

Санкт-Петербургский государственный университет

Ульяновская ул., д.3

Кафедра статистической физики



**ОПИСАНИЕ КРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ В РАМКАХ ФОРМАЛИЗМА  
ВРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА ПРИ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ**

Магистерская диссертация студента

дневного отделения

\_\_\_\_\_Молоткова Юрия Георгиевича

Научный руководитель:

\_\_\_\_\_д.ф.-м. н., проф. Налимов М.Ю.

Рецензент:

\_\_\_\_\_д.ф.-м.н., в.н.с ПОМИ РАН Деркачев С.Э

Санкт-Петербург

2017

# Оглавление

<b>Введение.</b>	<b>3</b>
<b>1 Формализм временных функций Грина при конечной температуре.</b>	<b>5</b>
1.1 Гамильтониан. . . . .	5
1.2 Представление функций Грина через функциональный интеграл. . .	6
1.3 Пропагаторы . . . . .	8
<b>2 Формирования затухания.</b>	<b>12</b>
<b>3 ИК эффективная теория.</b>	<b>16</b>
3.1 Критическое поведение. . . . .	16
3.2 Ренормировка. . . . .	19
<b>4 Заключение.</b>	<b>23</b>
<b>5 Приложение.</b>	<b>24</b>
<b>Список литературы</b>	<b>26</b>

# Введение.

Конденсация Бозе-Эйнштейна является важным фазовых переходов второго рода, так как с помощью него могут быть описаны такие явления как сверхтекучесть, сверхпроводимость [1], [2], [3]. Экспериментальное наблюдение Бозе-Эйнштейновской конденсации впервые было получено сравнительно недавно [4], [5]. Поэтому теоретическое изучение данного феномена представляется необыкновенно важным. В качестве примера конденсации Бозе-Эйнштейна мы будем рассматривать так называемую  $\lambda$  точку [6] ( $\lambda$ -переход) в сверхтекучем гелии. Динамика этого перехода слабо изучена. Классически этот фазовый переход описывается при помощи феноменологических моделей E,F [7]. В теории непрерывных фазовых переходов интересуются критическими индексами. Критический индекс  $z$  полностью отвечает за динамику в области фазового перехода  $T \simeq T_c$ , а именно, он показывает насколько сильно замедляются релаксионные процессы (скорость релаксации параметра порядка в системе). Известно, что в моделях E,F двухпетлевой счет не позволил выбрать устойчивую фиксированную точку [8], [9], а значит динамический критический индекс  $z$  до сих пор остается неизвестным. Динамические модели являются полуфеноменологическими [8], поэтому имеет смысл использовать наиболее точную модель, в качестве которой предлагается модель на основе временных функций Грина при конечной температуре.

Цель данной работы: построение ИК-эффективной теории, которая позволит вычислить динамический критический индекс  $z$ . В качестве стартовой модели мы используем формализм Швингера-Келдыша [10], который будет эксплотироваться в рамках формализма континуального интеграла. По-видимому, впервые в газах, этот формализм (в операторной форме) был предложен Келдышем Л.В, но, в силу сложности вычислений, не был широко развит и распространен.

Для начала нами будет кратко рассмотрен переход от операторного формализма к формализму континуального(или функционального) интеграла [11]. Тем самым мы получим исходное действие. Далее мы регуляризуем наше действие при помощи  $\Lambda$  обрезания. Мы обнаружим, что таким образом регуляризованное действие порождает в результате ренормировки затухание в обе стороны по времени в пропагаторах. Не желая работать в данной регуляризации, из-за сложности вычислений, мы переходим к размерной регуляризации, предварительно вставив затухание в затравочные пропагаторы. От исходных полей, мы перешли к новым полям  $\xi, \eta$ , это позволило упростить матрицу затравочных пропагаторов. Также размерный счет показывает, что действие в таких полях имеет верхнюю логарифмическую размерность 4. Ввели дополнительный непертурбативный заряд  $u$ , это позволило провести мультипликативную ренормировку. В итоге, было построено ИК-эффективное действие и доказана его мультипликативная ренормируемость.

# 1. Формализм временных функций Грина при конечной температуре.

## 1.1 Гамильтониан.

Мы будем рассматривать модель нерелятивистских бозонов, которые взаимодействуют друг с другом при помощи парного центрального потенциала. Гамильтониан такой системы может быть записан в виде:

$$\hat{H} = \int_{\mathbb{R}^d} dx \hat{\psi}^+(x, t) \left( -\frac{\Delta}{2m} - \mu \right) \hat{\psi}(x, t) + \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} dx dy \hat{\psi}(x, t) \hat{\psi}^+(x, t) V(x - y) \hat{\psi}(y, t) \hat{\psi}^+(y, t) \quad (1.1)$$

В дальнейшем,  $\Delta/(2m) \rightarrow \Delta$ , работаем в системе единиц  $\hbar = c = 1$ . Под  $x$  подразумевается  $d$ -мерный вектор, интегрирование ведется по всему  $d$ -мерному пространству,  $\mu$  – химический потенциал.  $\hat{\psi}^+(x, t), \hat{\psi}(x, t)$  – операторы поля, которые выражаются через операторы рождения и уничтожения частицы с импульсом  $p$ :  $\hat{a}_p, \hat{a}_p^+$  стандартным образом:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x, t) &= \sum_p e^{i\epsilon_p t} \phi_p(x) \hat{a}_p \\ \hat{\psi}^+(x, t) &= \sum_p e^{-i\epsilon_p t} \phi_p^+(x) \hat{a}_p^+, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\phi_p(x)$  есть набор полных собственных функции одночастичного оператора  $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \mu$ . Коммутаторы операторов рождения и уничтожения известны:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_i, \hat{a}_j^+] &= \delta_{ij} \\ [\hat{a}_i, \hat{a}_j] &= 0 \\ [\hat{a}_i^+, \hat{a}_j^+] &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Прямым вычислением получаются коммутаторы для операторов поля  $\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^+(x)$ :

