

**Санкт-Петербургский государственный
университет**

**ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

**УЧЕТ АМПЛИТУДЫ АСИМПТОТИКИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА
В КОНФОРМ-БОРЕЛЕВСКОМ СУММИРОВАНИИ**

Вайнзихер Олег Борисович

Научный руководитель:

Профессор, д.ф.-м.н. Аджемян Лоран Цолакович

Заведующий кафедрой статистической физики:

Профессор, д.ф.-м.н. Щекин Александр Кимович

Рецензент:

Д.ф.-м.н. Компаниец Михаил Владимирович

Санкт-Петербург
2017

Содержание

1	Введение	2
2	Постановка задачи и стандартная процедура	3
3	Модификации стандартной процедуры	5
3.1	Добавления множителя с дробной степенью	5
3.2	Учет константного множителя в АВП	6
4	Практическая часть	7
4.1	Работа с известной функцией от g	7
4.2	Работа с более сложной функцией	16

1. Введение

В физических задачах решение часто представляется в виде степенного ряда. Часто ответом могут быть первые несколько коэффициентов этого ряда. Удовлетворительным решением является обычно сходящийся ряд. Некоторые задачи приводят к решениям в виде ряда с нулевым радиусом сходимости, например, ряда, члены которого факториально растут. Для получения информации из таких рядов были придуманы методы приближения сумм таких рядов. Существует метод, называемый Борелевским суммированием, в этом методе используется конформное отображение, и ряд, переписанный в терминах новой переменной, сходится. Метод не является строгим с математической точки зрения, но приводит к хорошей точности, если сверять результаты его действия с точно посчитанными величинами. В данной работе будет проделана проверка модификации известного метода, предложенная Казаковым Д.И.[3], заключающаяся в учете всей информации из ряда для аппроксимации его суммы.

2. Постановка задачи и стандартная процедура

На входе в нашу процедуру мы обычно имеем несколько первых коэффициентов степенного ряда и АВП (асимптотику высоких порядков) ряда. АВП - некое асимптотическое выражение для растущих коэффициентов ряда

$$A(g) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n g^n. \quad (1)$$

Ряд A является объектом рассмотрения. АВП будем приводить к единому виду, представленному ниже:

$$A_n \sim c(-a)^n n! n^{b_0} [1 + O(1/n)]. \quad (2)$$

Как мы можем видеть, коэффициенты таких рядов имеют факториальный множитель, который и делает их сильно растущими. Перепишем наш ряд в следующем виде, где $P_n = A_n/\Gamma(n + b + 1)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n g^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dx x^b P_n(gx)^n e^{-x}. \quad (3)$$

Далее, поменяем местами интегрирование и суммирование, хотя это не является математически корректным шагом. Теперь наш ряд принимает следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n g^n = \int_0^{\infty} dx \sum_{n=0}^{\infty} x^b P_n(gx)^n e^{-x}. \quad (4)$$

Ряд P_n сходится в круге радиуса $1/a$ в комплексной плоскости, что можно увидеть из принципа Д'Аламбера и вида АВП изначального ряда A . Таким образом, интегрировать сумму ряда от нуля до бесконечности нельзя. Чтобы избавиться от этой проблемы, введем конформную переменную $w(xg)$, которая переведет пределы интегрирования внутрь области сходимости. Обычно используют такое преобразование:

$$w(xg) = \frac{\sqrt{1 + axg} - 1}{\sqrt{1 + axg} + 1}, \quad \left(xg = \frac{4w}{a(1 - w)^2} \right). \quad (5)$$

В терминах такой переменной ноль по x перейдет в ноль, а бесконечность – в единицу. Таким образом, интегрирование теперь будет вестись от нуля до единицы. Заметим, что радиус сходимости ряда в терминах новой переменной равен также единице, так как точка ближайшей от нуля особенности, отстоявшая в терминах старой переменной от нуля на расстоянии $1/a$, теперь находится на расстоянии 1 от нуля. Теперь контур интегрирования лежит внутри области сходимости ряда, значит интеграл будет сходиться. Так как малым gx соответствуют малые w , ряду $P_n(xg)$ можно сопоставить новый ряд $B_n(w)$. Осталось найти коэффициенты этого нового ряда, для этого переразложим ряд P_n по переменной w . Обычно нам известны только несколько первых членов ряда P_n , поэтому для N известных коэффициентов переразложение выглядит так:

$$\sum_{n=0}^N P_n(gx)^n = \sum_{n=0}^N B_n w^n + O(w^{N+1}). \quad (6)$$

Исходя из этого разложения, можно найти формулу для коэффициентов B_n через коэффициенты изначального ряда A_n :

$$B_n = \sum_{m=1}^n \left(\frac{4}{a}\right)^m \frac{A_m \binom{n-m}{n+m-1}}{\Gamma(m+b+1)}. \quad (7)$$

Параметр b до сих пор был произвольным, но если провести более детальный анализ АВП коэффициентов B_n и A_n , можно увидеть, что для их соответствия должно выполняться равенство

$$b = b_0 + \frac{3}{2}. \quad (8)$$

Выбираем b при подсчете B_n таким образом, считаем N первых коэффициентов ряда и считаем сумму:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n g^n = \sum_{n=0}^N \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^b B_n (w(gx))^n. \quad (9)$$

Здесь N – количество коэффициентов изначального ряда A_n , которые нам даны в задаче. Таким образом мы посчитаем сумму, которая является пересуммированной суммой изначального ряда, такая процедура называется конформ-борелевским суммированием [4].

