^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty dt \; t^{\alpha-1} e^{-bt}.$$

Подставляя такое представление для знаменателей в U_{nm} получаем:

$$U_{nm} = \frac{1}{\Gamma(m)} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^\infty dt' \int dy' \int dy \; t'^{m-1} t^{\frac{n}{2}-1} \exp\Big(iyy' - \Big(1 + (iy)^{\frac{1}{2}} a(1-\zeta)\Big) t' - (1+y')\, t \Big) =$$

интегрируем по y':

$$= \frac{1}{\Gamma(m)} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^\infty dt' \int dy \; t'^{m-1} t^{\frac{n}{2}-1} \delta(y+it) \exp\Big(- \Big(1 + (iy)^{\frac{1}{2}} a(1-\zeta)\Big) t' - t \Big) =$$

интегрируем по y:

$$= \frac{1}{\Gamma(m)} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^\infty dt' \; t'^{m-1} t^{\frac{n}{2}-1} \exp\Big(\Big(1 + t^{\frac{1}{2}} a(1-\zeta)\Big) t' - t \Big) =$$

делая замену переменной $t' = \frac{t'}{(1+t^{\frac{1}{2}} a(1-\zeta))}$, получаем:

$$= \frac{1}{\Gamma(m)} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^\infty dt' \; \frac{t'^{m-1} t^{\frac{n}{2}-1}}{\Big(1 + t^{\frac{1}{2}} a(1-\zeta)\Big)^m} \exp(-t'-t) =$$

интегрируем по dt':

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int\limits_0^\infty dt \; \frac{t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t}}{\Big(1 + t^{\frac{1}{2}} a(1-\zeta)\Big)^m}$$

Итого:

$$U_{nm} = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int\limits_0^\infty dt \; \frac{t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t}}{\Big(1 + t^{\frac{1}{2}} a(1-\zeta)\Big)^m}$$

Список литературы

[1] J. Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena (Oxford Univ. Press, Oxford, 1989).

[2] Ushveridze A. G., Yad. Fiz. — 1983. — Vol. 38, no. 798.

[3] t'Hooft G., Nucl.Phys., B61, 455 (1973)

[4] Vasilev A. N., The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics. — Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004. — Pp. xvi+681. — Translated from the 1998 Russian original by Patricia A. de Forerand-Millard and revised by the author.

[5] A. L. Kataev and S.A.Larin, arXiv:1205.2810v2 [hep-ph]