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}(x, t), \hat{\psi}^+(x', t)] &= \delta(x - x') \\ [\hat{\psi}(x, t), \hat{\psi}(x', t)] &= 0 \\ [\hat{\psi}^+(x, t), \hat{\psi}^+(x', t)] &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

В силу того, что при фазовом переходе второго рода главную роль играют длинно-волновые корреляции, структура взаимодействия несущественна и поэтому может быть выбрана в виде (Фурье представлении):  $V(k) = const$ . Таким образом потенциал может быть взят в следующем виде:

$$V(x - y) = \frac{\lambda}{2} \delta(x - y), \quad (1.5)$$

$\lambda$  – константа, которая характеризует силу взаимодействия. Для бозонной системы мы рассматриваем случай отталкивания, т.е  $\lambda > 0$ , (1.5) называют приближением Ландау. Итого гамильтониан нашей модели переписывается следующим образом:

$$\hat{H} = \int_{\mathbb{R}^d} dx \hat{\psi}^+(x, t) (-\Delta - \mu) \hat{\psi}(x, t) + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \hat{\psi}(x, t) \hat{\psi}^+(x, t) \hat{\psi}(x, t) \hat{\psi}^+(x, t) \quad (1.6)$$

## 1.2 Представление функций Грина через функциональный интеграл.

В квантовой теории поля одним из основных объектов являются функции Грина  $G_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n)$ , которые в статистической физики имеют смысл корреляторов для тех или иных физических величин. Мы определяем  $G_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n)$ , следуя

[8], как:

$$G_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) = \langle T \left( \hat{\psi}(x_1, t_1) \hat{\psi}^+(x_2, t_2) \cdots \hat{\psi}(x_n, t_n) \hat{\psi}^+(x_n, t_n) \right) \rangle, \quad (1.7)$$

$T$  – оператор упорядочения по времени, усреднение понимается в следующем смысле:

$$\langle \dots \rangle = \text{Tr}(\dots e^{-\beta \hat{H} + \hat{N} \mu \beta}),$$

$\text{Tr}$  – след. Для краткости будем вместо  $\hat{H} - \mu \hat{N}$  писать  $\hat{H}$ .

Перейдем в представление Гейзенберга, в котором наши операторы поля  $\hat{\psi}(x, t), \hat{\psi}^+(x, t)$  примут вид:

$$\hat{\psi}(x, t) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \hat{\psi}(x) e^{i\hat{H}(t-t_0)} \quad (1.8)$$

Подставляя (1.8) в (1.7) и пользуясь цикличностью следа, приходим к следующему выражению:

$$G_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) = \langle T \left( \hat{\psi}(x_1) e^{i\hat{H}(t_1-t_2)} \hat{\psi}^+(x_2) \cdots \hat{\psi}(x_n) e^{i\hat{H}(t_n-t_1)} \hat{\psi}^+(x_n) e^{-\beta \hat{H}} \right) \rangle \quad (1.9)$$

Для того чтобы получить представление полных функций Грина в виде функционального интеграла [11], нам понадобится формула Фейнмана-Каца [11], которая записывается как:

$$\langle \phi(x) | e^{-i\hat{H}(t-t')} | \eta(x) \rangle = \int_{\psi(x', t) = \eta(x')}^{\psi(x, t) = \phi(x)} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^+ e^{iS}, \quad (1.10)$$

$S$  – классическое действие, определяемое стандартным образом:

$$S = \int_{t'}^t dt \int dx (i\psi^+(x, t) \partial_t \psi(x, t) - H), \quad (1.11)$$

$H$  – классический гамильтониан. Вставляя разбиение единицы в (1.9), получаем представление полных функций Грина в виде функционального интеграла (1.10).

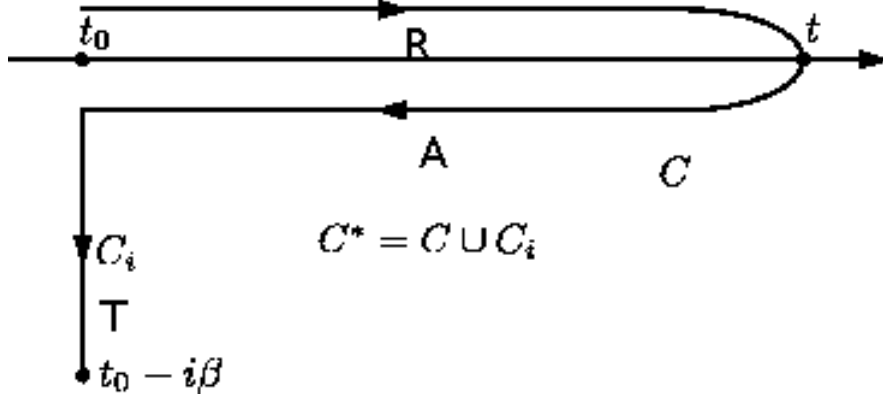


Рис. 1.1. Контур Келдыша-Швингера

Действие нашей модели выглядит следующим образом:

$$S = \int dx \int_{\gamma} dt \left( i\psi^+ \partial_t \psi - \psi^+ (-\Delta - \mu) \psi - \frac{g}{2} (\psi \psi^+)^2 \right), \quad (1.12)$$

$\gamma$  – контур Келдыша-Швингера, который выглядит так:

### 1.3 Пропагаторы

Итак, мы имеем модель с базовым действием:

$$S = \int dx \int_{\gamma} dt \left( i\psi^+ \partial_t \psi - \psi^+ (-\Delta - \mu) \psi - \frac{g}{2} (\psi \psi^+)^2 \right) \quad (1.13)$$

с контуром  $\gamma$  определенным выше. Поле  $\psi_i$  имеет индекс  $i$ , который говорит нам, какой ветви контура Келдыша принадлежит  $t$ . Для того, чтобы иметь возможность строить теорию возмущений, мы должны найти затравочные пропагаторы для нашей системы. По определению пропагатор есть:

$$\langle \psi_i^+(x, t) \psi_j(y, t') \rangle = G_{ij}(x - y, t - t') \quad (1.14)$$