3. Модификации стандартной процедуры

3.1. Добавления множителя с дробной степенью

Существует улучшение стандартной процедуры, заключающееся в использовании не просто полинома от конформной переменной, а полинома, домноженного на какую-то дробную степень от аргумента $\frac{gx}{w(gx)}$. В таком случае мы имеем следующий вид преобразования:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n g^n = \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^b B(gx), \quad (10)$$

$$B(gx) = \left(\frac{gx}{w(gx)} \right)^{\nu} \sum_{n=0}^N B_n w(gx)^n. \quad (11)$$

Коэффициенты B_n являются решением системы уравнений, получающейся после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях g в левой и правой частях уравнения 10. Также теперь появляется дополнительный подгоночный параметр ν , который выбирают так, чтобы он соответствовал асимптотике суммы ряда $A(g)$ при $g \rightarrow \infty$. Таким образом, если $A(g) \sim g^{\alpha}$ при $g \rightarrow \infty$, мы берем $\nu = \alpha$. Мы редко знаем такую асимптотику для суммы ряда A , поэтому в случаях, когда мы не знаем ее, ν может быть любым, единственным критерием на правильность выбора ν будет являться сходимость процедуры. Мы получили еще один подгоночный параметр для нашей процедуры, позволяющий улучшить ее сходимость. Классическая процедура является частным случаем этой процедуры с $\nu = 0$. Если $\nu \neq 0$, преобразование выглядит следующим образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n g^n = \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^b \left(\left(\frac{gx}{w(gx)} \right)^{\nu} \sum_{n=0}^N B_n w(gx)^n \right). \quad (12)$$

Выбор диапазона рассматриваемых ν не является случайным, ν подбирается близким к фундаментальному ν , которое равно показателю в асимптотике пересуммируемой функции по g . Гипотеза для проверки состоит в том, что именно фундаментальное ν будет самым стабильным с точки зрения сходимости процедуры. В практической части работы я попробую использовать разные ν для выяснения целесообразности их использования.

3.2. Учет константного множителя в АВП

В данной работе будет проверена модификация, предложенная Казаковым Д.И., заключающаяся в учете константы АВП изначального ряда c . Если рассмотреть асимптотику коэффициентов начального ряда по g и асимптотику коэффициентов получившегося ряда по g , можно увидеть, что для выполнения полного равенства асимптотик должно выполняться равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} [-B_1 + 2B_2 - \dots + (-1)^N N B_N] = c. \quad (13)$$

При получении наших B_n мы не имели этого равенства в виду, а значит те коэффициенты, которые были получены, не обязаны удовлетворять этому равенству. Чтобы ему удовлетворить, добавим еще один член ряда B_{N+1} специально таким образом, чтобы равенство стало верным. Для этого положим

$$B_{N+1} = \frac{(-1)^{N+1}}{N+1} [c\sqrt{\pi} + B_1 - 2B_2 + \dots + (-1)^N N B_N]. \quad (14)$$

Выбрав B_{N+1} таким образом, наш новый ряд является полностью совпадающим с АВП изначального ряда, а также с его первыми коэффициентами, известными нам по условию. Эта модификация не была проверена ранее, и одной из целей моей работы является проверка этой модификации и ответ на вопрос, улучшает ли она сходимость. В практической части будет проведена проверка и представлены графики, подтверждающие целесообразность введения нового члена в ряд и его учета при подсчете суммы 13.

В случае $\nu \neq 0$, формула 13 обобщается с использованием метода стационарной фазы до следующей:

$$\frac{1}{a^\nu \sqrt{\pi}} \left[\sum_{k=0}^{k=N} (-1)^k B_k (k - \nu) \right] = c. \quad (15)$$

Эту формулу можно использовать для подгона амплитуды при разных ν , следует отметить, что теперь нулевой элемент ряда B тоже необходимо учитывать, ведь при нем стоит ненулевой множитель.

4. Практическая часть

4.1. Работа с известной функцией от g

Для примера я рассматривал конкретную функцию $f(g)$, которая раскладывается в ряд, имеющий АВП вида (2):

$$f(g) = \int_0^{\infty} e^{-x^2 - gx^4} dx. \quad (16)$$

Эта функция легко раскладывается в ряд около нуля. Перепишем ее в таком виде:

$$f(g) = \int_0^{\infty} dx e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-gx^4)^n. \quad (17)$$

Далее для каждой степени g считаем интеграл вида $\int_0^{\infty} dx e^{-x^2} (-x)^{4n}$ и получаем коэффициенты ряда A_n . В результате получаем следующее разложение функции f :

$$f(g) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n g^n, \quad A_n = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} (4n-1)!}{n! 2^{4n} (2n-1)!} \quad (18)$$

Члены ряда A_n будут иметь АВП нужного нам вида, если преобразовать их, считая n большим. В таком случае можно воспользоваться формулой Стирлинга для факториалов и после простых алгебраических преобразований получить асимптотику:

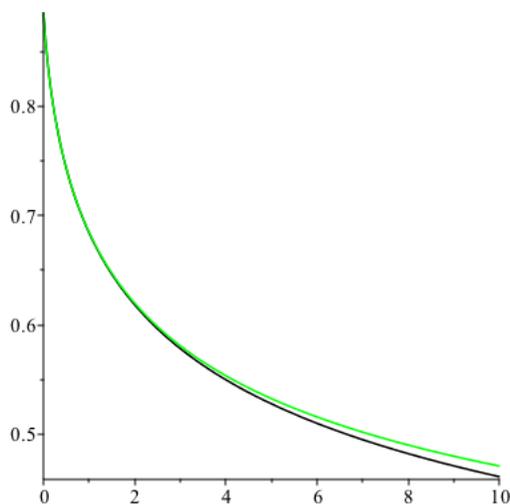
$$A_n \sim \frac{n! n^{-1} (-4)^n (1 + O(1/n))}{2\sqrt{2\pi}}. \quad (19)$$

Сравнивая получившееся выражение с (2), можно получить значения для констант a , b и c , нужных для проведения процедуры Борелевского суммирования. В данном случае

$$\begin{aligned} a &= 4, \\ b &= 0.5, \\ c &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}. \end{aligned} \quad (20)$$

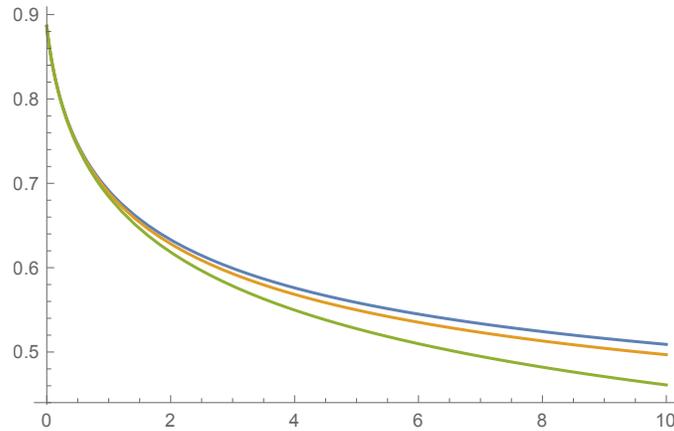
Далее, проделывая описанную в разделе (2) работу, мы можем оценить исследуемый метод в его самом простом варианте. На картинке

ниже изображены графики функции f (черным цветом) и суммы для Борелевской аппроксимации с $\nu = 0$ и пятью известными членами разложения (зеленым цветом).



Как мы можем видеть, даже в своем самом простом варианте метод работает неплохо, расхождения самой функции и приближения становятся значительными только на больших значениях g , что объяснимо тем, что в основе метода лежит разложение функции в ряд около нуля.

Дальше было бы интересно посмотреть, как учет амплитуды, описанный в (3.2), изменит пересуммирование такой простой функции в самом простом варианте. Поскольку при учете большого числа членов изначального ряда процедура работает все лучше и лучше, интереснее всего было увидеть, помогает ли учет амплитуды в случае малого количества известных членов. Ниже картинка, где изображены графики самой функции (зеленым), ее простого пересуммирования для двух известных членов ряда (синим), и такого же пересуммирования с учетом амплитуды (оранжевым).

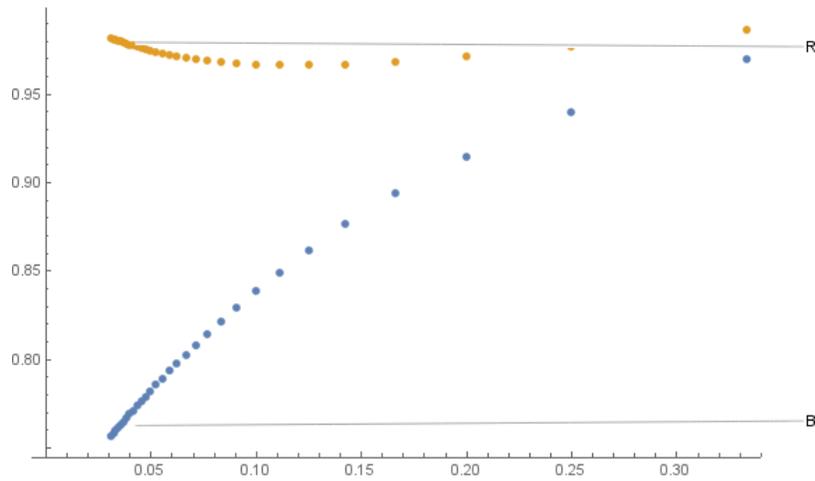


Из графика видно, что учет амплитуды позволяет улучшить приближение, и довольно ощутимо, это также так для любого количества учтенных членов изначального ряда от одного до десяти.

В таком простом случае имеется возможность проверять эффективность пересуммирования таким простым образом, просто сравнивая функцию, а точнее – ее график на каком-то диапазоне с графиком пересуммирования. В случаях более сложных, когда сама функция неизвестна, критериями качества пересуммирования являются другие параметры. Первый их них – это то, насколько хорошо пересуммированная функция предсказывает коэффициенты членов разложения, следующих за известными[2]. Этот критерий очевидно можно использовать также в случае, когда сама функция не известна, для этого можно взять в расчет не все известные члены разложения и посмотреть насколько хорошо они предсказывают следующие.

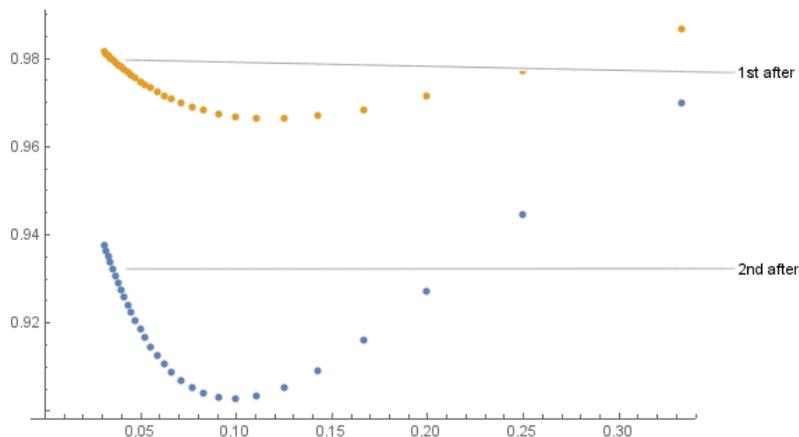
На всех графиках ниже по оси абсцисс отложены числа, обратные номеру коэффициента по g , по оси ординат отложены значения коэффициентов разложения по g для разных пересуммирований, нормированные на значения правильных коэффициентов функции f .

Снизу график для пересуммирования при двух известных коэффициентах для 30 точек. График B для пересуммирования без учета амплитуды, график R – с учетом амплитуды.