Таким образом мы имеем 9 пропагаторов, которые можно объединить в одну матрицу пропагаторов  $G$ . Затравочный пропагатор есть обращенная квадратичная форма в действии (1.13). Поэтому уравнение на пропагатор имеет вид:

$$(-\partial_t + i(\Delta + \mu))G_{ij}(x - x', t - t') = \delta(t - t')\delta(x - x') \quad (1.15)$$



В результате Фурье преобразования по  $x - x'$ , это уравнение преобразуется к следующему виду:

$$(-\partial_t + i(-k^2 + \mu))G_{ij}(k, t - t') = \delta(t - t') \quad (1.16)$$

Его решение в смешанном представлении  $(k, t)$  есть сумма однородного решения и частного:

$$G_{ij}(k, t - t') = e^{-i(k^2 - \mu)(t - t')} \cdot (\theta(t - t') + C_{ij}), \quad (1.17)$$

$C_{ij}$  – константы, которые определяются из условия непрерывности  $G_{ij}$  в узлах контура Келдыша. Система условий из которых определяются константы  $C_{ij}$ :

$$\begin{aligned} G_{Rj}(T - t_j) &= G_{Aj}(T - t_j) \\ G_{Aj}(t_0 - t_j) &= G_{Tj}(t_0 - t_j) \\ G_{Rj}(t_0 - t_j) &= G_{Tj}(t_0 - i\beta - t_j) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Из этой системы уравнений, константы  $C_{ij}$  определяются однозначно. Обозначим  $n(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1}$ , где  $\epsilon = k^2 - \mu$ . Тогда:

$$\begin{aligned} G_{RR} &= e^{-i(k^2 - \mu)(t - t')}(\theta(t - t') + n(\epsilon)) \\ G_{AA} &= e^{-i(k^2 - \mu)(t - t')}(-\theta(t - t') + n(\epsilon) + 1) \\ G_{AR} &= e^{-i(k^2 - \mu)(t - t')}n(\epsilon) + 1 \\ G_{TA} &= e^{-i(k^2 - \mu)(t - t')}n(\epsilon) + 1 \\ G_{TR} &= e^{-i(k^2 - \mu)(t - t')}n(\epsilon) + 1 \\ G_{RT} &= e^{-i(k^2 - \mu)(t - t')}n(\epsilon) \\ G_{RA} &= e^{-i(k^2 - \mu)(t - t')}n(\epsilon) \\ G_{TT} &= e^{-i(k^2 - \mu)(t - t')}(\theta(t - t') + n(\epsilon) + 1) \\ G_{AT} &= e^{-i(k^2 - \mu)(t - t')}n(\epsilon) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Имея пропагаторы мы можем строить диаграммную технику. Для этого введем следующие обозначения: сопоставим  $\langle \psi_i^+(x, t)\psi_j(y, t') \rangle$  – линии

$$\overline{\times} \quad , \quad (1.20)$$

крест обозначает сопряженное поле  $\psi^+$ . В нашем действии (1.13) взаимодействие имеет вид  $(\psi_i \psi_i^+)^2$ , где  $i = R, A, T$ , как всегда, обозначает принадлежность ветви контура Швингера. Другими словами, в (1.13) взаимодействие можно представить как сумму:

$$\frac{g}{2} \int_{\gamma} dt (\psi \psi^+)^2 = \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt (\psi_R \psi_R^+)^2 + \frac{g}{2} \int_{\infty}^{-\infty} dt (\psi_A \psi_A^+)^2 + \frac{g}{2} \int_0^{-i\beta} dt (\psi_T \psi_T^+)^2 \quad (1.21)$$

Вершине  $(\psi_i \psi_i^+)^2$  сопоставим

$$\begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{array} \quad (1.22)$$

Для упрощения счета устремим  $t_0 \rightarrow -\infty$  и  $t \rightarrow \infty$  на 1.1. Рассмотрим самую простую диаграмму, "ухо" :

$$\begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{array} \quad (1.23)$$

ей соответствует следующее аналитическое выражение:

$$-ig \int_{\mathbb{R}^d} dk n(\epsilon) \int_{\mathbb{R}} dt' e^{i\epsilon(t-t')} (\theta(t-t') + n(\epsilon)) e^{-i\epsilon(t'-t'')} (\theta(t'-t'') + n(\epsilon)) = \infty + O(t-t'') \quad (1.24)$$

Уже в этом выражении видно появление нетривиальной зависимости от входящих (выходящих) в диаграмму времен. Этого не возникает в стандартных полевых моделях. Тем не менее, именно для "уха" происходит сокращение этой особенности, в силу того, что кроме рассмотренной диаграммы, есть другая такая же, но с другой вершиной  $(\psi_A \psi_A^+)^2$ . Казалось бы, можно ожидать подобного сокращения во всех диаграммах, однако в других диаграммах этого сокращения не происходит.

Всего этого можно было бы избежать, если бы в исходных пропагаторах, было бы затухание. Возвратимся к нашему действию.

$$S = \int dx \int_{\gamma} dt \left( i\psi^+ \partial_t \psi - \psi^+ (-\Delta - \mu) \psi - \frac{g}{2} (\psi \psi^+)^2 \right)$$

Мы подразумеваем тут интегрирование по всему пространству. В силу того, что наша система обладает свойством трансляционной инвариантности, мы интегрируем по относительным расстояниям. Другими словами, проблемам с большими импульсами  $k$  в диаграммах, соответствуют проблемы с маленькими относительными расстояниями. И вполне понятно откуда берутся проблемы, мы не можем рассматривать слишком маленькие расстояния, потому что наши полевые модели справедливы только для не слишком высоких энергий. Вот почему, любая полевая модель требует УФ(ультрафиолетовой) регуляризации.