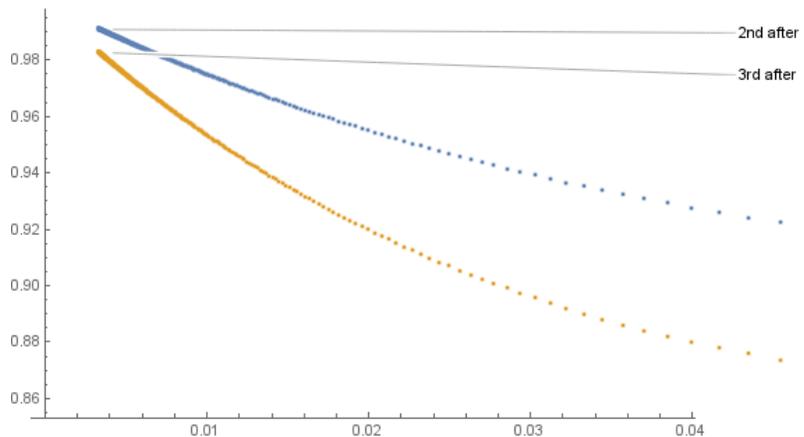


Можно видеть, что без учета амплитуды с ростом номера коэффициента отношение значения коэффициента к правильному падает, все дальше уходя от единицы, соответственно предсказание коэффициентов становится хуже, что говорит о меньшей стабильности метода, нежели в случае, когда мы учитываем амплитуду. Учет амплитуды позволяет сделать так, что значения коэффициентов с увеличением номера стремятся к правильным.

Интересно было посмотреть, станет ли с рассматриваемой точки зрения, метод более стабильным, если ответственность за подгон амплитуды положить не на следующий за известными, а на еще более дальний коэффициент. Ниже график, на котором изображены данные для пересуммирования, где подгон происходит по следующему после известных коэффициенту, и где подгон происходит по второму после известных коэффициентов.



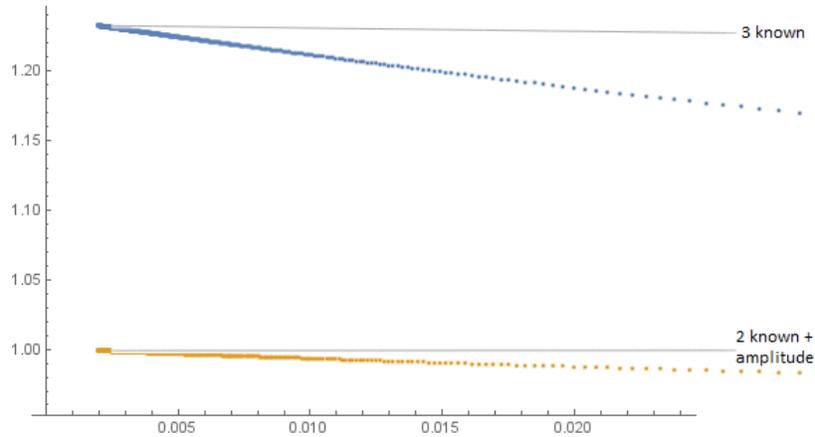
По этому графику видно, что брать первый за известными коэффициент выглядит более стабильным методом. Ниже изображен график, где я брал пересуммирование, где брался второй после известных коэффициент и третий:



Отсюда видно, что когда мы берем третий, результат становится еще хуже, в связи с чем можно сделать вывод, что переключивание ответственности с первого за известными коэффициента на более далекие не оправданно с точки зрения стабильности пересуммирования.

Вот еще интересный факт – с рассматриваемой точки зрения пересуммирование для двух известных членов с учетом амплитуды является более стабильным, чем пересуммирование для трех известных членов без учета амплитуды. Снизу график для трех известных членов,

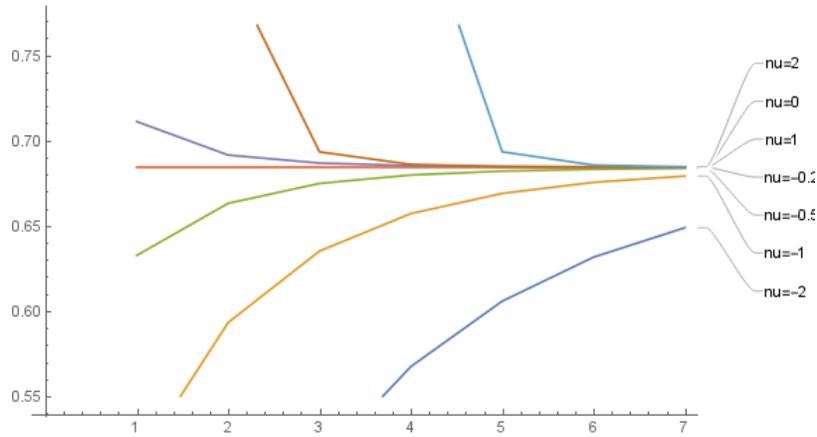
но без учета амплитуды, а также график для двух известных членов, но с учетом амплитуды, с большим количеством точек.



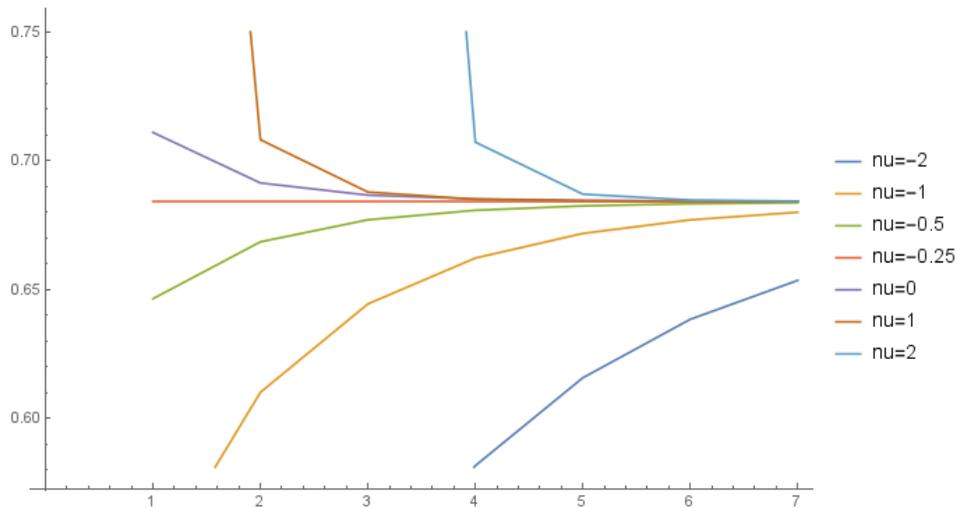
Можно видеть, что на всем рассмотренном диапазоне вариант с учетом амплитуды лучше предсказывает значения коэффициентов.

Из этих картинок можно сделать вывод, что, если считать предсказание коэффициентов членов ряда по g важным показателем стабильности метода пересуммирования, учет амплитуды является сильным улучшением, позволяющим, даже имея меньше информации об исходной функции, показывать лучший результат. Более того, только учет амплитуды делает так, что коэффициенты стремятся к правильным.

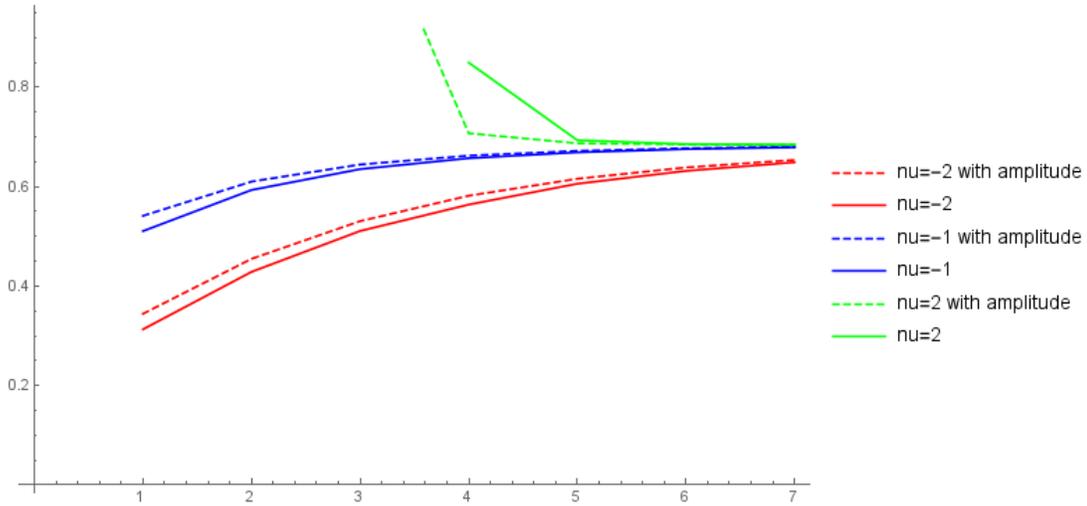
Также критерием может являться сходимость процедуры с ростом числа учтенных членов исходного разложения, хорошее в таком смысле пересуммирование все меньше меняется с ростом числа учтенных членов[1]. С этого момента перейдем к рассмотрению пересуммирования с $\nu \neq 0$. Ниже изображены значения функции f в точке $g = 1$ для разных ni пока без учета амплитуды:



На этом рисунке видно, что существует ν , для которого пересуммирование вырождается, это и есть то самое фундаментальное ν для этой функции, о существовании которого я писал в 3.1. Для этого ν пересуммирование даже с учетом только нулевого члена уже дает функцию, тождественно равную f , это является следствием простоты функции f . Доказать, что $\nu = -\frac{1}{4}$ является показателем асимптотики по g функции f очень легко. Для этого сделаем замену $x = g^{-\frac{1}{4}}y$, тогда $f = \int_0^\infty e^{-x^2-gx^4} dx \sim \int_0^\infty e^{-y^4} g^{-\frac{1}{4}} dy \sim g^{-\frac{1}{4}} * const$. В процедуру для каждого из соответствующих ν добавляем учет амплитуды и получаем картинку ниже:

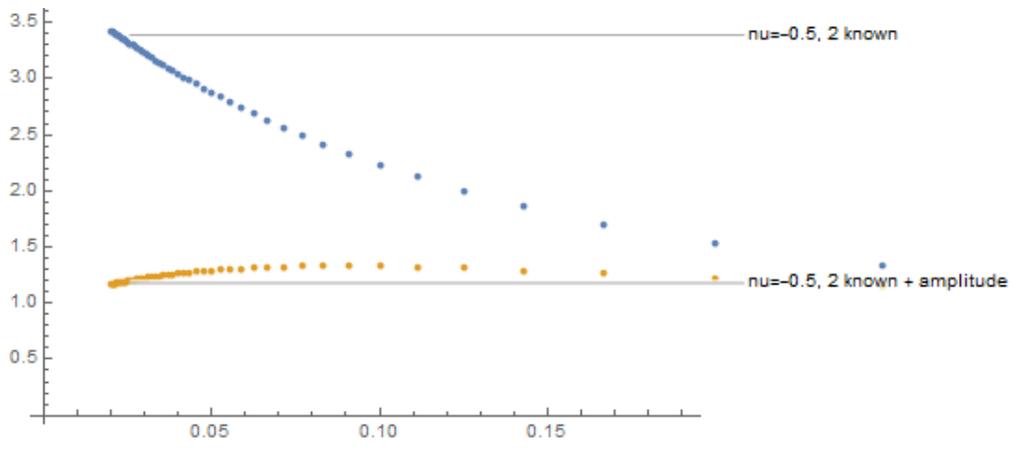


Картинка улучшилась с точки зрения сходимости, особенно для ν , далеких от оптимального. Это можно увидеть особенно хорошо на следующей картинке :



Выводом из этих иллюстраций может служить тот факт, что учет амплитуды позволяет процедуре пересуммирования стать лучше с точки зрения сходимости в довольно широком диапазоне ν . Также гипотеза о том, что фундаментальное ν является оптимальным с точки зрения сходимости процедуры, здесь ярко подтверждается, но это связано прежде всего с простотой функции f .