Для того, чтобы убедиться, что введение регуляризации дает нам затухание в пропагаторы, мы воспользуемся самым простым типом регуляризации – обрезанием по импульсу.

## 2. Формирования затухания.

В этой части полагаем размерность пространства  $d = 3$ . Основная цель: воспользовавшись  $\Lambda$  обрезанием обнаружить затухание в пропагаторах. С этой целью, мы разделим область импульсов  $k$  на мягкие и жесткие моды:

$$k = k_{<\Lambda} + k_{>\Lambda}$$

Регуляризатор  $\Lambda$  является условной точкой разделения мод. Далее всеми жесткими модами  $k_{>\Lambda}$  мы пренебрегаем и значит все наши интегралы в импульсном представлении будут обрезаны:

$$\int_{\mathbb{R}^3} dk \rightarrow \int_{|k|<\Lambda} dk$$

Теперь же мы хотим учесть поправки к затравочному пропагатору  $G_0$ . Для этого воспользуемся уравнением Дайсона:

$$G^{-1} = G_0^{-1} + \Sigma \quad (2.1)$$

Важно понимать, что данное уравнение является матричным, так как у нас имеется девять разных пропагаторов.  $\Sigma$  – оператор собственной энергии (также называемый массовым оператором). Именно он учитывает поправки, связанные с взаимодействием в нашей системе. Равенство нулю  $\det G^{-1} = 0$  в  $(k, \omega)$  представлении, по самому своему смыслу дает нам спектр возбуждения квазичастиц. Если мы обнаружим, что уравнение на  $\omega$  имеет комплексные корни, то это будет означать, что в нашей системе появилось затухание.

При такой регуляризации все "уши" дают некоторый постоянный вклад типа  $ig \cdot n_i$ ,  $i = R, A, T$ . Следующий порядок теории возмущения, порядка  $g^2$ , дается следующими диаграммами: "арбузы" и два "уха" . Из них интерес представляют

только ("арбузы" ):

$$(2.2)$$

так как две "петли"

$$(2.3)$$

разбиваются в произведение постоянных вкладов (независящих от  $\Lambda$ ). Так как нам важно лишь факт наличия комплексных  $\omega$ , а не их значение, то все интегралы мы будем грубо оценивать по  $\Lambda$ . Приведем вид уравнения (2.1) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} G_{RR} & G_{RA} & G_{RT} \\ G_{AR} & G_{AA} & G_{AT} \\ G_{TR} & G_{TA} & G_{TT} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & i\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma_{RR} & \Sigma_{RA} & \Sigma_{RT} \\ \Sigma_{AR} & \Sigma_{AA} & \Sigma_{AT} \\ \Sigma_{TR} & \Sigma_{TA} & \Sigma_{TT} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Вклады от "ушей" отброшены по сравнению с  $\Lambda$ . Теперь из каждой  $\Sigma_{ij}$  мы будем выделять наиболее существенные вклады по  $\Lambda$ . Начнем с  $\Sigma_{AR}$ :

$$\Sigma_{AR} = -g^2 \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{|k| < \Lambda} \int_{|q| < \Lambda} d^3k d^3q \int dt dt' e^{-i(k^2 + q^2 - (p-k-q)^2)(t-t')} \quad (2.5)$$

В результате Фурье преобразования по  $t, t'$  получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma_{AR} &= -g^2 \delta(\omega + \omega') \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{|k| < \Lambda} \int_{|q| < \Lambda} d^3k d^3q \delta(p^2 + 2(k, q - p) - \omega) = \\ &= -g^2 \delta(\omega + \omega') \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{|q| < \Lambda} d^3q \int_{|k| < \Lambda} dk_2 dk_3 \left( \frac{1}{q_1 - p_1} \right) = \delta(\omega + \omega') \frac{1}{2(2\pi)^6} \Lambda^4 \ln \Lambda \end{aligned} \quad (2.6)$$

Выражения для  $\Sigma_{TA}, \Sigma_{TR}$  совпадают за исключением следующего факта. Когда  $t \in C_i$ , на него наложены периодические граничные условия, т.е точки  $t_0 - i\beta$  и  $t_0$  сшиваются в одну. Поэтому вместо преобразования Фурье, делается разложение в ряд Фурье. Таким образом вычисление идентично (2.6), но перед ответом будет

стоять следующая сумма:

$$\delta(\omega + \omega_n) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{i\omega\beta}}{i\omega_n - \omega}, \quad (2.7)$$

где  $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$  – мацубаровские частоты. Можно показать, что этот множитель равен константе.  $\Sigma_{RA}$ ,  $\Sigma_{RT}$ ,  $\Sigma_{AT}$  не содержат расходящихся вкладов по  $\Lambda$ , обозначим их значения как  $B_{RA}$ ,  $B_{RT}$ ,  $B_{AT}$ .

Рассмотрим теперь  $\Sigma_{RR}$ :

$$\Sigma_{RR} = -g^2 \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{|k|<\Lambda} \int_{|q|<\Lambda} d^3k d^3q \int dt dt' e^{-i(q^2 + (p-k-q)^2 - k^2)(t-t')} \theta(t-t') n(\epsilon_q) \quad (2.8)$$

Делая Фурье преобразование по  $t, t'$  приходим к следующему выражению:

$$\Sigma_{RR} = -g^2 \delta(\omega + \omega') i \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{|k|<\Lambda} \int_{|q|<\Lambda} d^3q n(\epsilon_q) d^3k \frac{1}{p^2 + 2(p+q)k + 2k^2 - i0} \quad (2.9)$$

Переходя к сферическим координатам по  $k$  имеем:

$$\Sigma_{RR} = -g^2 \delta(\omega + \omega') i \frac{1}{(2\pi)^5} \int_{|q|<\Lambda} d^3q n(\epsilon_q) \int_0^\Lambda \frac{r}{2|p+q|} \ln \frac{2r^2 + p^2 + 2|p+q|r}{2r^2 + p^2 - 2|p+q|r} \quad (2.10)$$

При больших  $\Lambda$  данный интеграл ведет себя следующим образом:

$$\Sigma_{RR} = i(2\pi)^{-5} \Lambda \int_{|q|<\Lambda} n_q dq = i(2\pi)^{-5} \Lambda N(\beta), \quad (2.11)$$

где  $N(\beta)$  – число частиц при температуре  $\beta$ .  $\Sigma_{AA}$  – ведет себя по  $\Lambda$  абсолютно также.