Также интересно было посмотреть, насколько хорошо работает пересуммирование с амплитудой и без с точки зрения предсказания дальнейших коэффициентов для ν , отличных от нуля. Здесь, как оказалось амплитуда тоже всегда помогает улучшить процедуру для всех без исключения ν , но чем ближе ν к оптимальному, тем лучше предсказание сходится к единице при росте номера коэффициента. Ниже иллюстрация для $\nu = -0.5$, на которой график для суммирования с амплитудой (оранжевый) наглядно загибается к единице, а график для суммирования без амплитуды уходит все дальше от единицы, а значит все хуже предсказывает коэффициенты с ростом их номера:



4.2. Работа с более сложной функцией

Функция, анализ которой производился в предыдущей главе, была слишком простой, настолько, что существовало ν , которое позволяло пересуммированию тождественно совпасть с оригинальной функцией. В связи с этим критерии качества пересуммирования имеет смысл проверить на еще одной функции. Для анализа была выбрана функция

$$f = \frac{\int_0^\infty x^2 e^{-x^2 - gx^4} dx}{\int_0^\infty e^{-x^2 - gx^4} dx}. \quad (21)$$

Для того, чтобы начать пересуммирование, нужно узнать первые несколько членов разложения этой функции, а также узнать ее асимптотику высоких порядков. Сначала найдем первые члены разложения, для этого разложим в ряд отдельно числитель и знаменатель:

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} f_k g^k = \frac{\sum_{k=0}^{k=\infty} a_k g^k}{\sum_{k=0}^{k=\infty} b_k g^k}. \quad (22)$$

Из этого равенства можно составить рекуррентную систему уравнений, домножая обе части на знаменатель и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях g :

$$\begin{aligned} f_0 b_0 &= a_0 \\ f_1 b_0 + f_0 b_1 &= a_1 \\ &\dots \\ &\dots \\ \sum_{k=0}^{k=n} f_k b_{n-k} &= a_n \end{aligned} \quad (23)$$

Чтобы решить эту систему для какого-то n , нужно знать коэффициенты a и b . Коэффициенты b мы знаем из предыдущего раздела, коэффициенты a можно посчитать также, методом взятия производной по параметру, окажется, что $a_k = b_k(4n + 1)/2$. Теперь нужно посчитать АВП для функции f , для этого воспользуемся неким продолжением системы (23) на бесконечность и получим последнее уравнение такого вида

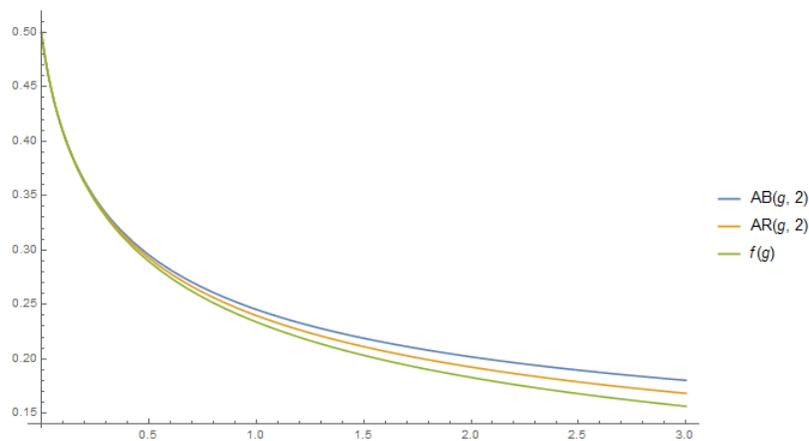
$$f_\infty b_0 + b_\infty f_0 = a_\infty \quad (24)$$

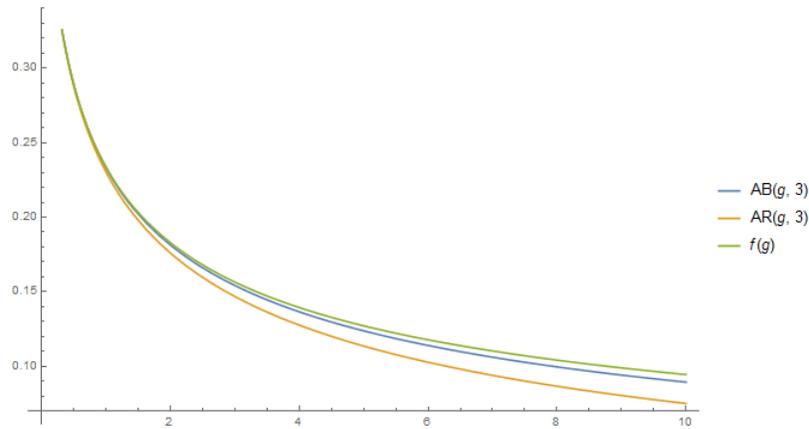
, где $f_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. АВП функции b известна из предыдущего раздела, а для АВП функции a мы знаем, что $a_\infty = \frac{(4n+1)*b_\infty}{2} \Rightarrow a_\infty = 2n * b_\infty$.

Поскольку АВП для числителя сильнее АВП для знаменателя, то вторым слагаемым в (24) можно пренебречь и $f_\infty = a_\infty/b_0$, отсюда получаем нужные нам коэффициенты для АВП функции f :

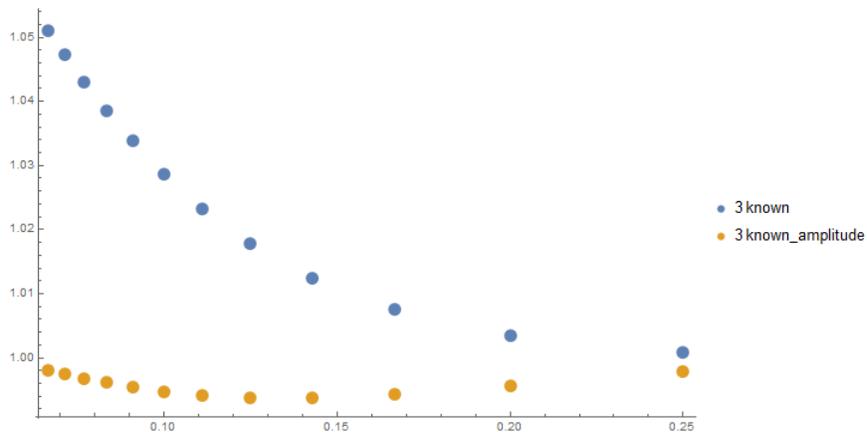
$$\begin{aligned} a &= 4 \\ b_0 &= 0 \\ b &= 3/2 \\ c &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \end{aligned} \tag{25}$$

С этого момента все, что нужно знать для проведения процедуры пересуммирования, известно. Пойдем по тому же порядку, для начала построим график самой функции, а также ее самого простого пересуммирования, а также пересуммирования с учетом амплитуды для $\nu = 0$. Построение таких графиков для разного количества учтенных членов изначального ряда привело к противоречивым результатам. Учет амплитуды не всегда был полезен, точнее он был полезен только для пересуммирования с четным количеством учтенных членов изначального ряда, для случаев с нечетным количеством учтенных членов учет амплитуды делает пересуммирование только хуже. Снизу две картинки для двух и для трех членов изначального ряда соответственно. AR – пересуммирование с амплитудой, AB – пересуммирование без амплитуды, f – сама функция.





На графике для двух известных членов пересуммирование с учетом амплитуды работает лучше обычного, на графике для трех наоборот. Такой же результат получается для всех нечетных графиков. Этот результат объясняется знакопеременностью ряда, в случае которой возможны такие колебания. Тем не менее с точки зрения предсказания дальнейших коэффициентов разложения пересуммирование с амплитудой работает лучше для любого числа учтенных коэффициентов, как для четного, так и для нечетного. Снизу приведена иллюстрация для трех известных членов разложения.

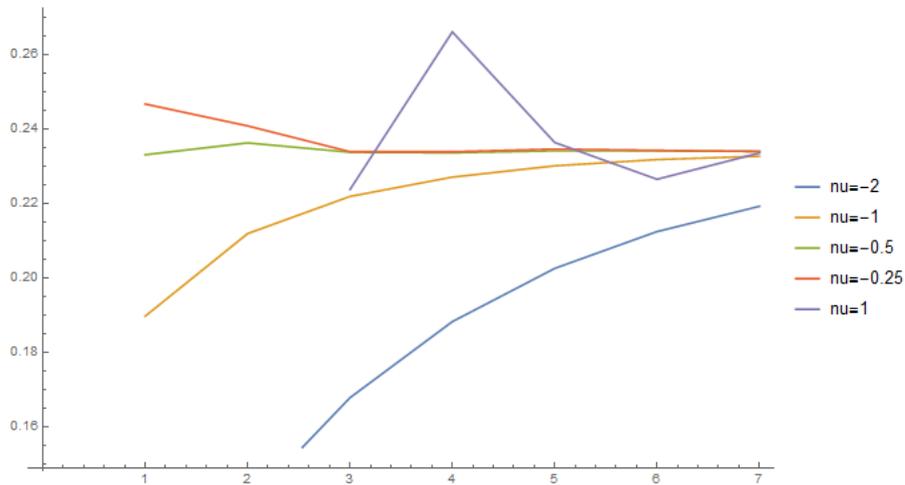


Как можно видеть, учет амплитуды позволяет получить качественно более хорошее предсказание следующих коэффициентов, несмотря на то, что с предыдущей точки зрения учет амплитуды не был оправ-

дан. Это позволяет надеяться на то, что отрицательный эффект от амплитуды при попытке построить графики для трех известных членов является спецификой рассматриваемой функции.

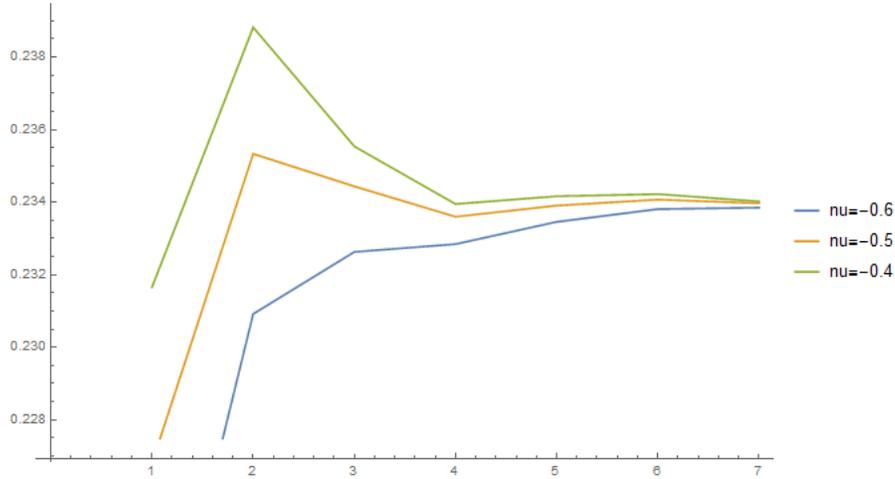
Прежде чем рассматривать пересуммирование с ν , надо понять, какое ν является фундаментальным. Для этого посчитаем асимптотику по g числителя дроби: $\lim_{g \rightarrow \infty} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2 - gx^4} dx = \int_0^\infty x^2 e^{gx^4} dx = \int_0^\infty y^2 g^{-0.5} e^{-y^4} g^{-0.25} dy = const * g^{-0.75}$. Поделим эту асимптотику на асимптотику знаменателя, которую мы знали ранее и получим фундаментальное ν для функции f , равное -0.5 .

Для довольно широкого диапазона ν были проведены пересуммирования с учетом амплитуды и без. С точки зрения сходимости процедуры $\nu = -0.5$ было самым лучшим из рассмотренных. Ниже график значений пересуммирования для разных ν в точке $g = 1$ с учетом амплитуды.