А  $\Sigma_{TT}$ :

$$\Sigma_{TT} = i(2\pi)^{-5} \Lambda N(\beta) (1 - e^{-i(\omega_n + \omega_{n'})\beta}) \quad (2.12)$$

Подставляя все эти выражения в (2.4) мы получаем матрицы  $G$ . Спектр возбуждения квазичастиц дается нулем детерминанта  $G$ . Вычислив этот детерминант, выкидывая все несущественные по  $\Lambda$  вклады, мы получаем:

$$\omega = -i^{\frac{1}{3}} (B_{RT} \left(\frac{g}{4}\right)^4 (2\pi)^{-12} \Lambda^8 \ln \Lambda)^{\frac{1}{3}} \quad (2.13)$$

Итого три корня, лежащие в разных полуплоскостях  $\mathbb{C}$ . Это дает нам при обратном Фурье затухание в обе стороны по времени. Таким образом, мы убедились, что введение обрезания или, что тоже самое, регуляризация исходного действия приводит к появлению затухания в пропагаторах. Дальше можно было бы продолжать работать с действием, с  $\Lambda$  регуляризацией, однако мы этого делать не будем. Причина этого заключается в том, что в этом типе регуляризации ничего не удастся сосчитать явно, из-за конечных пределов интегрирования по импульсам. Поэтому вставим затухание в пропагаторы и перейдем к схеме размерной регуляризации.

## 3. ИК эффективная теория.

### 3.1 Критическое поведение.

В критической области  $k \rightarrow 0$ , кроме того хотим работать в безмассовой схеме, поэтому  $\mu \rightarrow 0$ . Химический потенциал играет роль "массы" в полевых науках. Таким образом наше действие запишется в следующем виде [10]:

$$S = \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\gamma} dt \left( i\psi^+ \partial_t \psi + \psi^+ \Delta \psi - \frac{g}{2} (\psi \psi^+)^2 \right) \quad (3.1)$$

По наивному размерному счету, вся динамика становится логарифмичной в шести-мерии, однако это не учитывает того факта, что на контуре Швингера-Келдыша 1.1 поля  $R$  и  $A$  отличаются только направлением движения по контуру. Для того чтобы это учесть была предложена [10] следующая удобная замена переменных:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_R + \psi_A) \\ \xi^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_R^+ + \psi_A^+) \\ \eta &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_R - \psi_A) \\ \eta^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_R^+ - \psi_A^+) \end{aligned} \quad (3.2)$$



Считая теперь новые пропагаторы полей  $\xi, \xi^+, \eta, \eta^+, \psi_T, \psi_T^+$  получаем:

$$\begin{aligned}
\langle \xi^+ \xi \rangle &= \frac{1}{2} e^{-i\epsilon(t-t')} (4n(\epsilon) + 2) \\
\langle \eta \eta^+ \rangle &= 0 \\
\langle \xi^+ \eta \rangle &= \theta(t-t') e^{-i\epsilon(t-t')} \\
\langle \eta^+ \xi \rangle &= -\theta(t'-t) e^{-i\epsilon(t-t')} \\
\langle \psi_T^+ \xi \rangle &= \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-i\epsilon(t-t')} n(\epsilon) \\
\langle \psi_T^+ \psi_T \rangle &= e^{-i\epsilon(t-t')} (\theta(t-t') + n(\epsilon))
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Все остальные возможные пропагаторы равны нулю. Эта удобная замена сделала нашу модель чем то похожей на модель  $A$  [8], но на этом ее достоинства не заканчиваются. Но прежде чем идти дальше, вставим затравочное затухание в наши пропагаторы, так как мы видели, что оно появляется при регуляризации. Так как затухание независящее от волнового числа  $k$  представляется нефизическим, то в качестве затухание будем использовать  $\delta = \alpha k^2 |t|, \alpha > 0$ . Вставляя это затухание во все пропагаторы кроме  $\langle \psi_T^+ \psi_T \rangle$ , ибо в нём время мнимое и всё хорошо затухает, получаем:

$$\begin{aligned}
\langle \xi^+ \xi \rangle &= \frac{1}{2} e^{-i\epsilon(t-t') - \alpha k^2 |t-t'|} (4n(\epsilon) + 2) \\
\langle \xi^+ \eta \rangle &= \theta(t-t') e^{-i\epsilon(t-t') - \alpha k^2 |t-t'|} \\
\langle \eta^+ \xi \rangle &= -\theta(t'-t) e^{-i\epsilon(t-t') - \alpha k^2 |t-t'|} \\
\langle \psi_T^+ \xi \rangle &= \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-i\epsilon(t-t') - \alpha k^2 |t'|} n(\epsilon) \\
\langle \psi_T^+ \psi_T \rangle &= e^{-i\epsilon(t-t')} (\theta(t-t') + n(\epsilon)) \\
\langle \eta \eta^+ \rangle &= 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Теперь заметим, что во всех пропагаторах  $t-t'$  представляло собой  $t-t_0 - (t'-t_0)$ , где  $t_0$  – начальная точка на 1.1. Поэтому  $\langle \psi_T^+ \xi \rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-i\epsilon(t-t') - \alpha k^2 |t'-t_0|} n(\epsilon)$ . Но мы устремили  $t_0 \rightarrow -\infty$ , вот почему это пропагатор вымирает, аналогичная ситуация с  $\langle \psi_T^+ \psi_T \rangle$ . Таким образом из всех пропагатор (3.3) выживают только первые три.

При  $k \rightarrow 0, n(\epsilon) \rightarrow \frac{1}{\beta k^2}$ , получаем наши пропагаторы в интересующей нас области:

$$\begin{aligned}
\langle \xi^+ \xi \rangle &= 2e^{-i\epsilon(t-t') - \alpha k^2 |t-t'|} \frac{1}{\beta k^2} \\
\langle \xi^+ \eta \rangle &= \theta(t-t') e^{-i\epsilon(t-t') - \alpha k^2 |t-t'|} \\
\langle \eta^+ \xi \rangle &= -\theta(t'-t) e^{-i\epsilon(t-t') - \alpha k^2 |t-t'|}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Изначально на контуре 1.1 у нас были хитрые граничные условия, но теперь мы можем обратить нашу матрицу из пропагаторов на классе убывающих функций и забыть про эти граничные условия. Более того нам больше не важен температурный хвост контура, в силу причин описанных выше. Обратив эту матрицу, мы получим действие, записанное в терминах новых полей  $\xi, \eta$ . Матрица затравочных пропагаторов  $G_0$ :

$$\begin{pmatrix} \langle \xi^+ \xi \rangle & \langle \eta^+ \xi \rangle \\ \langle \xi^+ \eta \rangle & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Обращать эту матрицу лучше всего перейдя в  $(k, \omega)$  представление. Опуская эти простые вычисления, мы получаем наше действие:

$$S = \eta \frac{4\alpha}{\beta} \eta^+ + \eta^+ (\partial_t + i\epsilon + \alpha\epsilon) \xi + \xi^+ (\partial_t + i\epsilon - \alpha\epsilon) \eta + g_1 \eta \xi \xi^+ \xi^+ + g_3 \xi \eta \eta^+ \eta^+ + c j \tag{3.7}$$

Проведя размерный счет, мы обнаруживаем, что  $d[\xi] = \frac{d}{2} - 1, d[\eta] = \frac{d}{2} + 1$ , где  $d[]$  – полная размерность [8]. Таким образом вершина типа  $\xi \eta \eta^+ \eta^+$  оказываются несущественными [8] в ИК области. Логарифмическая размерность равна 4, как это и бывает в обычных ренормируемых полевых моделях. Окончательное эффективное действие нашей модели есть:

$$S = \eta \frac{4\alpha}{\beta} \eta^+ + \eta^+ (\partial_t + i\epsilon + \alpha\epsilon) \xi + \xi^+ (\partial_t + i\epsilon - \alpha\epsilon) \eta + \frac{g_1}{2} \eta \xi \xi^+ \xi^+ + \frac{g_2}{2} \eta^+ \xi \xi \xi^+ + c c, \tag{3.8}$$

$ss$  – означает комплексно-сопряженные вклады. Введем следующие правила диаграммной техники:

$$\begin{aligned}
\langle \xi^+ \xi \rangle &= \text{---} \times \text{---} \\
\langle \xi^+ \eta \rangle &= \text{---} \times \text{---} \rightarrow \\
\langle \eta^+ \xi \rangle &= \text{---} \rightarrow \text{---} \times \\
\eta \xi \xi^+ \xi^+ &= \begin{array}{c} \times \quad \times \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \times \quad \times \end{array} \\
\eta^+ \xi \xi \xi^+ &= \begin{array}{c} \times \quad \times \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \times \quad \times \end{array}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Имея на руках действие, первое, что хотелось бы проверить, является ли оно мультипликативно-ренормируемым [8], другими словами, возможно ли при помощи растяжения полей и параметров убрать все УФ расходимости.

### 3.2 Ренормировка.

Оказывается, что для мультипликативной ренормируемости не хватает имеющихся параметров, поэтому приходится вводить новый непертурбативный заряд  $u$ . Ренормируемое действие может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned}
S = & Z_0 \eta \frac{4\alpha}{\beta} \eta^+ + \eta^+ (Z_1 \partial_t + (i\alpha u \epsilon + \alpha \epsilon) Z_2) \xi + \xi^+ (Z_3 \partial_t + Z_4 (i\alpha u \epsilon - \alpha \epsilon)) \eta + \\
& + Z_5 \frac{(16\pi^2 \alpha) g_1}{2} \eta \xi \xi^+ \xi^+ + Z_6 \frac{(16\pi^2 \alpha) g_2}{2} \eta^+ \xi \xi \xi^+
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Обозначим  $d - 4 = \epsilon$ , где  $d$  – размерность пространства. Константы перед зарядами  $g_1, g_2$  выбраны такими просто для удобства.  $Z_5, Z_6$  – даются диаграммами типа "рыба" [8]:

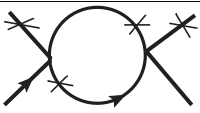





Номер	Симметричное число	Значение	$Z_5$	$Z_6$
	2	$\frac{-(16\pi^2)^2\alpha}{8(1-iu)\epsilon\beta\pi^2}$	1	0
	1	$\frac{(16\pi^2)^2\alpha}{8\epsilon\beta\pi^2}$	1	0
	2	$\frac{(16\pi^2)^2\alpha}{8\epsilon\beta\pi^2}$	0	1
	1	$-\frac{(16\pi^2)^2\alpha}{8\epsilon\beta\pi^2}$	1	0
	2	$\frac{(16\pi^2)^2\alpha}{8(1+iu)\epsilon\beta\pi^2}$	0	1
	1	$-\frac{(16\pi^2)^2\alpha}{8\beta\epsilon\pi^2}$	0	1

Таблица 3.1. "Рыбы"