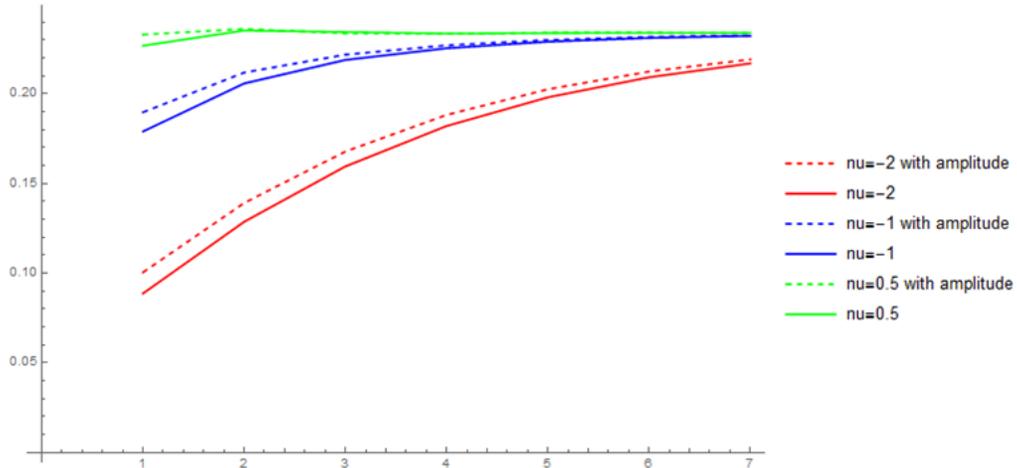


Можно видеть, что для $\nu = 1$ существует некое колебание вверх вниз, это нормальный эффект, который наблюдается при суммировании функций со знакопеременным рядом Тейлора. Также важным выводом является то, что использование фундаментального ν , хоть и позволяет довольно хорошо приблизить функцию, все-таки не позволяет получить тождественно равную, значит функция, взятая для исследования, достаточно сложная. Для более глубокой проверки гипотезы о том, что фундаментальное ν дает наилучшую сходимость процедуры, была построена аналогичная иллюстрация только для ν , близких к фундаментальному. Ниже приведена соответствующая картинка, пе-

ресуммирование делалось без учета амплитуды.



При $\nu = -0.5$ сходимость наилучшая, значит гипотезу о лучшей сходимости для фундаментального ν можно подтвердить уже для второй функции. Остался вопрос о том, насколько учет амплитуды помогает улучшить сходимость процедуры. На графике ниже для некоторых ν сделано пересуммирование с амплитудой и без:



Видно, что пунктирные линии (отвечающие пересуммированиям с учетом амплитуды) более горизонтальные, значит с точки зрения схо-

димости процедуры пересуммирование с учетом амплитуды лучше, и учет амплитуды с этой точки зрения оправдан.

С точки зрения предсказания коэффициентов для пересуммирования с $\nu \neq 0$ учет амплитуды также оказался оправданным, для всех рассмотренных ν . Для хороших ν учет амплитуды улучшал предсказание и делал его четко направленным к единице, для плохих учет амплитуды делал предсказание из очень плохого немного лучшим. Ниже приведена иллюстрация для предсказания коэффициентов для пересуммирования с $\nu = -0.25$.

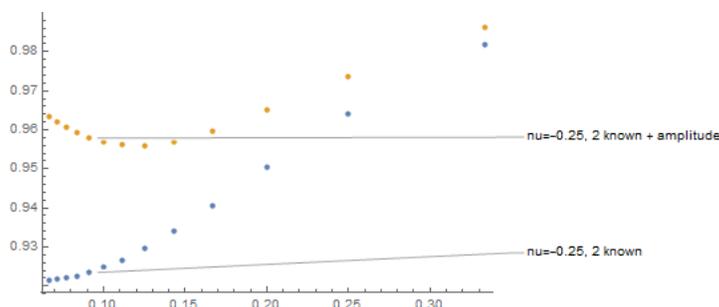


График для пересуммирования с амплитудой явно загибается к единице, в то время как график обычного пересуммирования только падает с ростом номера коэффициента все дальше от единицы.

Исследование данной функции позволило еще раз убедиться в верности гипотезы о том, что в качестве ν лучше всего выбирать фундаментальное ν , а также позволило еще раз увидеть, как учет амплитуды позволяет сделать процедуру более стабильной и сходящейся, несмотря на то, что с некоторой точки зрения для нечетного количества учтенных членов учет амплитуды может только портить ситуацию.

Заключение

В работе были исследованы классические методы пересуммирования функций с известным началом ряда Тейлора и асимптотикой высоких порядков методом конформного отображения Бореля. Также было исследовано влияние учета амплитуды АВП на качество пересуммирования с разных точек зрения: приближение известной функции построением графика для конкретного числа известных членов изначального ряда, предсказание дальнейших коэффициентов пересуммированной функцией, сходимость процедуры при росте числа учтенных коэффициентов. В результате удалось выяснить, что учет амплитуды крайне оправдан, особенно с точки зрения предсказания дальнейших коэффициентов. Также была проверена гипотеза о том, что фундаментальное ν (отвечающее асимптотике самой функции по аргументу) является лучшим выбором для пересуммирования с точки зрения сходимости процедуры.

Список литературы

- [1] M.V.Kompaniets. Prediction of the higher-order terms based on Borel resummation with conformal mapping. — 2016.
- [2] M.V.Kompaniets, Panzer Eric. Minimally subtracted six-loop renormalization of $O(n)$ -symmetric ϕ^4 theory and critical exponents. — 2017.
- [3] Казаков Д.И., Тарасов О.В., Ширков Д.В. Аналитическое продолжение результатов теории возмущений модели $g\phi^4$ в область $g \geq 1$. — Теоретическая и математическая физика, том 38, №1, 1979.
- [4] Налимов М.Ю., Новожилова Т.Ю. Асимптотики высоких порядков квантово-полевых разложений и пересуммирование по Борелю асимптотических рядов.