Таблица содержит диаграмму, ее симметричное число, и то в какой из  $Z_5, Z_6$  она дает вклад. Заметим, что константы ренормировки комплексные величины. Примеры вычисления диаграммы типа "рыбы" будет приведено в приложении. Действие должно быть вещественным числом, то есть  $S = S^*$ , где  $*$  – комплексное сопряжение. Это приводит нас к тому, что наше действие обладает следующей симметрией:

$$\begin{aligned}
\eta &\rightarrow -\eta^+ \\
\xi &\rightarrow \xi^+ \\
Z_1^* &= Z_1 \\
Z_2 &= Z_4^* \\
Z_3 &= -Z_5^*
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Мы видим из (3.10), что заряды  $g_1$  и  $g_2$  ренормируются по-разному. Однако в начальном действии (1.13) был один заряд  $g$ , поэтому будем считать, что мы находимся на гиперповерхности в зарядовом пространстве  $g_1 = g_2^*$ , где  $*$  – сопряжение. Из (1.2) мы видим, что у нас остался калибровочный произвол связанный с собственными

функциями одночастичного гамильтониана. Поэтому за счет этого произвола положим  $\xi = \xi^+$ . Выражения для  $Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  даются диаграммами типа "арбуз" [8]. Однако они не все выражаются в элементарных функциях. В силу (3.11) достаточно вычислить  $Z_1, Z_2, Z_0$ :

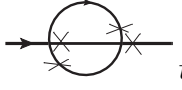
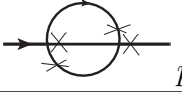
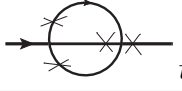
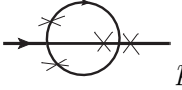
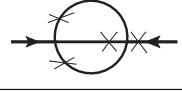
Номер	Симметричное число	Значение
 $t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{L_1(u)}{\epsilon}$
 $p$	$\frac{1}{2}$	$\frac{L_2(u)}{\epsilon}$
 $t$	1	$\frac{L_3(u)}{\epsilon}$
 $p$	1	$\frac{L_4(u)}{\epsilon}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{L_0(u)}{\epsilon}$

Таблица 3.2. "Арбузы"

$t, p$  означают взятие расходящихся частей соответствующих  $\partial_t$  и  $\Delta$  в действии. Функции  $L_1(u), L_2(u), L_0(u), L_4(u)$  даются следующими интегралами:

$$L_1(u) = \iiint_{[0,1] \times [0,1] \times [0,1]} dx_1 dx_2 dx_3 \frac{4x_3 \delta(1 - x_1 - x_2 - x_3)}{\beta^2 (4x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3 + 3x_3^2 - 2i u x_3^2 + u^2 x_3^2)^2} \quad (3.12)$$

$$L_3(u) = - \iiint_{[0,1] \times [0,1] \times [0,1]} dx_1 dx_2 dx_3 \frac{4x_3 \delta(1 - x_1 - x_2 - x_3)}{\beta^2 (4x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3 + 3x_3^2 - 2i u x_3^2 + u^2 x_3^2 - 4i u x_1 x_3)^2} \quad (3.13)$$

$$L_2(u) = - \frac{4(-i + u)}{\beta^2 (-3i + u)} \quad (3.14)$$

$$L_4 = - \frac{2i}{\beta^2 (i + u)^2 (-3i + u)} - \frac{8}{\beta^2 (-3 - 2iu - u^2) (-3 + 2iu - u^2)} \quad (3.15)$$

$$L_0(u) = \int_{[0,1]^4} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \frac{-\delta(1-x_1-x_2-x_3)64}{\beta^3(4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_1(x_2+x_3+x_4-ix_4) + x_4(4x_3 + (3-2iu+u^2)x_4))^2} \quad (3.16)$$

Интегрирование в  $L_1(u)$ ,  $L_3(u)$  ведется по единичному трехмерному кубу,  $L_0(u)$  по единичному четырехмерному кубу. Константы  $Z_i$  выражаются через константы полей и параметров следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_0 &= Z_\eta Z_{\eta^+} Z_\alpha \\ Z_1 &= Z_{\eta^+} Z_\xi \\ Z_3 &= Z_\xi Z_\eta \\ Z_5 &= Z_{g_1} \\ Z_6 &= Z_{g_2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Из-за симметрии в нашем действии эта система уравнений может быть разрешена относительно констант ренормировки полей и зарядов. Это доказывает мультипликативную ренормируемость нашей модели. Имея в виду, что  $Z_i = 1 + \tilde{Z}_i$  получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_\alpha &= \frac{1}{\alpha} \text{Re}(Z_2) + u \cdot \text{Im}(\tilde{Z}_1) - \text{Re}(\tilde{Z}_1) \\ \tilde{Z}_u &= \frac{1}{\alpha u} \text{Im}(Z_2) - Z_\alpha - \text{Re}(\tilde{Z}_1) - \frac{1}{u} \text{Im}(\tilde{Z}_1) \\ \tilde{Z}_\xi &= \frac{1}{2}(\tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_3 - \tilde{Z}_0) \\ \tilde{Z}_\eta &= \tilde{Z}_3 - \tilde{Z}_\xi \\ \tilde{Z}_{\eta^+} &= \tilde{Z}_1 - \tilde{Z}_\xi \\ Z_{g_1} &= Z_5 \\ Z_{g_2} &= Z_6 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Итого построена ИК-эффективная теория и доказана ее мультипликативная ренормируемость.

## 4. Заключение.

Мы рассмотрели формализм временных функций Грина при конечной температуре. Сам формализм не является новым и был предложен еще Келдышем в своей статье, однако в силу того, что получая пропагаторы (3.3) классики ссылались на феноменологические модели в критической динамике, формализм был забыт. Используя тот факт, что все полевые модели так или иначе являются эффективными, другими словами справедливыми вплоть до некоторых неслишком малых расстояний, мы регуляризовали нашу модель в духе преобразования Каданова. Мы увидели, что введенная регуляризация порождает затухание в пропагаторах в обе стороны по времени. Так как удобно работать в размерной регуляризации мы надлежащим образом ввели затухание в пропагаторы и это позволило восстановить по ним действие. Отметим, что матрица из пропагаторов (3.3) вырождена. Введение затухания снимает эту вырожденность и позволяет написать действие (3.7). Действие написанное в терминах полей  $\xi, \eta$  дает нам возможность применить стандартную технику УФ ренормировки. Однако для того, чтобы ренормировка была мультипликативной, потребовалось введение непертурбативного заряда  $u$  в действие. Таким образом, была проделана работа по подготовке к изучению РГ-уравнений и вычислению критических индексов данной модели.

## 5. Приложение.

Сосчитаем для начала диаграмму типа "рыба". Для конкретики возьмем следующую диаграмму:


(5.1)

Используя наши пропагаторы (3.5) мы получаем аналитическое выражение для данной диаграммы:

$$4 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}} dt \frac{1}{\beta k^2} e^{-i2\alpha u k^2 t - 2\alpha k^2 |t|} \theta(t) \quad (5.2)$$

Интеграл по времени берется явно ( $\alpha > 0, u > 0$ ):

$$- \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\alpha \beta k^4} \quad (5.3)$$

Данный интеграл в 4-мерном пространстве расходится логарифмически. Для того, чтобы выделить эту расходимость наделим нашу исходную модель массой. Другими словами:

$$\frac{1}{k^4} \rightarrow \frac{1}{k^2(k^2 + m)} \quad (5.4)$$

Тогда пользуясь формулой из [8], которая гласит:

$$(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} dk (k^2 + \tau)^{-\alpha} k^{-2\beta} = \tau^{d/2 - \alpha - \beta} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - \frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2} - \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\frac{d}{2})} \quad (5.5)$$

Получаем ответ, который раскладываем в ряд по  $d$  в окрестности 4.

$$\frac{(16\pi^2)^2 \alpha}{8\epsilon \beta \pi^2} \quad (5.6)$$



Сосчитаем теперь диаграмму типа "арбуз": К примеру:


(5.7)

Её аналитическое выражение:

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{dqdk}{(2\pi)^d} \frac{8}{q^2 k^2 (k+q)^2 \beta^3} \int_{\mathbb{R}} dt e^{(-k^2 + q^2 + (k+q)^2) i \alpha u t - \alpha (k^2 + q^2 + (k+q)^2) |t|} \quad (5.8)$$

За счет модуля, интеграл разбивается на сумму интегралов, рассмотрим лишь один интеграл, второй рассматривается также. Интегрирование по времени проводится явно:

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{dqdk}{(2\pi)^d} \frac{4}{\alpha \beta^3 q^2 k^2 (k+q)^2 (k^2 + kq + q^2 - ikqu - iq^2u)} \quad (5.9)$$

Используем параметризацию Фейнмана, а именно:

$$A_1^{-\lambda_1} \dots A_n^{-\lambda_n} = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^n \lambda_i)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\lambda_i)} \int_{[0,1]^n} dx_1 \dots dx_n \frac{\delta(\sum_{i=1}^n x_i - 1) \prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i - 1}}{(\sum_{i=1}^n (A_i x_i))^{\sum_{i=1}^n \lambda_i}} \quad (5.10)$$

Применяя эту параметризацию к нашему интегралу и затем собирая полный квадрат, например по  $k$  имеем:

$$\int_{[0,1]^4} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{dqdk}{(2\pi)^d} \frac{4 * 3! \delta(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1)}{\alpha \beta^3 (x_1 + x_3 + x_4)^4 (k^2 + \frac{q^2(x_2 + x_3 + x_4 - iux_4)}{x_1 + x_3 + x_4} - \frac{q^2(2x_3 + x_4 - iux_4)^2}{(x_1 + x_3 + x_4)^2})} \quad (5.11)$$

Дальше мы пользуемся формулой (5.5). К оставшемуся интегралу по  $q$ , который имеет форму  $\int dq q^{d-8}$  мы применяем трюк (5.4) и снова пользуемся (5.5). Окончательный ответ:

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{[0,1]^4} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \frac{-\delta(1 - x_1 - x_2 - x_3) 64}{\beta^3 (4x_2 x_3 + 4x_2 x_4 + 4x_1(x_2 + x_3 + x_4 - iux_4) + x_4(4x_3 + (3 - 2iu + u^2)x_4))^2} \quad (5.12)$$

# Литература

- [1] F. London (*reprinted New York: Dover 1964* Superfluids Vol.I and II
- [2] C. Pethick and H. Smith *Cambridge University Press, Cambridge, 2008* Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases
- [3] R. Folk and G. Moser, *J. Phys. A: Math. Gen.* 39, R207 (2006).
- [4] Cornish, S. L., Claussen, N. R., Roberts, J. L., Cornell, E. A., & Wieman, C. E. *Phys. Rev. Lett.* 85, 1795–1798 (2000). Stable 85Rb Bose-Einstein condensates with widely tunable interactions.
- [5] Jan Klaers, Julian Schmitt, Frank Vewinger, Martin Weitz *Nature*. — 2010. — Vol. 468. — P. 545–548. Bose-Einstein condensation of photons in an optical microcavity
- [6] C. F. Barenghi *Physica D* 237, 2195 (2008).
- [7] P. Hohenberg and B. Halperin *Rev. Mod. Phys.* 49, 435 (1977) *Physica D* 237, 2195 (2008).
- [8] A. N. Vasil'ev *Chapman & Hall/CRC Press, New York, 2004* The Field Theoretic Renormalization Group in Critical Behavior Theory and Stochastic Dynamics
- [9] M. Danco, M. Hnatic, M.V. Komarova, T. Lucivjanskiy and M.Yu. Nalimov *Phys. Rev. E* 93, 012109 (2016). Influence of hydrodynamic modes on phase transition into superfluid state and developed turbulence in the vicinity of the lambda point.
- [10] Keldysh L.V *JETP* 20,4 (1965) Diagram technique for nonequilibrium processes
- [11] Славнов А.А, Фаддеев Л.Д *Издательство "Наука"* Введение в квантовую теорию калибровочных полей.